UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Fernanda Aparecida de Jesus Silva

Existência e unicidade de solução para a equação de Laplace no disco

Ouro Preto - MG, Brasil

Novembro 2025

Fernanda Aparecida de Jesus Silva

Existência e unicidade de solução para a equação de Laplace no disco

Monografia de graduação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, através do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Correa Paes Leme

Ouro Preto - MG, Brasil

Novembro 2025

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E BIOLOGICAS
COLEGIADO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMATICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Fernanda Aparecida de Jesus Silva

Existência e unicidade de solução para a equação de Laplace no disco

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática

Aprovada em 28 de janeiro de 2026

Membros da banca

Dr. Leandro Correa Paes Leme - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Bruno Mendes Rodrigues - Universidade Federal de Ouro Preto

Leandro Correa Paes Leme, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 02/02/2026.

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163
Telefone: (31)3559-1700 - www.ufop.br

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ser minha fonte inesgotável de força e esperança. Agradeço pela sabedoria concedida em cada etapa deste caminho, pela serenidade nos momentos de dúvida e pela graça que me sustentou quando pensei em desistir. Sem sua presença iluminando meus passos, eu não teria chegado até aqui.

Agradeço a minha mãe, por todo amor, sacrifício e dedicação ao longo da minha vida. Obrigada por ser exemplo de força, coragem e generosidade. Foi o seu apoio, muitas vezes silencioso, que me sustentou nos dias difíceis e foi o seu amor que me deu motivos para continuar. Tudo o que conquisto carrega um pouco de você, e este trabalho é também um reflexo do seu esforço e da sua fé em mim.

Agradeço ao meu orientador, Leandro, expresso minha sincera gratidão pela orientação cuidadosa e comprometida ao longo de todo este trabalho. Agradeço pela atenção dedicada, pelas contribuições sempre pertinentes e pela paciência em cada etapa do processo. Seu apoio foi muito importante para a realização deste estudo e para o meu desenvolvimento acadêmico.

Agradeço ao meu namorado, Paulo, pelo amor, paciência e apoio constante. Obrigada por acreditar em mim até quando eu mesma duvidei e por celebrar cada pequena conquista ao meu lado. Seu carinho e sua presença me deram forças para seguir em frente e concluir esta etapa com o coração mais leve.

Agradeço aos colegas e amigos do curso, pelo apoio, pela troca de experiências e pela companhia nos momentos desafiadores. Cada conversa, cada estudo em grupo e cada palavra de incentivo fizeram diferença e tornaram este processo mais possível e significativo. A presença de cada um de vocês tornou essa etapa mais humana e realizável.

Agradeço aos professores do curso, que compartilharam conhecimento e experiências que fizeram diferença na minha formação acadêmica e pessoal.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, deixo aqui o meu sincero agradecimento.

"A educação é o ponto em que decidimos se amamos o mundo o bastante para assumirmos a responsabilidade por ele."

(Hannah Arendt)

RESUMO

Neste trabalho estudamos a equação de Laplace $\Delta u = 0$, no disco. A equação de Laplace possui inúmeras aplicações na física, engenharia e matemática. Neste trabalho, utilizamos cálculo, teoria de equações diferenciais e técnicas para determinar a função de Green no disco. Encontramos uma solução para a equação de Laplace e provamos que esta solução é única por meio do princípio do máximo.

Palavras chaves: Equação de Laplace; Função de Green; Princípio do Máximo.

ABSTRACT

In this work we study Laplace's equation $\Delta u = 0$, in the disk. Laplace's equation has numerous applications in physics, engineering and mathematics. In this work, we use calculus, differential equation theory and techniques to determine the Green's function in the disk. We find a solution for Laplace's equation and we prove that this solution is unique by means of the maximum principle.

keywords: Laplace Equation; Green Function; Maximum Principle.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Seja $u = u(x_1, x_2)$ uma função real de duas variáveis, que possua derivadas parciais de segunda ordem. O operador laplaciano é um operador diferencial parcial de segunda ordem, definido por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Este operador aparece em várias equações presentes na física, na engenharia e na matemática. Dentre elas, podemos destacar algumas equações importantes. Por exemplo, a equação de Laplace

$$\Delta u = 0, \tag{1}$$

a equação de Poisson

$$\Delta u = f,$$

a equação do calor

$$u_t - \Delta u = 0 \tag{2}$$

e a equação da onda

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

A equação de Laplace foi estudada pela primeira vez no final do século XVIII, pelo francês Pierre Simon Laplace, enquanto ele trabalhava em problemas de mecânica celeste e teoria da probabilidade. Esta equação possui inúmeras aplicações em física, pois aparece naturalmente em problemas de potenciais elétricos, magnéticos, gravitacionais, hidrodinâmica, temperaturas de estado estacionário, entre outros. A seguir, descrevemos algumas aplicações da equação de Laplace. Para mais exemplos de aplicações da equação de Laplace, ver (LEIGHTON et al., 1964)

Na ausência de cargas se movendo, as equações de Maxwell da eletrostática, tomam a forma

$$div\vec{E} = 0 \quad \text{e} \quad rot\vec{E} = 0,$$

em que $div\vec{E}$ e $rot\vec{E}$ denotam o divergente e o rotacional do campo elétrico $\vec{E}$, definido no curso de cálculo III. Da segunda equação de Maxwell, obtemos que o campo elétrico $\vec{E}$ é conservativo. Isto significa que existe uma função ϕ real, chamada de potencial elétrico, tal que $\vec{E} = -\nabla\phi$. Ao substituir a expressão do campo elétrico na primeira equação de Maxwell, obtemos a equação de Laplace

$$div(-\nabla\phi) = -\Delta\phi = 0.$$

Uma vez obtido o potencial elétrico, podemos facilmente encontrar o campo elétrico $\vec{E}$.

Outra situação em que a equação de Laplace aparece é em problemas de temperaturas em estado estacionário. Esta é uma situação em que não há perda ou ganho de calor para o ambiente, dessa forma, temos que $u_t = 0$, em que u é a função temperatura. Neste caso, a equação do calor (2) toma a forma

$$\Delta u = 0.$$

Isto significa que a função temperatura u satisfaz a equação de Laplace.

Vamos descrever melhor o que ocorre em um problema de temperatura em estado estacionário, mas antes daremos algumas definições. Seja $R > 0$ e $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Definimos o disco de centro na origem e raio R, por

$$B_R(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| < R\right\},$$

em que $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Definimos também o fecho e a fronteira do disco $B_R(0)$, respectivamente, por

$$\overline{B}_R(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq R\right\},$$

$$\partial B_R(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| = R\right\}.$$

Suponha que tenhamos um disco $B_R(0)$, de um certo material, em que este disco é aquecido em sua fronteira $\partial B_R(0)$, de acordo com a função temperatura g. Veja a FIG. 1.

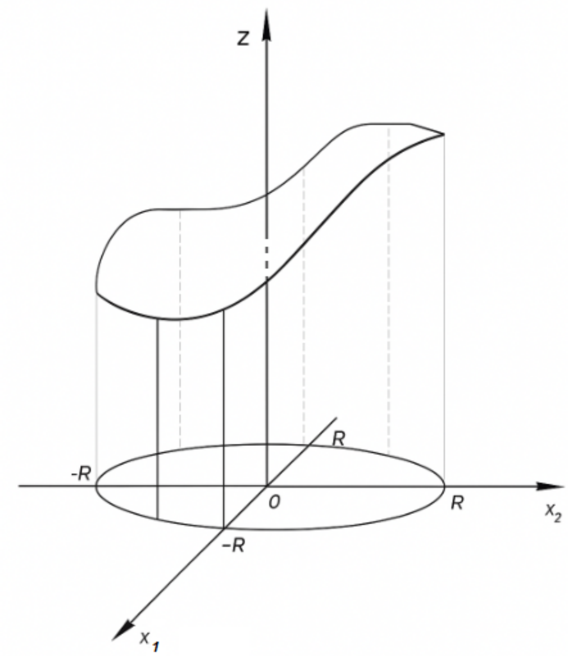

Figura 1 – Condição de fronteira no disco.

Fonte: Os autores.

O fluxo de calor $\vec{F}$ é dado pela Lei da condução de calor de Fourier

$$\vec{F} = -k\nabla u$$

onde k é a constante de condutividade térmica do material e $u(x) = u(x_1, x_2)$ representa a função temperatura em cada ponto do disco. Quando consideramos que não há perda de calor para o ambiente, existe um momento em que o disco entra em equilíbrio térmico. Este estado estacionário de temperatura, significa que

$$div\vec{F} = 0.$$

Para o campo $\vec{F}$ dado pela Lei da condução de calor de Fourier, temos que

$$div\vec{F} = div(-k\nabla u) = -k\Delta u = 0$$

e portanto a função temperatura u deve satisfazer à equação de Laplace (1). Nesta situação, a função temperatura u satisfaz às equações

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em} \quad B_R(0), \\ u = g, & \text{sobre} \quad \partial B_R(0), \end{cases} \tag{3}$$

chamado problema de Dirichlet para a equação de Laplace no disco, onde g é uma função contínua dada na fronteira do disco.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio (aberto conexo) limitado. Dizemos que uma função $u \in C^0(\Omega)$, ou é de classe $C^0(\Omega)$, se u for contínua em Ω. Uma função $u \in C^k(\Omega)$, ou é de classe $C^k(\Omega)$, se u possuir todas as derivadas parciais até a ordem k, contínuas em Ω.

Dizemos que uma função u é solução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace no disco, se $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B}_R(0))$ e satisfaz às equações (3). Usando a teoria de cálculo diferencial e integral, equações diferenciais e as técnicas para determinar a função de Green no disco, apresentamos o resultado principal deste trabalho.

Teorema 0.0.1. *O problema de Dirichlet para a equação de Laplace no disco, possui uma única solução.*

Ao considerar o amplo campo de aplicações do operador laplaciano em fenômenos físicos (como potenciais elétricos, distribuição de temperatura, campos gravitacionais e comportamento de ondas) torna-se possível estabelecer conexões com conteúdos presentes na Educação Básica, ainda que em versões simplificadas. Conceitos como fluxo, variação, equilíbrio térmico e propagação de energia permitem ao professor introduzir, de modo acessível, a compreensão de que certas leis físicas podem ser descritas por equações diferenciais, ainda que os estudantes não resolvam tais equações formalmente. Esse tipo de abordagem possibilita ao aluno compreender que a matemática, especialmente em sua formulação avançada, é uma linguagem essencial para a interpretação de fenômenos naturais.

Nesse contexto, a relação entre Matemática e Física torna-se essencial, pois permite ao estudante perceber como modelos matemáticos (incluindo aqueles formulados a partir do operador laplaciano) são empregados para descrever e compreender fenômenos como potenciais elétricos e distribuição de temperaturas. Ao explorar essas conexões de forma qualitativa na Educação Básica, mesmo sem recorrer ao formalismo das equações diferenciais, é possível introduzir aos estudantes a compreensão de que muitos comportamentos físicos observados em situações cotidianas são resultado de modelos matemáticos subjacentes, ainda que trabalhados de maneira simplificada. Essa perspectiva dialoga diretamente com a Base Nacional Comum Curricular, especialmente com a Competência Específica 4, que orienta a compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemática (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, entre outros) na resolução e comunicação de resultados de problemas, favorecendo a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Mais especificamente, voltemos à situação do problema de temperatura de estado estacionário. Podemos considerar uma situação mais simples do problema, em que temos uma barra de comprimento L ao invés do disco. Suponha que esta barra é aquecida em suas extremidades (fronteira da barra) de acordo com a função temperatura g, digamos $g(0) = g_0$ e $g(L) = g_L$. Veja a FIG. 2.

A mesma argumentação que foi feita para o disco, vale também para a barra. Dessa forma, a

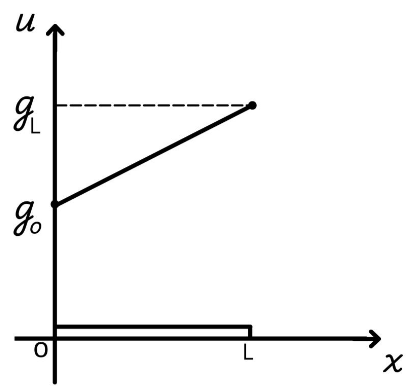

Figura 2 – Solução da equação de Laplace em uma barra de comprimento L.

Fonte: Os autores.

função temperatura $u(x)$, em que $x \in \mathbb{R}$, deve satisfazer às equações do problema de Dirichlet na barra:

$$\begin{cases} u''(x) = 0 \quad \text{em} \quad (0, L), \\ u(0) = g_0, \quad u(L) = g_L. \end{cases}$$

Usando as técnicas do cálculo diferencial e integral, integrando duas vezes $u''(x)$ e substituindo as condições iniciais, obtemos a solução

$$u(x) = \left(\frac{g_L - g_0}{L}\right) x + g_0.$$

Observe que a solução da equação de Laplace na barra é um segmento de reta, que se inicia no ponto $(0, g_0)$ e termina no ponto (L, g_L). Portanto, no ensino médio, podemos apresentar a solução do problema de temperatura de estado estacionário na barra, utilizando o simples conceito de função linear, cujo gráfico é o segmento de reta que une os pontos $(0, g_0)$ e (L, g_L) no plano.

No capítulo 1 utilizamos uma propriedade importante do operador laplaciano para transformar a equação de Laplace em uma equação diferencial ordinária (E.D.O.). Resolvemos esta E.D.O. e obtemos a solução fundamental para a equação de Laplace.

No capítulo 2 utilizamos alguns resultados importantes para obter uma fórmula de representação da solução. Esta fórmula de representação dependerá de uma função $G(x, y)$ chamada função de Green. O objetivo deste capítulo é determinar a função de Green no disco.

No capítulo 3 utilizaremos a fórmula de representação obtida no capítulo anterior, para mostrar que o problema de Dirichlet (3) possui solução. Mostraremos também que esta solução é única, utilizando um resultado muito importante, chamado o princípio do máximo. Nosso texto é baseado nas notas de aula do Rodney Josué Biezuner (BIEZUNER, 2010. Acesso em: 26 jan. 2026) e no livro do Lawrence C. Evans (EVANS, 1998).

Capítulo 1

SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Neste capítulo, vamos utilizar as propriedades do operador laplaciano para procurar por uma solução da equação de Laplace. Ao longo do texto, utilizaremos as notações $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ para denotar pontos (ou vetores) do $\mathbb{R}^2$. Vamos começar enunciando um fato importante sobre o operador laplaciano.

Lema 1.0.1. *O operador laplaciano é invariante por rotações.*

Demonstração. Veja o Lema A.0.1 no Apêndice A. □

Dizer que o operador laplaciano é invariante por rotações significa que rotacionar o sistema de coordenadas não altera o valor do laplaciano (Δu). Tendo em vista o resultado anterior, é natural procurarmos por funções que são invariantes por rotações. Um tipo de função que possui esta característica é a função radial.

Definição 1.0.1. *Dizemos que uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é radial ou radialmente simétrica, se $u(x) = u(|x|) = u(r)$.*

O próximo resultado mostra como escrever o operador laplaciano na variável radial $r = |x|$.

Teorema 1.0.1. *Seja $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função radial. Então o operador laplaciano é dado por*

$$\Delta u(x) = u''(r) + u'(r)\left(\frac{1}{r}\right)$$

em que $u'(r)$ e $u''(r)$ denotam as derivadas de $u(r)$ com relação à variável real r.

Demonstração. De fato, como

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

temos

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1}{r}.$$

Daí, pela regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x_1}{r} = u'(r)\frac{x_1}{r}.$$

Calculando a derivada segunda de u com relação a x_1, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(u'(r)\frac{x_1}{r}\right) &= \frac{\partial u'(r)}{\partial x_1}\frac{x_1}{r} + u'(r)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{r}\right) \\ &= u''(r)\frac{x_1^2}{r^2} + u'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_1^2}{r^3}\right). \end{aligned} \tag{1.1}$$

De maneira análoga, podemos calcular a derivada segunda de u, com relação a x_2:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = u''(r)\frac{x_2^2}{r^2} + u'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_2^2}{r^3}\right). \tag{1.2}$$

Somando as equações (1.1) e (1.2), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \\ &= u''(r)\frac{x_1^2}{r^2} + u'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_1^2}{r^3}\right) + u''(r)\frac{x_2^2}{r^2} + u'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_2^2}{r^3}\right) \\ &= u''(r)\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{r^2}\right) + u'(r)\left(\frac{2}{r} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^3}\right) \\ &= u''(r) + u'(r)\left(\frac{1}{r}\right).\end{aligned}$$

□

Para uma função radial, o Teorema 1.0.1 afirma que a solução da equação de Laplace deve satisfazer à equação diferencial ordinária (E.D.O.) de segunda ordem

$$u''(r) + u'(r)\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

$$\Delta u(x) = 0.$$

O próximo resultado mostra que esta E.D.O. possui solução.

Teorema 1.0.2. *A E.D.O. de segunda ordem*

$$u''(r) + u'(r)\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

possui uma solução $u : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ *dada por* $u(r) = \ln r$.

Demonstração. Podemos reduzir a ordem desta equação substituindo $v(r) = u'(r)$. Então $v(r)$ satisfaz

$$v'(r) + v(r)\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

donde obtemos

$$\frac{v'(r)}{v(r)} = -\frac{1}{r}$$

$$\int \frac{v'(r)}{v(r)}dr = -\int \frac{1}{r}dr + c_1$$

$$\ln v(r) = -\ln r + c_1$$

$$\ln(r \cdot v(r)) = c_1$$

$$r \cdot v(r) = e^{ln_e c_1} = c_1$$

$$v(r) = \frac{c_1}{r}$$

Como

$$u'(r) = v(r) \Rightarrow u(r) = \int v(r)dr + c_2 = \int \frac{c_1}{r}dr + c_2 = c_1 \ln r + c_2$$

Portanto a solução geral da EDO é

$$u(r) = c_1 \ln r + c_2.$$

Onde c_1 e c_2 são constantes. Podemos considerar como solução

$$u(r) = \ln r$$

pois

$$\Delta(u_r) = 0 \Rightarrow \Delta(c_1 \ln r + c_2) = 0 \Leftrightarrow c_1 \Delta(\ln r) = 0 \Rightarrow \Delta(\ln r) = 0$$

□

Definição 1.0.2. *Uma função $u \in C^2(\Omega)$ que satisfaz a equação de Laplace $\Delta u = 0$, é chamada função harmônica em Ω.*

Observe que a função $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) = \ln|x|$ satisfaz a equação de Laplace $\Delta u = 0$. Consequentemente, esta função é harmônica em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mas observe que a função $u(x) = \ln|x|$ não está definida na origem e portanto, não é harmônica em $B_R(0)$.

Definição 1.0.3. *A função $\Gamma : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\Gamma(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x|$$

é chamada solução fundamental para a equação de Laplace.

A constante multiplicativa $-\frac{1}{2\pi}$ é introduzida na definição da solução fundamental justamente para que ela não apareça na fórmula de representação de Green (Teorema 2.1.1 apresentado no próximo capítulo).

Lema 1.0.2. *O operador laplaciano é invariante por translações.*

Demonstração. Veja o Lema A.0.2 no Apêndice A. □

Observe que a função $\Gamma(x)$ não está definida na origem. Vamos retirar esta singularidade da origem, passando para uma singularidade em um ponto $y \in \Omega$. Isso pode ser feito considerando a função $\Gamma(x-y)$. O Lema 1.0.2 garante que $\Gamma(x-y)$ é harmônica em $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$.

Capítulo 2

FUNÇÃO DE GREEN

2.1 Fórmulas de representação

Dada uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, pretendemos obter uma fórmula de representação integral para $u(y)$ a partir da solução fundamental $\Gamma(x-y)$, onde $y \in \Omega$ é um ponto arbitrário. Para isto, gostaríamos de usar a segunda identidade de Green, enunciada pelo lema seguinte.

Lema 2.1.1 (Segunda Identidade de Green)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto com fronteira suave. Se $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ então vale a identidade*

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dA = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$$

Demonstração. Veja o Lema A.0.3 no Apêndice A. □

À primeira vista, poderíamos considerar a substituição direta de $\Gamma(x-y)$ pela função v, no entanto, isso não é possível devido à singularidade de $\Gamma(x-y)$ no ponto y. Para contornar essa dificuldade, aplicamos a segunda identidade de Green na região $\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)$ e tomamos o limite quando $\varepsilon \to 0$. Antes de enunciar o próximo resultado, apresentamos uma propriedade importante que será utilizada em sua demonstração.

Lema 2.1.2 (Propriedade da Média)**.** *Se $u \in C^0(\Omega)$ e $\overline{B}_\varepsilon(x) \subset \Omega$, então u satisfaz a propriedade*

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u dS.$$

Demonstração. Veja o Lema A.0.4 no Apêndice A. □

Agora estamos prontos para provar a fórmula de representação de Green. Observe que qualquer função com uma certa regularidade, possui uma representação integral dada pelo próximo resultado. Vamos utilizar o subíndice x ou y, para denotar a variável de integração ou derivação.

Teorema 2.1.1 (Fórmula de Representação de Green)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Então, para todo $y \in \Omega$, temos*

$$u(y) = -\int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial \nu}\Gamma(x-y) \right) dS_x - \int_\Omega \Delta u \Gamma(x-y) dA_x.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, para que tenhamos $\overline{B}_\varepsilon(y) \subset \Omega$. Então $\Gamma(x-y)$ é de classe C^1 em que $\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)$ e podemos aplicar a segunda identidade de Green a esta região para obtermos

$$\begin{aligned}\int_{\partial[\Omega\setminus\overline{B}_\varepsilon(y)]}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Gamma(x-y)-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y)\right)dS_x &= \int_{\Omega\setminus\overline{B}_\varepsilon(y)}\Delta u\Gamma(x-y)dA_x\\ &\quad-\int_{\Omega\setminus\overline{B}_\varepsilon(y)}u\Delta\Gamma(x-y)dA_x\\ &=\int_{\Omega\setminus\overline{B}_\varepsilon(y)}\Delta u\Gamma(x-y)dA_x\end{aligned}$$

pois $\Gamma(x-y)$ é harmônica em $\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)$. Note que podemos escrever $\partial[\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)] = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon(y)$. Dessa forma, podemos separar a integral de fronteira na identidade anterior, para obter

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Gamma(x-y)-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y)\right)dS_x+\int_{\partial B_\varepsilon(y)}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Gamma(x-y)-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y)\right)dS_x\\ =\int_{\Omega\setminus\overline{B}_\varepsilon(y)}\Delta u\Gamma(x-y)dA_x.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Observe que na segunda integral de fronteira, o vetor normal unitário ν aponta para dentro do disco $B_\varepsilon(y)$. Veja a FIG. 3.

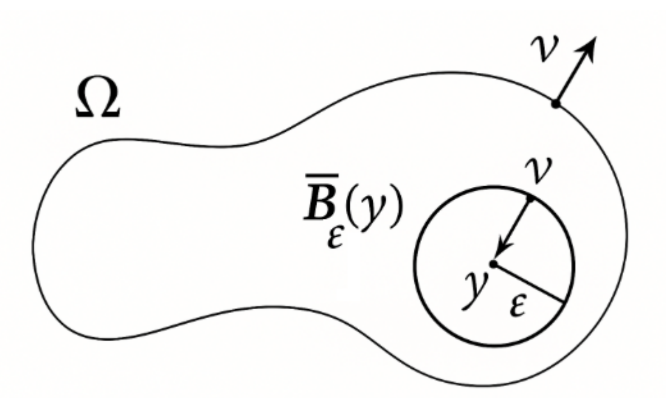

Figura 3 – Vetor normal exterior à fronteira de $\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)$.

Fonte: Os autores.

Seja $C = \sup_{\overline{\Omega}} |\nabla u|$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\Gamma(x-y)dS_x\right| = \left|\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \nabla u\cdot\nu\Gamma(x-y)dS_x\right| &\leq \int_{\partial B_\varepsilon} |\nabla u||\nu||\Gamma(x-y)|dS_x\\ &\leq C\int_{\partial B_\varepsilon} |\Gamma(x-y)|dS_x = \frac{C}{2\pi}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \ln|x-y|dS_x\\ &= \frac{C}{2\pi}\ln(\varepsilon)\int_{\partial B_\varepsilon(y)} 1dS_x = C\varepsilon\ln\varepsilon.\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\ln\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\varepsilon = 0.$$

Consequentemente

$$\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\Gamma(x-y)dS_x \to 0 \tag{2.2}$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y)dS_x &= \int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\nabla_x\Gamma(x-y)\cdot\nu dS_x\\ &= \frac{-1}{2\pi}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\nabla_x\ln|x-y|\cdot\left[\frac{-(x-y)}{|x-y|}\right]dS_x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{u}{|x-y|}dS_x = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} udS_x\\ &= \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(y)|}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} udS_x\end{aligned}$$

pois $\nabla_x \ln|x-y| = \frac{x-y}{|x-y|^2}$ calculado na variável de integração x. Segue da propriedade da média, Lema 2.1.2, que

$$\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y)dS_x \to u(y) \tag{2.3}$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Como a função $\ln|x|$ é integrável numa vizinhança da origem, obtemos também que

$$\int_{\Omega\setminus\overline{B}_\varepsilon(y)} \Delta u\Gamma(x-y)dA_x \to \int_\Omega \Delta u\Gamma(x-y)dA_x \tag{2.4}$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Fazendo $\varepsilon \to 0$ em (2.1), concluímos por (2.2), (2.3) e (2.4), que

$$u(y) = -\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial \nu}\Gamma(x-y)\right)dS_x - \int_\Omega \Delta u\Gamma(x-y)dA_x.$$

$\square$

Como consequência do resultado anterior, quando temos uma função harmônica, a fórmula de representação de Green, Teorema 2.1.1, assume a forma seguinte.

Corolário 2.1.1 (Fórmula de Representação para Funções Harmônicas)**.** *Seja* Ω *um aberto limitado e* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *uma função harmônica. Então, para todo* $y \in \Omega$*, temos*

$$u(y) = -\int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial \nu}\Gamma(x-y) \right) dS_x.$$

Consequentemente, toda função harmônica é de classe C^∞ *em* Ω*. Além disso, qualquer derivada parcial* $\dfrac{\partial^\alpha u}{\partial y_i^\alpha}$ *de* u *também é uma função harmônica.*

Demonstração. De fato, como $y \notin \partial\Omega$, o integrando nesta fórmula de representação é infinitamente diferenciável com respeito a y. Dessa forma, podemos derivar sob o sinal de integral e mudar a ordem de derivação, para concluirmos que

$$\Delta \left[\frac{\partial^\alpha u}{\partial y_i^\alpha} \right](y) = \frac{\partial^\alpha}{\partial y_i^\alpha}\left[\Delta u\right](y) = 0.$$

□

2.2 Função de Green

No final da seção anterior, veja o Corolário 2.1.1, obtemos uma fórmula de representação para funções harmônicas. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ for uma função harmônica, então, para todo $y \in \Omega$, temos

$$u(y) = -\int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial \nu}\Gamma(x-y) \right) dS_x.$$

Observe que esta expressão depende da derivada normal de u na fronteira de Ω, um dado desconhecido no problema de Dirichlet. Nesta seção vamos escrever esta fórmula de representação substituindo a derivada normal de u pela derivada normal de outra função.

Para cada $y \in \Omega$, suponha que $h_y \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ resolve o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h_y = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ h_y(x) = \Gamma(x-y) & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela segunda identidade de Green, Lema 2.1.1, temos

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Gamma(x-y) - u\frac{\partial h_y}{\partial \nu} \right) dS_x = \int_{\Omega} h_y \Delta u dA_x.$$

Subtraindo esta identidade da fórmula de representação de Green, Teorema 2.1.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
u(y) &= -\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y)-\frac{\partial u}{\partial\nu}\Gamma(x-y)\right)dS_x-\int_{\Omega}\Delta u\Gamma(x-y)dA_x\\
&\quad -\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Gamma(x-y)-u\frac{\partial h_y}{\partial\nu}\right)dS_x+\int_{\Omega}h_y\Delta u dA_x\\
&= -\int_{\partial\Omega}u\left[\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y)-\frac{\partial h_y}{\partial\nu}(x)\right]dS_x-\int_{\Omega}\Delta u[\Gamma(x-y)-h_y(x)]dA_x. \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Definição 2.2.1. *A função $G:\Omega\times\Omega\setminus\{x=y\}\to\mathbb{R}$ definida por*

$$G(x,y)=\Gamma(x-y)-h_y(x)$$

é chamada função de Green para o laplaciano na região Ω.

Segue da equação (2.5), que $u(y)$ possui a seguinte fórmula de representação

$$u(y)=-\int_{\partial\Omega}u(x)\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)dS_x-\int_{\Omega}\Delta u(x)G(x,y)dA_x.$$

Consequentemente, a solução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace, possui a formula de representação dada pela proposição seguinte.

Proposição 2.2.1. *Seja Ω um aberto limitado. Então toda solução $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{em} \quad \Omega,\\ u=g & \text{sobre} \quad \partial\Omega,\end{cases}$$

satisfaz

$$u(y)=-\int_{\partial\Omega}g(x)\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)dS_x.$$

Assim, temos uma fórmula para construir a solução de qualquer problema de Dirichlet para o laplaciano em um domínio limitado Ω, desde que conheçamos a função de Green para Ω. A dificuldade é obter a função de Green para um dado domínio Ω.

O próximo resultado demonstra propriedades importantes sobre a função de Green.

Lema 2.2.1 (Propriedades da Função de Green)**.** *A função de Green possui as propriedades seguintes.*

i) A função de Green é simétrica, isto é, $G(x,y)=G(y,x)$.

ii) A função de Green $G(x, y)$ e sua derivada normal $\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y)$, são harmônicas nas duas variáveis em $x \neq y$.

Demonstração. Veja a Proposição 5.18 e o Corolário 5.19 de (BIEZUNER, 2010. Acesso em: 26 jan. 2026). □

2.3 Função de Green no disco

Vimos na seção anterior, Proposição 2.2.1, que a solução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace em Ω, deve satisfazer à fórmula de representação dada por

$$u(y) = -\int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y)dS_x. \tag{2.6}$$

Nesta seção, vamos determinar a função de Green no disco $B_R(0)$ e calcular sua derivada normal $\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y)$.

Para determinar a função de Green no disco $B_R(0)$, utilizaremos uma transformação, a chamada inversão através do círculo. Considere a transformação $T : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, definida por

$$T(y) = \overline{y} = \frac{R^2 y}{|y|^2}.$$

A inversão através do círculo, transforma o disco $B_R(0)$ em seu exterior $\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)$, mantendo fixado o círculo $\partial B_R(0)$. A sua inversa é ela própria. Veja a FIG. 4.

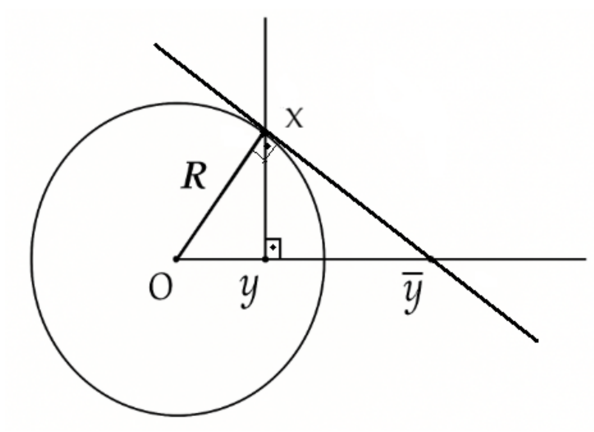

Figura 4 – Inversão através do círculo.

Fonte: Os autores.

O próximo resultado enuncia um fato importante sobre a quação de Laplace.

Lema 2.3.1. *A equação de Laplace é invariante por dilatações.*

Demonstração. Veja o Lema A.0.5, no Apêndice A. □

Agora estamos prontos para determinar a função de Green no disco.

Teorema 2.3.1. *A função de Green para o operador laplaciano no disco $B_R(0)$ é dada por*

$$G(x,y) = \begin{cases} \Gamma(x-y) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right) & se \quad y \neq 0, \\ \Gamma(x) - \Gamma(R) & se \quad y = 0. \end{cases}$$

Demonstração. De fato, fixado $y \in B_R(0)$, precisamos encontrar uma função harmônica $h_y \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\overline{B}_R(0))$ que seja solução para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h_y = 0 & \text{em} \quad B_R(0), \\ h_y(x) = \Gamma(x-y) & \text{sobre} \quad \partial B_R(0). \end{cases} \tag{2.7}$$

Se $y = (0,0)$, basta tomar h_y como sendo a função constante $h_y(x) \equiv \Gamma(R)$. Se $y \neq (0,0)$, a situação é mais complicada. Em princípio, poderíamos pensar em tomar a própria função $\Gamma(x-y)$, mas esta função possui uma singularidade em y. Vamos usar a inversão através do círculo, para transformar a singularidade y em um ponto $\overline{y}$, fora do disco. Observe que a função

$$h_y(x) = \Gamma\left(x - \overline{y}\right) = \Gamma\left(x - \frac{R^2 y}{|y|^2}\right)$$

é harmônica em $B_R(0)$, pois esta função deixa de ser harmônica apenas no ponto $\overline{y}$, que está fora do disco. Note que a função $h_y(x) = \Gamma\left(x - \overline{y}\right)$ é solução da equação

$$\Delta h_y = 0 \quad \text{em} \quad B_R(0),$$

mas

$$h_y(x) = \Gamma(x-\overline{y}) \neq \Gamma(x-y) \quad \text{sobre} \quad \partial B_R(0).$$

Dessa forma, precisamos fazer alguma operação na função $h_y(x)$ de tal maneira que ela continue sendo harmônica no disco $B_R(0)$ e que $h_y(x) = \Gamma(x-y)$ sobre o círculo $\partial B_R(0)$. O Lema 2.3.1 nos diz que a equação de Laplace é invariante por dilatações. Note que a função Γ é radial, mas

$$|x-\overline{y}| \neq |x-y| \quad \text{sobre} \quad \partial B_R(0).$$

Vamos fazer uma operação de dilatação para que possamos resolver este problema. Isto é, vamos mostrar que existe $k \in \mathbb{R}$, tal que

$$|k(x-\overline{y})| = |x-y| \quad \text{sobre} \quad \partial B_R(0).$$

De fato, tome $k = \dfrac{|y|}{R}$. Então, para $x \in \partial B_R(0)$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right| &= \left|\frac{|y|}{R}\left(x-\frac{R^2 y}{|y|^2}\right)\right| = \frac{|y|}{R}\left|x-\frac{R^2 y}{|y|^2}\right| \\
&= \left(\frac{|y|^2}{R^2}\left|x-\frac{R^2 y}{|y|^2}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{|y|^2}{R^2}\left(|x|^2-\frac{2R^2}{|y|^2}\langle x,y\rangle+\frac{R^4}{|y|^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{|y|^2}{R^2}|x|^2-2\langle x,y\rangle+R^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(|y|^2-2\langle x,y\rangle+|x|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(|x-y|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |x-y|,
\end{aligned}$$

pois $|x| = R$ e $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$, denota o produto escalar em $\mathbb{R}^2$. Concluímos que a função h_y definida por

$$h_y(x) = \Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right)$$

é a solução procurada para o problema de Dirichlet (2.7), no caso $y \neq 0$. Portanto a função de Green no disco $B_R(0)$ é a função $G(x, y) = \Gamma(x - y) - h_y(x)$, dada por

$$G(x,y) = \begin{cases} \Gamma(x-y) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right) & \text{se} \quad y \neq (0,0), \\ \Gamma(x) - \Gamma(R) & \text{se} \quad y = (0,0). \end{cases}$$

□

Para finalizar este capítulo, vamos calcular a derivada normal da função de Green $\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y)$. Como o vetor normal unitário apontando para fora é $\nu = \dfrac{x}{R}$, segue que

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \langle \nabla_x G(x,y), \frac{x}{R}\rangle.$$

O vetor gradiente de G, calculado na variável x, é dado por

$$\nabla_x G(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\Gamma(x-y) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right)\right], \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\Gamma(x-y) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right)\right]\right).$$

Calculando as derivadas parciais da solução fundamental, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Gamma(x-y) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|\right) = -\frac{1}{2\pi}\frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma(x-y) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|\right) = -\frac{1}{2\pi}\frac{x_2-y_2}{|x-y|^2}.$$

Calculando as derivadas parciais da função $\Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right)$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{|y|}{R}\left(x_1-\frac{R^2y_1}{|y|^2}\right)\right|\right) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\frac{|y|^2}{R^2}x_1-y_1}{|x-y|^2}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{|y|}{R}\left(x_2-\frac{R^2y_2}{|y|^2}\right)\right|\right) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\frac{|y|^2}{R^2}x_2-y_2}{|x-y|^2}.$$

Substituindo na expressão do gradiente da função de Green, obtemos

$$\nabla_x G(x,y) = \left(-\frac{1}{2\pi}\frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}+\frac{1}{2\pi}\frac{\frac{|y|^2}{R^2}x_1-y_1}{|x-y|^2}, -\frac{1}{2\pi}\frac{x_2-y_2}{|x-y|^2}+\frac{1}{2\pi}\frac{\frac{|y|^2}{R^2}x_2-y_2}{|x-y|^2}\right).$$

Agora podemos calcular a derivada normal da função de Green.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y) &= \langle\nabla_x G(x,y),\frac{x}{R}\rangle = -\frac{1}{2\pi R}\Bigg[\frac{x_1^2-x_1y_1}{|x-y|^2}-\left(\frac{\frac{|y|^2}{R^2}x_1^2-x_1y_1}{|x-y|^2}\right)\\
&+\frac{x_2^2-x_2y_2}{|x-y|^2}-\left(\frac{\frac{|y|^2}{R^2}x_2^2-x_2y_2}{|x-y|^2}\right)\Bigg]\\
&= -\frac{1}{2\pi R|x-y|^2}\Bigg[x_1^2-x_1y_1-\left(\frac{|y|^2}{R^2}x_1^2-x_1y_1\right)\\
&+x_2^2-x_2y_2-\left(\frac{|y|^2}{R^2}x_2^2-x_2y_2\right)\Bigg]\\
&= -\frac{1}{2\pi R|x-y|^2}\left[R^2-\frac{|y|^2}{R^2}R^2\right]\\
&= -\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-|y|^2}{|x-y|^2}
\end{aligned}$$

pois $|x|^2 = x_1^2+x_2^2 = R^2$. Como a derivada normal de G é simétrica com relação às variáveis x e y, veja o Lema 2.2.1(i), podemos trocar as variáveis da derivada normal $\frac{\partial G}{\partial\nu}$ e substituir em (2.6), para obtermos a fórmula de representação

$$u(x) = \frac{R^2-|x|^2}{2\pi R}\int_{\partial B_R(0)}\frac{u(y)}{|x-y|^2}dS_y. \tag{2.8}$$

Esta fórmula é chamada fórmula integral de Poisson. A função

$$K(x,y) = \frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^2},\ x\in B_R(0), y\in\partial B_R(0),$$

é chamada núcleo de Poisson para o disco $B_R(0)$.

Lema 2.3.2. *Para todo $x \in B_R(0)$ vale*

$$\int_{\partial B_R(0)} K(x,y)dS_y = 1.$$

Demonstração. Basta fazer $u = 1$ na fórmula integral de Poisson, equação (2.8). Observe que $\frac{R^2-|x|^2}{2\pi R}$ é constante com relação a y, daí podemos passá-lo para dentro da integral. $\square$

Capítulo 3

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

Vamos relembrar rapidamente o que se entende por solução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace no disco, descrito na Introdução. Uma função u é solução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace no disco, se $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B}_R(0))$ e satisfaz às equações (3):

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em} \quad B_R(0), \\ u = g & \text{sobre} \quad \partial B_R(0). \end{cases}$$

Neste capítulo vamos provar o nosso resultado principal, o Teorema 0.0.1. Este resultado afirma que o problema de Dirichlet para a equação de Laplace no disco, possui uma única solução.

3.1 Existência de solução

Nesta seção vamos provar a existência de solução para o problema de Dirichlet para a equação de Laplace no disco.

Teorema 3.1.1. *Seja $g \in C^0(\partial B_R(0))$. Defina*

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^2} dS_y.$$

Então $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B}_R(0))$ e u satisfaz às equações

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{em} \quad B_R(0), \\ u = g & \textit{sobre} \quad \partial B_R(0). \end{cases}$$

Demonstração. Observe que a função $u(x)$ definida acima é a fórmula integral de Poisson dada por (2.8). Dessa forma, podemos escrever

$$u(x) = -\int_{\partial B_R(0)} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(y, x) dS_y.$$

Pelo Lema 2.2.1(ii), a função $\dfrac{\partial G}{\partial \nu}(y, x)$ é harmônica com relação à segunda variável x. Logo, podemos derivar dentro do sinal de integral para obter $\Delta u(x) = 0$, para todo $x \in B_R(0)$. Pelo Corolário 2.1.1 a função $u \in C^\infty(B_R(0))$.

Resta estabelecer a continuidade até a fronteira, isto é, mostrar que $u \in C^0(\overline{B}_R(0))$. Dessa forma, para cada $x_0 \in \partial B_R(0)$, devemos obter

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = g(x_0).$$

Por definição de continuidade, veja (LIMA, 2008), precisamos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, devemos obter $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \implies |u(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

De fato, como $g \in C^0(\partial B_R)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|y - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $y \in \partial B_R(0)$. Seja $M = \max_{\partial B_R(0)} |g|$. Pelo Lema 2.3.2, temos

$$g(x_0) = \int_{\partial B_R(0)} g(x_0) K(x, y) dS_y.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
|u(x) - g(x_0)| &= \left| \int_{\partial B_R(0)} g(y) K(x, y) dS_y - \int_{\partial B_R(0)} g(x_0) K(x, y) dS_y \right| \\
&= \left| \int_{\partial B_R(0)} K(x, y)(g(y) - g(x_0)) dS_y \right| \\
&\leq \int_{\partial B_R(0)} |K(x, y)||g(y) - g(x_0)| dS_y \\
&= \int_{|y - x_0| < \delta_1} K(x, y)|g(y) - g(x_0)| dS_y \\
&+ \int_{|y - x_0| \geq \delta_1} K(x, y)|g(y) - g(x_0)| dS_y \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \int_{|y - x_0| < \delta_1} K(x, y) dS_y \\
&+ \int_{|y - x_0| \geq \delta_1} K(x, y) \left(|g(y)| + |g(x_0)|\right) dS_y \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2M \int_{|y - x_0| \geq \delta_1} K(x, y) dS_y \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + 2M \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{|y - x_0| \geq \delta_1} \frac{1}{|x - y|^2} dS_y \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M(R^2 - |x|^2) \left(\frac{2}{\delta_1}\right)^2 \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

para $|x - x_0| < \delta = \min\{\delta_1/2, \delta_2\}$. Em que $\delta_2 > 0$ vem da continuidade da função $h(x) = R^2 - |x|^2$. Note que $h(x)$ é contínua, não negativa em $\overline{B}_R(0)$ e $h(x_0) = 0$ ($x_0 \in \partial B_R(0)$). Então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| = h(x) < \frac{\delta_1^2 \varepsilon}{16M}$$

para $x \in B_R(0)$. Portanto, para $|x - x_0| < \delta = \min\{\delta_1/2, \delta_2\}$, utilizamos a desigualdade acima em (3.1), para concluir que

$$|u(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

□

3.2 Unicidade de solução

Para mostrar a unicidade da solução apresentada no Teorema 3.1.1, vamos enunciar o princípio do máximo. Este importante resultado afirma que o máximo e o mínimo de uma função harmônica, não pode estar no interior do domínio.

Teorema 3.2.1 (Princípio do Máximo)**.** *Suponha que* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *satisfaça* $\Delta u = 0$*. Se* Ω *é limitado, temos*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u,$$
$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Demonstração. Veja o Teorema 6.1 de (BIEZUNER, 2010. Acesso em: 26 jan. 2026). □

Agora estamos prontos para provar o nosso principal resultado, o Teorema 0.0.1.

Demonstração. Seja $g \in C^0(\overline{B}_R(0))$. Pelo Teorema 3.1.1, a função dada por

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^2} dS_y$$

é uma solução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace no disco.

Para provar a unicidade, suponha que existam duas soluções, u_1 e u_2, do problema de Dirichlet para a equação de Laplace no disco. Então defina $u = u_1 - u_2$. Note que $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B}_R(0))$ e pela linearidade do operador laplaciano, u é solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em} \quad B_R(0), \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R(0). \end{cases}$$

Segue do princípio do máximo, Teorema 3.2.1, que

$$\max_{\partial B_R(0)} u = \min_{\partial B_R(0)} u = 0.$$

Logo $u = 0$ e portanto $u_1 = u_2$. □

CONCLUSÃO

O problema de temperatura de estado estacionário, descrito na introdução, nos motivou a procurar por soluções para a equação de Laplace no disco. Usamos teoria de cálculo diferencial e integral e equações diferenciais para determinar a função de Green no disco. Todo este conhecimento foi aplicado para que fosse possível obter uma fórmula de representação da solução. Utilizamos técnicas de analise para concluirmos que a solução do problema de Dirichlet, para a equação de Laplace no disco, existe e é única.

Referências

BIEZUNER, R. J. *Notas de aula de EDP I/II*. Minas Gerais - Brasil: Disponivel em: https://doceru.com/doc/v8n5e55, 2010. Acesso em: 26 jan. 2026. Citado 3 vezes nas páginas 20, 30 e 37.

EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. 1^a. ed. Providence - United States: American Mathematical Society, 1998. (Graduate Studies in Mathematics). Citado na página 20.

LEIGHTON, R. B. et al. *The Feynman Lectures on Physics, vol. 2*. 2^a. ed. Boston - United States: Addison-Wesley, 1964. Citado na página 15.

LIMA, E. L. *Curso de Análise, vol. 2*. 10^a. ed. Rio de Janeiro - Brasil: Projeto Euclides, 2008. Citado na página 36.

APÊNDICE A

Lema A.0.1. *O operador laplaciano é invariante por rotações.*

Demonstração. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $C^2(\Omega)$. Considere a seguinte mudança de coordenadas $y = R_\theta x$, em que R_θ é a matriz de rotação em $\mathbb{R}^2$:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}.$$

Defina $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $v(y) = u(R_\theta^{-1}(y))$. Note que $u(x) = v(R_\theta x)$ e pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}. \tag{A.1}$$

Como $y = R_\theta x$, temos que

$$y = (y_1, y_2) = (cos\,\theta x_1 - sen\,\theta x_2, sen\,\theta x_1 + cos\,\theta x_2).$$

Dessa forma, calculamos as derivadas parciais de y_1 e y_2 com relação a x_1:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = cos\,\theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = sen\,\theta. \tag{A.2}$$

Substituindo em (A.1), obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y_1}cos\,\theta + \frac{\partial v}{\partial y_2}sen\,\theta.$$

Derivando a identidade acima com relação a x_1, temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}cos\,\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2 \partial y_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}cos\,\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}sen\,\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}sen\,\theta.$$

Segue de (A.2) que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}cos^2\,\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2 \partial y_1}sen\,\theta cos\,\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2}sen\,\theta cos\,\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}sen^2\,\theta. \tag{A.3}$$

Agora, vamos calcular a derivada de u com relação a x_2:

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}. \tag{A.4}$$

As derivadas parciais de y_1 e y_2 com relação a x_2, são

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = -sen\,\theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = cos\,\theta. \tag{A.5}$$

Substituindo em (A.4), obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial y_1} sen\,\theta + \frac{\partial v}{\partial y_2} cos\,\theta.$$

Derivando a identidade acima com relação a x_2, temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} sen\,\theta - \frac{\partial^2 v}{\partial y_2 \partial y_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} sen\,\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} cos\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} cos\,\theta.$$

Segue de (A.5) que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} sen^2\,\theta - \frac{\partial^2 v}{\partial y_2 \partial y_1} sen\,\theta cos\,\theta - \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} sen\,\theta cos\,\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} cos^2\,\theta. \tag{A.6}$$

Somando as equações (A.3) e (A.6), concluímos que $\Delta u(x) = \Delta v(y)$.

□

Lema A.0.2. *O operador laplaciano é invariante por translações.*

Demonstração. Seja $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^2(\Omega)$ e considere a seguinte mudança de coordenadas $y = x + a$. Defina $v : \Omega + a \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $v(y) = u(y - a)$, em que $a = (a_1, a_2)$ é um ponto qualquer de $\mathbb{R}^2$.

Note que $u(x) = v(x + a)$ e pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}. \tag{A.7}$$

Como $y = x + a$, temos que

$$y = (y_1, y_2) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2).$$

Dessa forma, calculamos as derivadas parciais de y_1 e y_2 com relação a x_1:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0. \tag{A.8}$$

Substituindo em (A.7), obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y_1}.$$

Derivando a identidade acima com relação a x_1 e por (A.8), obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2 \partial y_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}. \tag{A.9}$$

Agora, vamos calcular a derivada de u com relação a x_2:

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}. \tag{A.10}$$

As derivadas de y_1 e y_2 com relação a x_2, são

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 1. \tag{A.11}$$

Substituindo em (A.10), temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial y_2}.$$

Derivando a identidade acima com relação a x_2 e por (A.11), obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}. \tag{A.12}$$

Somando as identidades (A.9) e (A.12), concluímos que $\Delta u(x) = \Delta v(y)$. □

Teorema A.0.1 (Divergência)**.** *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^2$. Se a fronteira $\partial\Omega$ for uma curva, cuja parametrização é de classe C^1, temos*

$$\int_\Omega div\vec{F}dA = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \nu dS$$

em que " $\cdot$ " denota o produto escalar em $\mathbb{R}^2$ e $\vec{F}$ é um campo vetorial em Ω de classe C^1.

Lema A.0.3 (Segunda Identidade de Green)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto com fronteira suave. Se $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ então vale a identidade*

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dA = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS.$$

Demonstração. Consideremos o campo $\vec{F} = u\nabla v$. Pelo teorema da divergência, Teorema A.0.1, obtemos a primeira identidade de Green

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dA = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu}dS - \int_\Omega u\Delta v dA. \tag{A.13}$$

Permutando u e v na identidade acima, obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u dA = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}dS - \int_\Omega v\Delta u dA. \tag{A.14}$$

Como $\nabla v \cdot \nabla u = \nabla u \cdot \nabla v$, podemos subtrair as identidades (A.13) e (A.14) para concluir que

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dA = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS.$$

□

Lema A.0.4 (Propriedade da Média)**.** *Se $u \in C^0(\Omega)$ e $\overline{B}_\varepsilon(x) \subset \Omega$, então u satisfaz a propriedade*

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} udS.$$

Demonstração. Suponha que $u \in C^0(\Omega)$ e $\overline{B}_\varepsilon(x) \subset \Omega$. Para todo $\varepsilon > 0$ dado, u é contínua sobre o círculo $\partial B_\varepsilon(x)$, que é um conjunto compacto. Dessa forma, a função u assume um mínimo e um máximo em $\partial B_\varepsilon(x)$, digamos

$$u(x_\varepsilon^1) = m_\varepsilon \quad \text{e} \quad u(x_\varepsilon^2) = M_\varepsilon, \quad \text{respectivamente.}$$

Logo

$$m_\varepsilon |\partial B_\varepsilon(x)| \leq \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u dS \leq M_\varepsilon |\partial B_\varepsilon(x)|. \tag{A.15}$$

em que $|\partial B_\varepsilon(x)|$ denota o comprimento do círculo $\partial B_\varepsilon(x)$. Observe que, as sequências $\{x_\varepsilon^1\}$, $\{x_\varepsilon^2\}$ convergem para x, quando $\varepsilon \to 0$. Como $u \in C^0(\Omega)$, temos que

$$m_\varepsilon = u(x_\varepsilon^1) \to u(x) \quad \text{e} \quad M_\varepsilon = u(x_\varepsilon^2) \to u(x)$$

quando $\varepsilon \to 0$. Portanto, fazendo $\varepsilon \to 0$ em (A.15) e usando as convergências acima, obtemos o resultado. □

Lema A.0.5. *A equação de Laplace é invariante por dilatações.*

Demonstração. Considere a mudança de coordenadas $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$ não nulo e defina $v(y) = u(k^{-1}(y))$. Note que $u(x) = v(kx)$ e pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y_1} k$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} k^2.$$

De maneira análoga, obtemos também que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} k^2.$$

Portanto, concluímos que

$$\Delta u(x) = k^2 \Delta v(y) = 0.$$

□