



UFOP

Universidade Federal
de Ouro Preto

**Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Computação e Sistemas**

**Dinâmica não-comutativa em sistemas
de múltiplos qubits: uma abordagem
via cognição quântica para modelagem
de decisões**

Melissa Muniz Miranda de Souza

**TRABALHO DE
CONCLUSÃO DE CURSO**

ORIENTAÇÃO:
Dr. Ronan Silva Ferreira

**Julho, 2026
João Monlevade—MG**

Melissa Muniz Miranda de Souza

Dinâmica não-comutativa em sistemas de múltiplos qubits: uma abordagem via cognição quântica para modelagem de decisões

Orientador: Dr. Ronan Silva Ferreira

Monografia apresentada ao curso de Engenharia de Computação do Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas, da Universidade Federal de Ouro Preto, como requisito parcial para aprovação na Disciplina “Trabalho de Conclusão de Curso II”.

Universidade Federal de Ouro Preto

João Monlevade

Julho de 2026

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

S729d Souza, Melissa Muniz Miranda de.

Dinâmica não-comutativa em sistemas de múltiplos qubits
[manuscrito]: uma abordagem via cognição quântica para modelagem de
decisões. / Melissa Muniz Miranda de Souza. . - 2026.

51 f.: il.: color., tab.. + Equações.

Orientador: Prof. Dr. Ronan Silva Ferreira.

Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Graduação em Engenharia de
Computação .

1. Computação quântica. 2. Espaço de Hilbert. 3. Inteligência
artificial. 4. Processo decisório - Modelos matemáticos. 5. Psicologia
cognitiva. 6. Qubits. 7. Teoria quântica. I. , . II. Ferreira, Ronan Silva. III.
Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 530.145:519.816

Bibliotecário(a) Responsável: Flavia Reis - CRB6/2431



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E APLICADAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E APLICADAS



FOLHA DE APROVAÇÃO

Melissa Muniz Miranda de Souza

Dinâmica não-comutativa em sistemas de múltiplos qubits: uma abordagem via cognição quântica para modelagem de decisões

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia de Computação da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Computação

Aprovada em 20 de Julho de 2026

Membros da banca

Dr. Ronan Silva Ferreira - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)
Dr. Gilda Aparecida de Assis (Universidade Federal de Ouro Preto)
Dr. Glauco Ferreira Gazel Yared - (Universidade Federal de Ouro Preto)

Ronan Silva Ferreira, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 06/10/2026



Documento assinado eletronicamente por **Ronan Silva Ferreira, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 15/10/2026, às 10:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1208794** e o código CRC **B3E39A07**.

Este trabalho é dedicado aos meus pais, que são meu porto seguro.

Agradecimentos

Agradeço meus pais que sempre me apoiaram, aos professores que me guiaram durante a trajetória e aos amigos que caminharam junto.

“Ao vencedor, as batatas.”

— Machado de Assis (1839 – 1908),
in: Quincas Borba.

Resumo

Este trabalho investiga a dinâmica não-comutativa em sistemas de múltiplos qubits, utilizando os fundamentos matemáticos da Teoria da Cognição Quântica para a modelagem de processos decisórios. A pesquisa parte da propriedade de não-comutatividade dos operadores de projeção, segundo a qual diferentes sequências de avaliações podem produzir estados e probabilidades distintas, estabelecendo uma relação matemática com o Efeito de Ordem observado em processos de julgamento humano. A metodologia adota uma abordagem analítico-dedutiva baseada em espaços complexos de Hilbert e na expansão, por meio do produto tensorial, de operadores de projeção para sistemas de dois qubits. São analisados sistemas compostos em estados separáveis e emaranhados, comparando-se os resultados obtidos a partir de diferentes sequências de aplicação dos operadores. A análise algébrica e as simulações computacionais realizadas nos ecossistemas IBM Qiskit e Google Cirq demonstram que a inversão da ordem das operações modifica as probabilidades de transição do sistema. Os resultados evidenciam o potencial do formalismo não-comutativo para representar processos decisórios sensíveis ao contexto e à ordem das avaliações, contribuindo para futuras investigações em modelos computacionais e Inteligência Artificial.

Palavras-chave: Cognição quântica. Sistemas de múltiplos qubits. Não-comutatividade. Efeito de ordem. Modelagem de decisões.

Abstract

This work investigates non-commutative dynamics in multi-qubit systems, using the mathematical foundations of Quantum Cognition Theory to model decision-making processes. The research is based on the non-commutativity of projection operators, according to which different sequences of evaluations can produce distinct states and probabilities, establishing a mathematical relationship with the Order Effect observed in human judgment processes. The methodology adopts an analytical-deductive approach based on complex Hilbert spaces and the expansion, through the tensor product, of projection operators for two-qubit systems. Composite systems in separable and entangled states are analyzed by comparing the results obtained from different sequences of operator applications. The algebraic analysis and computational simulations performed using the IBM Qiskit and Google Cirq ecosystems demonstrate that reversing the order of operations changes the transition probabilities of the system. The results highlight the potential of the non-commutative formalism to represent context- and order-sensitive decision-making processes, contributing to future investigations into computational models and Artificial Intelligence.

Keywords: Quantum cognition. Multi-qubit systems. Non-commutativity. Order effect. Decision modeling.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Interface do IBM Quantum Composer demonstrando o mapeamento das portas Hadamard e CNOT utilizadas para a formulação inseparável do Estado de Bell.	40
Figura 2 – Representação topológica do circuito quântico gerada via terminal pelo <i>framework</i> IBM Qiskit, demonstrando a aplicação da porta Hadamard seguida da operação CNOT.	41
Figura 3 – Distribuição probabilística do sistema emaranhado obtida pelo emulador <i>Aer</i> da IBM. A ocorrência concentrada nos extremos atesta a não-localidade das variáveis modeladas.	41
Figura 4 – Histograma de validação gerado pelo simulador vetorial do Google Cirq. A consistência dos dados corrobora a reprodutibilidade do emaranhamento de forma agnóstica à tecnologia subjacente.	42

Lista de tabelas

Tabela 1 – Comparativo das ferramentas de simulação quântica.	39
---	----

Lista de abreviaturas e siglas

IAQ Inteligência Artificial Quântica

IA Inteligência Artificial

QML Aprendizado de Máquina Quântico (*Quantum Machine Learning*)

Lista de símbolos

ψ	Letra grega minúscula psi (Estado quântico/ket)
Ψ	Letra grega maiúscula Psi (Estado global/sistema composto)
ϕ	Letra grega minúscula fi (Estado cognitivo)
Φ	Letra grega maiúscula Phi (Estado de Bell)
α	Letra grega minúscula alfa (Amplitude de probabilidade)
β	Letra grega minúscula beta (Amplitude de probabilidade)
γ	Letra grega minúscula gama (Coeficiente em estados separáveis)
δ	Letra grega minúscula delta (Coeficiente em estados separáveis)
θ	Letra grega minúscula teta (Ângulo polar)
φ	Letra grega minúscula fi (Ângulo de fase/azimutal)
ρ	Letra grega minúscula rô (Operador densidade)
ω	Letra grega minúscula ômega (Proporção estatística)
$\mathcal{H}$	Espaço de Hilbert
$\in$	Pertence
Σ	Somatório
$\otimes$	Produto tensorial
$\dagger$	Operador adjunto (transposta conjugada)
$\neq$	Diferente de
$\geq$	Maior ou igual a
$\hat{P}$	Operador de projeção ortogonal
$\hat{U}$	Operador linear unitário genérico
$\hat{H}$	Matriz da porta lógica quântica de Hadamard
$\hat{X}$	Matriz da porta lógica quântica Pauli-X

I	Matriz Identidade
C	Conjunto dos números complexos
$\oplus$	Operação condicional de alvo (Soma módulo 2)

Sumário

	Lista de abreviaturas e siglas	11
1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Metodologia	18
1.1.1	Objetivos	18
1.1.1.1	Objetivo Geral	18
1.1.2	Objetivos Específicos	18
1.1.3	Procedimentos Metodológicos	18
1.1.3.1	Construção e Expansão dos Operadores	18
1.1.3.2	Verificação Computacional da Sequência de Avaliações	19
1.2	Organização do Trabalho	19
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.0.1	Física Clássica e a Transição para a Mecânica Quântica	21
2.0.2	Álgebra Linear Aplicada e Espaços Complexos de Hilbert	22
2.0.3	Representação Probabilística e Regra de Born	24
2.0.4	Qubits e Superposição	25
2.0.5	Emaranhamento Quântico e Não-Localidade	26
2.0.6	Teoria da Cognição Quântica	29
2.0.7	Operadores Quânticos: Unitariedade, Projeção e Matrizes de Densidade	31
2.0.8	Portas Lógicas: A Transição do Paradigma Clássico para o Formalismo Quântico	33
2.0.8.1	A Porta Pauli-X ($\hat{X}$): O Inversor Quântico	33
2.0.8.2	A Porta de Hadamard ($\hat{H}$): O Gerador de Incerteza	34
2.0.8.3	A Porta CNOT e a Dedução Algébrica do Estado de Bell	34
2.0.9	Aplicações em Inteligência Artificial e Motivações Metodológicas	36
3	DESENVOLVIMENTO	38
3.1	Ferramentas de Simulação Quântica	38
3.1.1	Ecosistema IBM Quantum Experience e Qiskit	38
3.1.2	Ecosistema Google Quantum AI (Cirq e <i>qsim</i>)	38
3.1.3	Análise Comparativa das Tecnologias	39
3.2	Arquitetura Computacional do Modelo e Validação Visual	39
4	RESULTADOS	43
4.0.1	Definição dos Operadores de Projeção (1 qubit)	43
4.0.2	Análise em Sistemas Compostos (Separáveis)	43

4.0.3	Análise em Sistemas Emaranhados	45
4.0.4	Fechamento e Implicações do Modelo	48
5	CONCLUSÃO	49
	REFERÊNCIAS	51

1 Introdução

A ascensão da mecânica quântica, ao longo do último século, transcendeu os limites da física teórica para estabelecer-se como um paradigma fundamental no processamento de informação (NIELSEN; CHUANG, 2010). Mais do que um avanço técnico, essa mudança representa uma ruptura com a visão de mundo clássica, na qual as leis de Newton e a lógica binária ditavam a compreensão da realidade (SERWAY; JEWETT, 2007). Em sistemas de alta complexidade, a descrição clássica muitas vezes falha ao tentar capturar nuances de incerteza e interdependência. Nesse cenário, o foco da ciência moderna desloca-se da unidade básica de informação tradicional, o *bit*, para uma estrutura mais rica e versátil: o bit quântico, ou *qubit* (BELLAC, 2006).

Enquanto o *bit* clássico é restrito a estados discretos e mutuamente exclusivos, assumindo obrigatoriamente o valor 0 ou 1, o *qubit* introduz a capacidade de existir em uma superposição de estados. Para descrever matematicamente essa natureza, a literatura utiliza a notação de Dirac, fundamentada nos símbolos *ket* ($|\psi\rangle$) e *bra* ($\langle\psi|$), que representam vetores em um espaço de Hilbert complexo. É fundamental compreender que o *qubit* habita esse espaço abstrato antes de qualquer interação, permitindo que a informação seja tratada não como uma escolha excludente, mas como um espectro de possibilidades simultâneas que só se resolvem no momento da observação (NIELSEN; CHUANG, 2010).

Essa transição da lógica real para o domínio complexo não é arbitrária; ela tem raízes na própria estrutura da equação de Schrödinger (NIELSEN; CHUANG, 2010). Ao buscar soluções para o comportamento de sistemas quânticos, percebe-se que as grandezas físicas e as probabilidades dependem de funções que admitem valores complexos (SERWAY; JEWETT, 2007). Essa manobra matemática exige a existência de um espaço dual, no qual os operadores que atuam sobre o sistema devem obedecer a regras de simetria e adjunção. Uma consequência direta dessa estrutura é a não-comutatividade: a propriedade de que a ordem na qual dois operadores atuam sobre um estado pode alterar o resultado final. Diferente da álgebra comum, na física quântica, a sequência das interações define a dinâmica da informação (NIELSEN; CHUANG, 2010).

Para gerenciar essa complexidade estatística, a teoria quântica faz uso de uma estrutura mais abrangente que o simples vetor de estado: o operador densidade. Enquanto a probabilidade clássica se assemelha a uma lista estática de chances, o operador densidade é uma matriz que organiza de forma completa o estado do sistema, capturando tanto as probabilidades de ocorrência quanto as interferências e correlações entre os estados. No campo da cognição, esse operador pode ser interpretado como o mapa do estado cognitivo de um indivíduo, uma estrutura dinâmica que armazena inclinações de resposta e as

incertezas mentais que as vinculam, permitindo uma modelagem que vai além da soma de probabilidades independentes (NIELSEN; CHUANG, 2010; BUSEMEYER; BRUZA, 2012; YEARSLEY; BUSEMEYER, 2016).

Consequentemente, o ato de realizar uma medição ou tomar uma decisão sob este formalismo deixa de ser um evento passivo. Toda pergunta feita ao sistema atua como um operador de projeção que modifica o operador densidade original (YEARSLEY; BUSEMEYER, 2016). Ao escolher uma resposta, o indivíduo colapsa sua incerteza inicial, atualizando sua base estatística para qualquer interação futura. É essa transformação do estado que fundamenta matematicamente o porquê de uma resposta anterior influenciar o julgamento de uma pergunta subsequente, criando um contexto que a probabilidade clássica, por ser inerentemente comutativa, é incapaz de prever (WANG et al., 2014; BUSEMEYER; BRUZA, 2012).

Essa dinâmica teórica encontra uma validação empírica na Psicologia Quantitativa através do Efeito de Ordem. Experimentos clássicos demonstram que, ao inverter a ordem de duas perguntas em um questionário, a distribuição estatística das respostas varia drasticamente, mesmo que o conteúdo das questões permaneça idêntico (MOORE, 2002; WANG et al., 2014). O interesse acadêmico no formalismo quântico surge dessa lacuna: como a lógica clássica assume que $A \times B = B \times A$, ela falha em descrever comportamentos em que a sequência altera o produto. A matemática quântica, centrada na não-comutatividade, oferece a ferramenta com potencial para modelar como o contexto e a sequência moldam a racionalidade humana (YEARSLEY; BUSEMEYER, 2016).

Nesse contexto, o Núcleo de Pesquisas em Sistemas Complexos (NUPEX) tem desenvolvido estudos que aplicam o formalismo de *qubits* isolados para descrever tais fenômenos. O presente trabalho busca avançar essa fronteira, elevando a análise para sistemas de múltiplos *qubits*. A proposta é investigar como a interação entre dois ou mais *qubits* e fenômenos especificamente quânticos, como o emaranhamento, podem modular o Efeito de Ordem. Pretende-se demonstrar que a adição de novos graus de liberdade e correlações não-locais permite simular processos de tomada de decisão ainda mais sofisticados, aproximando a computação quântica da complexidade inerente ao pensamento humano (BUSEMEYER; BRUZA, 2012).

Para alcançar esse objetivo, a metodologia estrutura-se em uma abordagem analítico-dedutiva. Partiremos das definições fundamentais da informação quântica e do espaço de Hilbert para construir modelos de sistemas compostos (NIELSEN; CHUANG, 2010). Através da aplicação de sequências de operadores de projeção e do estudo do operador densidade, buscaremos quantificar a influência do emaranhamento sobre a ordem dos operadores (YEARSLEY; BUSEMEYER, 2016), fundamentando-se no histórico de pesquisa do grupo e propondo novas perspectivas com potencial de contribuição futura para a inteligência artificial.

1.1 Metodologia

O objeto de pesquisa deste trabalho concentra-se na investigação da dinâmica não-comutativa manifesta em sistemas de múltiplos *qubits*, utilizando o embasamento teórico da cognição quântica para a modelagem formal de processos decisórios. A metodologia estrutura-se em uma abordagem analítico-dedutiva, partindo dos princípios fundamentais da álgebra linear em espaços de Hilbert para a construção matemática de matrizes de projeção. Esse delineamento permite não apenas a formulação teórica, mas a validação analítica de como o aumento da dimensionalidade do sistema afeta a propagação da informação sob diferentes sequências de interação.

1.1.1 Objetivos

1.1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é expandir a dimensionalidade das avaliações quânticas pela adição de múltiplos *qubits* aos modelos matemáticos, a fim de demonstrar analiticamente que a inversão na sequência dos operadores de projeção altera o estado final do sistema.

1.1.2 Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo geral, estabelecem-se os seguintes objetivos específicos:

- a) Analisar comparativamente o impacto da sequência de medições em sistemas de *qubits* isolados frente aos resultados obtidos em sistemas compostos de dois *qubits*.
- b) Desenvolver a modelagem matemática e a expansão matricial dos operadores de projeção, elevando a abstração algébrica para espaços vetoriais de 4 dimensões.
- c) Explorar as implicações teóricas da não-comutatividade validada para futuros desenvolvimentos de modelos e algoritmos de Inteligência Artificial (IA) que exijam sensibilidade ao contexto e à ordem de inserção dos dados.

1.1.3 Procedimentos Metodológicos

Para que os objetivos específicos sejam plenamente alcançados, a execução deste trabalho está dividida de acordo com os procedimentos detalhados a seguir:

1.1.3.1 Construção e Expansão dos Operadores

A primeira etapa consiste na definição e fundamentação teórica dos projetores básicos (P_0 e P_+), concebidos inicialmente para capturar a probabilidade de escolhas

em sistemas unidimensionais. Para investigar a influência sequencial em sistemas de maior complexidade, essas matrizes originais são acopladas ao ecossistema de dois *qubits*. Esse procedimento requer a expansão estrita dos operadores de projeção para matrizes quadri dimensionais, realizada matematicamente mediante a operação de produto tensorial conjugada a uma matriz identidade apropriada, garantindo assim a integridade dimensional e isométrica do sistema global.

1.1.3.2 Verificação Computacional da Sequência de Avaliações

Estabelecidas as matrizes operacionais em 4×4 , procede-se à demonstração algébrica da aplicação de sequências invertidas de avaliação. O propósito central desta fase é atestar a propriedade da não-comutatividade gerada pela ordem dos fatores. Como desdobramento analítico final, as operações expandidas serão aplicadas a vetores de estado (*kets*) que representam tanto sistemas puramente separáveis quanto sistemas emaranhados. Esse contraste permite calcular e comparar as probabilidades de transição em cada cenário topológico, mostrando como a matemática quântica atua como um modulador lógico capaz de embasar arquiteturas mais sofisticadas de decisão para a Inteligência Artificial em contextos onde a ordem das variáveis importa.

1.2 Organização do Trabalho

O presente trabalho está estruturado em capítulos sequenciais, organizados metodologicamente para conduzir a leitura desde os postulados fundamentais da mecânica quântica até a demonstração de cálculos detalhando que ao mudar a ordem, muda o resultado. Além deste capítulo introdutório, o qual delineou a motivação, os objetivos e a estrutura metodológica da pesquisa, o documento desenvolve as premissas da seguinte maneira.

O Capítulo 2 consolida a revisão bibliográfica e estabelece o referencial teórico que sustenta a investigação. O texto explora a transição da probabilidade estatística clássica para o formalismo dos espaços complexos de Hilbert. Com isso, detalha a abstração matemática da informação quântica através da notação de Dirac, abordando conceitos como *qubits*, estados de superposição, operadores densidade e matrizes de portas lógicas unitárias. A seção culmina na fundamentação teórica da Cognição Quântica, contrastando sua abordagem para a modelagem de variáveis contextuais e incompatíveis frente às premissas de comutatividade que fundamentam os modelos clássicos.

O Capítulo 3 descreve a arquitetura computacional do projeto e a transição da teoria abstrata para o ambiente de software. Nesta etapa, a mecânica vetorial é instanciada por meio de simulações algorítmicas desenvolvidas na linguagem Python. O capítulo expõe o mapeamento topológico e os testes práticos de emaranhamento necessários

para a concepção do Estado de Bell ($|\Phi^+\rangle$). As simulações são executadas utilizando os ecossistemas computacionais IBM Qiskit e Google Cirq.

O Capítulo 4 concentra o escopo na demonstração da álgebra linear, na simulação de tensores e na extração dos resultados finais. Nele, as matrizes de projeção ortogonal representativas do processo de decisão são expandidas tensorialmente para a dimensão 4×4 e aplicadas de maneira sequencial aos vetores de estado correlacionados. A seção corrobora formalmente, a quebra de comutatividade sistêmica ($[A, B] \neq 0$).

Por fim, as considerações finais são expostas na conclusão. O fechamento sintetiza as descobertas obtidas em face dos objetivos propostos, atestando a modelagem não-comutativa. O texto também propõe ramificações para investigações futuras, visando a integração desta dinâmica projetiva no aprendizado de máquina contínuo e na concepção de agentes autônomos dotados de maior flexibilidade contextual, para casos onde a ordem importa.

2 Revisão bibliográfica

Este capítulo estabelece os fundamentos teóricos que sustentam a presente pesquisa. Inicialmente, introduz-se a transição fenomenológica da física clássica para a mecânica quântica, seguida pelo rigor da álgebra linear aplicada aos espaços complexos de Hilbert. Posteriormente, abordam-se os fundamentos da informação quântica, detalhando *qubits*, superposição, o princípio do paralelismo quântico, portas lógicas e emaranhamento, bem como o formalismo matemático dos operadores de medição e de densidade. Por fim, explora-se a Teoria da Cognição Quântica, o Efeito de Ordem e a possibilidade de contribuição que esses fenômenos podem oferecer para a Inteligência Artificial (IA) em casos que a ordem das variáveis importam. Essa estrutura formará as motivações teóricas definitivas para os critérios de análise dos cálculos propostos.

2.0.1 Física Clássica e a Transição para a Mecânica Quântica

Na física clássica, os sistemas dinâmicos são regidos por equações estritamente determinísticas, na qual o conhecimento das condições iniciais permite prever o futuro do sistema com precisão absoluta (SERWAY; JEWETT, 2007). A mecânica quântica, contudo, opera sob um paradigma probabilístico. Dois experimentos históricos são fundamentais para ilustrar essa ruptura conceitual.

O primeiro deles é o Experimento da Dupla Fenda, que demonstra a dualidade onda-partícula e o fenômeno da interferência de probabilidades (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 1965). Partículas como elétrons, quando isoladas de medição, propagam-se criando padrões de interferência típicos de ondas. Contudo, ao interagir com um aparato de medida, a função de onda entra em colapso e a partícula exhibe comportamento corpuscular (ATKINS; PAULA, 2018).

O segundo marco foi o Experimento de Stern-Gerlach, realizado em 1922, no qual Otto Stern e Walther Gerlach fizeram um feixe de átomos de prata atravessar um campo magnético não uniforme, observando sua deflexão em um anteparo (STERN; GERLACH, 1922). Em vez de formar uma distribuição contínua, como previsto pela física clássica, o feixe dividiu-se em apenas duas manchas discretas, evidenciando que determinadas propriedades microscópicas assumem apenas valores quantizados (STERN; GERLACH, 1922). Posteriormente, compreendeu-se que, no caso do átomo de prata, esse comportamento está associado ao *spin* do elétron, um grau de liberdade quântico que pode assumir duas orientações possíveis (SERWAY; JEWETT, 2007).

2.0.2 Álgebra Linear Aplicada e Espaços Complexos de Hilbert

O formalismo da mecânica quântica, que constitui a base matemática da Teoria da Cognição Quântica, fundamenta-se em conceitos de álgebra linear (NIELSEN; CHUANG, 2010). Em sua formulação axiomática, todo sistema físico isolado é representado por um espaço de Hilbert complexo de dimensão finita, usualmente denotado por $\mathcal{H}$ (NIELSEN; CHUANG, 2010; BELLAC, 2006). Esse enunciado corresponde a um dos postulados fundamentais da teoria e estabelece a estrutura matemática na qual são definidos os estados quânticos, os operadores e as grandezas observáveis.

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial completo munido de um produto interno. Como todo espaço vetorial, ele deve ser definido sobre um corpo de escalares, isto é, um conjunto numérico cujos elementos podem multiplicar vetores e participar de combinações lineares. Do ponto de vista matemático, um espaço de Hilbert pode ser construído tanto sobre os números reais (R) quanto sobre os números complexos (C). Entretanto, a mecânica quântica adota, como um de seus postulados, que os estados físicos sejam representados em um espaço de Hilbert definido sobre o corpo dos números complexos (NIELSEN; CHUANG, 2010; BELLAC, 2006). Essa escolha permite representar cada estado por meio de amplitudes complexas, cujos módulos e fases desempenham papéis distintos na descrição do sistema. As probabilidades observáveis não são representadas diretamente pelos coeficientes do vetor de estado, mas são obtidas posteriormente a partir dessas amplitudes.

Definida a estrutura do espaço de Hilbert, a representação dos estados é realizada por meio da notação de Dirac, também conhecida como notação *bra-ket* (NIELSEN; CHUANG, 2010). Nessa notação, um estado é representado por um vetor abstrato denominado *ket*, escrito como $|\psi\rangle$. Quando se escolhe uma base ortonormal para o espaço de Hilbert, esse estado pode ser representado por um vetor coluna cujos elementos correspondem aos coeficientes complexos da expansão de $|\psi\rangle$ nessa base, denominados amplitudes de probabilidade (NIELSEN; CHUANG, 2010).

A cada vetor *ket* associa-se um elemento do espaço dual, denominado *bra* e representado por $\langle\psi|$. Em termos matriciais, o vetor *bra* é obtido pela aplicação da operação de conjugação hermitiana (ou adjunta) ao vetor *ket*, correspondendo à transposição do vetor coluna seguida da conjugação complexa de seus elementos (NIELSEN; CHUANG, 2010; BELLAC, 2006). A combinação entre um *bra* e um *ket* define o produto interno, representado na notação de Dirac por $\langle\phi|\psi\rangle$, em que $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ pertencem ao espaço de Hilbert (DIRAC, 1981; NIELSEN; CHUANG, 2010). Como o espaço vetorial é definido sobre o corpo dos números complexos, o resultado dessa operação é, em geral, um escalar complexo. O produto interno fornece uma medida da sobreposição entre dois estados, permitindo quantificar o quanto eles compartilham componentes na base considerada (NIELSEN; CHUANG, 2010).

Quando o produto interno é nulo, isto é, $\langle \phi | \psi \rangle = 0$, os estados são denominados ortogonais, indicando que não possuem componentes comuns na base considerada (NIELSEN; CHUANG, 2010). No contexto da Teoria da Cognição Quântica, estados ortogonais podem representar alternativas mutuamente exclusivas, como responder “sim” ou “não” a uma determinada pergunta (WANG et al., 2014).

Além de quantificar a sobreposição entre estados, o produto interno permite definir a norma de um vetor, $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$, o que corresponde ao comprimento do vetor no espaço de Hilbert. Na mecânica quântica, exige-se que todo vetor de estado seja normalizado, satisfazendo a condição $\langle \psi | \psi \rangle = 1$, o que garante a consistência da interpretação probabilística do formalismo (NIELSEN; CHUANG, 2010; BELLAC, 2006).

A relação entre as amplitudes complexas e as probabilidades observáveis é estabelecida pela Regra de Born. Segundo essa regra, a probabilidade de obter um determinado resultado em uma medida é igual ao quadrado do módulo da amplitude complexa correspondente (NIELSEN; CHUANG, 2010). Dessa forma, embora os estados quânticos sejam descritos por coeficientes complexos, todas as probabilidades previstas pelo modelo são números reais pertencentes ao intervalo $[0, 1]$.

A utilização de números complexos desempenha um papel essencial nesse processo. Enquanto o módulo de uma amplitude está relacionado à probabilidade obtida pela aplicação da Regra de Born, sua fase determina como diferentes amplitudes se combinam. Em consequência, no formalismo quântico as amplitudes associadas a diferentes trajetórias são inicialmente somadas e somente depois convertidas em probabilidades. Essa característica permite o surgimento de interferência construtiva, quando as amplitudes se reforçam mutuamente, ou interferência destrutiva, quando ocorre cancelamento parcial ou total entre elas (NIELSEN; CHUANG, 2010).

Na abordagem clássica da tomada de decisão, processos cognitivos dinâmicos podem ser modelados por cadeias de Markov, nas quais a evolução entre estados é descrita por matrizes de transição cujos elementos representam probabilidades reais pertencentes ao intervalo $[0, 1]$. Nesse formalismo, a probabilidade de transição entre estados é obtida pela soma das probabilidades associadas a trajetórias mutuamente exclusivas, em conformidade com a lei clássica da probabilidade total. Como consequência, não existem termos de interferência entre diferentes trajetórias cognitivas, característica que limita esses modelos na descrição de fenômenos como os efeitos de ordem observados experimentalmente (BUSEMEYER; BRUZA, 2012).

Em contraste, o formalismo quântico realiza a combinação das amplitudes complexas antes da obtenção das probabilidades. A presença da fase complexa permite que diferentes trajetórias cognitivas interfiram entre si, ampliando o poder descritivo do modelo em relação aos formalismos probabilísticos clássicos. Essa propriedade constitui um dos principais fundamentos matemáticos da Teoria da Cognição Quântica para representar efeitos de

ordem em julgamentos e processos decisórios observados empiricamente (BUSEMEYER; BRUZA, 2012).

2.0.3 Representação Probabilística e Regra de Born

Embora os estados quânticos sejam representados por vetores em um espaço de Hilbert, as grandezas obtidas experimentalmente correspondem a probabilidades. A conexão entre o formalismo matemático e os resultados de uma medida é estabelecida pela Regra de Born, um dos postulados fundamentais da Mecânica Quântica, responsável por converter amplitudes de probabilidade em probabilidades observáveis (NIELSEN; CHUANG, 2010; BELLAC, 2006).

Na Mecânica Quântica, uma medida corresponde ao processo de observação de uma determinada propriedade física do sistema. Os possíveis resultados dessa observação são representados por uma base ortonormal do espaço de Hilbert, na qual cada vetor da base está associado a um resultado mutuamente exclusivo da medida considerada. Dessa forma, a escolha da base depende da propriedade física que se deseja observar (BELLAC, 2006; NIELSEN; CHUANG, 2010).

Considere um sistema descrito pelo estado normalizado $|\psi\rangle$ e uma base ortonormal formada pelos estados $\{|i\rangle\}$. A probabilidade de que uma medida produza o resultado correspondente ao estado $|i\rangle$ é dada por $P(i) = |\langle i|\psi\rangle|^2$. Nessa expressão, o produto interno $\langle i|\psi\rangle$ fornece a amplitude de probabilidade associada ao resultado $|i\rangle$. Intuitivamente, essa amplitude indica o grau de correspondência entre o estado atual do sistema e o estado representado pelo vetor da base. Como essa quantidade pertence ao conjunto dos números complexos, ela não pode ser interpretada diretamente como uma probabilidade. Para obter uma grandeza física observável, aplica-se a Regra de Born, calculando o módulo ao quadrado da amplitude. Esse procedimento garante que as probabilidades obtidas sejam sempre números reais não negativos (NIELSEN; CHUANG, 2010; BELLAC, 2006).

Os estados quânticos utilizados na descrição do sistema são normalizados, isto é, possuem norma igual a 1. Essa condição assegura que a soma das probabilidades associadas a todos os resultados possíveis também seja igual a 1, formando uma distribuição de probabilidades válida $\sum_i |\langle i|\psi\rangle|^2 = 1$. Assim, a normalização estabelece a consistência probabilística do formalismo quântico, garantindo que um dos resultados representados pela base será necessariamente observado quando a medida for realizada (NIELSEN; CHUANG, 2010; BELLAC, 2006).

Na Teoria da Cognição Quântica, esse mesmo formalismo matemático é empregado para modelar processos de julgamento e tomada de decisão. Nesse contexto, o vetor $|\psi\rangle$ representa o estado cognitivo do indivíduo, enquanto os vetores da base representam os possíveis resultados associados à decisão ou ao julgamento analisado. A Regra de

Born permite converter as amplitudes de probabilidade em probabilidades de escolha, preservando a estrutura matemática originalmente desenvolvida para a Mecânica Quântica (BUSEMEYER; BRUZA, 2012).

Essa abordagem difere dos modelos probabilísticos clássicos, nos quais as probabilidades são manipuladas diretamente. No formalismo quântico, as operações são realizadas inicialmente sobre amplitudes de probabilidade. Quando diferentes sequências de processamento podem conduzir ao mesmo resultado, as amplitudes correspondentes são combinadas antes da aplicação da Regra de Born. Como essas amplitudes são números complexos, elas podem reforçar-se ou cancelar-se parcialmente, produzindo probabilidades diferentes daquelas previstas pela teoria clássica da probabilidade. Esse fenômeno, conhecido como interferência, permite representar efeitos experimentais observados em julgamentos humanos, como o Efeito de Ordem, nos quais a sequência das perguntas influencia as respostas obtidas (WANG et al., 2014; BUSEMEYER; BRUZA, 2012).

2.0.4 Qubits e Superposição

Na computação clássica, a unidade elementar de processamento é o *bit*, que pode assumir exclusivamente um dos valores discretos 0 ou 1 (NIELSEN; CHUANG, 2000). Na teoria da informação quântica, essa unidade é generalizada pelo *qubit* (*quantum bit*), o qual pode ser implementado fisicamente por diferentes sistemas quânticos de dois níveis. Um sistema quântico de dois níveis corresponde a qualquer sistema físico cuja dinâmica possa ser descrita considerando apenas dois estados distinguíveis, que passam a representar os estados lógicos $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

Do ponto de vista matemático, um *qubit* é representado por um vetor unitário pertencente a um espaço de Hilbert complexo bidimensional, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. A utilização dos números complexos é indispensável, pois as amplitudes de probabilidade possuem fase, elemento responsável pelos fenômenos de interferência que distinguem a mecânica quântica da teoria clássica da informação. A base computacional ortonormal desse espaço é formada pelos vetores

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Diferentemente de um *bit* clássico, que sempre se encontra em um único estado lógico, um *qubit* pode existir em uma superposição linear dos estados da base computacional antes da realização de uma medida. O estado geral é descrito por

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.2)$$

em que $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ representam as amplitudes de probabilidade (NIELSEN; CHUANG, 2010). Essas amplitudes não correspondem diretamente às probabilidades de observação; elas são coeficientes complexos que contêm informação tanto sobre a magnitude quanto

sobre a fase do estado quântico. As probabilidades são obtidas apenas após a aplicação da regra de Born, segundo a qual uma medição produz o resultado $|0\rangle$ com probabilidade $|\alpha|^2$ ou o resultado $|1\rangle$ com probabilidade $|\beta|^2$. Após a medição, o sistema deixa de ser descrito pela superposição inicial e passa a ocupar apenas o estado correspondente ao resultado observado, processo conhecido como colapso do estado quântico. Como a soma das probabilidades deve ser igual à unidade, impõe-se a condição de normalização

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (2.3)$$

Na notação de Dirac, o vetor dual associado ao estado $|\psi\rangle$ é denotado por $\langle\psi|$ e corresponde ao conjugado transposto do vetor original.

A representação geométrica de um *qubit* puro é frequentemente realizada por meio da Esfera de Bloch. Como um fator de fase global não altera as probabilidades previstas pela regra de Born, estados que diferem apenas por uma multiplicação do tipo $e^{i\gamma}$ representam a mesma situação física e podem ser considerados equivalentes. Dessa forma, qualquer *qubit* pode ser parametrizado como

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle, \quad (2.4)$$

em que θ e φ determinam a posição do estado sobre a superfície de uma esfera de raio unitário (NIELSEN; CHUANG, 2010). Nessa representação, os polos norte e sul correspondem aos estados puros $|0\rangle$ e $|1\rangle$, enquanto os pontos situados entre esses extremos representam diferentes superposições. A fase relativa $e^{i\varphi}$ exerce papel fundamental na dinâmica quântica, pois controla os efeitos de interferência produzidos durante a evolução do sistema.

Quando se consideram n *qubits*, o espaço de estados deixa de possuir dimensão dois e passa a ter dimensão 2^n , característica responsável pelo crescimento exponencial da capacidade de representação do sistema. O conjunto desses *qubits*, denominado registrador quântico, pode ser inicialmente preparado no estado fundamental $|0\rangle^{\otimes n}$ e transformado, por meio da aplicação da porta de Hadamard em cada *qubit*, em uma superposição uniforme de todos os estados possíveis,

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle. \quad (2.5)$$

Essa superposição é denominada uniforme porque todas as componentes apresentam amplitudes de mesmo módulo, diferindo apenas por eventuais fases.

2.0.5 Emaranhamento Quântico e Não-Localidade

O emaranhamento quântico é uma das propriedades fundamentais da mecânica quântica e representa uma diferença essencial em relação aos sistemas probabilísticos clássicos compostos por múltiplos *bits*. Enquanto, na computação clássica, o estado de um

sistema composto pode ser descrito a partir dos estados individuais de seus elementos e das probabilidades associadas, um sistema quântico emaranhado não pode ser decomposto dessa forma, sendo descrito apenas pelo estado global do conjunto. Em outras palavras, as propriedades do sistema deixam de poder ser atribuídas independentemente a cada uma de suas partes, tornando o estado coletivo a única descrição completa do sistema (NIELSEN; CHUANG, 2010).

A descrição matemática de sistemas compostos é realizada por meio do produto tensorial dos espaços de Hilbert. O produto tensorial é uma operação da Álgebra Linear que permite construir um novo espaço vetorial a partir de dois espaços previamente existentes. Na Computação Quântica, essa operação é necessária porque a simples reunião dos estados individuais não é suficiente para descrever todos os estados possíveis do sistema composto. O produto tensorial gera um espaço de dimensão superior, no qual os estados passam a representar o sistema como um todo, incluindo combinações que não podem ser escritas como o produto de estados individuais dos subsistemas (NIELSEN; CHUANG, 2010). Essa propriedade torna possível a existência de estados emaranhados, uma das características fundamentais da Mecânica Quântica.

Uma consequência direta dessa operação é o aumento da dimensão do espaço de estados. Enquanto um único *qubit* é descrito por um espaço de Hilbert bidimensional, a combinação de dois *qubits* gera um espaço de quatro dimensões. De maneira geral, um registrador quântico, formado por n *qubits*, é representado por um espaço de Hilbert de dimensão 2^n (NIELSEN; CHUANG, 2010). Assim, a dimensão do espaço de estados cresce exponencialmente com o número de *qubits*, característica fundamental da Computação Quântica.

Se dois *qubits*, denotados por A e B , ocupam os espaços de Hilbert $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$, respectivamente, o sistema combinado é representado por $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Considerando que a base ortonormal de cada *qubit* é formada pelos vetores $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, a base computacional do sistema composto é dada pelos estados $|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B$, $|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B$, $|1\rangle_A \otimes |0\rangle_B$, $|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B$, que, por convenção, são escritos simplesmente como $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Como exemplo, considerando os estados básicos

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

o produto tensorial resulta em

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que corresponde ao estado computacional $|01\rangle$. Esse exemplo ilustra como dois estados

individuais passam a ser representados por um único vetor pertencente ao espaço conjunto (NIELSEN; CHUANG, 2010).

O espaço produto $\mathcal{H}_{AB}$ reúne todos os estados possíveis de um sistema composto por dois *qubits*. Entretanto, nem todos esses estados apresentam emaranhamento. De acordo com sua estrutura matemática, eles podem ser classificados em duas categorias: estados separáveis e estados emaranhados.

Um estado é denominado separável quando pode ser escrito como o produto tensorial de dois estados individuais, $|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$. Nessa situação, cada *qubit* possui um estado próprio, e o estado do sistema completo é obtido apenas pela combinação desses estados individuais. Por exemplo, os estados $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$ e $|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$ pertencem ao espaço $\mathcal{H}_{AB}$, mas não são emaranhados, pois podem ser decompostos em estados independentes de cada *qubit*.

Em contrapartida, um estado é considerado emaranhado quando essa fatoração é impossível. Em outras palavras, não existem estados individuais para os subsistemas A e B cuja combinação por meio do produto tensorial reproduza exatamente o estado global do sistema. Nesses casos, o sistema não pode ser descrito apenas pelos estados de seus constituintes, sendo representado por um estado do espaço de Hilbert composto $\mathcal{H}_{AB}$. Assim, embora todo estado emaranhado pertença ao espaço $\mathcal{H}_{AB}$, apenas uma parcela dos estados desse espaço apresenta essa propriedade (NIELSEN; CHUANG, 2010).

Para compreender essa condição de forma algébrica, considere dois estados arbitrários, $|\psi_A\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ e $|\psi_B\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$. O produto tensorial desses estados produz $|\psi_{AB}\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle$. Nesse caso, observa-se que as amplitudes do sistema composto são determinadas diretamente pelos coeficientes dos estados individuais, caracterizando um estado separável (BELLAC, 2006).

O exemplo mais conhecido de estado emaranhado é um dos Estados de Bell, $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. Se esse estado pudesse ser escrito como um produto tensorial de dois estados individuais, seus coeficientes deveriam satisfazer simultaneamente as condições $\alpha\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha\delta = 0$, $\beta\gamma = 0$. Esse sistema, entretanto, não possui solução. Para que $\alpha\delta = 0$, é necessário que $\alpha = 0$ ou $\delta = 0$. Se $\alpha = 0$, então $\alpha\gamma = 0$, contradizendo a condição $\alpha\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$. De forma análoga, assumir $\delta = 0$ implica $\beta\delta = 0$, contrariando a condição $\beta\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Conclui-se, portanto, que o estado $|\Phi^+\rangle$ não pode ser fatorado, constituindo um exemplo de estado emaranhado (NIELSEN; CHUANG, 2010). Isso significa que conhecer completamente o estado de cada *qubit* isoladamente não é suficiente para reconstruir o estado do sistema, pois parte da informação encontra-se nas correlações estabelecidas entre eles.

Uma das consequências mais conhecidas do emaranhamento é a existência de correlações que desafiam as previsões de teorias baseadas no realismo local, fenômeno conhecido

como não-localidade e investigado experimentalmente por meio das desigualdades de Bell. Essas correlações não significam que exista transmissão instantânea de informação entre partículas espacialmente separadas, preservando, assim, a compatibilidade da mecânica quântica com a teoria da relatividade. O que distingue um sistema emaranhado é que seu estado deve ser tratado como uma única entidade matemática, mesmo quando seus constituintes encontram-se separados.

Essa característica pode ser ilustrada pela realização de uma medida sobre o primeiro *qubit*. Em Mecânica Quântica, uma medida projetiva é representada por um operador de projeção, que seleciona a componente do estado associada ao resultado observado e anula as demais componentes ortogonais (NIELSEN; CHUANG, 2010). Considere o operador de projeção $\hat{P}_0^A = |0\rangle\langle 0| \otimes I_B$, aplicado ao estado $|\Phi^+\rangle$. Esse operador corresponde à medida do primeiro *qubit*, projetando-o no estado $|0\rangle$ enquanto mantém inalterado o segundo *qubit*. A aplicação desse operador anula a componente $|11\rangle$, preservando apenas a componente $|00\rangle$. Após a normalização do vetor resultante, o sistema passa a ser descrito por $|00\rangle$. Consequentemente, uma medida realizada sobre o segundo *qubit* produzirá o resultado $|0\rangle$ com probabilidade igual a um. Essa correlação decorre da estrutura matemática do estado global e não de qualquer mecanismo de comunicação entre os dois subsistemas (NIELSEN; CHUANG, 2010).

Na Teoria da Cognição Quântica, essa mesma estrutura matemática é utilizada para representar situações em que conceitos, crenças ou memórias apresentam um elevado grau de dependência contextual. Assim como ocorre em um sistema emaranhado, a descrição do estado cognitivo não pode ser reduzida à análise independente de seus componentes, pois o significado emerge das relações estabelecidas entre eles. Dessa forma, a avaliação de um conceito pode modificar a distribuição de probabilidades associada ao outro, refletindo a natureza contextual dos processos de julgamento e tomada de decisão (BUSEMEYER; BRUZA, 2012).

De maneira semelhante, arquiteturas de Inteligência Artificial inspiradas na Computação Quântica exploram o emaranhamento para representar relações complexas entre variáveis latentes. Essa abordagem oferece uma alternativa para modelar dependências contextuais de alta complexidade que, em modelos probabilísticos clássicos, frequentemente exigem estruturas adicionais de dependência ou um número significativamente maior de parâmetros para representar correlações equivalentes (WANG et al., 2024).

2.0.6 Teoria da Cognição Quântica

A Teoria da Cognição Quântica é um campo de pesquisa que utiliza o formalismo matemático da mecânica quântica para modelar processos cognitivos e comportamentais humanos (BUSEMEYER; BRUZA, 2012; YEARSLEY; BUSEMEYER, 2016). Nessa abordagem, não se empregam conceitos físicos como partículas, fótons ou fenômenos de

natureza quântica no cérebro. O termo “quântica” refere-se exclusivamente à estrutura matemática utilizada, baseada em espaços de Hilbert, vetores de estado, operadores lineares e na Regra de Born para a descrição probabilística de sistemas. O objetivo é empregar essa estrutura como uma ferramenta matemática capaz de representar situações em que os modelos clássicos de probabilidade apresentam limitações.

É importante destacar que essa teoria não pressupõe que o cérebro humano funcione como um computador quântico nem que processos neurobiológicos ocorram em coerência quântica. A proposta é puramente algorítmica e geométrica: utiliza-se a mesma linguagem matemática desenvolvida para a mecânica quântica porque ela se mostrou adequada para descrever determinados padrões observados experimentalmente no comportamento humano. Diversos estudos indicam que modelos baseados exclusivamente na probabilidade clássica nem sempre conseguem reproduzir fenômenos como dependência de contexto, interferência entre informações e efeitos de ordem em tarefas de julgamento e tomada de decisão (BUSEMEYER; BRUZA, 2012; YEARSLEY; BUSEMEYER, 2016).

Nesse formalismo, o estado cognitivo de um indivíduo é representado por um vetor em um espaço de Hilbert. Esse vetor constitui uma representação matemática do conjunto de crenças, preferências ou predisposições momentâneas do indivíduo diante de uma determinada situação. Antes que uma decisão seja tomada, esse estado pode estar em uma superposição de diferentes possibilidades de resposta, refletindo que múltiplas interpretações ou tendências coexistem simultaneamente no modelo matemático. Assim, diferentemente dos modelos clássicos, não se assume necessariamente que todas as respostas já estejam previamente definidas e armazenadas antes da realização de uma pergunta.

Quando uma pergunta é apresentada ao indivíduo, ela é representada matematicamente por um operador de projeção que seleciona o subespaço correspondente às respostas compatíveis com aquela observação. O resultado desse processo é a atualização do estado cognitivo para um novo estado consistente com a resposta fornecida, de forma análoga ao postulado da medição na mecânica quântica (BUSEMEYER; BRUZA, 2012). Nessa interpretação, a resposta observada depende não apenas das crenças iniciais do indivíduo, mas também do contexto estabelecido pela sequência de perguntas realizada.

Uma das evidências experimentais mais conhecidas desse comportamento é o chamado Efeito de Ordem. Em pesquisas de opinião e experimentos de psicologia quantitativa, observou-se que a ordem em que as perguntas são apresentadas pode alterar significativamente a distribuição estatística das respostas obtidas. A primeira pergunta modifica o contexto cognitivo no qual a segunda será avaliada, influenciando a decisão final. Estudos conduzidos por Moore documentaram empiricamente esse fenômeno em pesquisas de opinião, mostrando que a sequência das perguntas não altera apenas a resposta imediata, mas também o estado cognitivo utilizado para responder às questões subsequentes (MOORE, 2002).

Para descrever matematicamente esse comportamento, a Teoria da Cognição Quântica utiliza o conceito de não comutatividade entre operadores (YEARSLEY; BUSEMEYER, 2016). Em termos matemáticos, dois operadores são ditos não comutativos quando a aplicação sequencial de um operador seguida do outro produz um resultado diferente daquele obtido na ordem inversa. Em notação algébrica, isso significa que, em geral,

$$AB \neq BA.$$

Na interpretação cognitiva, cada operador representa a realização de uma pergunta ou avaliação específica. Quando duas perguntas evocam aspectos incompatíveis de um mesmo estado cognitivo, a resposta obtida depende da ordem em que essas projeções são realizadas.

Consequentemente, avaliar primeiro o conceito A e depois o conceito B conduz o estado cognitivo para um subespaço diferente daquele obtido ao inverter essa sequência, isto é, avaliando inicialmente B e posteriormente A . Essa dependência da ordem de avaliação decorre naturalmente da não comutatividade dos operadores de projeção (MOORE, 2002; YEARSLEY; BUSEMEYER, 2016).

No contexto deste trabalho, a importância da Teoria da Cognição Quântica não está na tentativa de explicar o funcionamento físico do cérebro, mas na utilização de um formalismo probabilístico alternativo capaz de representar dependências contextuais e interferência entre informações. Essas propriedades tornam essa abordagem um potencial relevante para a modelagem computacional de processos de decisão que não são adequadamente descritos pelos modelos probabilísticos clássicos.

2.0.7 Operadores Quânticos: Unitariedade, Projeção e Matrizes de Densidade

A evolução temporal, a manipulação da informação e a extração de dados no formalismo quântico são descritas por operadores lineares que atuam sobre vetores de estado em um espaço de Hilbert. Esses operadores possuem interpretações físicas distintas e desempenham papéis complementares na modelagem de sistemas quânticos, especialmente no contexto da computação quântica (NIELSEN; CHUANG, 2010).

Os operadores unitários, por exemplo, são responsáveis pela evolução reversível de um sistema quântico e pela implementação de portas lógicas quânticas. Diferentemente do processamento clássico, no qual portas como AND e OR podem levar à perda de informação, a computação quântica preserva integralmente a norma do estado por meio de transformações unitárias U , que satisfazem a condição $U^\dagger U = I$, onde I representa o operador identidade. Essa propriedade garante conservação de probabilidade e reversibilidade do processo computacional.

Um exemplo fundamental é a porta de Hadamard, cuja representação matricial é

dada por

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quando aplicada ao estado base $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, essa operação gera uma superposição equilibrada, produzindo o estado

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$

Em analogias utilizadas na modelagem cognitiva, transformações unitárias podem ser interpretadas como representações formais de dinâmicas internas de decisão ainda não observadas, nas quais múltiplos estados potenciais coexistem antes de uma escolha explícita (BUSEMEYER; BRUZA, 2012).

Já os processos de observação e tomada de decisão são modelados por operadores hermitianos, que possuem a propriedade $A = A^\dagger$ e garantem autovalores reais, interpretados como resultados fisicamente mensuráveis. Dentro dessa classe, destacam-se os operadores de projeção ortogonal, que satisfazem a propriedade de idempotência $P^2 = P$. Essa condição expressa matematicamente a ideia de estabilização após uma decisão: uma vez que o sistema é projetado em um subespaço associado a um resultado, uma nova aplicação do mesmo operador não altera o estado obtido.

A probabilidade de um resultado associado a um projetor P em um estado $|\psi\rangle$ é dada por $\langle\psi|P|\psi\rangle$. Quando ocorre uma medição efetiva, o estado sofre uma atualização irreversível, sendo normalizado de acordo com

$$|\psi'\rangle = \frac{P|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P|\psi\rangle}}.$$

Esse processo representa a transição de um estado em superposição para um estado condicionado ao resultado observado, eliminando coerências anteriores associadas às alternativas descartadas (NIELSEN; CHUANG, 2010).

Por fim, quando não se assume conhecimento completo sobre a preparação do sistema, utiliza-se a formulação em termos de matriz densidade. Esse formalismo é especialmente relevante em contextos de informação quântica aplicada e sistemas estatísticos, nos quais há mistura de estados puros. A matriz densidade é definida como uma combinação convexa de estados puros,

$$\rho = \sum_i \omega_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|,$$

no qual os coeficientes ω_i representam probabilidades clássicas associadas a cada subestado $|\psi_i\rangle$.

Esse operador generaliza a descrição de estados quânticos ao incorporar simultaneamente incertezas clássicas e quânticas. Para ser fisicamente consistente, a matriz densidade

deve ser hermitiana ($\rho = \rho^\dagger$), semidefinida positiva ($\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0$) e possuir traço unitário ($\text{Tr}(\rho) = 1$), garantindo a normalização total das probabilidades.

A probabilidade de obtenção de um resultado associado a um projetor P_A em um estado misto é dada pela expressão

$$p(A) = \text{Tr}(P_A \rho),$$

na qual o traço atua como mecanismo de agregação das contribuições de todos os subestados do sistema, fornecendo a estatística final da medição (NIELSEN; CHUANG, 2010).

2.0.8 Portas Lógicas: A Transição do Paradigma Clássico para o Formalismo Quântico

Para compreender a mecânica de manipulação da informação em sistemas de múltiplos estados, é essencial estabelecer um paralelo entre as portas lógicas clássicas e as suas contrapartes quânticas. A computação clássica fundamenta-se em circuitos físicos que manipulam correntes elétricas traduzidas para os estados binários determinísticos de 0 ou 1. Operações lógicas, como as portas *AND* e *OR*, recebem dois *bits* de entrada e retornam um único *bit* de saída. Algebricamente, essa redução de dimensionalidade constitui um mapeamento não-injetor, o que caracteriza um processo inerentemente dissipativo e irreversível: a partir da saída 0 de uma porta *AND*, é matematicamente impossível deduzir quais eram os dois *bits* originais de entrada.

O processamento da informação quântica opera sob um paradigma distinto, exigindo que o fluxo informacional no espaço de Hilbert seja contínuo e conservativo. Para respeitar os postulados da mecânica quântica, toda transformação lógica em um estado fechado deve ser descrita por operadores lineares unitários, representados pela matriz $\hat{U}$. O rigor matemático exige que a matriz adjunta (transposta conjugada) de uma porta quântica seja igual à sua matriz inversa, satisfazendo a relação $\hat{U}^\dagger \hat{U} = I$ (sendo I a matriz identidade). Esta imposição de unitariedade confere duas propriedades absolutas ao modelo: a reversibilidade computacional perfeita (nenhuma informação é destruída) e o caráter isométrico da operação, garantindo que a soma global das probabilidades do sistema permaneça sempre igual a 1 (NIELSEN; CHUANG, 2010).

Nesse escopo de isometria e reversibilidade, três operadores destacam-se como fundamentais para a formulação algébrica da incerteza e do emaranhamento estrutural.

2.0.8.1 A Porta Pauli-X ($\hat{X}$): O Inversor Quântico

A operação quântica mais análoga à lógica clássica é a porta Pauli-X, que atua como a formalização matemática de uma mudança absoluta de estado lógico (equivalente à porta *NOT*). Operando no subespaço de um único *qubit* (C^2), ela permuta as amplitudes

de probabilidade do vetor de estado. Sua representação matricial hermitiana é definida por

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Aplicando-se o operador $\hat{X}$ aos vetores da base canônica, a multiplicação matricial garante a transição determinística pura

$$\hat{X}|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \quad (2.7)$$

$$\hat{X}|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \quad (2.8)$$

No domínio da cognição quântica, a porta Pauli-X codifica a reversão absoluta de uma decisão isolada.

2.0.8.2 A Porta de Hadamard ($\hat{H}$): O Gerador de Incerteza

Enquanto as portas clássicas operam exclusivamente com certezas discretas, o modelo cognitivo e quântico necessita de uma estrutura que mapeie a dúvida, a hesitação e o processamento paralelo de cenários. Essa tarefa é executada pela porta de Hadamard, cuja matriz unitária é responsável por dividir simetricamente as amplitudes, transferindo o *qubit* da base computacional determinística para uma base de sobreposição perfeita

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Quando o estado elementar $|0\rangle$ é submetido a esta transformação geométrica, a matriz induz uma dispersão estocástica idêntica para os dois polos do sistema

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \equiv |+\rangle \quad (2.10)$$

Neste novo estado $|+\rangle$, a probabilidade empírica de medição resulta em uma distribuição simétrica (cinquenta por cento para cada autovalor), atuando como a representação matricial do estado mental de ponderação pré-decisória (BUSEMEYER; BRUZA, 2012).

2.0.8.3 A Porta CNOT e a Dedução Algébrica do Estado de Bell

A emergência de fenômenos complexos exige a expansão do sistema vetorial para o produto tensorial de múltiplos *qubits* ($\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$). Para introduzir não-localidade neste espaço expandido, utiliza-se a porta *CNOT* (*Controlled-NOT*), uma matriz de transformação de ordem 4×4 . A CNOT atua aplicando o operador Pauli-X a um *qubit* alvo se, e

somente se, o *qubit* de controle estiver no subestado $|1\rangle$

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

O emaranhamento máximo entre duas variáveis latentes (formação do Estado de Bell, $|\Phi^+\rangle$) pode ser rigorosamente deduzido pela operação sequencial das matrizes de Hadamard e CNOT sobre um sistema inicialmente não-correlacionado. Considere o estado composto fundamental $|\psi_{inicial}\rangle = |00\rangle$, cuja representação vetorial em quatro dimensões é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Etapa 1: Indução da superposição desacoplada. A matriz de Hadamard é aplicada exclusivamente à primeira variável (controle), enquanto a matriz Identidade (I) preserva a segunda variável. O operador expandido do sistema é definido pelo produto tensorial $(\hat{H} \otimes I)$

$$(\hat{H} \otimes I)|00\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right] \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) \quad (2.12)$$

Em notação matricial, este estado intermediário separável corresponde ao vetor coluna $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Etapa 2: A injeção da não-localidade algébrica. O vetor sobreposto é então submetido ao operador global condicional CNOT. Realizando o cálculo explícito da multiplicação linha por coluna da matriz 4×4 pelo vetor obtido

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= CNOT \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1 \cdot 1) + 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + (1 \cdot 1) + 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Convertendo o tensor resultante de volta para a sintaxe de Dirac, formaliza-se a criação do estado emaranhado puro

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (2.14)$$

A ausência absoluta das bases mistas ($|01\rangle$ e $|10\rangle$) no vetor final prova, através do rigor da álgebra linear, que a avaliação das variáveis tornou-se matematicamente inseparável. É sobre essa topologia de correlação que a inserção sequencial dos operadores projetivos de decisão provocará o Efeito de Ordem verificado neste estudo.

2.0.9 Aplicações em Inteligência Artificial e Motivações Metodológicas

A intersecção entre operadores não-comutativos e emaranhamento computacional forma a vanguarda do QML e da IAQ (WANG et al., 2024). Em problemas de aprendizado de máquina caracterizados por forte dependência condicional entre variáveis, nos quais a ordem de apresentação ou o acoplamento entre *features* carrega parte relevante da informação, arquiteturas de QML baseadas em tensores de dados emaranhados e transformações unitárias oferecem uma via alternativa de representação, na qual as não-comutatividades e as não-localidades presentes nos dados de entrada são incorporadas de forma nativa ao modelo, em vez de aproximadas por estruturas adicionais de dependência (WANG et al., 2024).

No que tange aos critérios de análise e interpretação, adota-se a Igualdade QQ (do inglês *Quantum Question equality*), proposta e testada empiricamente por Wang et al. (WANG et al., 2014). Sejam A e B duas perguntas dicotômicas (respostas “sim” ou “não”), representadas pelos pares de projetores ortogonais complementares $\{P_A, P_A^\perp\}$ e $\{P_B, P_B^\perp\}$, atuando sobre um mesmo estado inicial $|\psi\rangle$ (ou, de forma mais geral, sobre um operador densidade ρ). Denota-se por $P^{XY}(i, j)$ a probabilidade conjunta de observar a resposta i na primeira pergunta e a resposta j na segunda, quando a ordem de apresentação é X seguido de Y . No formalismo quântico, essa probabilidade é obtida pela aplicação sequencial dos projetores,

$$P^{AB}(i, j) = \left\| P_B^{(j)} P_A^{(i)} |\psi\rangle \right\|^2, \quad i, j \in \{\text{sim}, \text{não}\}, \quad (2.15)$$

em que $P_A^{(\text{sim})} \equiv P_A$, $P_A^{(\text{não})} \equiv P_A^\perp$, e de forma análoga para $P_B^{(j)}$.

A Igualdade QQ é definida como a diferença entre a soma das probabilidades de respostas *concordantes* (sim-sim e não-não) nas duas ordens possíveis de apresentação,

$$q = \left[P^{AB}(\text{sim}, \text{sim}) + P^{AB}(\text{não}, \text{não}) \right] - \left[P^{BA}(\text{sim}, \text{sim}) + P^{BA}(\text{não}, \text{não}) \right]. \quad (2.16)$$

O resultado central explorado pela Teoria da Cognição Quântica é que, embora as probabilidades conjuntas individuais $P^{AB}(i, j)$ e $P^{BA}(i, j)$ sejam, em geral, distintas entre si, exatamente por conta da não comutatividade $P_A P_B \neq P_B P_A$, a combinação específica de termos que define q cancela-se identicamente como consequência das propriedades de hermiticidade e idempotência dos projetores envolvidos. Isso resulta na predição $q = 0$, válida independentemente do estado $|\psi\rangle$ (ou ρ) considerado e dos projetores específicos escolhidos para representar A e B . Trata-se, portanto, de uma predição livre de

parâmetros: o modelo quântico não apenas admite efeitos de ordem, como os modelos de Markov clássicos, sob certas condições, também podem admitir, mas impõe uma restrição estrutural precisa sobre a forma como esses efeitos podem se manifestar. Wang *et al.* (WANG et al., 2014) reportaram suporte empírico para essa igualdade em um amplo conjunto de pesquisas de opinião pública, o que motiva sua adoção como critério de validação neste trabalho.

Avaliando-se a magnitude desses desvios em função do grau de emaranhamento inicial dos *qubits*, foi possível verificar que a alteração da ordem de aplicação dos operadores modifica os resultados obtidos. Esse comportamento mostra a natureza não comutativa do sistema e fornece uma base matemática para a modelagem de processos em que a ordem das operações influencia o estado final, como ocorre em modelos de Cognição Quântica e em futuras aplicações de heurísticas para IA (WANG et al., 2014; WANG et al., 2024).

3 Desenvolvimento

Este capítulo detalha a transição do modelo matemático abstrato, fundamentado nos espaços complexos de Hilbert, para o ambiente de experimentação computacional e validação algorítmica. A execução de rotinas que mimetizam a dinâmica não-comutativa e o emaranhamento quântico exige o uso de plataformas de software especializadas. Tais ferramentas são indispensáveis para simular o comportamento de sistemas de múltiplos *qubits* sob a ótica da cognição quântica, permitindo a validação empírica da assimetria que caracteriza o Efeito de Ordem no julgamento humano (WANG et al., 2014).

Todos os códigos fonte desenvolvidos para a consecução destas simulações encontram-se versionados e disponíveis publicamente para reprodutibilidade no repositório oficial do projeto, acessível em: <<https://github.com/MelissaMirandaMM/Ferramentas/>>.

3.1 Ferramentas de Simulação Quântica

A infraestrutura atual de processadores quânticos físicos (QPUs) ainda apresenta limitações significativas relacionadas à decoerência e a ruídos operacionais de portas lógicas (NIELSEN; CHUANG, 2010). Por conseguinte, a validação de novos modelos computacionais para arquiteturas de tomada de decisão recorre a simuladores executados em *hardware* clássico de alto desempenho. Para a modelagem de alguns fenômenos quânticos, a topologia da simulação foi construída integrando dois ecossistemas complementares: IBM Quantum e Google Quantum AI.

3.1.1 Ecossistema IBM Quantum Experience e Qiskit

O *framework* Qiskit e a plataforma IBM Quantum Experience foram incorporados primariamente para o mapeamento topológico e a validação cruzada do sistema. O Qiskit (Qiskit contributors, 2023) é atualmente uma das bibliotecas de código aberto mais adotadas pela comunidade científica para prototipação quântica. A utilização da interface IBM Quantum Composer forneceu o rigor visual necessário para a montagem dos tensores lógicos, enquanto o emulador local *Aer* (*qasm_simulator*) foi aplicado para rodar testes estatísticos de medição, garantindo a consistência das amplitudes de probabilidade antes da inserção dos operadores não-comutativos.

3.1.2 Ecossistema Google Quantum AI (Cirq e *qsim*)

De forma complementar, a codificação lógica dos *qubits* também foi instanciada utilizando o *framework* Cirq (Cirq Developers, 2023), mantido pelo Google. O Cirq

permite um controle algorítmico na aplicação das portas unitárias. A integração com este ecossistema demonstra a mesma integridade topológica independentemente do fornecedor da simulação.

3.1.3 Análise Comparativa das Tecnologias

A seleção e o uso de múltiplas bibliotecas visam garantir a blindagem do experimento contra vieses de compilação. A Tabela 1 sintetiza as características funcionais de cada ecossistema avaliado e sua respectiva contribuição técnica para os objetivos deste estudo.

Tabela 1 – Comparativo das ferramentas de simulação quântica.

Característica	IBM Qiskit / Composer	Google Cirq
Abordagem Visual	GUI de arrastar e soltar (Composer)	Circuito renderizado via terminal
Motor de Simulação	Emulador Aer (qasm_simulator)	Simulador Vetorial Nativo
Aplicação no TCC	Design topológico e amostragem de dados	Validação de reprodutibilidade
Linguagem Base	Python	Python

3.2 Arquitetura Computacional do Modelo e Validação Visual

Para materializar as avaliações sequenciais na prática de software, o modelo traduziu a teoria do espaço de Hilbert em um roteiro algorítmico explícito. A arquitetura computacional foi desenvolvida para tratar o estado mental humano como um registrador quântico isolado, executando rigorosamente as seguintes etapas de processamento.

O experimento iniciou-se mapeando os dois *qubits* (representando duas variáveis latentes de cognição) no estado fundamental denotado por $|00\rangle$. A simulação computacional pré-decisória foi induzida pela aplicação sequencial de operadores unitários. Primeiramente, a porta de Hadamard ($\hat{H}$) atuou sobre a variável de controle, gerando uma superposição simétrica. Imediatamente após, a interdependência cognitiva foi forçada pela aplicação da porta não-controlada (CNOT), que condicionou as amplitudes do segundo *qubit* ao estado do primeiro.

O ambiente visual do IBM Quantum Composer organiza o fluxo de informação em linhas do tempo horizontais, nas quais a evolução dos estados ocorre da esquerda para a direita. Na montagem topológica deste experimento, os registradores assumem o papel de duas variáveis cognitivas independentes. O primeiro passo da modelagem consiste na alocação da porta de Hadamard sobre a linha do primeiro registrador. Matematicamente, essa operação projeta a variável em uma superposição simétrica. Na sequência, estabelece-se a inseparabilidade informacional através do acoplamento da porta CNOT. Ao definir

o primeiro *qubit* em superposição como controle e o segundo como alvo, a arquitetura amarra o destino de ambas as variáveis. Por fim, a inserção dos blocos de medição encerra o circuito, forçando o colapso do sistema emaranhado para os registradores clássicos. A estruturação visual dessa topologia gerou o diagrama esquemático evidenciado na Figura 1.

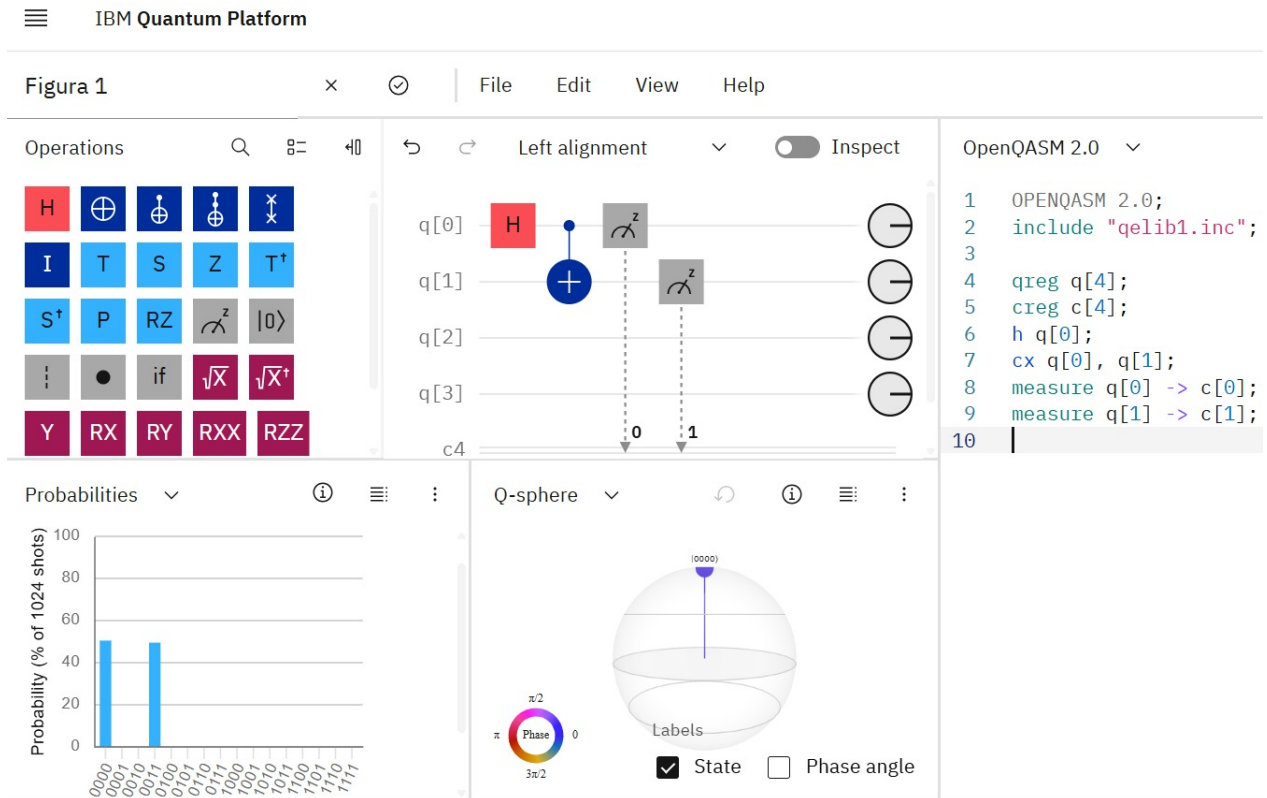
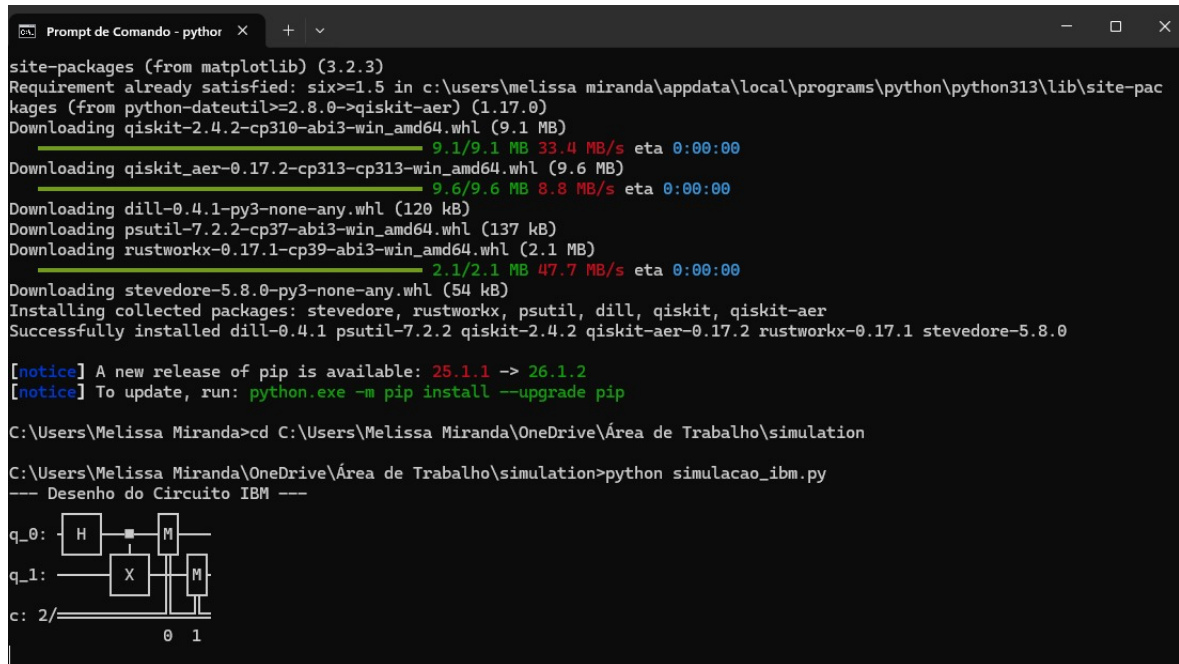


Figura 1 – Interface do IBM Quantum Composer demonstrando o mapeamento das portas Hadamard e CNOT utilizadas para a formulação inseparável do Estado de Bell.

O processamento matemático destas duas portas lógicas resulta na matriz do Estado de Bell ($|\Phi^+\rangle$). A execução algorítmica inicial no *framework* Qiskit gerou a representação em terminal da arquitetura topológica, confirmando o acoplamento exato das matrizes operacionais, conforme ilustrado na Figura 2.



```

Prompt de Comando - pythor x + v
site-packages (from matplotlib) (3.2.3)
Requirement already satisfied: six>=1.5 in c:\users\melissa miranda\appdata\local\programs\python\python313\lib\site-pac
kages (from python-dateutil>=2.8.0->qiskit-aer) (1.17.0)
Downloading qiskit-2.4.2-cp310-abi3-win_amd64.whl (9.1 MB)
9.1/9.1 MB 33.4 MB/s eta 0:00:00
Downloading qiskit_aer-0.17.2-cp313-cp313-win_amd64.whl (9.6 MB)
9.6/9.6 MB 8.8 MB/s eta 0:00:00
Downloading dill-0.4.1-py3-none-any.whl (120 kB)
Downloading psutil-7.2.2-cp37-abi3-win_amd64.whl (137 kB)
Downloading rustworkx-0.17.1-cp39-abi3-win_amd64.whl (2.1 MB)
2.1/2.1 MB 47.7 MB/s eta 0:00:00
Downloading stevedore-5.8.0-py3-none-any.whl (54 kB)
Installing collected packages: stevedore, rustworkx, psutil, dill, qiskit, qiskit-aer
Successfully installed dill-0.4.1 psutil-7.2.2 qiskit-2.4.2 qiskit-aer-0.17.2 rustworkx-0.17.1 stevedore-5.8.0

[notice] A new release of pip is available: 25.1.1 -> 26.1.2
[notice] To update, run: python.exe -m pip install --upgrade pip

C:\Users\Melissa Miranda>cd C:\Users\Melissa Miranda\OneDrive\Área de Trabalho\simulation

C:\Users\Melissa Miranda\OneDrive\Área de Trabalho\simulation>python simulacao_ibm.py
--- Desenho do Circuito IBM ---
q_0: ── H ──┐── M ──
           │  │
q_1: ── X ──┘── M ──
           │  │
c: 2/ ──── 0 1

```

Figura 2 – Representação topológica do circuito quântico gerada via terminal pelo *framework* IBM Qiskit, demonstrando a aplicação da porta Hadamard seguida da operação CNOT.

Para demonstrar o emaranhamento estrutural, as rotinas de medição foram acionadas por milhares de ciclos computacionais (processo de amostragem estatística). O colapso do sistema dividiu-se de maneira quase equitativa exclusivamente entre os estados correlacionados $|00\rangle$ e $|11\rangle$, suprimindo matematicamente a ocorrência dos estados mistos independentes. Este teste empírico pode ser visualizado na Figura 3.

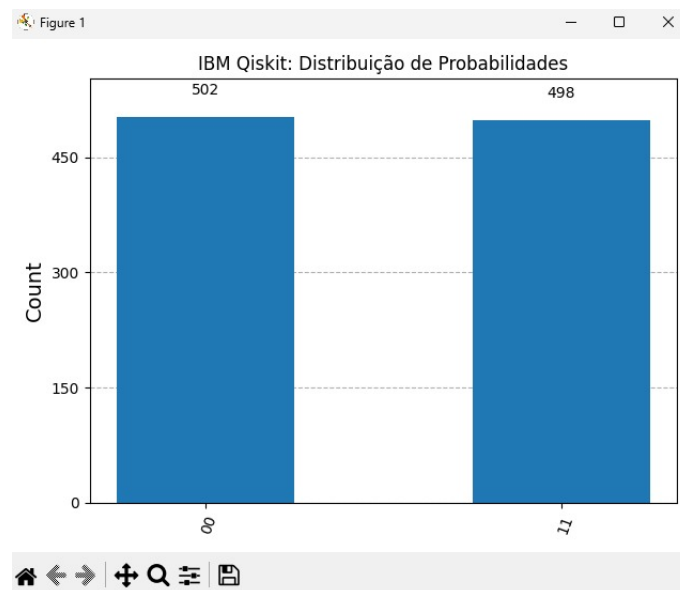


Figura 3 – Distribuição probabilística do sistema emaranhado obtida pelo emulador *Aer* da IBM. A ocorrência concentrada nos extremos atesta a não-localidade das variáveis modeladas.

Para exemplificar o modelo e blindar o experimento contra vieses computacionais específicos de uma única ferramenta, o mesmo arranjo vetorial foi submetido ao motor de simulação do ecossistema Google Quantum AI. O resultado estatístico, exposto na Figura 4, validou o comportamento inseparável do sistema.

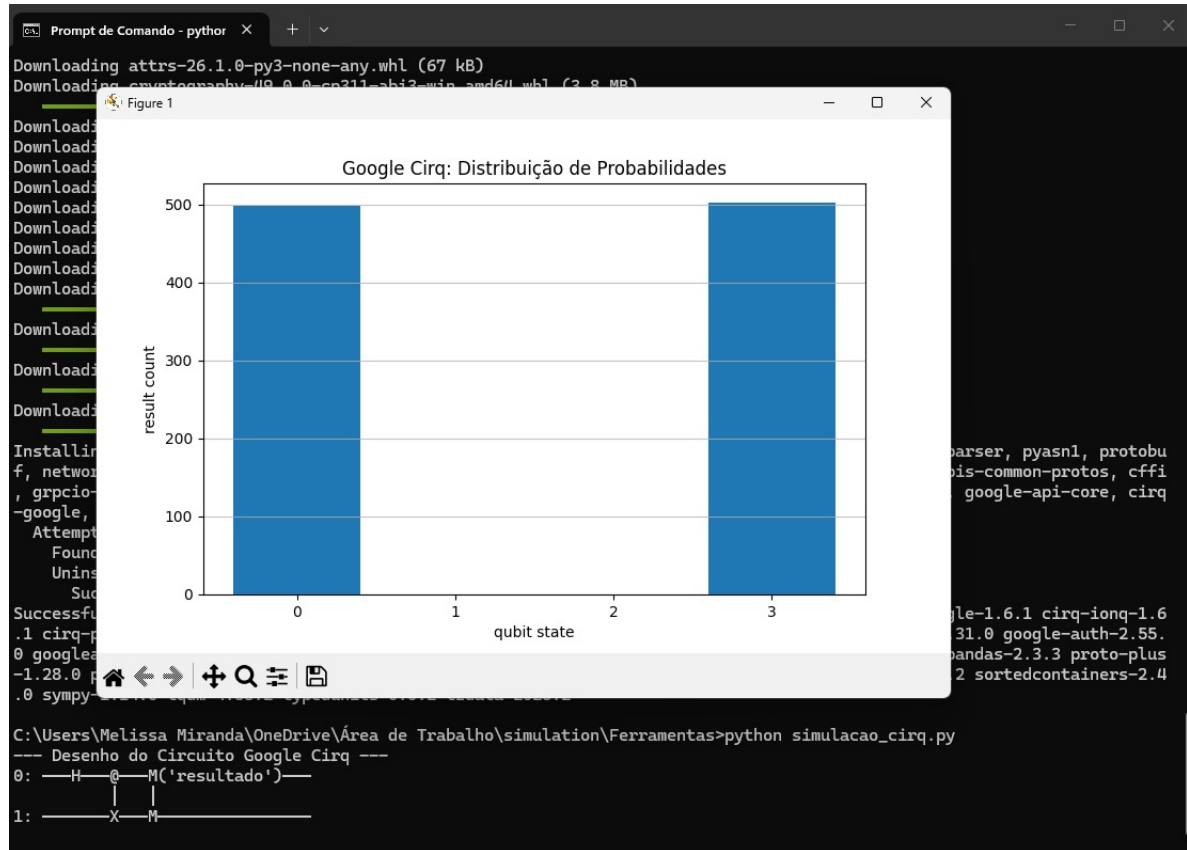


Figura 4 – Histograma de validação gerado pelo simulador vetorial do Google Cirq. A consistência dos dados corrobora a reprodutibilidade do emaranhamento de forma agnóstica à tecnologia subjacente.

4 Resultados

Para modelar os cálculos nos quais a ordem dos operadores importa, em sistemas de múltiplos *qubits*, estruturamos nosso modelo em torno de operadores de projeção que representaram operações ou avaliações sequenciais. Analisamos o comportamento dinâmico do sistema sob a ação de dois projetores não-comutativos, avaliando as probabilidades de transição em estados compostos (separáveis) e em estados emaranhados.

4.0.1 Definição dos Operadores de Projeção (1 qubit)

Inicialmente, consideramos os operadores de projeção em um sistema constituído por um único *qubit*, representado por matrizes de dimensão 2×2 . O operador P_0 representa a projeção sobre o estado base $|0\rangle$, enquanto P_+ representa a projeção sobre o estado de superposição diagonal $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

No cenário de um único *qubit*, a multiplicação sequencial dessas matrizes 2×2 evidencia que $P_0 P_+ \neq P_+ P_0$, caracterizando a não comutatividade entre esses operadores. Entretanto, o objetivo deste trabalho é analisar sistemas compostos por dois *qubits* (A e B). Como cada *qubit* é descrito por um espaço de Hilbert de dimensão 2, o sistema composto é obtido pelo produto tensorial desses espaços, resultando em um espaço quadri dimensional. Consequentemente, os vetores de estado passam a possuir quatro componentes e os operadores que atuam sobre todo o sistema devem ser representados por matrizes de dimensão 4×4 .

4.0.2 Análise em Sistemas Compostos (Separáveis)

Consideramos o estado matemático inicial de dois sistemas ou variáveis independentes como um estado composto puro e separável $|\psi_{comp}\rangle$. Sendo o primeiro *qubit* com amplitudes probabilísticas a_0, a_1 e o segundo com b_0, b_1

$$\begin{aligned} |\psi_{comp}\rangle &= (a_0|0\rangle + a_1|1\rangle) \otimes (b_0|0\rangle + b_1|1\rangle) \\ &= a_0b_0|00\rangle + a_0b_1|01\rangle + a_1b_0|10\rangle + a_1b_1|11\rangle \\ &= \begin{pmatrix} a_0b_0 \\ a_0b_1 \\ a_1b_0 \\ a_1b_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Como nosso sistema global (A + B) comporta 4 estados bases, os operadores que atuarão sobre ele exigem dimensão 4×4 . Para aplicar as operações P_0 e P_+ exclusivamente sobre o primeiro *qubit* (sistema A) sem afetar o segundo *qubit* (sistema B), devemos extrair o produto tensorial de cada projetor pela matriz identidade $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dessa forma, definimos os operadores globais $\hat{P}_0$ e $\hat{P}_+$

$$\hat{P}_0 = P_0 \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\hat{P}_+ = P_+ \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Graças às propriedades do produto tensorial, em que $(A \otimes B)(|\phi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = A|\phi\rangle \otimes B|\varphi\rangle$, a operação sequencial em 4 dimensões se mantém analiticamente consistente. Calculando a multiplicação explícita linha por coluna da sequência $(\hat{P}_0 \hat{P}_+)$

$$\begin{aligned} \hat{P}_0 \hat{P}_+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aplicando o operador $(\hat{P}_0 \hat{P}_+)$ resultante sobre o vetor coluna do estado inicial $|\psi_{comp}\rangle$, determinamos o colapso do sistema

$$\begin{aligned} (\hat{P}_0 \hat{P}_+)|\psi_{comp}\rangle &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 b_0 \\ a_0 b_1 \\ a_1 b_0 \\ a_1 b_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_0 b_0 + a_1 b_0) \\ \frac{1}{2}(a_0 b_1 + a_1 b_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a_0 + a_1) \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.6)$$

A probabilidade de ocorrência dessa sequência é calculada pelo produto interno (norma ao quadrado) do vetor final. Sabendo que a condição de normalização do segundo *qubit* exige

que $|b_0|^2 + |b_1|^2 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} P(\text{sequência} + \text{depois } 0)_{comp} &= ||(\hat{P}_0 \hat{P}_+)|\psi_{comp}\rangle||^2 = \left| \frac{1}{2}(a_0 + a_1) \right|^2 \cdot (|b_0|^2 + |b_1|^2) \\ &= \frac{1}{4}|a_0 + a_1|^2 \cdot (1) = \frac{1}{4}|a_0 + a_1|^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Quando avaliamos a ordem inversa $(\hat{P}_+ \hat{P}_0)$ aplicada ao estado, o rigor matricial da multiplicação garante as mudanças nas probabilidades finais

$$\begin{aligned} \hat{P}_+ \hat{P}_0 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$(\hat{P}_+ \hat{P}_0)|\psi_{comp}\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 b_0 \\ a_0 b_1 \\ a_1 b_0 \\ a_1 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_0 b_0 \\ \frac{1}{2} a_0 b_1 \\ \frac{1}{2} a_1 b_0 \\ \frac{1}{2} a_1 b_1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Calculando a probabilidade associada a esta ordem invertida

$$\begin{aligned} P(\text{sequência } 0 \text{ depois } +)_{comp} &= ||(\hat{P}_+ \hat{P}_0)|\psi_{comp}\rangle||^2 \\ &= \left| \frac{1}{2} a_0 b_0 \right|^2 + \left| \frac{1}{2} a_0 b_1 \right|^2 + \left| \frac{1}{2} a_1 b_0 \right|^2 + \left| \frac{1}{2} a_1 b_1 \right|^2 \\ &= \frac{2}{4} |a_0|^2 (|b_0|^2 + |b_1|^2) = \frac{1}{2} |a_0|^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

A diferença estatística apresentada entre $\frac{1}{4}|a_0 + a_1|^2$ e $\frac{1}{2}|a_0|^2$ corroborou a capacidade da modelagem em capturar a não comutatividade, pois ao mudar a ordem dos operadores, mudou o resultado, demonstrando como a avaliação inicial fixa um novo estado no espaço de Hilbert, estabelecendo um contexto probabilístico restrito para avaliações futuras.

4.0.3 Análise em Sistemas Emaranhados

Para elevar a complexidade e modelar instâncias em que duas variáveis do sistema são fortemente dependentes entre si, introduzimos o operador *CNOT* (Não-Controlado) ao estado composto. Este operador age invertendo o estado do *qubit* alvo (B) apenas se o estado do *qubit* de controle (A) for $|1\rangle$. Matematicamente, o operador *CNOT* em um

sistema de dois *qubits* é representado pela seguinte matriz 4×4

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Ao aplicá-lo sobre o estado separável original $|\psi_{comp}\rangle$, as bases cruzadas sofrem alteração, gerando o estado emaranhado $|\psi_{em}\rangle$. Realizando a multiplicação matricial do operador pelo vetor coluna do estado inicial, temos

$$\begin{aligned} |\psi_{em}\rangle &= CNOT_{A \rightarrow B} |\psi_{comp}\rangle \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 b_0 \\ a_0 b_1 \\ a_1 b_0 \\ a_1 b_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 \cdot a_0 b_0) + 0 + 0 + 0 \\ 0 + (1 \cdot a_0 b_1) + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 + (1 \cdot a_1 b_1) \\ 0 + 0 + (1 \cdot a_1 b_0) + 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 b_0 \\ a_0 b_1 \\ a_1 b_1 \\ a_1 b_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Observe que, como consequência direta da operação, as amplitudes correspondentes aos estados $|10\rangle$ e $|11\rangle$ (terceira e quarta linhas do vetor) foram trocadas. Utilizando as matrizes globais $\hat{P}_0$ e $\hat{P}_+$ (de dimensão 4×4) definidas anteriormente, calculamos o colapso para a primeira sequência de projeções, operando $(\hat{P}_0 \hat{P}_+)$ sobre o novo estado emaranhado

$$\begin{aligned} (\hat{P}_0 \hat{P}_+) |\psi_{em}\rangle &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 b_0 \\ a_0 b_1 \\ a_1 b_1 \\ a_1 b_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\frac{1}{2} \cdot a_0 b_0) + 0 + (\frac{1}{2} \cdot a_1 b_1) + 0 \\ 0 + (\frac{1}{2} \cdot a_0 b_1) + 0 + (\frac{1}{2} \cdot a_1 b_0) \\ 0 + 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_0 b_0 + a_1 b_1) \\ \frac{1}{2}(a_0 b_1 + a_1 b_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Elevando ao quadrado a norma deste vetor resultante para obter a probabilidade final (somando o quadrado dos módulos de cada componente do vetor), notamos o surgimento de termos de interferência decorrentes do emaranhamento

$$\begin{aligned}
 P(\text{sequência} + \text{depois } 0)_{em} &= ||(\hat{P}_0 \hat{P}_+)|\psi_{em}\rangle||^2 \\
 &= \left| \frac{1}{2}(a_0 b_0 + a_1 b_1) \right|^2 + \left| \frac{1}{2}(a_0 b_1 + a_1 b_0) \right|^2 + |0|^2 + |0|^2 \\
 &= \frac{1}{4} [|a_0 b_0 + a_1 b_1|^2 + |a_0 b_1 + a_1 b_0|^2] \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

Avaliamos, então, a ordem inversa das operações, multiplicando sequencialmente a matriz global $(\hat{P}_+ \hat{P}_0)$ pelo vetor emaranhado

$$\begin{aligned}
 (\hat{P}_+ \hat{P}_0)|\psi_{em}\rangle &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 b_0 \\ a_0 b_1 \\ a_1 b_1 \\ a_1 b_0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (\frac{1}{2} \cdot a_0 b_0) + 0 + 0 + 0 \\ 0 + (\frac{1}{2} \cdot a_0 b_1) + 0 + 0 \\ (\frac{1}{2} \cdot a_0 b_0) + 0 + 0 + 0 \\ 0 + (\frac{1}{2} \cdot a_0 b_1) + 0 + 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_0 b_0 \\ \frac{1}{2} a_0 b_1 \\ \frac{1}{2} a_0 b_0 \\ \frac{1}{2} a_0 b_1 \end{pmatrix} \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

A probabilidade neste caso é calculada extraindo a norma ao quadrado do vetor. Ao expandirmos os termos, podemos colocar as constantes e a amplitude inicial $|a_0|^2$ em evidência, aplicando, por fim, a regra da normalização intrínseca do segundo *qubit* ($|b_0|^2 + |b_1|^2 = 1$)

$$\begin{aligned}
 P(\text{sequência } 0 \text{ depois } +)_{em} &= ||(\hat{P}_+ \hat{P}_0)|\psi_{em}\rangle||^2 \\
 &= \left| \frac{1}{2} a_0 b_0 \right|^2 + \left| \frac{1}{2} a_0 b_1 \right|^2 + \left| \frac{1}{2} a_0 b_0 \right|^2 + \left| \frac{1}{2} a_0 b_1 \right|^2 \\
 &= \frac{1}{4} |a_0|^2 |b_0|^2 + \frac{1}{4} |a_0|^2 |b_1|^2 + \frac{1}{4} |a_0|^2 |b_0|^2 + \frac{1}{4} |a_0|^2 |b_1|^2 \\
 &= \frac{2}{4} |a_0|^2 |b_0|^2 + \frac{2}{4} |a_0|^2 |b_1|^2 \\
 &= \frac{1}{2} |a_0|^2 (|b_0|^2 + |b_1|^2) \\
 &= \frac{1}{2} |a_0|^2 (1) \\
 &= \frac{1}{2} |a_0|^2 \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Assim, para o estado inicial de superposição balanceada ($a_0 = a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$), a sequência $\hat{P}_0\hat{P}_+$ produz uma probabilidade de 50%, enquanto a sequência inversa $\hat{P}_+\hat{P}_0$ produz uma probabilidade de 25%. Esses valores evidenciam quantitativamente que a inversão da ordem dos operadores altera o resultado probabilístico do sistema.

4.0.4 Fechamento e Implicações do Modelo

Os resultados matemáticos extraídos destas simulações demonstram um cenário algébrico e estatístico notável para a validação da não-comutatividade. A análise comparativa atesta que a probabilidade da sequência projetiva inicial, definida analiticamente por $\hat{P}_+\hat{P}_0$, permaneceu matematicamente inalterada em $\frac{1}{2}|a_0|^2$ ao transitar do sistema clássico separável para a topologia de emaranhamento. Contudo, a avaliação estrita da ordem invertida, representada pelos operadores $\hat{P}_0\hat{P}_+$, sofreu uma distorção probabilística mensurável.

A introdução do Estado de Bell no sistema incorporou os termos cruzados de interferência, algebricamente expressos pelas grandezas $(a_0b_0 + a_1b_1)$ e $(a_0b_1 + a_1b_0)$. Esse comportamento algébrico evidencia a dependência informacional operante entre as variáveis, o que corrobora o cumprimento dos objetivos específicos estipulados para este trabalho. Alinhada à perspectiva de Busemeyer ([BUSEMEYER; BRUZA, 2012](#)), a mecânica quântica é adotada nesta pesquisa não como uma hipótese neurobiológica, mas como o fundamento para modelar variáveis cognitivas incompatíveis. Os cálculos demonstraram que projetar o vetor de estado em uma alternativa altera o seu contexto, de modo que a mera inversão na ordem de aplicação dos operadores projetivos força o sistema a percorrer caminhos topológicos divergentes, alterando o resultado probabilístico final. Dessa forma, a abordagem fundamentada na expansão de matrizes em espaços de quatro dimensões contorna a premissa estritamente comutativa da probabilidade clássica, consolidando o formalismo de Hilbert.

Diante dos resultados apresentados, a infraestrutura não-comutativa indica um potencial de contribuição metodológica para trabalhos futuros na área de Inteligência Artificial ([IA](#)) em que a ordem importa. Ao flexibilizar as premissas de independência condicional, essa abordagem oferece uma alternativa algébrica para o desenvolvimento de agentes computacionais mais sensíveis ao contexto. Sob essa arquitetura, a sequência de aquisição dos dados deixa de ser modelada como mero ruído estocástico para atuar como um componente que influencia ativamente a dinâmica da tomada de decisão. Consequentemente, a exploração dessa mecânica computacional abre perspectivas pragmáticas para o aprimoramento de algoritmos de aprendizado de máquina direcionados a cenários analíticos nos quais a interdependência e a ordem da informação são fatores estruturais críticos.

5 Conclusão

Este trabalho apresentou uma investigação matemático-computacional acerca da dinâmica não-comutativa em sistemas de múltiplos *qubits*. O objetivo central consistiu em investigar, por meio do formalismo dos espaços complexos de Hilbert, como diferentes sequências de avaliações, representadas por operadores de projeção, modificam a evolução de um estado quântico previamente preparado e, conseqüentemente, as probabilidades associadas às possíveis medições. Essa abordagem foi estabelecida como base estrutural para a modelagem de processos de decisão, empregando a teoria da Cognição Quântica como uma estrutura matemática e metodológica, sem pressupor interpretações neurobiológicas diretas.

A transição da fundamentação teórica para a utilização de ferramentas computacionais representou o marco prático desta pesquisa. Mediante a utilização de simuladores dos ecossistemas IBM Qiskit e Google Cirq, foi possível codificar, executar e validar a formulação do Estado de Bell. A análise dos dados obtidos confirmou a inseparabilidade informacional das variáveis modeladas, estabelecendo a estrutura vetorial necessária para a investigação de avaliações sequenciais em sistemas de múltiplos *qubits*.

O resultado central do estudo não está apenas na não-comutatividade da multiplicação entre os operadores, mas no efeito dessa propriedade quando os operadores são aplicados sequencialmente sobre um estado previamente preparado. Nesse contexto, a ordem das avaliações determina diferentes transformações do vetor de estado, produzindo estados finais distintos e, conseqüentemente, diferentes probabilidades de medição. Nos sistemas analisados, a inversão da sequência dos operadores de projeção resultou em uma alteração da probabilidade observada, de 25% para 50%. Dessa forma, os resultados demonstram que a dinâmica não-comutativa pode ser utilizada para representar matematicamente situações nas quais avaliações sucessivas modificam o estado do sistema e influenciam os resultados de avaliações posteriores, estabelecendo uma relação formal com a premissa do Efeito de Ordem.

A preparação inicial do estado constitui, portanto, uma etapa fundamental da modelagem. Diferentemente de uma análise baseada exclusivamente na multiplicação de matrizes, o formalismo empregado considera um sistema que possui um estado inicial definido, sobre o qual são realizadas avaliações sucessivas. A cada operação, o estado do sistema é transformado, de modo que uma avaliação anterior pode alterar as condições nas quais uma avaliação posterior é realizada. Assim, a influência da ordem não decorre apenas da propriedade algébrica dos operadores, mas da maneira como diferentes sequências de operações atuam sobre o estado do sistema e modificam as probabilidades associadas às

medições.

Diante dos resultados, a possível contribuição metodológica deste trabalho para estudos futuros na área de Inteligência Artificial reside na proposição de estruturas para tomada de decisão sensíveis ao contexto e à sequência das informações. Ao demonstrar que diferentes sequências de avaliação podem produzir estados finais e probabilidades distintas a partir de um mesmo estado inicial, estabelece-se uma perspectiva para o uso de estruturas baseadas em espaços complexos e sistemas de múltiplos *qubits* no desenvolvimento de modelos computacionais nos quais a ordem das informações desempenha um papel relevante.

Referências

- ATKINS, P.; PAULA, J. de. *Físico-Química*. [S.l.]: LTC, 2018. Citado na página 21.
- BELLAC, M. L. *A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computation*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 16, 22, 23, 24 e 28.
- BUSEMEYER, J. R.; BRUZA, P. D. *Quantum Models of Cognition and Decision*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. Citado 9 vezes nas páginas 17, 23, 24, 25, 29, 30, 32, 34 e 48.
- Cirq Developers. *Cirq: A Python framework for creating, editing, and invoking Noisy Intermediate Scale Quantum (NISQ) circuits*. 2023. <<https://quantumai.google/cirq>>. Acesso em: 16 jun. 2026. Citado na página 38.
- DIRAC, P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics*. 4. ed. Oxford: Oxford University Press, 1981. ISBN 9780198520115. Citado na página 22.
- FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics, Vol. 3*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1965. Citado na página 21.
- MOORE, D. W. Measuring new types of question order effects. *Public Opinion Quarterly*, Oxford University Press, v. 66, n. 1, p. 80–91, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 17, 30 e 31.
- NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. Citado na página 25.
- NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. Citado 14 vezes nas páginas 16, 17, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33 e 38.
- Qiskit contributors. *Qiskit: An Open-source Framework for Quantum Computing*. 2023. <<https://qiskit.org>>. Acesso em: 16 jun. 2026. Citado na página 38.
- SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. *Princípios de Física: Volume 4 – Óptica e Física Moderna*. São Paulo: Cengage Learning, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 21.
- STERN, O.; GERLACH, W. Der experimentelle nachweis der richtungsquantelung im magnetfeld. *Zeitschrift für Physik*, v. 9, p. 349–352, 1922. Citado na página 21.
- WANG, X. et al. Transition role of entangled data in quantum machine learning. *Nature Communications*, v. 15, p. 1–8, 2024. Citado 3 vezes nas páginas 29, 36 e 37.
- WANG, Z. et al. Context effects produced by question orders reveal quantum nature of human judgments. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 111, n. 26, p. 9431–9436, 2014. Citado 6 vezes nas páginas 17, 23, 25, 36, 37 e 38.
- YEARSLEY, J. M.; BUSEMEYER, J. R. Quantum cognition and decision theories: A tutorial. *Journal of Mathematical Psychology*, Elsevier, v. 74, p. 99–116, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 17, 29, 30 e 31.