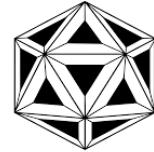




Universidade Federal  
de Ouro Preto

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



DEPARTAMENTO DE  
MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Maikon Júnior da Silva Nazareth

## **Da Topologia ao Tabuleiro: o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e sua Conexão com o Jogo Hex**

Ouro Preto - MG, Brasil

Fevereiro de 2026

Maikon Júnior da Silva Nazareth

## **Da Topologia ao Tabuleiro: o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e sua Conexão com o Jogo Hex**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao  
Curso de Matemática da Universidade Federal de  
Ouro Preto como requisito parcial para a obtenção  
do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira

Coorientador: Prof. Dr. Eder Marinho Martins

Ouro Preto - MG, Brasil

Fevereiro de 2026



## FOLHA DE APROVAÇÃO

Maikon Júnior da Silva Nazareth

### **Da topologia ao tabuleiro: o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e sua conexão com o jogo Hex**

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em 09 de fevereiro de 2026

#### Membros da banca

Dr. Wenderson Marques Ferreira - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto  
Dr. Eder Marinho Martins - Coorientador - Universidade Federal de Ouro Preto  
Dr. Sebastião Martins Xavier - Universidade Federal de Ouro Preto

Wenderson Marques Ferreira, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 09/02/2025.



Documento assinado eletronicamente por **Wenderson Marques Ferreira, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 09/02/2026, às 19:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1049580** e o código CRC **1BC56D5D**.

## *AGRADECIMENTOS*

Este trabalho é resultado de um percurso marcado por desafios, aprendizados e amadurecimento, e nada disso teria sido possível sem o apoio de pessoas fundamentais ao longo dessa trajetória. Agradeço a Deus por ter me sustentado até aqui, concedendo-me serenidade, força e discernimento ao longo de todo esse caminho.

Expresso minha gratidão aos meus pais, Maria Eva e Renato, pelo incentivo constante e pela compreensão, desde os tempos da escola até o decorrer de toda a minha graduação. O apoio de vocês foi essencial para que eu pudesse seguir em frente e alcançar esta etapa. Estendo meus agradecimentos aos meus familiares, em especial meus avós, Maria da Conceição e Octávio Wenceslau, e Luzia Lúcia e João Evêncio, que sempre estiveram na torcida e acreditaram na concretização deste sonho. Registro meu sincero agradecimento às professoras Gleiceane e Deiceana, cujo papel em minha formação escolar foi fundamental, especialmente pelo incentivo e apoio que me proporcionaram.

Agradeço ao meu orientador, o professor Wenderson, pela orientação cuidadosa, pela confiança e pela dedicação durante o desenvolvimento deste trabalho, bem como pelo acompanhamento constante ao longo de tantos anos. Ao meu coorientador, o professor Eder, registro meu agradecimento pelas valiosas contribuições, pela disponibilidade e pelo apoio durante a pesquisa e ao longo do curso. Agradeço também ao professor Vinícius, pelo incentivo e apoio demonstrados durante todo o meu percurso acadêmico. Agradeço também aos professores Wenderson, Eder e Sebastião por aceitarem compor a banca examinadora deste trabalho. Sou grato a todos os professores que contribuíram para a minha formação acadêmica. Cada disciplina, cada conselho e cada ensinamento foram fundamentais para minha construção pessoal e profissional, e levarei comigo esses aprendizados para minha atuação futura.

Por fim, agradeço aos meus colegas de curso e aos amigos do PETMAT, que compartilharam comigo essa caminhada, tornando os desafios mais leves e os momentos de conquista ainda mais significativos.

*“Bem-aventurado o homem que acha sabedoria,  
e o homem que adquire conhecimento;  
porque melhor é a sua mercadoria do que a mercadoria de prata,  
e maior o seu lucro do que o ouro fino.  
Mais preciosa é do que os rubis;  
e tudo o que mais desejas não se pode comparar a ela.”*

*(Provérbios 3:13–15)*

## *RESUMO*

Este trabalho tem como objetivo estudar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, destacando suas principais propriedades e algumas de suas generalizações em diferentes contextos do espaço euclidiano. Inicialmente, apresenta-se uma breve visão histórica do matemático que provou esse resultado e dos matemáticos que posteriormente o relacionaram ao jogo Hex. Em seguida, discutem-se as demonstrações do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, começando com o caso da reta real e progredindo para subconjuntos compactos e convexos do espaço Euclidiano. Posteriormente, introduzem-se o jogo Hex e o Teorema de Hex, explorando a relação entre a impossibilidade de o jogo terminar em empate e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, e demonstrando a equivalência entre esses dois resultados. Finalmente, discute-se o uso de jogos como recurso didático no ensino da matemática, enfatizando o potencial do jogo Hex como ferramenta pedagógica para a compreensão de conceitos matemáticos abstratos.

**Palavras-chave:** Teorema do Ponto Fixo de Brouwer; Teorema de Hex; jogo Hex; Ensino de Matemática; Jogos Matemáticos.

# *ABSTRACT*

This work aims to study Brouwer's Fixed Point Theorem, highlighting its main properties and some of its generalizations in different contexts of Euclidean space. Initially, a brief historical overview of the mathematician who proved this result and the mathematicians who later related it to the game Hex is presented. Next, the proofs of Brouwer's Fixed Point Theorem are discussed, beginning with the case of the real line and progressing to compact and convex subsets of Euclidean space. Subsequently, the game Hex and the Hex Theorem are introduced, exploring the relationship between the impossibility of this game ending in a draw and Brouwer's Fixed Point Theorem, and demonstrating the equivalence between these two results. Finally, the use of games as a didactic resource in mathematics teaching is discussed, emphasizing the potential of the game Hex as a pedagogical tool for understanding abstract mathematical concepts.

**Keywords:** Brouwer Fixed Point Theorem; Hex Theorem; Hex game; Teaching Mathematics; Mathematical Games.

# LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Luitzen Egbertus Jan Brouwer.	11
Figura 2 – John Forbes Nash Jr.	12
Figura 3 – Piet Hein	13
Figura 4 – Função $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^3}{8} - \frac{x}{2} + 2$ .	14
Figura 5 – Função $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\frac{11x^3}{6} + \frac{17x^2}{3} - \frac{26x}{3} + 1$ .	15
Figura 6 – Função $f : [-1, 3] \rightarrow [-1, 3]$ dada por $f(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{6} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ .	16
Figura 7 – Construção da função $g : B^n \rightarrow S^n$ .	18
Figura 8 – A função $T : B \rightarrow B^n$ definida por $T(x) = \frac{1}{r}(x - a)$ .	21
Figura 9 – A função $g = h \circ f \circ h^{-1}$ .	22
Figura 10 – O ponto $y_x \in K$ fornece a menor distância entre o ponto $x \in B$ e o conjunto $K$ .	23
Figura 11 – A função $h = f \circ g$ .	25
Figura 12 – Tabuleiro de Hex $12 \times 12$ .	27
Figura 13 – Tabuleiro de Hex $12 \times 12$ , ao fim do jogo.	27
Figura 14 – Tabuleiro de Hex $12 \times 12$ com seus nós e arestas.	29
Figura 15 – Três casas adjacentes do tabuleiro.	30
Figura 16 – Grafo construído utilizando o algoritmo no Tabuleiro de Hex $12 \times 12$ .	30
Figura 17 – Grafo construído utilizando o algoritmo no Tabuleiro de Hex $12 \times 12$ .	31
Figura 18 – A função $g$ é um homeomorfismo de $I^2$ em $A$ .	33
Figura 19 – A função $g$ é um homeomorfismo de $I^2$ em $A$ .	33
Figura 20 – Elemento $x \in I^2$ e sua imagem pela função $f$ .	34
Figura 21 – Divisão de $I^2$ em quatro regiões para cada $x \in I^2$ .	35
Figura 22 – Divisão de $A$ em quatro regiões para cada $z \in A$ .	35
Figura 23 – Triangulação do tabuleiro de Hex $12 \times 12$ da Figura 13	39
Figura 24 – Ponto $x \in I^2$ no interior do triângulo ABC, o divide em três outros triângulos.	41
Figura 25 – Elemento $x$ pertencente à aresta comum a dois triângulos adjacentes.	43

# *SUMÁRIO*

<b>INTRODUÇÃO</b>	8	
<b>1</b>	<b>UM POUCO DE HISTÓRIA</b>	10
1.1	Luitzen Egbertus Jan Brouwer	10
1.2	John Forbes Nash Jr	11
1.3	Piet Hein	12
<b>2</b>	<b>O TEOREMA DE PONTO FIXO DE BROUWER</b>	14
2.1	O Teorema de Ponto Fixo de Brouwer em $\mathbb{R}$	14
2.2	O Teorema de Ponto Fixo de Brouwer na Bola Unitária Fechada de $\mathbb{R}^n$	17
2.3	O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em Conjuntos Convexos Compactos de $\mathbb{R}^n$	23
<b>3</b>	<b>O JOGO HEX</b>	26
3.1	O Jogo Hex	26
3.2	O Teorema de Hex	28
3.3	Teorema do Ponto Fixo de Brouwer via Teorema de Hex	31
3.4	Teorema de Hex via Teorema do Ponto Fixo de Brouwer	38
<b>4</b>	<b>JOGOS COMO FERRAMENTA NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA</b>	45
4.1	A Importância da Investigação Matemática	45
4.2	O Papel dos Jogos no Ensino da Matemática	47
4.3	A Abordagem dos Jogos nos Documentos Oficiais da Educação Básica	50
4.4	O Jogo Hex: Possibilidades na Sala de Aula	52
<b>CONCLUSÃO</b>	54	
<b>REFERÊNCIAS</b>	55	
<b>APÊNDICE A</b>	57	
A.1	Noções Básicas de Espaços Métricos	57
A.2	Sequências em Espaços Métricos	59
A.3	Espaços Métricos Compactos	60
A.4	Continuidade de Funções	61
A.5	Continuidade Uniforme de Funções	63

# *INTRODUÇÃO*

A noção de ponto fixo ocupa um lugar central em diversas áreas da matemática, desempenhando papel fundamental tanto em resultados teóricos quanto em aplicações em campos como a análise, a topologia, a economia e a teoria dos jogos. Entre os resultados mais conhecidos nessa temática destaca-se o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, que garante a existência de pontos fixos para funções contínuas definidas em subconjuntos compactos e convexos do espaço euclidiano. Apesar de sua formulação aparentemente simples, esse teorema possui demonstrações profundas e conexões inesperadas com diferentes ramos da matemática.

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e algumas de suas generalizações, bem como explorar sua relação com o Teorema de Hex, um resultado proveniente da teoria dos jogos combinatórios. Em particular, busca-se evidenciar a equivalência entre esses dois teoremas, mostrando como um problema de natureza topológica pode ser compreendido a partir de um jogo de regras simples, e vice-versa. Essa abordagem permite destacar o caráter interdisciplinar da matemática e revelar conexões entre áreas que, à primeira vista, parecem distantes. Além disso, este trabalho aborda o potencial dos jogos para a criação de um ambiente de investigação matemática em sala de aula, sendo estes uma ferramenta que vai além do caráter motivacional, capaz de promover o desenvolvimento do pensamento matemático abstrato.

No Capítulo 1, apresenta-se um panorama histórico envolvendo matemáticos que contribuíram de maneira significativa para o desenvolvimento das ideias discutidas ao longo do trabalho, a saber, Luitzen Egbertus Jan Brouwer, John Forbes Nash Jr. e Piet Hein.

Já no Capítulo 2, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é estudado de forma progressiva: primeiramente no contexto da reta real, depois na bola unitária fechada do  $\mathbb{R}^n$  e, por fim, em conjuntos convexos e compactos do espaço euclidiano. As demonstrações são construídas com o intuito de tornar explícitos os argumentos geométricos e topológicos envolvidos.

Posteriormente, no Capítulo 3, será introduzido o jogo Hex, suas regras e propriedades fundamentais, culminando na apresentação do Teorema de Hex e na prova de sua equivalência com o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Essa relação evidencia como conceitos matemáticos abstratos podem emergir, até mesmo, de situações lúdicas.

Por fim, no Capítulo 4, discutiremos o papel dos jogos no ensino e na aprendizagem da matemática, destacando o potencial do jogo Hex como ferramenta pedagógica. Essa reflexão busca aproximar a matemática formal do contexto educacional, ressaltando a importância da investigação, da experimentação e da ludicidade no processo de construção do conhecimento matemático.

Vale ressaltar que ferramentas de inteligência artificial foram utilizadas como apoio à revisão linguística, à melhoria da clareza textual e geração de algumas imagens, sem interferir no conteúdo discutido no trabalho.

## CAPÍTULO 1

# *UM POUCO DE HISTÓRIA*

Nesta seção iremos apresentar um pouco da história de alguns dos matemáticos que deram grandes contribuições para a matemática através dos teoremas de ponto fixo. As principais referências utilizadas neste capítulo foram ([St Andrews, 2000](#)) e ([Wikipédia, 2026](#)).

### 1.1 Luitzen Egbertus Jan Brouwer

Luitzen Egbertus Jan Brouwer nasceu em 27 de fevereiro de 1881, em Overschie, Países Baixos. Foi uma das figuras centrais do desenvolvimento da matemática no século XX, especialmente no campo da topologia e da filosofia da matemática. Sua trajetória acadêmica teve início na Universidade de Amsterdã, onde ingressou aos 18 anos e obteve seu doutorado em 1907 com uma tese intitulada *Over de Grondslagen der Wiskunde*, na qual começou a desenvolver as ideias que mais tarde fundamentariam o intuicionismo, uma corrente filosófica que ele mesmo criaria e defenderia ao longo da vida.

Brouwer acreditava que a matemática era uma construção mental livre, independente da linguagem formal e da lógica clássica. Essa concepção o levou a rejeitar certos princípios tradicionais, como o terceiro excluído, propondo uma abordagem na qual a validade das proposições matemáticas dependia de sua efetiva construção. Tal visão estabeleceu as bases do intuicionismo, corrente que teve grande influência na filosofia da matemática, bem como na fundamentação da teoria da prova.

Paralelamente às suas contribuições filosóficas, Brouwer também desempenhou papel fundamental na consolidação da topologia, área que então estava em ascensão. Seus trabalhos iniciais estabeleceram resultados centrais, como o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, publicado em 1912, que afirma que toda função contínua de uma bola fechada em um espaço euclidiano em si mesma possui ao menos um ponto fixo. Esse resultado, além de sua relevância teórica, tem aplicações importantes em topologia, economia, teoria dos jogos e análise funcional.

A carreira acadêmica de Brouwer foi marcada tanto pelo prestígio quanto pela controvérsia. Em 1912, foi nomeado professor da Universidade de Amsterdã, onde permaneceu até sua aposentadoria. Foi também editor da prestigiosa revista *Mathematische Annalen*, mas envolveu-se em uma disputa editorial com David Hilbert, motivada por divergências filosóficas quanto aos fundamentos da matemática, o que resultou em sua exclusão do comitê editorial.

L. E. J. Brouwer faleceu em 2 de dezembro de 1966, deixando um legado significativo tanto nos campos técnicos da matemática quanto nas discussões epistemológicas sobre sua natureza

e fundamentos. Seu trabalho permanece relevante até os dias atuais, sendo amplamente citado e discutido.



Figura 1 – Luitzen Egbertus Jan Brouwer.  
Fonte: Imagem obtida em ([St Andrews, 2000](#)).

## 1.2 John Forbes Nash Jr

John Forbes Nash Jr. foi um matemático norte-americano nascido em 13 de junho de 1928, em Bluefield, West Virginia. Desde a infância, destacou-se por sua capacidade de raciocínio lógico e pelo interesse por problemas matemáticos, embora sua personalidade fosse marcada por certo isolamento e introversão.

Inicialmente, Nash iniciou seus estudos em engenharia química na Carnegie Institute of Technology (atual Carnegie Mellon University), mas rapidamente migrou para o curso de Matemática, onde obteve grande destaque. Em 1948, ingressou no programa de doutorado em Princeton, instituição na qual desenvolveu trabalhos que se tornariam fundamentais para a teoria dos jogos. Em 1950, defendeu sua tese intitulada Non-Cooperative Games, na qual introduziu o conceito de Equilíbrio de Nash, uma solução matemática para jogos de estratégia em que nenhum jogador tem incentivo para mudar sua estratégia individualmente. Esse conceito revolucionou a economia e a teoria dos jogos, tornando-se uma das contribuições mais influentes do século XX.

Após o doutorado, Nash trabalhou no Massachusetts Institute of Technology (MIT), onde continuou suas pesquisas em diversas áreas da matemática, como geometria diferencial, teoria dos jogos e equações diferenciais parciais. No final da década de 1950, começaram a surgir sinais de es-

quizofrenia paranoide, o que afetou profundamente sua vida pessoal e profissional. Por muitos anos, sua carreira acadêmica foi interrompida, e Nash enfrentou períodos de hospitalização e afastamento do meio científico.

A partir da década de 1980, ele passou por um processo gradual de recuperação e retomada de suas atividades intelectuais, voltando a interagir com a comunidade acadêmica. Em reconhecimento às suas contribuições, recebeu importantes distinções, destacando-se o Prêmio Nobel de Ciências Econômicas em 1994, compartilhado com John Harsanyi e Reinhard Selten, pela análise pioneira de equilíbrio em jogos não cooperativos. Em 2015, foi agraciado com o Prêmio Abel, uma das maiores honrarias da matemática, pela profundidade de suas contribuições em equações diferenciais parciais e análise geométrica.



Figura 2 – John Forbes Nash Jr.  
Fonte: Imagem obtida em ([St Andrews, 2000](#)).

Poucos dias após receber o Prêmio Abel, Nash faleceu em 23 de maio de 2015, em um acidente de carro em Nova Jersey. Sua trajetória é frequentemente lembrada como um exemplo de superação e de impacto duradouro na matemática, na economia e em diversas áreas científicas.

### 1.3 Piet Hein

Piet Hein foi um matemático, inventor, designer, filósofo, autor e poeta dinamarquês, nascido em 16 de dezembro de 1905, em Copenhague, Dinamarca. Hein desenvolveu uma educação diversa, estudando no Instituto de Física Teórica da Universidade de Copenhague (posteriormente

Instituto Niels Bohr) e na Universidade Técnica da Dinamarca. Durante sua vida, ele também explorou áreas como filosofia, artes e design, refletindo um espírito de unificação entre ciência e criatividade.



Figura 3 – Piet Hein  
Fonte: Imagem obtida em ([Wikipédia, 2026](#)).

Uma de suas contribuições mais conhecidas é a criação dos “grooks” (gruks em dinamarquês), que são pequenos poemas filosóficos com tom irônico e profundo. Esses poemas começaram a ser publicados no jornal Politiken durante a ocupação alemã da Dinamarca na Segunda Guerra Mundial, assinados sob o pseudônimo Kumbel Kumbell, que significa “lápide”.

Hein também se destacou por suas invenções e criações matemáticas. Entre elas, o jogo Hex e o cubo Soma, que se tornaram clássicos em jogos matemáticos e quebra-cabeças. Além disso, ele introduziu a superelipse, uma forma geométrica que unifica características de elipses e retângulos, aplicada em arquitetura e design urbano, especialmente no projeto da praça Sergels Torg, em Estocolmo, e em peças de mobiliário.

Ao longo de sua carreira, Piet Hein recebeu diversos prêmios e reconhecimentos internacionais, incluindo uma doutor honoris causa pela Universidade de Yale em 1972 e múltiplas honrarias por seu trabalho criativo em arte e design. Ele faleceu em 17 de abril de 1996, deixando um legado duradouro tanto na matemática quanto na cultura e na arte.

## CAPÍTULO 2

# *O TEOREMA DE PONTO FIXO DE BROUWER*

Neste capítulo, iremos apresentar o Teorema de Ponto Fixo de Brouwer. Iniciaremos provando-o para funções definidas em intervalos fechados da reta real e para isto, teremos como principal referência ([Lima, Elon Lages, 2018](#)). Depois provaremos o teorema para a bola unitária e fechada centrada na origem de  $\mathbb{R}^n$ , cuja principal referência usada é ([Guillemin; Pollack, 1974](#)). Em seguida iremos definir o que é um homeomorfismo e generalizar tal resultado para bolas fechadas quaisquer do  $\mathbb{R}^n$  e também para subconjuntos convexos e compactos de  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.1 O Teorema de Ponto Fixo de Brouwer em $\mathbb{R}$

Para provar o Teorema Ponto Fixo de Brouwer em  $\mathbb{R}$  utilizaremos o Teorema do Valor Intermediário, cuja demonstração pode ser encontrada em ([Lima, Elon Lages, 2018](#)). Vale ressaltar que esses dois teoremas são equivalentes, como pode ser visto em ([Santos, 2025](#)).

**Teorema 2.1** (Teorema do Valor Intermediário). *Seja  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Se  $f(a) < d < f(b)$ , então existe  $c \in (a,b)$  tal que  $f(c) = d$ .*

**Exemplo 2.1.** Considere a função  $f : [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{x^3}{8} - \frac{x}{2} + 2$ . Desta forma, temos que para qualquer  $d \in \mathbb{R}$  tal que  $f(0) = 2 < d < 8 = f(4)$ , existe  $c \in (0,4)$ , tal que  $f(c) = d$ .

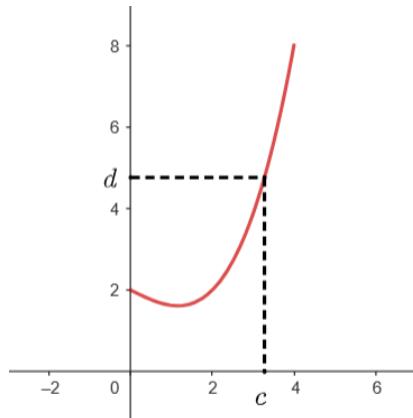


Figura 4 – Função  $f : [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{x^3}{8} - \frac{x}{2} + 2$ .  
Fonte: O autor

**Definição 2.1.** Seja  $f : X \rightarrow X$ , com  $X \subset \mathbb{R}$ . Dizemos que  $p \in X$  é um ponto fixo de  $f$  quando  $f(p) = p$ .

**Teorema 2.2** (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em  $\mathbb{R}$ ). Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua satis fazendo  $a \leq f(a)$  e  $f(b) \leq b$ . Então existe  $p \in [a, b]$  tal que  $f(p) = p$ .

*Demonstração.* Com efeito, se  $f(a) = a$  ou  $f(b) = b$ , não há nada a fazer, pois, em cada caso, basta tomar  $p = a$  ou  $p = b$ , respectivamente.

Considere então  $a < f(a)$  e  $f(b) < b$ . Defina a função  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\gamma(x) = x - f(x)$ . Daí

$$\gamma(a) = a - f(a) < 0 \quad \text{e} \quad \gamma(b) = b - f(b) > 0.$$

Assim temos  $\gamma(a) < 0 < \gamma(b)$ . Segue-se do Teorema 2.1 que existe  $p \in (a, b)$  tal que  $\gamma(p) = 0$ . Desta forma, existe  $p \in [a, b]$  tal que  $f(p) = p$ .  $\square$

**Exemplo 2.2.** Considere a função  $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = -\frac{11x^3}{6} + \frac{17x^2}{3} - \frac{26x}{3} + 1.$$

Tal função é contínua e satisfaz

$$0 \leq 1 = f(0) \quad \text{e} \quad f(3) = 2 \leq 3.$$

Segue-se do Teorema 2.2 que  $f$  possui um ponto fixo.

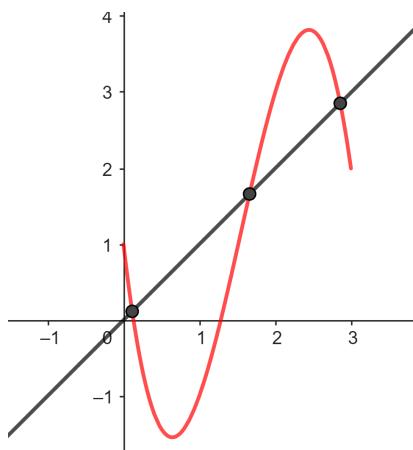


Figura 5 – Função  $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -\frac{11x^3}{6} + \frac{17x^2}{3} - \frac{26x}{3} + 1$ .  
Fonte: O autor

Podemos ainda enunciar a seguinte versão o do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, que é uma consequência imediata do Teorema 2.2.

**Corolário 2.1** (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em  $\mathbb{R}$ ). *Seja  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  contínua. Então  $f$  possui ponto fixo em  $[a, b]$ .*

**Exemplo 2.3.** *Considere a função contínua  $f : [-1, 3] \rightarrow [-1, 3]$  dada por*

$$f(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{6} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}.$$

*Segue-se do Corolário 2.1 que  $f$  possui um ponto fixo em  $[-1, 3]$ .*

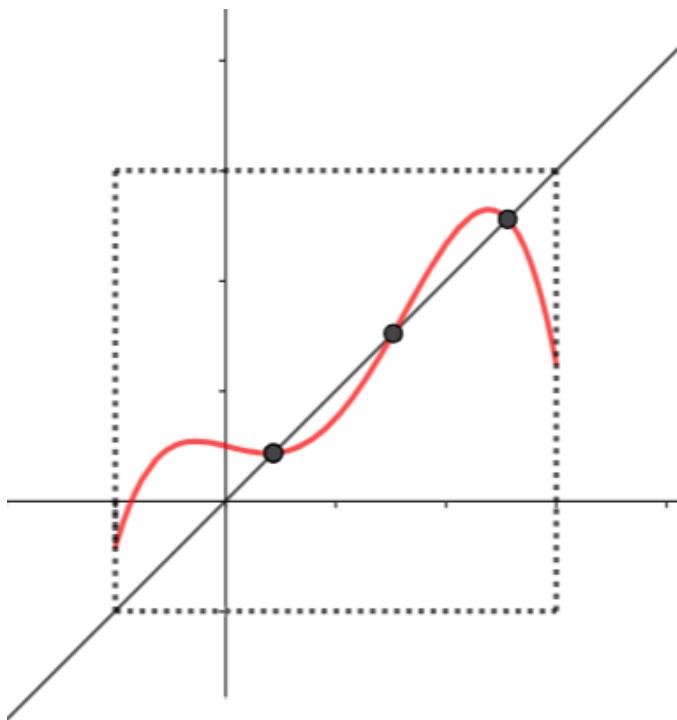


Figura 6 – Função  $f : [-1, 3] \rightarrow [-1, 3]$  dada por  $f(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{6} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ .  
Fonte: O autor

Note que o Teorema 2.2 não pede que a imagem da função esteja inteiramente contida em seu domínio como no Corolário 2.1, pede apenas que a imagem dos extremos esteja contida em seu domínio. Em outras palavras, o Teorema 2.2 exige menos condições sobre a função.

Observe novamente as Figuras 5 e 6. Note que os pontos fixos das funções correspondem aos pontos em que os gráficos das funções interceptam o gráfico da função identidade. E isto vale para qualquer função real. Geometricamente temos que a reta identidade divide o plano em dois semiplanos. O Teorema de Ponto Fixo de Brouwer pede condições suficientes para garantir que os pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$  pertençam a semiplanos distintos determinados pela reta identidade

(exceto claro, quando os extremos já são pontos fixos). E como  $f$  é contínua, o gráfico de  $f$  irá interceptar o da reta identidade em algum ponto do intervalo  $[a, b]$ , para “atravessar” de um semiplano para o outro, assim como ocorre nas Figuras 5 e 6. Tal ponto de interseção é um ponto fixo. Outra observação importante é que este é um teorema de existência, mas ele não garante a unicidade do ponto fixo, como pode ser visto na Figura 6, em que a função do Exemplo 2.3 possui três pontos fixos.

## 2.2 O Teorema de Ponto Fixo de Brouwer na Bola Unitária Fechada de $\mathbb{R}^n$

A definição a seguir é uma generalização da Definição 2.1, pois vale para qualquer espaço métrico, enquanto a apresentada na seção anterior se restringe a subconjuntos dos reais.

**Definição 2.2.** *Seja  $M$  um espaço métrico e uma função  $f : M \rightarrow M$ . Dizemos que  $p \in M$  é ponto fixo de  $f$  quando  $f(p) = p$ .*

Na sequência desta seção assumiremos que  $B^n$  é a bola unitária de  $\mathbb{R}^n$  e  $S^n$  é a esfera unitária de  $\mathbb{R}^n$ , a menos que se diga o contrário.

Para provar o Teorema de Ponto Fixo de Brouwer para bola unitária e fechada do  $\mathbb{R}^n$  assumiremos o Teorema da Retração, cuja demonstração pode ser obtida em (Guillemin; Pollack, 1974).

**Definição 2.3.** *Seja  $M$  um espaço topológico<sup>1</sup> e  $X \subset M$ . Chamamos de retração de  $M$  em  $X$ , uma função  $f : M \rightarrow X$  que é contínua e satisfaz  $f(x) = x, \forall x \in X$ .*

**Teorema 2.3** (Teorema da Retração). *Seja  $X$  uma variedade<sup>2</sup> compacta com bordo. Então não existe retração de  $X$  em  $\partial X$ .*

Em particular  $B^n$  é uma variedade compacta com bordo, sendo  $\partial B^n = S^n$ . Assim, segue-se do Teorema 2.3 que não existe retração de  $B^n$  em  $S^n$ .

**Teorema 2.4** (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer na Bola Unitária e Fechadas de  $\mathbb{R}^n$ ). *Seja  $f : B^n \rightarrow B^n$  uma função contínua. Então existe  $p \in B^n$  tal que  $f(p) = p$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $f(x) \neq x, \forall x \in B^n$ . Defina a função  $g : B^n \rightarrow S^n$  da seguinte forma: para cada  $x \in B^n$ , tome  $g(x)$  sendo a interseção da semirreta  $r$ , de origem em  $f(x)$  e que passa por

<sup>1</sup> Todo espaço métrico é um espaço topológico.

<sup>2</sup> Espaços nos quais o ambiente de cada ponto é “igual” a um pequeno pedaço do espaço euclidiano, como por exemplo a bola fechada de  $\mathbb{R}^n$ .

$x$ , com  $S^n$ . Pela construção feita temos que  $g(x) = x, \forall x \in S^n$ . Desta forma, basta mostrar que  $g$  é contínua, para concluir que  $g$  é uma retração de  $B^n$  em  $S^n$ , o que é um absurdo pelo Teorema 2.3.

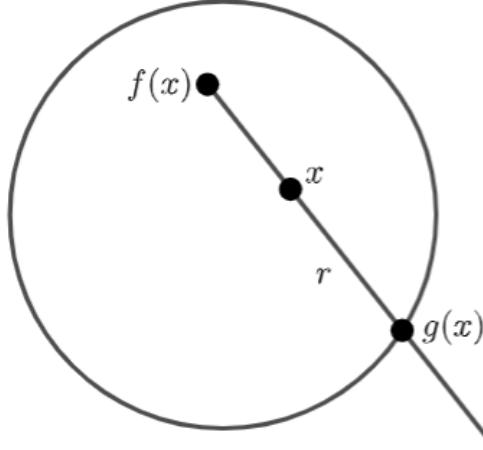


Figura 7 – Construção da função  $g : B^n \rightarrow S^n$ .  
Fonte: O autor

Note então que  $g(x) - f(x)$  é múltiplo de  $x - f(x)$  por um escalar  $t \in \mathbb{R}$  com  $t \geq 1$ , isto é,

$$g(x) - f(x) = t(x - f(x)), \text{ para algum } t \geq 1.$$

Assim,

$$g(x) = t(x - f(x)) + f(x), \text{ para algum } t \geq 1. \quad (2.1)$$

Além disso, como  $g(x) \in S^n$ , temos que  $\|g(x)\| = 1$ . Logo,

$$\begin{aligned} 1 &= \|g(x)\|^2 = \|t(x - f(x)) + f(x)\|^2 = \langle t(x - f(x)) + f(x), t(x - f(x)) + f(x) \rangle \\ &= t^2 \langle x - f(x), x - f(x) \rangle + 2t \langle x - f(x), f(x) \rangle + \langle f(x), f(x) \rangle \\ &= \|x - f(x)\|^2 t^2 + 2 \langle x - f(x), f(x) \rangle t + \|f(x)\|^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Segue-se da Equação (2.2) que

$$\|x - f(x)\|^2 t^2 + 2 \langle x - f(x), f(x) \rangle t + \|f(x)\|^2 - 1 = 0. \quad (2.3)$$

Como para cada  $x \in B^n$  temos um único  $t \geq 1$  que satisfaz a Equação (2.3), estamos interessados em encontrar uma forma de escrever  $t$  explicitamente em função apenas de  $x \in B^n$ , isto é, escrever  $t = t(x)$ .

Observe que, por hipótese,  $\|x - f(x)\| > 0$ . Assim, a Equação (2.3) é uma equação do tipo  $at^2 + bt + c = 0$ , em que  $a = \|x - f(x)\|^2 > 0$ ,  $b = 2 \langle x - f(x), f(x) \rangle$  e  $c = \|f(x)\|^2 - 1 \leq 0$ .

**Afirmiação:** A equação quadrática dada em (2.3) possui exatamente uma raiz positiva maior que ou igual à 1.

De fato, calculando o discriminante obtemos

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 \langle x - f(x), f(x) \rangle^2 - 4 \|x - f(x)\|^2 (\|f(x)\|^2 - 1).$$

Assim, podemos concluir que  $\Delta \geq 0$ , portanto a equação quadrática possui duas raízes reais (iguais ou distintas).

Note ainda que,

$$0 < \|x - f(x)\|^2 = \|x\|^2 - 2 \langle x, f(x) \rangle + \|f(x)\|^2 \leq 2 - 2 \langle x, f(x) \rangle, \quad (2.4)$$

pois  $x \in B^n$  e  $f(x) \in B^n$ . Portanto,

$$0 < \frac{1}{2 - 2 \langle x, f(x) \rangle} \leq \frac{1}{\|x - f(x)\|^2}. \quad (2.5)$$

Sejam  $t_1$  e  $t_2$  as raízes da equação quadrática dada em (2.3).

Se  $f(x) \in S^n$ , então  $\|f(x)\| = 1$  e assim  $c = 0$ . Desta forma,

$$\|x - f(x)\|^2 t^2 + 2 \langle x - f(x), f(x) \rangle t = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \text{ e } t_2 = -\frac{2 \langle x - f(x), f(x) \rangle}{\|x - f(x)\|^2}.$$

Assim,

$$t_2 = -\frac{2 \langle x, f(x) \rangle - 2 \|f(x)\|^2}{\|x - f(x)\|^2} = \frac{2 - 2 \langle x, f(x) \rangle}{\|x - f(x)\|^2} \geq 1, \text{ pela Equação (2.5).}$$

Por outro lado, se  $f(x) \notin S^n$ , então  $\|f(x)\| < 1$ , daí  $c < 0$ , desta forma  $t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a} < 0$ . Isto significa que as raízes  $t_1$  e  $t_2$  possuem sinais opostos, isto é, uma é positiva e a outra negativa. Digamos, sem perda de generalidade, que  $t_1 < 0 < t_2$ . Desta forma, temos que

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Além disso, como nesse caso a Equação (2.3) possui duas raízes distintas, logo  $\Delta > 0$ .

Suponha que  $t_2 < 1$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} < 1 &\Rightarrow -b + \sqrt{\Delta} < 2a \Rightarrow 0 < \sqrt{\Delta} < 2a + b \Rightarrow \\ 0 < \Delta < 4a^2 + 4ab + b^2 &\Rightarrow 0 < b^2 - 4ac < b^2 + 4ab + 4a^2 \Rightarrow \\ 0 < 4a^2 + 4ab + 4ac &\Rightarrow 0 < a + b + c. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}
 a + b + c &= \|x - f(x)\|^2 + 2\langle x - f(x), f(x) \rangle + \|f(x)\|^2 - 1 \\
 &= \|x\|^2 - 2\langle x, f(x) \rangle + \|f(x)\|^2 + 2\langle x, f(x) \rangle - 2\|f(x)\|^2 + \|f(x)\|^2 - 1 \\
 &= \|x\|^2 - 1.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Pelas Equações (2.6) e (2.7), segue-se que  $0 < \|x\|^2 - 1$ , isto é,  $1 < \|x\|^2$ . Uma contradição, pois  $x \in B^n$ . Portanto,  $t_2 \geq 1$ .

Em todo caso, a equação quadrática dada em (2.3) possui duas raízes reais distintas, com exatamente uma delas maior ou igual a 1, sendo ela dada por

$$t = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\langle x - f(x), f(x) \rangle + \sqrt{4\langle x - f(x), f(x) \rangle^2 - 4\|x - f(x)\|^2(\|f(x)\|^2 - 1)}}{2\|x - f(x)\|^2}.$$

Defina então, a função  $t : B^n \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$t(x) = \frac{-2\langle x - f(x), f(x) \rangle + \sqrt{4\langle x - f(x), f(x) \rangle^2 - 4\|x - f(x)\|^2(\|f(x)\|^2 - 1)}}{2\|x - f(x)\|^2}.$$

Como a norma e o produto interno são funções contínuas, é imediato que a função  $t$  é contínua. Note que a função  $t$  foi construída de forma que para cada  $x \in B^n$ ,  $t(x) \geq 1$ , com  $t(x)$  satisfazendo a Equação (2.3).

Então, substituindo  $t$  por  $t(x)$  em (2.1) podemos escrever a função  $g$  da seguinte maneira,

$$g(x) = \alpha(x)x + (1 - t(x))f(x).$$

Isto significa que  $g$  é uma função contínua. Assim  $g$  é uma retração de  $B^n$  em  $S^n$ , o que contradiz o Teorema da Retração. Portanto,  $f(p) = p$ , para algum  $p \in B^n$ .  $\square$

**Definição 2.4.** Seja  $M$  e  $N$  espaços métricos e  $f : M \rightarrow N$  uma função. Dizemos que  $f$  é um homeomorfismo quando:

- $f$  é uma bijeção;
- $f$  e sua inversa  $f^{-1}$  são contínuas.

Dizemos que  $M$  e  $N$  são homeomorfos, quando existe um homeomorfismos entre esses espaços.

**Exemplo 2.4.** Seja  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ . A bola  $B = B[a, r]$  é homeomorfa à bola  $B^n$ .

De fato, defina a função  $T : B \rightarrow B^n$  por  $T(x) = \frac{1}{r}(x - a)$ . Note que  $T$  está bem definida, pois

$$\|T(x)\| = \left\| \frac{1}{r}(x - a) \right\| = \frac{1}{r}\|x - a\| \leq \frac{r}{r} = 1.$$

Sua inversa é  $T^{-1} : B^n \rightarrow B$  dada por  $T^{-1}(x) = rx + a$ .

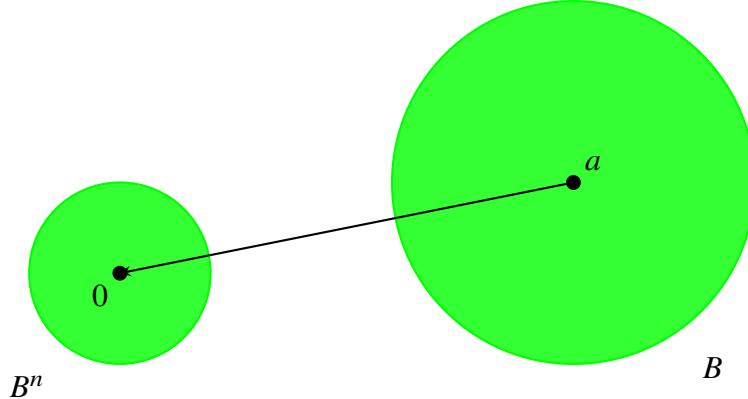


Figura 8 – A função  $T : B \rightarrow B^n$  definida por  $T(x) = \frac{1}{r}(x - a)$ .

Fonte: O autor

**Afirmção:**  $T$  é contínua. De fato, dados  $\varepsilon > 0$  e  $x_0 \in B$ , tome  $\delta = \varepsilon r > 0$ . Daí, se  $x \in B$  e satisfaz  $\|x - x_0\| < \delta$ , temos que

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \left\| \frac{1}{r}(x - a) - \frac{1}{r}(x_0 - a) \right\| = \left\| \frac{1}{r}(x - x_0) \right\| = \frac{1}{r}\|x - x_0\| < \frac{r\varepsilon}{r} = \varepsilon.$$

**Afirmção:**  $T^{-1}$  é contínua. Com efeito, dados  $\varepsilon > 0$  e  $y_0 \in B^n$ , tome  $\delta = \frac{\varepsilon}{r} > 0$ . Daí, se  $y \in B^n$  e satisfaz  $\|y - y_0\| < \delta$ , temos que

$$\|T^{-1}(y) - T^{-1}(y_0)\| = \|(ry + a) - (ry_0 + a)\| = \|r(y - y_0)\| = r\|y - y_0\| < r\frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon.$$

Portanto  $T$  é um homeomorfismo.

A função definida no exemplo anterior realiza uma translação da bola  $B$ , posicionando seu centro na origem, e depois realiza uma homotetia<sup>3</sup>, transformando-a numa bola unitária.

**Proposição 2.1.** Sejam  $X \subset \mathbb{R}^n$  homeomorfo à  $B^n$  e  $f : X \rightarrow X$  uma função contínua. Então existe  $p \in X$  tal que  $f(p) = p$ .

<sup>3</sup> Dado um espaço vetorial normado  $V$ , os conjuntos  $X, Y \subset V$  quaisquer e um número  $\alpha \in \mathbb{R}$  com  $\alpha \neq 0$ , a função  $h_\alpha : X \rightarrow Y$  dada por  $h_\alpha(x) = \alpha x$ , é chamada homotetia. Ver (DOMINGUES, 1982).

*Demonstração.* Como  $X$  é homeomorfo à bola  $B^n$ , existe um homeomorfismo  $h : X \rightarrow B^n$ . Note que a função

$$g = h \circ f \circ h^{-1} : B^n \rightarrow B^n$$

é composta de funções contínuas. Segue-se do Teorema 2.4 que existe  $a \in B^n$  tal que  $g(a) = a$ .

$$\begin{array}{ccc} B^n & \xrightarrow{g} & B^n \\ h^{-1} \downarrow & & \uparrow h \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Figura 9 – A função  $g = h \circ f \circ h^{-1}$ .

Fonte: O autor

Como  $h$  é homeomorfismo, existe  $p \in X$  tal que  $h(p) = a$ , e consequentemente  $h^{-1}(a) = p$ . Afirmamos que  $p$  é ponto fixo de  $f$ . Com efeito

$$\begin{aligned} f(p) &= (f \circ h^{-1})(a) = [(h^{-1} \circ h) \circ (f \circ h^{-1})](a) = [(h^{-1} \circ (h \circ (f \circ h^{-1})))](a) \\ &= (h^{-1} \circ g)(a) = h^{-1}(a) = p. \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.2** (Teorema de Brouwer em uma Bola Fechada do  $\mathbb{R}^n$ ). *Seja  $B$  uma bola fechada qualquer de  $\mathbb{R}^n$  e  $f : B \rightarrow B$  contínua. Então existe  $p \in B$  tal que  $f(p) = p$ .*

Sejam  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ . Mostraremos agora que o Teorema de Brouwer em uma bola fechada  $B = B[x_0, r]$  qualquer de  $\mathbb{R}^n$  implica no Teorema da Retração em  $B$ .

**Corolário 2.3.** *Seja  $B = B[x_0, r]$  uma bola fechada de  $\mathbb{R}^n$  e  $S = S(x_0, r)$  o seu bordo. Não existe retração de  $B$  em  $S$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista  $g : B \rightarrow S$  contínua e satisfazendo  $g(x) = x, \forall x \in S$ . Podemos definir a função  $f : B \rightarrow B$  por

$$f(x) = 2x_0 - g(x).$$

Note que  $f$  está bem definida, pois  $f(B) \subset S \subset B$ . De fato,

$$\|f(x) - x_0\| = \|2x_0 - g(x) - x_0\| = \|g(x) - x_0\| = r, \text{ pois } g(x) \in S.$$

Além disso,  $f$  é contínua. Segue-se do 2.2 que existe  $p \in B$  tal que  $f(p) = p$ . E como vimos acima,  $p \in S$ , assim,  $g(p) = p$ . Daí

$$p = f(p) = 2x_0 - g(p) = 2x_0 - p \Rightarrow 2p = 2x_0 \Rightarrow p = x_0 \Rightarrow \|p - x_0\| = 0$$

o que contradiz o fato de que  $p \in S$ . Portanto não pode existir retração de  $B$  em  $S$ .  $\square$

## 2.3 O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em Conjuntos Convexos Compactos de $\mathbb{R}^n$

A seguir faremos uma generalização do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer para conjuntos convexos e compactos de  $\mathbb{R}^n$ . A principal referência utilizada nesta seção foi ([Institute, 2025](#)).

**Teorema 2.5** (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em Conjuntos Convexos Compactos de  $\mathbb{R}^n$ ). *Sejam  $K$  um conjunto convexo e compacto de  $\mathbb{R}^n$  e  $f : K \rightarrow K$  uma função contínua. Então existe  $p \in K$  tal que  $f(p) = p$ .*

*Demonstração.* Como  $K$  é compacto, temos que  $K$  é limitado. Portanto podemos tomar alguma bola  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $K \subset B$ . Fixe  $x \in B$ . A partir da norma euclidiana, defina a função

$$d_x : K \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ por } d_x(z) = \|x - z\|.$$

Como  $d_x$  é contínua e  $K$  é compacto, temos que  $d_x$  assume valor mínimo em algum  $y_x \in K$ , isto é,  $\|x - y_x\| \leq \|x - z\|, \forall z \in K$ .

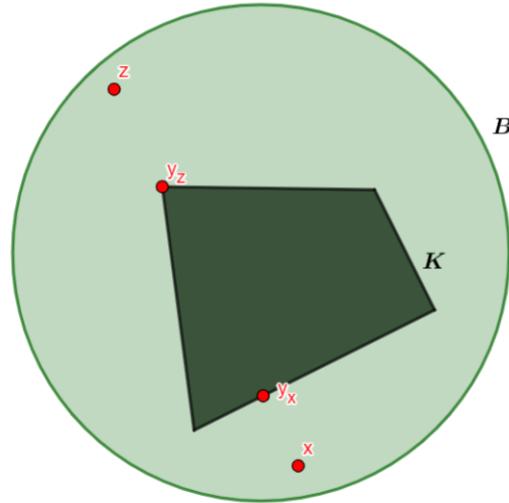


Figura 10 – O ponto  $y_x \in K$  fornece a menor distância entre o ponto  $x \in B$  e o conjunto  $K$ .  
Fonte: O autor

**Afirmção:** Este  $y_x$  é único. De fato, sejam  $y_1, y_2 \in K$  tais que

$$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d \leq \|x - z\|, \forall z \in K.$$

Como  $K$  é convexo,  $u = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \in K$ . Daí, aplicando-se a regra do paralelogramo<sup>4</sup> temos

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|x - u\|^2 = \left\|x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right\|^2 = \frac{1}{4}\|2x - (y_1 + y_2)\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\|(x - y_1) + (x - y_2)\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|x - y_1\|^2 + \frac{1}{2}\|x - y_2\|^2 - \frac{1}{4}\|(x - y_1) - (x - y_2)\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|x - y_1\|^2 + \frac{1}{2}\|x - y_2\|^2 - \frac{1}{4}\|y_1 - y_2\|^2 = d^2 - \frac{1}{4}\|y_1 - y_2\|^2 \leq d^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Pela Equação (2.8) temos que

$$d^2 \leq d^2 - \frac{1}{4}\|y_1 - y_2\|^2 \leq d^2.$$

Portanto  $\|y_1 - y_2\| = 0$ , e assim  $y_1 = y_2$ . Em outras palavras, para cada  $x \in B$  existe único  $y_x \in K$  tal que

$$\|x - y_x\| = \min_{z \in K} \{\|x - z\|\}.$$

Podemos então definir a função

$$g : B \rightarrow K \text{ por } g(x) = y_x, \forall x \in B.$$

Note que,  $g(x) = x, \forall x \in K$ .

**Afirmção:** A função  $g$  é contínua. Com efeito, seja  $x_0 \in B$  e  $(x_n) \subset B$  com  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Suponha que  $(g(x_n)) \subset K$  não converja para  $g(x_0) \in K$ . Então existe  $\varepsilon > 0$  e uma subsequência  $(g(x_{n_j}))$  tais que

$$\|g(x_{n_j}) - g(x_0)\| \geq \varepsilon, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Como  $K$  é compacto, existe uma subsequência  $(g(x_{n_{j_i}}))$  de  $(g(x_{n_j}))$ , que converge para algum ponto  $y^* \in K$ .

Desta forma, para todo  $i \in \mathbb{N}$  temos que

$$\|x_{n_{j_i}} - g(x_{n_{j_i}})\| \leq \|x_{n_{j_i}} - z\|, \forall z \in K,$$

em particular

$$\|x_{n_{j_i}} - g(x_{n_{j_i}})\| \leq \|x_{n_{j_i}} - g(x_0)\|,$$

<sup>4</sup> Usamos que dados  $u, v \in \mathbb{R}^n$  vale que  $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ .

e passando o limite obtemos que

$$\|x_0 - y^*\| \leq \|x_0 - g(x_0)\|.$$

Segue-se da minimalidade de  $\|x_0 - g(x_0)\|$  que  $y^* = g(x_0)$ .

Daí  $\lim_{i \rightarrow \infty} g(x_{n_j}) = g(x_0)$ , o que contradiz o fato de  $\|g(x_{n_j}) - g(x)\| \geq \varepsilon$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Portanto,  $(g(x_n))$  converge para  $g(x_0)$ . Portanto  $g$  é contínua.

Defina a função  $h : B \rightarrow B$  pondo

$$h(x) = (f \circ g)(x), \forall x \in B.$$

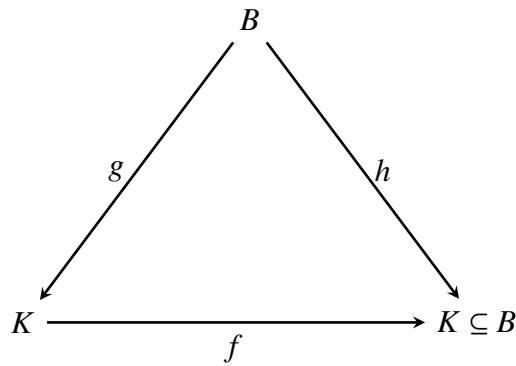


Figura 11 – A função  $h = f \circ g$ .

Fonte: O autor

Como  $f$  e  $g$  são contínuas, segue-se que  $h$  é contínua. Pelo Corolário 2.2, temos que existe  $p \in B$  tal que  $h(p) = p$ . Como  $h(B) = f(g(B)) \subset K$ , temos que  $p \in K$ . Assim,  $g(p) = p$ . Portanto,

$$f(p) = f(g(p)) = h(p) = p,$$

e  $p$  é um ponto fixo de  $f$ . □

## CAPÍTULO 3

### *O JOGO HEX*

Neste capítulo vamos discutir a equivalência entre o Teorema de Hex e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. O Jogo Hex<sup>1</sup> é um jogo não cooperativo, isto é, cada participante age de forma independentemente, sem colaboração ou comunicação com nenhum outro jogador, como visto em ([Salvanés, 2021](#)), e além disso possui regras bem simples. O Teorema de Hex afirma, basicamente, que o jogo Hex nunca termina empatado. Por fim, provaremos que o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema de Hex são equivalentes. As principais referências utilizadas neste capítulo foram ([Salvanés, 2021](#)) e ([Gale, 1979](#)).

#### 3.1 O Jogo Hex

O jogo Hex é um jogo de estratégia criado por Piet Hein, em 1942, e reinventado por John Nash, em 1948. O tabuleiro de Hex é composto por células hexagonais regulares dispostas de modo a formar um losango. Esse tabuleiro é normalmente identificado como sendo de tamanho  $k \times k$ , indicando que há  $k$  hexágonos em cada lado. As bordas opostas do tabuleiro são distinguidas por duas cores diferentes, geralmente vermelho e azul, cada uma correspondendo a um dos dois jogadores. A Figura 12 apresenta um tabuleiro de Hex  $12 \times 12$ . As regras do jogo são:

- A cada jogador é atribuída uma cor;
- Os jogadores jogam alternadamente;
- A jogada consiste em colorir uma casa vazia do tabuleiro com a sua cor;
- Vence o jogo o primeiro jogador a conseguir obter um caminho formado por hexágonos adjacentes, todos da sua cor, ligando os lados opostos do tabuleiro da cor do jogador.
- O jogo termina quando um dos jogadores vencer.

Assim, observando a Figura 12, o jogador vermelho deve construir um caminho de hexágonos vermelhos adjacentes que ligue as bordas vermelhas (superior e inferior), enquanto o jogador azul busca conectar as bordas azuis (esquerda e direita) com um caminho formado por hexágonos azuis adjacentes.

---

<sup>1</sup> Existem aplicativos gratuitos que podem ser baixados, para se jogar o jogo tanto a versão para computadores quanto para celulares. Pode-se baixar a versão para computadores no seguinte link: <https://hex-boardgame.en.softonic.com/>

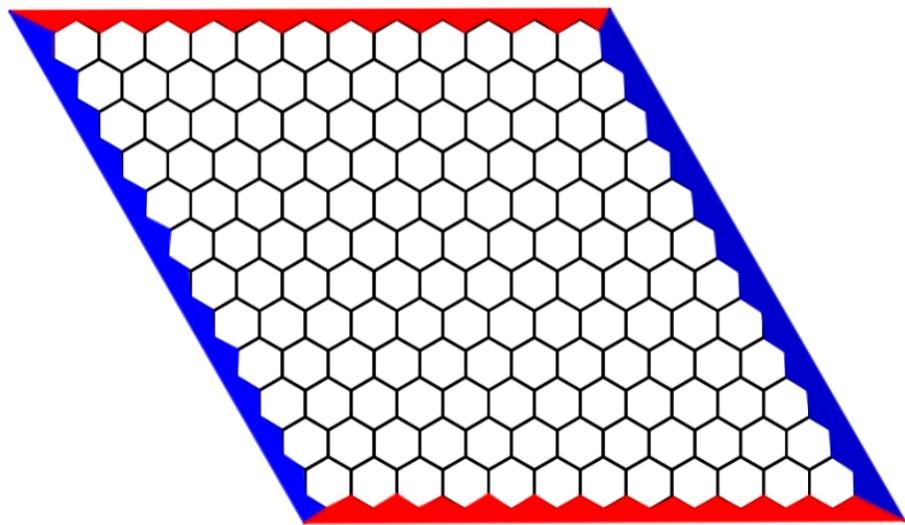


Figura 12 – Tabuleiro de Hex  $12 \times 12$ .

Fonte: O autor.

A Figura 13 ilustra um tabuleiro de Hex no qual as células vermelhas e azuis representam as jogadas dos dois participantes. As bordas vermelhas correspondem às extremidades superior e inferior, e as bordas azuis às laterais esquerda e direita.

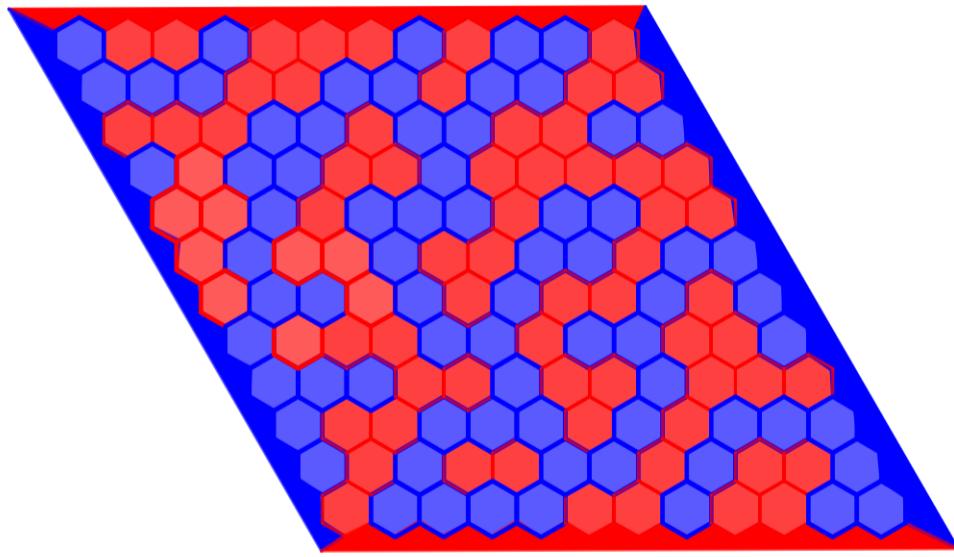


Figura 13 – Tabuleiro de Hex  $12 \times 12$ , ao fim do jogo.

Fonte: O autor.

## 3.2 O Teorema de Hex

Nesta seção mostraremos que o jogo Hex nunca termina empatado, isto é, sempre um dos dois jogadores irá vencer.

Intuitivamente, para que houvesse um empate, seria necessário que ambos os jogadores estivessem “presos”, isto é, que nenhum deles conseguisse estabelecer um caminho formado por hexágonos adjacentes entre as suas respectivas bordas. No entanto, tal situação é impossível no jogo Hex. De fato, suponha que o jogador azul tenha formado um conjunto de peças que impede o avanço do jogador vermelho. Isso significa que o azul criou uma espécie de barreira fechada, delimitando uma região onde o vermelho não pode mais conectar suas bordas. Contudo, essa mesma barreira azul, ao se fechar sobre o vermelho, forçosamente cria um caminho contínuo de peças azuis que liga as bordas azuis do tabuleiro, garantindo assim a vitória do azul.

De modo análogo, se o vermelho tentar impedir completamente o azul, a fronteira que ele formar acabará conectando suas próprias bordas, resultando na vitória vermelha. Portanto, é impossível que ambos fiquem presos simultaneamente, pois o ato de “prender” o adversário já constitui uma conexão vencedora.

**Teorema 3.1** (Teorema de Hex, Gale 1979). *Se todos os hexágonos do tabuleiro  $k \times k$  do jogo Hex estão coloridos por alguma cor, seja vermelho ou azul, então existirá um caminho de hexágonos adjacentes que une ou os lados vermelhos, ou os lados azuis.*

*Demonstração.* Inicialmente observe que se o jogo se encerrar antes de o tabuleiro estar completamente preenchido, então um dos jogadores terá vencido, isto é, construído um caminho ligando as bordas da sua cor por um caminho de hexágonos dessa mesma cor, e o resultado estará provado. Consideraremos então uma partida em que todas as casas do tabuleiro foram preenchidas e mostraremos que um dos jogadores venceu. Para demonstrar esse resultado, construiremos um algoritmo que, para qualquer tabuleiro  $k \times k$  completo após uma partida do jogo Hex, como a Figura 13, sempre encontre um caminho de hexágonos adjacentes unindo dois lados opostos do tabuleiro, da mesma cor do caminho. Nomearemos de  $u, v, u'$  e  $v'$  os vértices do tabuleiro.

Para construir o algoritmo criaremos um grafo. Em Teoria de Grafos, o que chamamos de *nós* serão os vértices dos hexágonos e os vértices do tabuleiro; as *arestas* do grafo serão os lados dos hexágonos e os segmentos ligando os vértices  $u, v, u'$  e  $v'$  ao bloco de hexágonos do tabuleiro, conforme a Figura 14. Chamaremos de *casas azuis* os hexágonos azuis e os lados azuis do tabuleiro. Analogamente, chamaremos de *casas vermelhas* os hexágonos vermelhos e os lados vermelhos do tabuleiro.

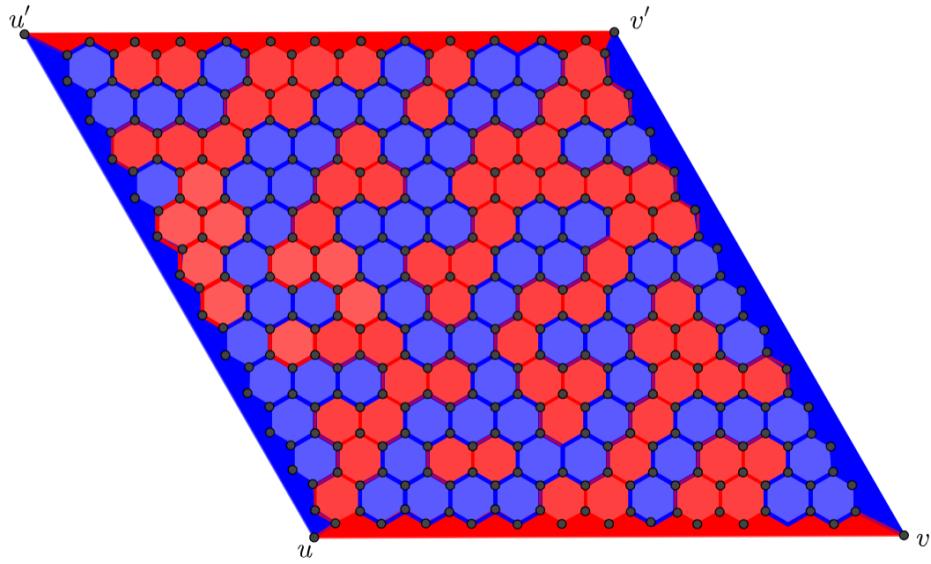


Figura 14 – Tabuleiro de Hex  $12 \times 12$  com seus nós e arestas.

Fonte: O autor.

A regra de construção do grafo é que ele sempre avance por uma aresta que tenha uma casa azul de um lado e uma casa vermelha de outro. É fácil ver que as arestas que partem de quaisquer dos vértices  $u, v, u'$  e  $v'$  satisfazem essa propriedade.

Sem perda de generalidade, consideremos o grafo sendo percorrido a partir do vértice  $u$ . À medida que seguimos as arestas do grafo, imaginemos que caminhamos sobre elas, avançando de um vértice ao próximo conforme a orientação definida pelo percurso. Dessa forma, convencionamos chamar de lado direito do grafo aquele que corresponde à direção voltada para a nossa mão direita, e de lado esquerdo aquele voltado para a nossa mão esquerda.

Nessa perspectiva, ao iniciarmos o trajeto, temos uma casa vermelha localizada à direita do grafo e uma casa azul à esquerda. Ou seja, é como se “caminhássemos” sobre a primeira aresta, indo do vértice  $u$  ao próximo, tendo à nossa direita uma casa vermelha e à nossa esquerda uma casa azul. Ao continuarmos a caminhada, isto é, ao avançarmos de vértice em vértice seguindo a construção do grafo, essa relação entre as cores se mantém: a cada novo passo, encontramos sempre uma casa vermelha à direita e uma azul à esquerda, conforme ilustrado na Figura 15.

Para que essa disposição se invertesse, seria necessário que o trajeto passasse por uma aresta que ligasse duas casas da mesma cor em ambos os lados, o que violaria a forma como o grafo foi construído. Portanto, a orientação do percurso garante que o padrão de cores se preserve em todo o grafo.

Além disso, ao percorrer uma aresta do grafo, saindo de um vértice e chegando a outro vértice cercado por três casas adjacentes, como na Figura 15, é sempre possível mover-se para outro

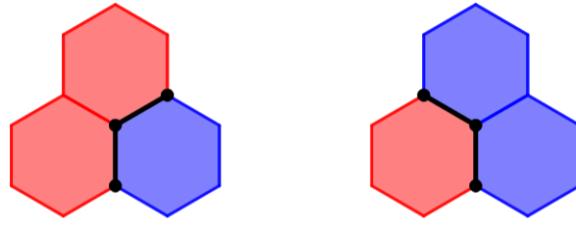


Figura 15 – Três casas adjacentes do tabuleiro.

Fonte: O autor.

vértice diferente, isto é, percorrer uma nova aresta, de acordo com as regras do algoritmo e como pode ser visto na Figura 15, há sempre uma única forma de fazer esse movimento. Desta forma, o algoritmo constrói um grafo e este é único.

Adicionalmente, como o grafo é finito, já que a quantidade de arestas do tabuleiro  $k \times k$  é finita, concluímos que o processo deve acabar em algum momento. Porém, como já vimos, sempre que houver três casas adjacentes é possível avançar. Desta forma concluímos que o processo deverá se encerrar em um dos vértices  $u, v, u'$  e  $v'$ . Porém o processo não pode terminar em  $u$ , já que ele se iniciou neste vértice, e nem em  $v'$ , pois isso faria com que tivéssemos uma casa azul à direita do grafo e uma vermelha à esquerda do grafo, o que já concluímos que é impossível. Logo, o grafo só poderá terminar em  $v$  ou  $u'$ . Observe os grafos, partindo do vértice  $u$ , Figura 16, e  $u'$ , Figura 17.

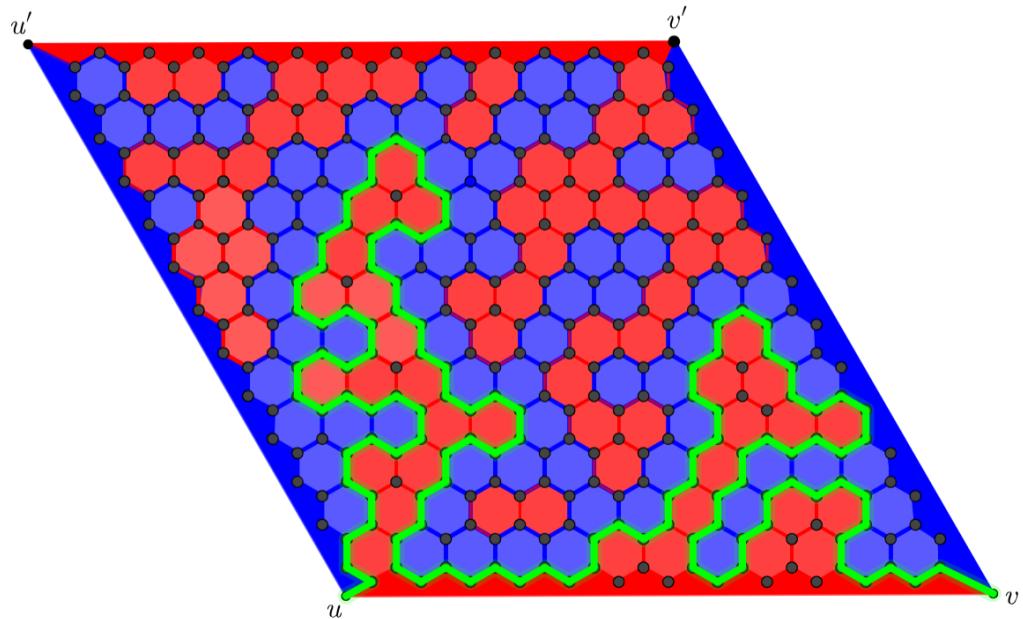


Figura 16 – Grafo construído utilizando o algoritmo no Tabuleiro de Hex  $12 \times 12$ .

Fonte: O autor.

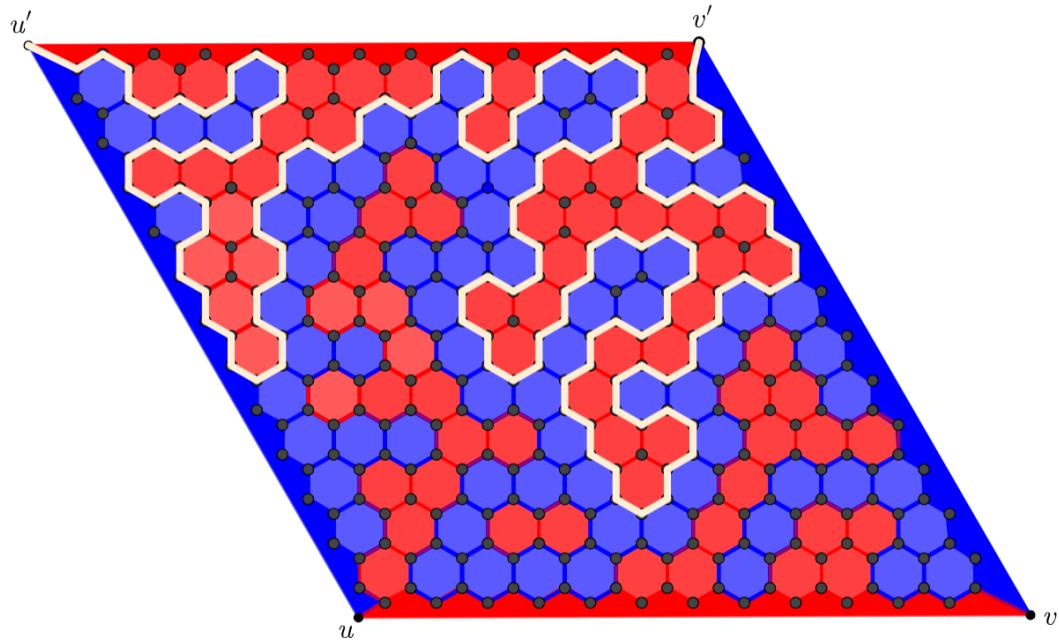


Figura 17 – Grafo construído utilizando o algoritmo no Tabuleiro de Hex  $12 \times 12$ .  
Fonte: O autor.

No caso em que o grafo iniciado em  $u$  termina em  $v$ , como na Figura 16, teremos um caminho formado por hexágonos azuis ligando os lados azuis do tabuleiro. Caso o grafo tivesse terminado em  $u'$ , teríamos um caminho formado por hexágonos vermelhos ligando os lados vermelhos do tabuleiro.

□

Esse algoritmo traduz a ideia intuitiva trazida no início desta seção. Conforme vemos a figura, os grafos obtidos formam um tipo de “barreira” azul criada por um dos jogadores e que “impede” os movimentos do outro jogador.

### 3.3 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer via Teorema de Hex

Nesta seção provaremos novamente o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, desta vez utilizando o Teorema de Hex.

Considere a função  $g_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$g_0(x) = \left( \frac{2x_1 - x_2}{2}, \frac{\sqrt{3}x_2}{2} \right),$$

para todo  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . A função  $g_0$  é um homeomorfismo cuja inversa  $g_0^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por

$$g_0^{-1}(x) = \left( \frac{3x_1 + \sqrt{3}x_2}{3}, \frac{2\sqrt{3}x_2}{3} \right),$$

para todo  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Podemos definir ainda a seguinte função  $\|\cdot\|_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  por  $\|x\|_A = \|g_0^{-1}(x)\|$ , em que  $\|\cdot\|$  é a norma do máximo em  $\mathbb{R}^2$ .

**Lema 3.1.** *A função  $\|\cdot\|_A$  é uma norma em  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demonstração.* De fato:

i) Seja  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\|x\|_A = 0$ . Então,

$$0 = \|x\|_A = \|g_0^{-1}(x)\| \Rightarrow g_0^{-1}(x) = (0, 0).$$

Segue-se que

$$\begin{cases} \frac{3x_1 + \sqrt{3}x_2}{3} = 0, \\ \frac{2\sqrt{3}x_2}{3} = 0. \end{cases}$$

Portanto,  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ .

ii) Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^2$ . Então,

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_A &= \|g_0^{-1}(\lambda x)\| = \left\| \left( \frac{3\lambda x_1 + \sqrt{3}\lambda x_2}{3}, \frac{2\sqrt{3}\lambda x_2}{3} \right) \right\| = \left\| \lambda \left( \frac{3x_1 + \sqrt{3}x_2}{3}, \frac{2\sqrt{3}x_2}{3} \right) \right\| \\ &= |\lambda| \left\| \left( \frac{3x_1 + \sqrt{3}x_2}{3}, \frac{2\sqrt{3}x_2}{3} \right) \right\| = |\lambda| \cdot \|g_0^{-1}(x)\| = |\lambda| \cdot \|x\|_A. \end{aligned}$$

iii) Sejam  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ . Então,

$$\begin{aligned} \|x + y\|_A &= \|g_0^{-1}(x + y)\| = \left\| \left( \frac{3(x_1 + y_1) + \sqrt{3}(x_2 + y_2)}{3}, \frac{2\sqrt{3}(x_2 + y_2)}{3} \right) \right\| \\ &= \left\| \left( \frac{3x_1 + \sqrt{3}x_2}{3}, \frac{2\sqrt{3}x_2}{3} \right) + \left( \frac{3y_1 + \sqrt{3}y_2}{3}, \frac{2\sqrt{3}y_2}{3} \right) \right\| = \|g_0^{-1}(x) + g_0^{-1}(y)\| \\ &\leq \|g_0^{-1}(x)\| + \|g_0^{-1}(y)\| = \|x\|_A + \|y\|_A. \end{aligned}$$

Portanto,  $\|\cdot\|_A$  é uma norma em  $\mathbb{R}^2$ . □

Observe que a restrição  $g$  da função  $g_0$  à  $I^2$  é um homeomorfismo do quadrado  $I^2$  no losango de  $\mathbb{R}^2$  de lado um, com vértices em  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  e  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . Tal losango será denotado por  $A$ . Geometricamente, a função  $g$  mantém a base do quadrado  $I^2$  fixa e deforma o quadrado no losango, empurrando seu topo para a esquerda<sup>2</sup>.

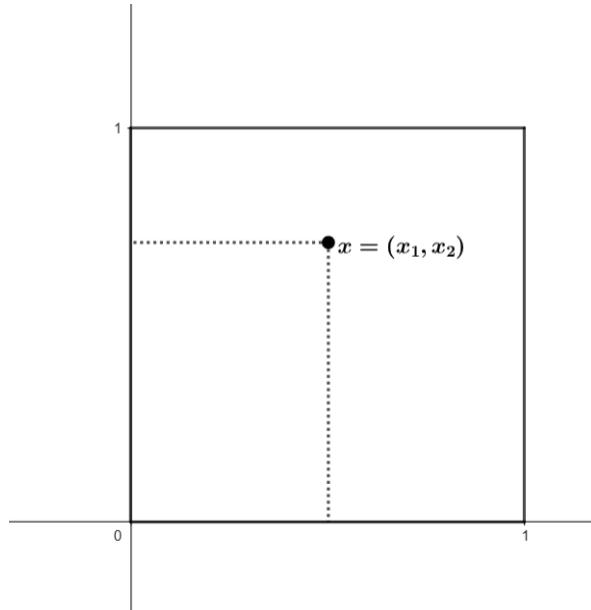


Figura 18 – A função  $g$  é um homeomorfismo de  $I^2$  em  $A$ .

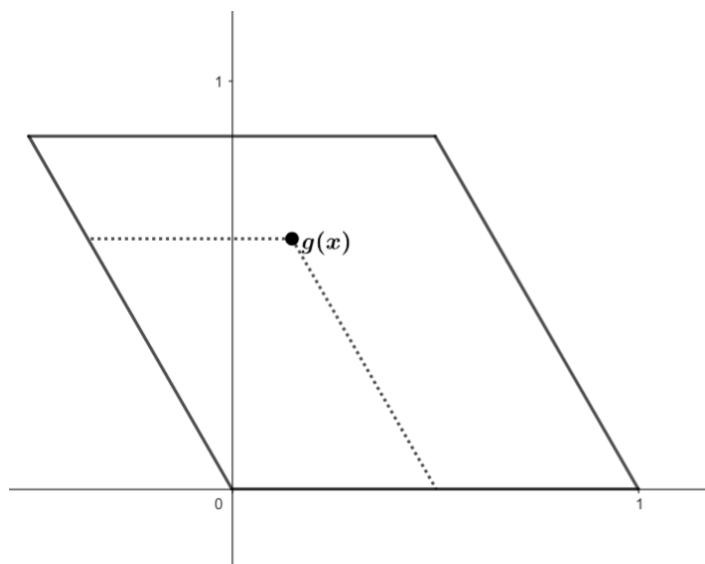


Figura 19 – A função  $g$  é um homeomorfismo de  $I^2$  em  $A$ .

Fonte: O autor.

<sup>2</sup> Pode-se ver o funcionamento da função  $g$  através da construção disponível no link <https://www.geogebra.org/classic/ysf9gmjq>.

**Teorema 3.2** (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer via Teorema do Hex). *Seja  $I = [0, 1]$  e  $f : I^2 \rightarrow I^2$  contínua. Então existe  $x_0 \in I^2$  tal que  $f(x_0) = x_0$ .*

*Demonstração.* Denotaremos por  $\|\cdot\|$  a norma do máximo em  $\mathbb{R}^2$ , isto é,  $\|x\| = \max\{x_1, x_2\}$  para qualquer  $x = (x_1, x_2) \in I^2$  e por  $\|\cdot\|_A$  a norma em  $\mathbb{R}^2$  definida no início desta seção, a partir da função  $g_0^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Como  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$  é contínua, temos que  $f_1$  e  $f_2$  são contínuas, pela Proposição A.7. Suponha que exista  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $\|f(x) - x\| \geq \varepsilon_0$ , para todo  $x \in I^2$ . Isto significa, que o ponto  $f(x)$  não pertence ao quadrado de lado  $2\varepsilon_0$  e centro em  $x$ , pois estamos utilizando a norma do máximo, conforme pode ser representado na Figura 20.

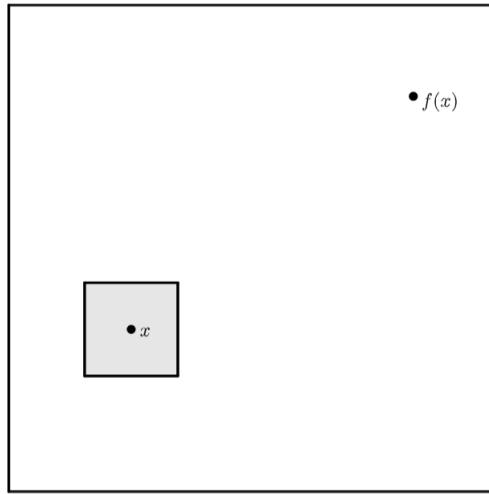


Figura 20 – Elemento  $x \in I^2$  e sua imagem pela função  $f$ .

Fonte: O autor.

Construiremos os seguintes conjuntos:

$$H^+ = \{x \in I^2; f_1(x) - x_1 > \varepsilon_0\},$$

$$H^- = \{x \in I^2; x_1 - f_1(x) > \varepsilon_0\},$$

e denotaremos por  $H = H^+ \cup H^-$ . Sendo  $X = I^2 - H$ , construiremos também os conjuntos

$$V^+ = \{x \in X; f_2(x) - x_2 > \varepsilon_0\},$$

$$V^- = \{x \in X; x_2 - f_2(x) > \varepsilon_0\}.$$

Em outras palavras, cada  $x \in I^2$  determina 4 regiões em  $I^2$  conforme a Figura 21. Dizemos que  $x \in H^+$  se  $f(x)$  pertencer a Região Azul Escuro;  $x \in H^-$  se  $f(x)$  pertencer a Região Azul Claro;  $x \in V^+$  se  $f(x)$  pertencer a Região Vermelho Escuro;  $x \in V^-$  se  $f(x)$  pertencer a Região Vermelho Claro.

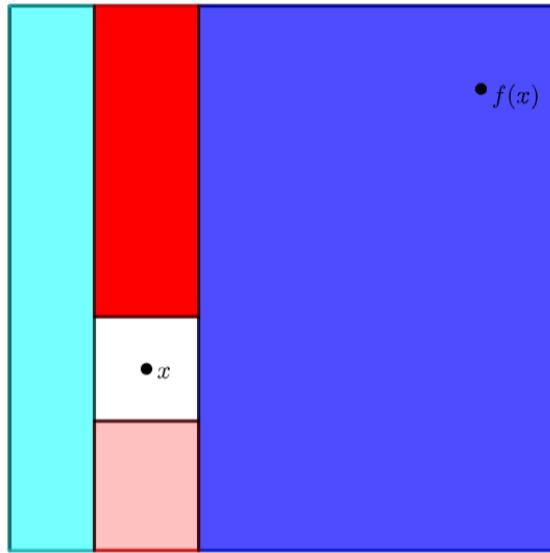


Figura 21 – Divisão de  $I^2$  em quatro regiões para cada  $x \in I^2$ .  
Fonte: O autor.

Sendo  $g = g_0|_{I^2} : I^2 \rightarrow A$ , podemos definir os conjuntos:

$$\begin{aligned} H_A^+ &= \{z \in A; g^{-1}(z) \in H^+\}, \\ H_A^- &= \{z \in A; g^{-1}(z) \in H^-\}, \\ V_A^+ &= \{z \in A; g^{-1}(z) \in V^+\}, \\ V_A^- &= \{z \in A; g^{-1}(z) \in V^-\}. \end{aligned}$$

Assim, cada  $z \in A$  determina quatro regiões em  $A$  conforme a Figura 22.

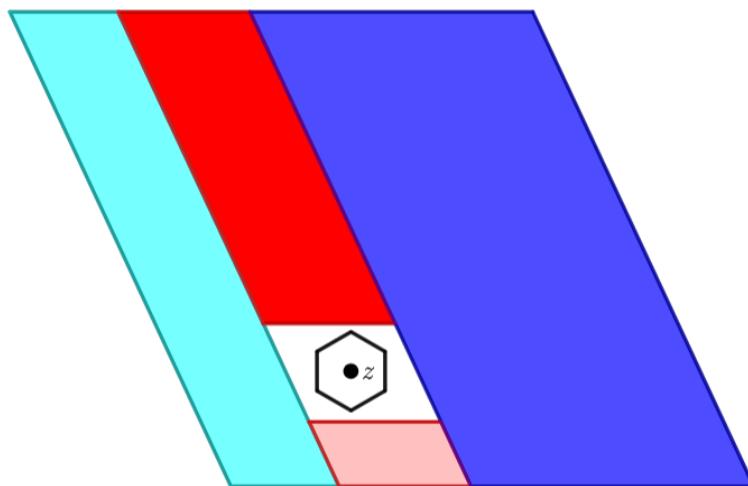


Figura 22 – Divisão de  $A$  em quatro regiões para cada  $z \in A$ .  
Fonte: O autor.

Podemos construir um tabuleiro de Hex  $n \times n$ , em que  $n \in \mathbb{N}$  é suficientemente grande tal que cada hexágono esteja contido no losango de lado  $2\varepsilon_0$  e cujo centro é o mesmo do hexágono, como mostra a Figura 22.

Como a função  $g^{-1}$  é uma função contínua em  $A$ , que é um conjunto compacto, e  $f$  é contínua em  $I^2$ , que também é compacto, segue-se pelo Teorema A.2 que  $g^{-1}$  e  $f$  são uniformemente contínuas. Daí existem  $\delta > 0$  e  $\delta_0 > 0$  tais que

$$\text{se } x, x' \in I^2 \text{ e } \|x - x'\| < \delta, \text{ então } \|f(x) - f(x')\| < \varepsilon_0,$$

e

$$\text{se } z, z' \in A \text{ e } \|z - z'\|_A < \delta_0, \text{ então } \|g^{-1}(z) - g^{-1}(z')\| < \delta.$$

Podemos tomar  $\delta$  pequeno o suficiente tal que  $\delta < \varepsilon_0$ . Novamente, uma vez fixado o valor de  $\delta_0$ , podemos tomar  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que se  $z, z' \in A$  forem centros de dois hexágonos adjacentes, então a distância  $\|z - z'\|_A < \delta_0$ .

Por fim, iremos colorir cada hexágono de acordo com o conjunto em que seu centro estiver, isto é, se o centro do hexágono estiver em  $H_A^+, H_A^-, V_A^+$  ou  $V_A^-$  iremos colorir o hexágono de azul escuro, azul claro, vermelho escuro ou vermelho claro, respectivamente.

Mostraremos agora que não existem hexágonos adjacentes que sejam um azul escuro e o outro azul claro. Suponham que existam um hexágono de centro em  $z = (z_1, z_2) \in H_A^+$  e um hexágono de centro em  $z' = (z'_1, z'_2) \in H_A^-$ , adjacentes. Isto significa que  $x = g^{-1}(z) = (x_1, x_2) \in H^+$  e  $x' = g^{-1}(z') = (x'_1, x'_2) \in H^-$ . De acordo com a escolha de  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\|z - z'\|_A < \delta_0 \Rightarrow \|g^{-1}(z) - g^{-1}(z')\| = \|x - x'\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| < \varepsilon_0.$$

Além disso, como  $x \in H^+$  e  $x' \in H^-$ , temos que

$$f_1(x) - x_1 > \varepsilon_0 \quad \text{e} \quad x'_1 - f_1(x') > \varepsilon_0 \Rightarrow f_1(x) - f_1(x') + x'_1 - x_1 > 2\varepsilon_0.$$

Logo, como estamos usando a norma do máximo em  $I^2$ , temos que  $f_1(x) - f_1(x') \leq \|f(x) - f(x')\|$  e  $x'_1 - x_1 \leq \|x - x'\| < \delta < \varepsilon_0$ . Assim,

$$2\varepsilon_0 < f_1(x) - f_1(x') + x'_1 - x_1 < \|f(x) - f(x')\| + \varepsilon_0.$$

Concluímos então que

$$\|f(x) - f(x')\| > \varepsilon_0,$$

contradizendo a continuidade uniforme de  $f$ , pois  $\|x - x'\| < \delta$ , mas  $\|f(x) - f(x')\| > \varepsilon_0$ . Portanto não existem hexágonos adjacentes que sejam um azul escuro e o outro azul claro. Analogamente, não existem hexágonos adjacentes que sejam um vermelho escuro e o outro vermelho claro.

Além disso, os hexágonos adjacentes à borda direita do tabuleiro, não podem ser pintados de azul escuro. Suponha que pudessem. Então existiria um hexágono, de centro em  $z = (z_1, z_2) \in H_A^+$ , adjacente à borda direita do tabuleiro. Assim, temos que  $x = g^{-1}(z) = (x_1, x_2) \in H^+$ . Segue-se disto que

$$f_1(x) - x_1 > \varepsilon_0 \Rightarrow f_1(x) > x_1 + \varepsilon_0.$$

Pela construção da função  $g$ , como  $(1, x_2) \in I^2$  pertence à borda direita de  $I^2$ , podemos concluir que  $z' = g(1, x_2) \in A$  pertence à borda direita do tabuleiro. Podemos tomar  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que  $\|z - u\|_A < \varepsilon_0$ , para todo  $u \in A$  que pertença à borda direita do tabuleiro. Daí, em particular, tem-se  $\|z - z'\|_A < \varepsilon_0$ . Segue-se que

$$\|z - z'\|_A = \|g^{-1}(z) - g^{-1}(z')\| = \|(x_1, x_2) - (1, x_2)\| = |x_1 - 1| = 1 - x_1,$$

pois  $0 \leq x_1 \leq 1$ , já que  $(x_1, x_2) \in I^2$ .

Desta forma,  $1 - x_1 < \varepsilon_0$ , daí  $1 < x_1 + \varepsilon_0 < f_1(x)$ . Logo  $f(x)$  não pertenceria a  $I^2$ , e isto é uma contradição, pois por hipótese  $f(x) \in I^2, \forall x \in I^2$ . Da mesma maneira: os hexágonos da borda esquerda do tabuleiro, não podem ser pintados de azul claro; os hexágonos da borda superior do tabuleiro, não podem ser pintados de vermelho escuro; os hexágonos da borda inferior do tabuleiro, não podem ser pintados de vermelho claro.

Concluímos assim que embora todas as casas do tabuleiro estejam pintadas, não há um caminho de hexágonos azuis (escuros ou claros) adjacentes ligando os lados azuis do tabuleiro e não há um caminho de hexágonos vermelhos (escuros ou claros) adjacentes ligando os lados vermelhos do tabuleiro. Este fato contradiz o Teorema 3.1. Portanto, concluímos que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $x \in I^2$  tal que  $\|f(x) - x\| < \varepsilon$ .

Desta forma, é possível tomar uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I^2$  tal que

$$\|f(x_n) - x_n\| < \frac{1}{n}.$$

Como  $I^2$  é compacto, existe uma subsequência  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset I^2$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in I^2$ . Como  $f$  é contínua segue-se que

$$\|f(x_0) - x_0\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f(x_{n_k}) - x_{n_k}\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} = 0.$$

Portanto,  $f(x_0) = x_0$ . □

### 3.4 Teorema de Hex via Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Considere a seguir o seguinte resultado, cuja demonstração não faremos neste trabalho, mas pode ser encontrada em ([Lima, Elon Lages, 2015](#)).

**Proposição 3.1.** *Sejam  $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$  e  $C = (c_1, c_2)$ , pontos de  $\mathbb{R}^2$ , não colineares. A área do triângulo com vértices  $A, B$  e  $C$  é dada por*

$$S(A, B, C) = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [(a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (b_1 - c_1)(a_2 - c_2)].$$

**Corolário 3.1.** *Se  $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$  e  $C = (c_1, c_2)$  são pontos de  $\mathbb{R}^2$  não colineares, então*

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

A seguir provaremos alguns resultados que usaremos para provar o Teorema 3.1 a partir do Teorema 3.2.

Considere um tabuleiro de Hex, de tamanho  $k \times k$ , completo ao fim de uma partida, como na Figura 13. Podemos identificá-lo como um quadrado  $I^2$ .

**Definição 3.1.** *Os centros dos hexágonos serão chamados de vértices. Dois vértices são adjacentes quando seus respectivos hexágonos forem adjacentes. O segmento ligando dois vértices adjacentes será chamado de aresta.*

Ligando os vértices adjacentes e nomeando os lados do tabuleiro por  $O$  (lado esquerdo),  $L$  (lado direito),  $N$  (lado superior) e  $S$  (lado inferior), obtém-se a Figura 23.

**Definição 3.2.** *O conjunto  $B_k$  é o conjunto de todos os vértices.*

**Definição 3.3.** *Chamaremos de triângulo o polígono formado por três vértices, dois a dois, adjacentes.*

É fácil perceber que cada ponto do quadrado  $I^2$  satisfaz uma única das seguintes situações:

- é um vértice;

- está sobre uma aresta, isto é, pertence ao segmento de reta ligando dois vértices adjacentes;
- pertence ao interior de um triângulo.

Considere que o conjunto  $B_k$  seja partitionado em dois conjuntos  $H$  e  $V$ , em que  $H$  é o conjunto dos vértices azuis e  $V$  é o conjunto dos vértices vermelhos.

Definiremos então os seguintes conjuntos conjuntos:

- $\hat{O}$  é o conjunto dos vértices azuis que estão ligados a  $O$  por um caminho formado por arestas ligando apenas vértices que pertencem à  $H$ ;
- $\hat{L} = H - \hat{O}$ ;
- $\hat{S}$  é o conjunto dos vértices vermelhos que estão ligados a  $S$  por um caminho formado por arestas ligando apenas vértices que pertencem à  $V$ ;
- $\hat{N} = V - \hat{S}$ .

É claro que, pela definição destes conjuntos,

$$\hat{O} \cap \hat{S} = \hat{O} \cap \hat{N} = \hat{L} \cap \hat{S} = \hat{L} \cap \hat{N} = \emptyset.$$

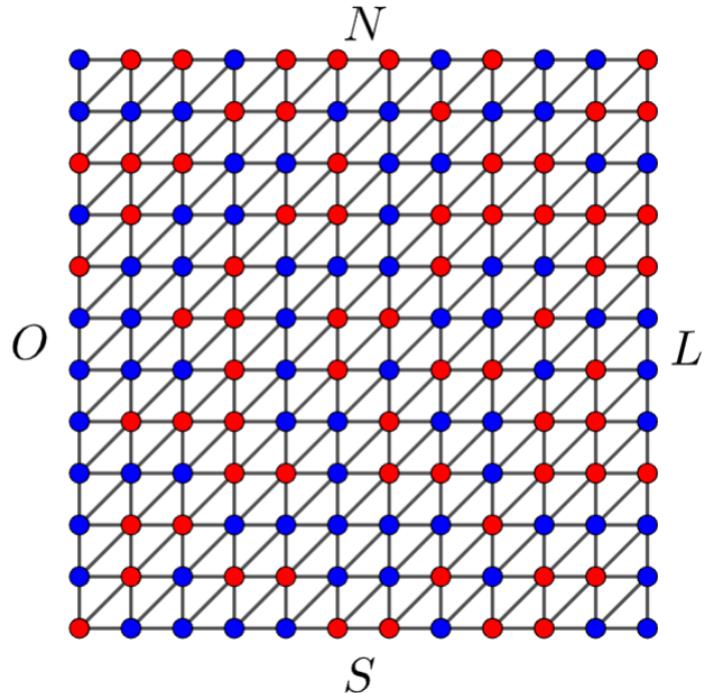


Figura 23 – Triangulação do tabuleiro de Hex  $12 \times 12$  da Figura 13  
Fonte: O autor.

**Lema 3.2.** *Não existe um vértice  $x \in \hat{O}$  adjacente a um vértice  $y \in \hat{L}$  e não existe um vértice  $x \in \hat{S}$  adjacente a um vértice  $y \in \hat{N}$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista um vértice  $x \in \hat{O}$  adjacente a um vértice  $y \in \hat{L}$ . Neste caso existe um caminho formado apenas pelos vértices azuis, ligando  $x$  ao lado  $O$  do tabuleiro. Como  $y$  é azul e está ligado à  $x$ , segue-se que existe um caminho azul ligando  $y$  ao lado  $O$ . Logo  $y \in \hat{O}$ . Isso é um absurdo pois  $y \in \hat{L} = H - \hat{O}$ . Portanto, não existe um vértice  $x \in \hat{O}$  adjacente a um vértice  $y \in \hat{L}$ . A segunda parte é análoga.  $\square$

Como estamos identificando o tabuleiro  $k \times k$ , em que  $k$  representa o número de hexágonos em cada lado do tabuleiro, com  $I^2$ , a distância entre dois vértices consecutivos, na horizontal e na vertical, é  $\frac{1}{k-1}$ . Considere então os vetores  $u_1 = \left(\frac{1}{k-1}, 0\right)$  e  $u_2 = \left(0, \frac{1}{k-1}\right)$ .

**Lema 3.3.** *Se não existir um caminho azul ligando os lados  $O$  e  $L$ , e não existir um caminho vermelho ligando os lados  $S$  e  $N$ , então a função  $g : B_k \rightarrow B_k \subset I^2$  por*

$$g(x) = \begin{cases} x + u_1, & \text{se } x \in \hat{O}; \\ x - u_1, & \text{se } x \in \hat{L}; \\ x + u_2, & \text{se } x \in \hat{S}; \\ x - u_2, & \text{se } x \in \hat{N}, \end{cases}$$

*está bem definida.*

*Demonstração.* Observe que a função  $g$ , translada um ponto de  $\hat{O}$  para a posição do vértice a sua direita, um ponto de  $\hat{L}$  para a posição do vértice a sua esquerda, um ponto de  $\hat{S}$  para a posição do vértice imediatamente acima e um ponto de  $\hat{N}$  para a posição do vértice imediatamente abaixo. Desta forma,  $g(x) \neq x, \forall x \in B_k$ . Analisaremos os quatro casos possíveis:

- Caso  $x \in \hat{O}$ . A única forma de  $g(x) = x + u_1 \notin B_k$ , seria se  $x \in L$ . Porém, se  $x \in L$ , existiria um caminho azul ligando  $L$  a  $O$ , o que por hipótese não existe. Portanto,  $L \cap \hat{O} = \emptyset$ .
- Caso  $x \in \hat{L}$ . A única forma de  $g(x) = x - u_1 \notin B_k$ , seria se  $x \in O$ . Porém se  $x \in O$ , haveria um caminho trivial (pois  $x$  já estaria em  $O$ ) ligando  $x$  a  $O$ , assim  $x \in \hat{O}$ . Isso é um absurdo pois  $\hat{L} = H - \hat{O}$ . Portanto  $O \cap \hat{L} = \emptyset$ .
- Caso  $x \in \hat{S}$ . A única forma de  $g(x) = x + u_2 \notin B_k$ , seria se  $x \in N$ . Porém, se  $x \in N$ , existiria um caminho ligando  $N$  a  $S$ , o que por hipótese não existe. Portanto,  $N \cap \hat{S} = \emptyset$ .
- Caso  $x \in \hat{N}$ . A única forma de  $g(x) = x - u_2 \notin B_k$ , seria se  $x \in S$ . Porém se  $x \in S$ , haveria um caminho trivial (pois  $x$  já estaria em  $S$ ) ligando  $x$  a  $S$ , assim  $x \in \hat{S}$ . Isso é um absurdo pois  $\hat{N} = V - \hat{S}$ . Portanto  $S \cap \hat{N} = \emptyset$ .

Portanto, a função  $g$  está bem definida.  $\square$

**Lema 3.4.** *Seja  $x \in I^2$  um ponto pertencente a uma aresta (segmento de reta) ligando os dois vértices adjacentes  $A = (a_1, a_2)$  e  $B = (b_1, b_2)$ . Então existem únicos  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  tais que  $x = \lambda_1 A + \lambda_2 B$  e  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ .*

*Demonstração.* Com efeito, pela própria definição de segmento entre dois pontos, existe um único parâmetro  $0 \leq \lambda_2 \leq 1$  tal que

$$x = (1 - \lambda_2)A + \lambda_2 B.$$

Daí basta tomar  $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$ .  $\square$

**Lema 3.5.** *Seja  $x \in I^2$  um ponto pertencente ao interior de um triângulo, determinado pelos vértices, dois a dois adjacentes,  $A, B$  e  $C$ . Então existem únicos  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$  tais que  $x = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$  e  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ .*

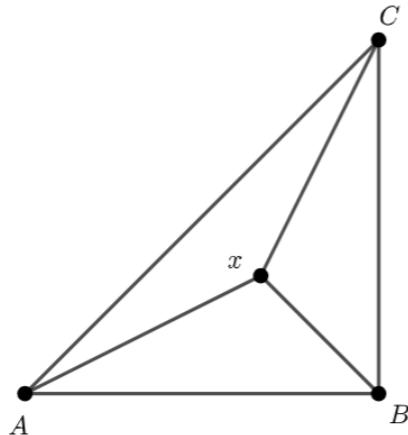


Figura 24 – Ponto  $x \in I^2$  no interior do triângulo  $ABC$ , o divide em três outros triângulos.

Fonte: O autor.

*Demonstração.* Observe que

$$x = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 c_1 = x_1 \\ \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 c_2 = x_2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

Segue-se da Proposição 3.1 e do Corolário 3.1, que

$$S(A, B, C) = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

portanto o sistema possui uma solução única.

Resolvendo o sistema linear acima, pela Regra de Cramer, obtemos

$$\lambda_1 = \frac{S(x, B, C)}{S(A, B, C)}, \quad \lambda_2 = \frac{S(A, x, C)}{S(A, B, C)} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{S(A, B, x)}{S(A, B, C)}. \quad (3.1)$$

É imediato pela Equação (3.1) e da Proposição 3.1, que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$  como queríamos.  $\square$

**Afirmiação:** o Teorema 3.2 implica no Teorema 3.1

De fato, seja um tabuleiro  $k \times k$  do jogo Hex, todo preenchido após o fim de uma partida. Suponha que não haja nenhum caminho de hexágonos azuis ligando os lados azuis do tabuleiro e nenhum caminho de hexágonos vermelhos ligando os lados vermelhos do tabuleiro. A partir dos Lemas 3.3, 3.4 e 3.5, podemos definir uma função contínua  $G : I^2 \rightarrow I^2$  tal que para cada  $x \in I^2$  do seguinte modo:

- Se  $x \in B_k$ , então  $G(x) = g(x)$ ;
- Se  $x \notin B_k$ , podemos escrever  $x = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$  de forma única, em que  $A, B$  e  $C$  são vértices adjacentes de  $B_k$  e determinam um triângulo que contenha  $x$ , então

$$G(x) = \lambda_1(x)g(A) + \lambda_2(x)g(B) + \lambda_3(x)g(C).$$

Vamos verificar que  $G$  está bem definida em qualquer triângulo formado por vértices adjacentes  $A, B$  e  $C$ . De fato, como  $g(A), g(B)$  e  $g(C)$  são vértices de  $B_k \subset I^2$ , segue-se que  $G(x)$  pertence ou a um segmento de reta que liga os pontos  $g(A), g(B)$  e  $g(C)$  ou a um triângulo cujos vértices são  $g(A), g(B)$  e  $g(C)$ . Em todo caso, temos  $G(x) \in I^2$ . Além disso, segue-se da Equação (3.1) e da Proposição 3.1, que as funções  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  são polinômios lineares em  $\mathbb{R}^2$  e portanto são contínuas. Desta forma, a função  $G$  é também contínua em cada triângulo.

Além disso, sejam dois triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta ABC'$  adjacentes, com a aresta  $AB$  em comum, conforme a Figura 25. Segue-se dos Lemas 3.4 e 3.5 que

$$x = \lambda_1(x)A + \lambda_2(x)B = \lambda_1(x)A + \lambda_2(x)B + 0 \cdot C,$$

pois  $x$  pertence ao triângulo  $\Delta ABC$  e ainda

$$x = \lambda_1(x)A + \lambda_2(x)B = \lambda_1(x)A + \lambda_2(x)B + 0 \cdot C',$$

pois  $x$  pertence ao triângulo  $\Delta ABC'$ . Portanto, a imagem de  $x$  independe do triângulo escolhido, garantindo que  $G$  está bem definida e é contínua em  $I^2$ .

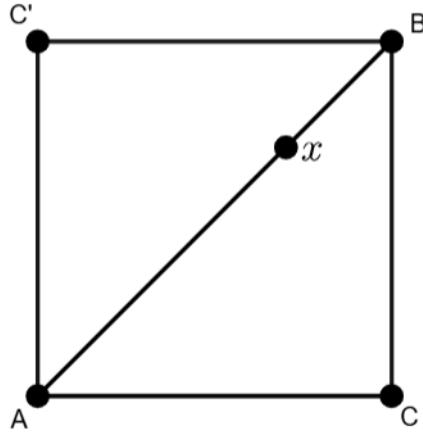


Figura 25 – Elemento  $x$  pertencente à aresta comum a dois triângulos adjacentes.

Fonte: O autor.

Como  $G : I^2 \rightarrow I^2$  é contínua, segue-se do Teorema 3.2 que existe  $x_0 \in I^2$  tal que  $G(x_0) = x_0$ . Pela construção de  $G$ , sabemos que  $x_0 \notin B_k$ , pois  $G(x) = g(x) \neq x, \forall x \in B_k$ . Logo  $x_0$  pertence a algum triângulo formado por vértices adjacentes de  $B_k$  que denotaremos por  $A, B$  e  $C$ , sendo que  $x_0 \notin \{A, B, C\}$ .

Neste caso, podemos escrever  $x_0 = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$ , em que  $\lambda_i = \lambda_i(x_0)$ , para cada  $i = 1, 2, 3$ . Daí

$$G(x_0) = \lambda_1 g(A) + \lambda_2 g(B) + \lambda_3 g(C).$$

Segue-se que,

$$\begin{aligned} 0 &= G(x_0) - x_0 = (\lambda_1 g(A) + \lambda_2 g(B) + \lambda_3 g(C)) - (\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C) \\ &= \lambda_1(g(A) - A) + \lambda_2(g(B) - B) + \lambda_3(g(C) - C) \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3, \end{aligned} \tag{3.2}$$

em que  $v_1, v_2, v_3 \in \{+u_1, -u_1, +u_2, -u_2\}$  e  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ .

Como  $A, B$  e  $C$  são adjacentes, podemos analisar os casos, por exemplo, se  $A \in \hat{O}$ . Segue-se do Lema 3.2 que  $B, C \notin \hat{L}$ . Daí: (1) ou  $B, C \in \hat{O}$ ; (2) ou  $B, C \in \hat{S}$ ; (3) ou  $B, C \in \hat{N}$ .

(1) Neste caso, temos da Equação 3.2 que

$$0 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_1 + \lambda_3 u_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) u_1 = u_1.$$

Um absurdo.

(2) Neste caso, temos da Equação 3.2 que

$$0 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_2 = \lambda_1 u_1 + (\lambda_2 + \lambda_3) u_2,$$

como  $u_1$  e  $u_2$  são linearmente independentes segue-se que  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ . Segue-se que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ . Um absurdo.

(3) Neste caso, temos da Equação 3.2 que

$$0 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 (-u_2) + \lambda_3 (-u_2) = \lambda_1 u_1 - (\lambda_2 + \lambda_3) u_2,$$

como  $u_1$  e  $u_2$  são linearmente independentes segue-se que  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ . Segue-se que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ . Um absurdo.

Analogamente, todos os demais casos, de um total de 12 casos possíveis, conduzem a um absurdo como nestes três.

Portanto, ao supor a inexistência de um caminho de hexágonos adjacentes de mesma cor ligando lados opostos do tabuleiro da mesma cor do caminho, foi possível construir uma função contínua de  $I^2$  em  $I^2$  com ponto fixo. Porém a existência desse ponto fixo levou a uma contradição. Portanto, existe um caminho de hexágonos adjacentes de mesma cor ligando lados opostos do tabuleiro da mesma cor do caminho. O que prova o Teorema do Hex.

## CAPÍTULO 4

# *JOGOS COMO FERRAMENTA NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA*

O ensino da Matemática demanda metodologias que favoreçam a participação ativa dos alunos e a construção do conhecimento. Nesse contexto, o uso de jogos apresenta-se como uma estratégia pedagógica relevante, pois contribui para o desenvolvimento do pensamento matemático ao estimular a investigação, a formulação de hipóteses, a argumentação e a abstração, além de estar em consonância com as orientações dos principais documentos oficiais da educação básica brasileira. As principais referencias deste capítulo são ([Ponte; Brocardo; Oliveira, 2013](#)) e ([Grando, 2000](#)).

### 4.1 A Importância da Investigação Matemática

De acordo com ([Fiorentini, 1995](#)), muitos alunos apresentam dificuldades no aprendizado da Matemática em função, em grande parte, do seu caráter abstrato e da predominância de práticas educacionais tradicionais, nas quais assumem uma postura passiva e se limitam a receber conhecimentos pré-existentes que, frequentemente, carecem de significado.

Existem diversos exemplos ao longo da história que mostram que a matemática sempre foi desenvolvida através da investigação e da curiosidade, e não apenas aprendendo conhecimentos já estabelecidos. Dentre eles, vale destacar Srinivasa Ramanujan (1887-1920), que foi um grande matemático indiano autodidata que, embora não tenha tido uma formação acadêmica formal, fez grandes contribuições em teoria dos números, séries infinitas e análise matemática. Segundo ([Hardy, 1940](#)), Ramanujan demonstrava uma intuição matemática extraordinária, frequentemente desvinculada de formalismos rigorosos. Ao ter contato com o livro *A Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics*, escrito por George Shoobridge Carr, Ramanujan teve, definitivamente, o início de sua carreira matemática.

Por meio do novo mundo que assim se abriu para ele (dizem seus biógrafos indianos), Ramanujan o percorreu com deleite. Foi esse livro que despertou o seu gênio. Ele passou a estabelecer para si mesmo as fórmulas nele contidas. Como estava sem o auxílio de outros livros, cada solução era, para ele, uma verdadeira peça de investigação. Ramanujan costumava dizer que a deusa de Namakkal o inspirava com as fórmulas em sonhos. É um fato notável que, frequentemente, ao levantar-se da cama, ele anotava resultados e os verificava rapidamente, embora nem sempre fosse capaz de fornecer uma prova rigorosa...([Hardy, 1940](#), p. 3, Tradução do autor).

A trajetória de Ramanujan evidencia que a produção do conhecimento matemático não se limita à aplicação de métodos formais previamente estabelecidos, destacando o papel da investigação como elemento central da prática matemática, bem como a relevância da intuição e da criatividade no surgimento de ideias que posteriormente podem ser sistematizadas e formalizadas.

Vale destacar também o matemático Andrew Wiles (1953 – ), que resolveu o Último Teorema de Fermat em 1994, um problema que permaneceu em aberto por 358 anos, e que perturbou grandes mentes da matemática ao longo dos séculos. De acordo com Wiles,

Desde que vi o Último Teorema de Fermat pela primeira vez, ainda criança, ele se tornou minha grande paixão. [...] Eu encontrara este problema que passara trezentos anos sem ser resolvido. Eu não creio que muitos dos meus colegas de escola tenham pego a mania pela matemática, assim não comentei o assunto com meus companheiros. Mas eu tinha um professor que fizera alguma pesquisa em matemática e ele me deu um livro sobre a teoria dos números, com algumas pistas sobre como começar a abordar o problema. Para começar eu trabalhei na suposição de que Fermat não sabia mais matemática do que eu. E tentei encontrar a demonstração perdida usando os métodos que ele poderia ter usado em sua época. (Singh, 1998, p.89).

Ainda segundo Wiles,

É ótimo trabalhar em qualquer problema desde que ele gere uma matemática interessante ao longo do caminho, mesmo que não consiga resolvê-lo no final do dia. A definição de um bom problema de matemática reside na matemática que ele produz, não no problema em si. (Singh, 1998, p.175).

As experiências de Wiles destacam dois fatores cruciais no ensino e aprendizado da matemática. O primeiro é o papel motivador que o professor possui, sendo capaz de guiar e instigar o aluno a se interessar pela matemática. O segundo é que o ensino da matemática deve valorizar a curiosidade, a investigação e o prazer pelo conhecimento, incentivando os alunos a se envolverem ativamente no processo de descoberta, e não apenas na memorização de fórmulas e procedimentos, como destaca o matemático português Carlos Braumann,

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão “detectivesca” indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (Braumann, 2002, p.5).

No livro *Investigações Matemáticas na Sala de Aula* (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2013) são apresentadas as quatro fases em que, segundo os autores, se divide uma investigação matemática. A primeira sendo de exploração e formulação de questões, em que o sujeito faz um reconhecimento do problema, o explora, percebe padrões e faz questionamentos. A segunda fase é a de conjecturas em que o indivíduo, a partir das observações feitas, organiza os dados e faz conjecturas e hipóteses. A terceira fase consiste em testar as conjecturas e refiná-las. Já a quarta fase, refere-se à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho desenvolvido, isto é, a comunicação dos resultados aos seus pares. Sendo que essas fases podem ocorrer de forma simultânea. Além disso, os autores defendem que esse processo de investigação está ao alcance dos alunos na sala de aula de matemática.

## 4.2 O Papel dos Jogos no Ensino da Matemática

Etimologicamente, a palavra “jogo” tem origem no latim “*jocus/joci*”, cujo sentido inicial era “brincadeira, diversão ou gracejo”. Essa concepção de jogo está intrinsecamente associada à infância, período em que a criança dedica parte significativa de seu tempo a atividades de caráter lúdico, embora tais práticas também estejam presentes na vida adulta.

Em (Huizinga, 1990), o jogo é definido como sendo uma

[...] atividade livre, conscientemente tomada como não-séria e exterior à vida habitual, mas ao mesmo tempo capaz de absorver o jogador de maneira intensa e total. É uma atividade desligada de todo e qualquer interesse material, com a qual não se pode obter qualquer lucro, praticada dentro dos limites espaciais e temporais próprios, segundo uma certa ordem e certas regras.(Huizinga, 1990, p.16).

Segundo Piaget (1978 *apud* (Grando), (2000)), os jogos se dividem em três tipos: de exercício, de símbolo e de regra.

Os jogos de exercício correspondem às primeiras formas de brincadeira da criança e baseiam-se na repetição de ações pelo prazer de executá-las, sem intenção de representação. Nesses jogos, a criança exercita habilidades motoras e sensoriais, encontrando satisfação no próprio funcionamento da atividade. Por exemplo, sacudir um chocalho, empilhar e derrubar blocos ou correr e pular.

Já os jogos simbólicos, também chamados de jogos de faz-de-conta, caracterizam-se pela capacidade de representação e imaginação. Nesse tipo de jogo, a criança atribui novos significados a objetos, ações e situações, transformando a realidade de acordo com sua compreensão. Servem como exemplo, cuidar de uma boneca como se fosse um bebê, fingir que uma caixa é um carro, ou representar papéis sociais, como professor ou médico. Essas brincadeiras permitem à criança expressar sentimentos, compreender o mundo social e elaborar experiências vividas.

O jogo de regras é aquele em que a criança brinca seguindo normas combinadas com os outros. Nesse tipo de jogo, ela aprende a cooperar, respeitar os outros e a se interessar pelo grupo, deixando de lado o egocentrismo. O cumprimento das regras é essencial, e desrespeitá-las pode encerrar a brincadeira. São exemplos deste tipo o xadrez e o jogo quatro cores, em que os participantes devem colorir regiões de um mapa utilizando apenas quatro cores, sem repetir a mesma cor em áreas vizinhas, seguindo regras previamente estabelecidas. As situações vivenciadas nos jogos de regras criam um ambiente propício à reflexão, à tomada de decisões e à análise de possibilidades, elementos que se aproximam das práticas investigativas próprias da Matemática.

Nos jogos de regra há dois fatores importantes. Um deles são as próprias regras, que garantem o que pode ou não ser executado no jogo, e as jogadas do adversário. Esses dois fatores influenciam as jogadas do jogador. Desta forma, buscando a vitória no jogo, é necessário que o indivíduo antecipe mentalmente as jogadas do oponente, assim como suas próprias jogadas, planejando seus movimentos seguintes conforme as regras do jogo. Nesse sentido, (Macedo; Petty; Passos, 1997) dizem o seguinte a respeito do jogo quatro cores,

[...] Antecipar significa ‘pintar mentalmente a figura’. O jogador deve imaginar previamente como ela ficará depois de pronta. Planejar, por sua vez, implica numa ação motora: o jogador efetivamente registra seu plano no contexto da figura, por exemplo, fazendo pintinhas coloridas nas regiões para garantir que a relação entre as cores vizinhas fique correta. (Macedo; Petty; Passos, 1997, p.25).

Essas ações, como antecipar jogadas, planejar estratégias e analisar consequências, caracterizam um processo de investigação matemática, ainda que em um nível inicial e intuitivo, no qual o aluno formula hipóteses, testa possibilidades e avalia resultados.

Baseando-se nisso, pode-se pensar no uso de jogos de regra no ensino da Matemática como uma proposta metodológica capaz de promover a investigação matemática e de apresentar desafios que, em função da natureza competitiva dos jogos, despertam o interesse dos alunos, prendem sua atenção e favorecem seu engajamento. Além disso, ao lidar com jogos dessa natureza, os alunos mobilizam noções matemáticas como regularidade, comparação, organização de possibilidades e identificação de padrões, que, mesmo não formalizadas, constituem a base para posteriores processos de abstração.

Contudo, tal uso dos jogos não deve ser realizado de forma leviana. Deve haver, por parte do professor, um objetivo a ser alcançado após a proposta, isto é, não seja apenas o “jogo pelo jogo”, mas que após sua execução haja de fato alguma formalização e alguma aprendizagem por parte dos alunos, dentre outros fatores como é destacado por (Grando, 2000). Segundo a autora,

Muitas vezes os educadores tentam utilizar jogos em sala de aula sem, no entanto, entender como dar encaminhamento ao trabalho, depois do jogo em si. [...] A grande maioria ainda vem desenvolvendo as atividades com jogos espontaneamente, isto

é, com um fim em si mesmo, “o jogo pelo jogo”, ou imaginando privilegiar o caráter apenas motivacional. [...] Trata-se apenas de compreensão e cumprimento das regras, com elaboração informal e espontânea de estratégias, e sem muita contribuição para o processo ensino-aprendizagem da Matemática. ([Grando, 2000](#), p.5).

Quando nos referimos à utilização de jogos nas aulas de Matemática como um suporte metodológico, consideramos que tenha utilidade em todos os níveis de ensino. O importante é que os objetivos com o jogo estejam claros, a metodologia a ser utilizada seja adequada ao nível que se está trabalhando e, principalmente, que represente uma atividade desafiadora ao aluno para o desencadeamento do processo” ([Grando, 2000](#), p.28).

Nesse contexto, o papel do professor torna-se fundamental, uma vez que é ele quem deve mediar as situações de jogo, orientar reflexões e promover a sistematização dos conhecimentos construídos a partir da atividade lúdica.

É importante destacar que o “jogo pelo jogo” não é algo negativo; ele apenas não pode se constituir como um fim em si mesmo, conforme destacado pela autora. Ao contrário, o “jogo pelo jogo” é necessário para que os alunos compreendam as regras, evitem violá-las posteriormente, envolvam-se de forma prazerosa com a atividade e observem padrões que lhes permitam, por meio da intuição, formular estratégias e avançar para a abstração do objeto em estudo.

Ainda de acordo com ([Grando, 2000](#)),

[...] o jogo, em seu aspecto pedagógico, se apresenta produtivo ao professor que busca nele um aspecto instrumentador e, portanto, facilitador na aprendizagem de estruturas matemáticas, muitas vezes de difícil assimilação, e também produtivo ao aluno, que desenvolveria sua capacidade de pensar, refletir, analisar, compreender conceitos matemáticos, levantar hipóteses, testá-las e avaliá-las (investigação matemática), com autonomia e cooperação. ([Grando, 2000](#), p.28).

Os jogos de estratégia favorecem a construção e a verificação de hipóteses. As possibilidades de jogo são construídas a partir destas hipóteses que vão sendo elaboradas pelos sujeitos. Quando o sujeito executa uma jogada, leva em conta o universo das possibilidades existentes para aquela jogada. Nesse processo, quanto mais o sujeito analisa, executa e toma decisões sobre as possibilidades, coordenando as informações que ele vai obtendo no jogo, melhor jogador ele se torna, pois é capaz de “enxergar” as várias possibilidades. A análise de possibilidades favorece, também, a previsão e/ou antecipação no jogo.. ([Grando, 2000](#), p.40).

Nesse contexto, o uso dos jogos se torna uma ferramenta interessante no ensino da Matemática, pois, por meio deles, é possível realizar investigações matemáticas e trabalhar diversos conceitos e noções matemáticas, conforme discutido na Seção 4.1. Além disso, os jogos promovem um ambiente socializador no qual os alunos são incentivados a interagir, argumentar, justificar suas escolhas e confrontar diferentes estratégias, expressando suas ideias de forma mais espontânea e colaborativa. Diante disso, ([Grando, 2000](#)) ainda reflete sobre

será que a atividade de jogo permitiria à criança intuir, abstrair e generalizar para novos campos, novas jogadas e/ou outras aplicações? Será que seria possível uma conceitualização a partir das noções, intuições estabelecidas, pelos sujeitos, diante dos desafios que se colocam numa situação de jogo? Acredita-se que sim. Tem-se que, se conceituar significa “abstrair” e “generalizar”, “dar ouvidos à intuição”, isto é possível no jogo ([Grando, 2000](#), p.55).

Desta forma, o uso do jogo como metodologia no ensino da Matemática pode contribuir significativamente para a transição do aluno do pensamento concreto para o pensamento abstrato, ao favorecer a reflexão, a elaboração de estratégias, a investigação de possibilidades e a sistematização de conceitos a partir de situações desafiadoras mediadas pelo professor. Assim, o jogo deixa de ser apenas um recurso motivacional e passa a assumir um papel efetivo no desenvolvimento e no ensino de conceitos matemáticos.

### **4.3 A Abordagem dos Jogos nos Documentos Oficiais da Educação Básica**

Na seção anterior, discutiu-se a utilidade dos jogos no ensino da Matemática. Nesta seção, serão apresentados os principais apontamentos dos documentos oficiais da Educação Básica relacionados a esse tema.

#### **Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)**

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são documentos publicados pelo Ministério da Educação entre 1997 e 1998, após a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB nº 9.394/1996). Têm como finalidade orientar a organização curricular da Educação Básica, oferecendo referências comuns para os sistemas de ensino, sem caráter obrigatório, respeitando as especificidades regionais e culturais do país. De acordo com esse documento,

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. Na situação de jogo, muitas vezes, o critério de certo ou errado é decidido pelo grupo. Assim, a prática do debate permite o exercício da argumentação e a organização do pensamento ([Brasil, 1998](#), p.46).

Nos jogos de estratégia (busca de procedimentos para ganhar) parte-se da realização de exemplos práticos (e não da repetição de modelos de procedimentos criados por

outros) que levam ao desenvolvimento de habilidades específicas para a resolução de problemas e os modos típicos do pensamento matemático. (Brasil, 1998, p.47).

Diante do exposto, percebe-se que as orientações apresentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais corroboram as discussões realizadas anteriormente, ao evidenciar que os jogos, quando utilizados de forma intencional no contexto educacional, constituem um importante recurso didático. Eles favorecem não apenas a resolução de problemas e o desenvolvimento de estratégias, mas também a argumentação, a reflexão e a organização do pensamento matemático. Assim, os PCNs reforçam a relevância dos jogos como práticas pedagógicas que contribuem para uma aprendizagem mais significativa, participativa e alinhada às necessidades do processo de ensino e aprendizagem.

## A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que define as aprendizagens essenciais que todos os estudantes da Educação Básica devem desenvolver ao longo da Educação Infantil, do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Seu objetivo é garantir equidade e qualidade na educação, orientando os currículos dos sistemas e redes de ensino em todo o país, ao mesmo tempo em que respeita as diversidades regionais, culturais e locais. A BNCC organiza o ensino a partir de competências e habilidades, promovendo uma formação integral do estudante, que envolve não apenas conhecimentos acadêmicos, mas também aspectos sociais, emocionais, éticos e culturais. Segundo o documento

[...] recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (Brasil, 2018, p.276).

Ou seja, o jogo é apresentado como uma ferramenta importante para o ensino da matemática. Mas alerta para o uso adequado do mesmo, de forma integrada aos objetivos do ensino.

Além disso, sobre o Ensino fundamental, a BNCC apresenta a seguinte argumentação,

O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (Brasil, 2018, p.266).

E dentre as competências específicas de matemática para o ensino fundamental, tem-se

Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. ([Brasil, 2018](#), p.267).

Já no Ensino Médio, a BNCC apresenta o seguinte texto,

[...] os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. [...] em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas à representação e à comunicação para expressar as generalizações, bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado. ([Brasil, 2018](#), p.529).

Dessa forma, as orientações da BNCC, tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio, estão alinhadas ao que foi discutido nas seções anteriores deste trabalho. O documento destaca a importância da investigação matemática, da resolução de problemas e do desenvolvimento do raciocínio lógico, aspectos que podem ser fortalecidos por meio do uso de jogos no ensino da Matemática. Assim, a BNCC reforça que práticas pedagógicas que valorizam a investigação e o uso de jogos contribuem para uma aprendizagem mais significativa, participativa e contextualizada.

#### 4.4 O Jogo Hex: Possibilidades na Sala de Aula

Conforme apresentado no Capítulo 3 e nas Seções 4.1 e 4.2, o jogo Hex é um jogo de regras e estratégia que possui uma forte relação com o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, um resultado fundamental da Topologia. Embora a exploração formal dessa conexão no contexto da Educação Básica seja, sem dúvida, avançada demais, o Hex oferece diversas possibilidades pedagógicas acessíveis e igualmente ricas.

Entre os conceitos envolvidos no jogo, destaca-se a conexidade por caminhos, uma noção topológica que pode ser trabalhada de maneira intuitiva e visual, sem a necessidade de formalismos rigorosos. Além disso, o Hex constitui uma ferramenta eficiente para o desenvolvimento do pensamento abstrato, da capacidade de argumentação e do raciocínio estratégico dos alunos.

Um dos aspectos mais relevantes que podem ser explorados por meio do Hex é o Teorema de Hex, apresentado no Capítulo 3. A partir da experiência prática de “jogar pelo jogar”, os alunos podem perceber que o jogo não admite empates e serem motivados a buscar uma justificativa intuitiva para essa propriedade. A partir dessa constatação inicial, torna-se viável iniciar uma investigação matemática mais formal, conduzindo os estudantes à construção de uma demonstração,

como a apresentada neste trabalho. Trata-se de uma prova acessível, que pode ser compreendida sem grande complexidade técnica e que se baseia na mesma construção realizada na demonstração do Teorema 3.1, para garantir a existência de caminhos nos quais haja casas azuis de um lado e vermelhas de outro, conforme as Figuras 16 e 17.

De acordo com (Salvanés, 2021), já foi demonstrado que, em qualquer tabuleiro de Hex, o primeiro jogador possui uma estratégia vencedora, embora tal estratégia não seja conhecida explicitamente para tabuleiros maiores que  $10 \times 10$ . Assim, é possível utilizar tabuleiros menores como ferramenta didática, incentivando os alunos a investigar e tentar descobrir estratégias vencedoras, explorando conceitos como simetria e a vantagem de iniciar pelo centro do tabuleiro, conforme discutido em (Nunes, 2009).

Dessa forma, o jogo Hex pode ser utilizado não apenas para trabalhar conteúdos matemáticos específicos, mas também para proporcionar aos alunos um ambiente de investigação, no qual possam desenvolver o pensamento matemático e o prazer pela matemática.

# CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho, estudamos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer sob diferentes perspectivas, evidenciando tanto sua relevância teórica quanto suas conexões com outras áreas da matemática. A abordagem histórica teve como objetivo apresentar figuras relevantes para os temas abordados ao longo do trabalho, em especial no que diz respeito à relação entre o teorema e o jogo Hex.

Em seguida, apresentamos demonstrações do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em contextos progressivamente mais gerais, iniciando pela reta real, passando pela bola unitária fechada do  $\mathbb{R}^n$  e culminando no caso de conjuntos convexos e compactos. Esse percurso permitiu destacar os aspectos geométricos e topológicos envolvidos no teorema, bem como a importância de ferramentas como a continuidade, a compacidade e a convexidade.

Um dos pontos centrais do trabalho foi o estudo do jogo Hex e do Teorema de Hex, mostrando que um resultado aparentemente simples, oriundo de um jogo de tabuleiro, possui profunda relação com um dos teoremas fundamentais da topologia. A demonstração da equivalência entre o Teorema de Hex e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer evidencia de forma clara como problemas combinatórios podem capturar ideias topológicas sofisticadas, reforçando a unidade da matemática.

Por fim, discutimos as contribuições dos jogos para a aprendizagem matemática, destacando o potencial pedagógico do jogo Hex. Essa abordagem sugere que jogos podem servir como instrumentos eficazes para promover a investigação, o raciocínio lógico e a compreensão conceitual, aproximando os estudantes de ideias matemáticas profundas de maneira acessível e motivadora.

Dessa forma, espera-se que este trabalho contribua tanto para a compreensão matemática dos teoremas de ponto fixo quanto para reflexões sobre o ensino da matemática, mostrando que rigor, criatividade e ludicidade podem caminhar juntos na construção do conhecimento.

# REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Citado nas páginas [51](#), [52](#).

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**: Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. Citado nas páginas [50](#), [51](#).

BRAUMANN, Carlos. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE, J. P. et al. (ed.). **Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa: Edições Colibri, 2002. p. 5–24. Citado na página [46](#).

DOMINGUES, Hygino H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo: ATUAL, 1982. Citado nas páginas [21](#), [57](#).

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, v. 3, n. 4, p. 1–37, 1995. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646877>. Citado na página [45](#).

GALE, David. The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem. **The American Mathematical Monthly**, v. 86, n. 10, p. 818–827, 1979. Acesso em: 23 Out. 2025. DOI: [10.2307/2320146](https://doi.org/10.2307/2320146). Citado na página [26](#).

GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Campinas, SP: [s.n.], 2000. p. 239. Citado nas páginas [45](#), [47–50](#).

GUILLEMIN, Victor; POLLACK, Alan. **Differential Topology**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1974. Citado nas páginas [14](#), [17](#).

HARDY, Godfrey Harold. **Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work**. Cambridge: Cambridge University Press, 1940. Citado na página [45](#).

HUIZINGA, Johan. **Homo Ludens: o jogo como elemento da cultura**. Tradução: João Paulo Monteiro. 2. ed. São Paulo: Perspectiva, 1990. p. 236. Citado na página [47](#).

INSTITUTE, Indian Statistical. **Fixed Point Theorems**. [S. l.: s. n.], 2025. Notas de aula, Bangalore. Acesso em: 13 out. 2025. Disponível em: <https://www.isibang.ac.in/~adean/infsys/database/notes/Fixed%20Point%20Theorems.pdf>. Citado na página [23](#).

LIMA, Elon L. **Espaços Métricos**. 6<sup>a</sup>. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. Citado na página [57](#).

LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. 12<sup>a</sup>. [S. l.]: IMPA, 2018. Citado na página 14.

LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. ISBN 978-85-244-0462-7. Citado na página 38.

MACEDO, Lino de; PETTY, Ana Lúcia Sícoli; PASSOS, Norimar Christe. **Quatro cores, senha e dominó: oficinas de jogos em uma perspectiva construtivista e psicopedagógica**. 2. ed. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1997. (Coleção psicologia e educação). ISBN 85-85141-96-4. Citado na página 48.

NUNES, Valter Emerenciano. **O jogo Hex**. 2009. Tese de Mestrado – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa. Acesso em: 23 de janeiro de 2026. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/3639>. Citado na página 53.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigação Matemática na Sala de Aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. Citado nas páginas 45, 47.

SALVANÉS, Sergio Anglada. **El Teorema del Punto Fijo de Brouwer y algunas aplicaciones a la Teoría de Juegos**. 2021. Trabajo de fin de grado – Universidad de Zaragoza, Zaragoza. Citado nas páginas 26, 53.

SANTOS, Shamylla Irineu Frederico dos. **Pontos fixos: métodos iterativos, obtenção de raízes de equações e uma atividade didática com futuros professores utilizando o GeoGebra**. 2025. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto. Citado na página 14.

SINGH, Simon. **O último teorema de Fermat: a história de um enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos**. Tradução: Jorge Luiz Calife. 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 1998. ISBN 85-01-05006-7. Citado na página 46.

ST ANDREWS, University of. **MacTutor History of Mathematics Archive**. [S. l.: s. n.], 2000. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>. Acesso em: 16 mai. 2025. Citado nas páginas 10–12.

WIKIPÉDIA. **Piet Hein**. [S. l.: s. n.], 2026. Acesso em: 23 jan. 2026. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Piet\\_Hein](https://pt.wikipedia.org/wiki/Piet_Hein). Citado nas páginas 10, 13.

# APÊNDICE A

Neste capítulo apresentaremos algumas noções importantes de espaços métricos, que foram utilizadas no decorrer deste trabalho. Adotaremos como referências principais ([DOMINGUES, 1982](#)) e ([Lima, Elon L., 2020](#)).

## A.1 Noções Básicas de Espaços Métricos

**Definição A.1.** Seja  $M$  um conjunto não vazio. Dizemos que a aplicação  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$  é uma métrica sobre  $M$  se para quaisquer  $x, y, z \in M$  forem satisfeitas as seguintes condições:

- i)  $d(x, y) = 0 \iff x = y;$
- ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  (simetria);
- iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (desigualdade triangular).

Nestas condições  $d(x, y)$  é a distância de  $x$  a  $y$ , e o par  $(M, d)$  é chamado de espaço métrico.

**Exemplo A.1.** Sejam  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . A aplicação

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

é uma métrica em  $\mathbb{R}^n$  chamada métrica euclidiana.

**Exemplo A.2.** Dados os espaços métricos  $(M_1, d_1), (M_2, d_2), \dots, (M_n, d_n)$ , podemos definir as métricas  $D, D_m, D_s : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ , em que  $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ , por

$$D(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 + \dots + d_n(x_n, y_n)^2},$$

$$D_m(x, y) = \max \{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \dots, d_n(x_n, y_n)\}$$

e

$$D_s(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) + \dots + d_n(x_n, y_n),$$

para todos  $x, y \in M$ .

**Proposição A.1.** Sejam  $(M_1, d_1), (M_2, d_2), \dots, (M_n, d_n)$  espaços métricos. Então para todos  $x, y \in M$ , em que  $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ , vale

$$D_m(x, y) \leq D(x, y) \leq D_s(x, y) \leq nD_m(x, y).$$

*Demonstração.* Com efeito,

$$\begin{aligned}
D_m(x, y) &= \max \{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \dots, d_n(x_n, y_n)\} \\
&\leq D(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 + \dots + d_n(x_n, y_n)^2} \\
&\leq D_s(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) + \dots + d_n(x_n, y_n) \\
&\leq n \cdot \max \{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \dots, d_n(x_n, y_n)\} = nD_m(x, y), \forall x, y \in M.
\end{aligned}$$

□

**Observação 1.** É válido notar que em um espaço vetorial normado  $V$  a norma  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$  induz a métrica  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$  dada por  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

**Proposição A.2.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Então  $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ ,  $\forall x, y, z \in M$ .

*Demonstração.* Segue-se da desigualdade triangular que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{e} \quad d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z), \forall x, y, z \in M.$$

Daí vale que

$$d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y) \quad \text{e} \quad d(y, z) - d(x, z) \leq d(x, y), \forall x, y, z \in M.$$

Portanto,

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y), \forall x, y, z \in M.$$

□

**Definição A.2.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico e  $x_0 \in M$ . Dado  $r > 0$ , chamamos de bola aberta em  $M$  de centro em  $x_0$  e raio  $r$ , e denotamos por  $B(x_0, r)$ , o seguinte subconjunto de  $M$ ,

$$B(x_0, r) = \{x \in M; d(x_0, x) < r\}.$$

**Definição A.3.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico e  $x_0 \in M$ . Dado  $r > 0$ , chamamos de bola fechada em  $M$  de centro em  $x_0$  e raio  $r$ , e denotamos por  $B[x_0, r]$ , o seguinte subconjunto de  $M$ ,

$$B[x_0, r] = \{x \in M; d(x_0, x) \leq r\}.$$

**Definição A.4.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico e  $x_0 \in M$ . Dado  $r > 0$ , chamamos de esfera em  $M$  de centro em  $x_0$  e raio  $r$ , e denotamos por  $S(x_0, r)$ , o seguinte subconjunto de  $M$ ,

$$S(x_0, r) = \{x \in M; d(x_0, x) = r\}.$$

**Definição A.5.** Seja  $M$  um espaço métrico e  $A \subset M$ . Dizemos que  $A$  é aberto se  $\forall x \in A$  existir  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subset A$ .

**Definição A.6.** Seja  $M$  um espaço métrico e  $A \subset M$ . Dizemos que  $a \in M$  é um ponto de aderência de  $A$  quando  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ . O conjunto dos pontos de aderência de  $A$ , denotado por  $\bar{A}$ , é chamado de fecho de  $A$ .

Observe que, por definição,  $A \subset \bar{A}$ . Dado  $a \in A$ , temos que  $a \in B(a, \varepsilon) \cap A, \forall \varepsilon > 0$ .

**Definição A.7.** Seja  $M$  um espaço métrico e  $A \subset M$ . Dizemos que  $A$  é fechado quando  $A = \bar{A}$ .

## A.2 Sequências em Espaços Métricos

**Definição A.8.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Toda aplicação  $x : \mathbb{N} \rightarrow M$  é chamada sequência de elementos de  $M$  e é denotada por  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou simplesmente por  $(x_n)$ . Neste caso, escrevemos ainda que a sequência  $(x_n) \subset M$ .

**Definição A.9.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ . Dado um subconjunto infinito  $\mathbb{N}_1$  de  $\mathbb{N}$ , chamamos a restrição de  $x : \mathbb{N} \rightarrow M$  a  $\mathbb{N}_1$  de subsequência de  $(x_n)$ , e denotamos por  $(x_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}_1}$ , ou  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  ou simplesmente  $(x_{n_k})$ .

**Definição A.10.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Dizemos que  $p \in M$  é o limite de uma sequência quando para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(p, \varepsilon)$$

ou equivalentemente

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon,$$

e escrevemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ . Neste caso, dizemos que  $(x_n)$  é convergente.

Considere  $M$  um espaço métrico e  $A \subset M$ . Observe que pela Definição A.6, existe uma sequência de  $(x_n) \subset A$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  se, e somente se,  $a \in \bar{A}$ .

**Proposição A.3.** Seja  $M$  um espaço métrico e  $(x_n) \subset M$  uma sequência convergente para  $a \in M$ . Então toda subsequência  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge para  $a$ .

*Demonstração.* Com efeito, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0$  implica  $d(x_n, a) < \varepsilon$ . Desta forma, existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_{k_0} \geq n_0$ . Daí, para todo  $k \geq k_0$  temos  $n_k \geq n_0$ , daí  $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$ . Portanto  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge para  $a$ .  $\square$

**Definição A.11.** Seja  $M$  um espaço métrico. Dizemos que uma sequência  $(x_n) \subset M$  é de Cauchy quando  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n \geq n_0$  implica que  $d(x_m, d_n) < \varepsilon$ .

**Proposição A.4.** *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

*Demonstração.* Seja  $M$  um espaço métrico e  $(x_n) \subset M$  uma sequência de Cauchy. Então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0$  implicam que  $d(x_m, x_n) < 1$ . Fixe  $n > n_0$ . Daí  $\forall m > n_0$  temos que  $d(x_m, x_n) < 1$ . Tome  $\varepsilon = \max\{d(x_1, x_n), d(x_2, x_n), \dots, d(x_{n_0}, x_n), 1\}$ . Daí

$$x_m \in B[x_n, \varepsilon], \forall m \in \mathbb{N}.$$

Portanto  $(x_n)$  é limitada. □

### A.3 Espaços Métricos Compactos

**Definição A.12.** *Seja  $M$  um espaço métrico. Dizemos que  $M$  é compacto quando toda sequência  $(x_n) \subset M$  possui uma subsequência  $(x_{n_k})$  que converge para um ponto de  $M$ .*

**Exemplo A.3.** *O conjunto dos números racionais não é compacto. Por exemplo, a sequência  $(x_n) \subset \mathbb{Q}$  definida por*

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

*converge para  $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . Logo toda subsequência de  $(x_n)$  também converge para  $e$ , que não pertence ao conjunto  $\mathbb{Q}$ .*

**Proposição A.5.** *Seja  $M$  um espaço métrico. Se  $K \subset M$  é compacto, então  $K$  é fechado.*

*Demonstração.* Suponha que  $\overline{K} - K \neq \emptyset$ . Seja então  $a \in \overline{K} - K$ . Daí existe  $(x_n) \subset K$  tal que  $\lim x_n = a$ . Como  $K$  é compacto toda existente uma subsequência  $(x_{n_k})$  que converge para um ponto de  $K$ . Como toda subsequência se  $(x_n)$  também converge para  $a$ , pela Proposição A.3, temos que  $(x_{n_k})$  converge para  $a$ . Daí  $a \in K$ . Um absurdo. Portanto,  $\overline{K} = K$ , isto é,  $K$  é fechado. □

**Proposição A.6.** *Seja  $M$  um espaço métrico. Se  $K \subset M$  é compacto, então  $K$  é limitado.*

*Demonstração.* Suponha que  $K$  não seja limitado. Dado  $a \in K$ , temos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x_n \in K$  tal que  $x_n \notin B(a, n)$ . Desta forma, obtém-se uma sequência  $(x_n) \subset K$ . Como  $K$  é compacto, segue-se que esta sequência possui uma subsequência  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  convergente para algum ponto  $b \in K$ . Segue-se da definição da sequência, que  $d(x_{n_k}, a) \geq n_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Além disso, como  $d(b, a) > 0$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_k \geq n_{k_0}$  implica que  $d(x_{n_k}, b) < d(b, a)$ . Desta forma, tomando  $k \geq k_0$  satisfazendo  $n_k \geq 2d(b, a)$  temos pela desigualdade triangular que

$$n_k \leq d(x_{n_k}, a) \leq d(x_{n_k}, b) + d(b, a) < 2d(b, a) \leq n_k,$$

um absurdo. Portanto,  $K$  é limitado. □

## A.4 Continuidade de Funções

**Definição A.13.** Sejam  $M, N$  espaços métricos e  $f : M \rightarrow N$ . Dizemos que  $f$  é contínua em  $a \in M$ , quando para todo  $\varepsilon > 0$ , existir  $\delta > 0$ , tal que se  $x \in M$  satisfizer  $d(x, a) < \delta$ , então  $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .

**Exemplo A.4.** Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos e  $f : M \rightarrow N$  uma contração. Então  $f$  é contínua.

*Demonstração.* Como  $f$  é contração, existe  $K > 0$  tal que  $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$ ,  $\forall x, y \in M$ . Daí dado  $a \in M$  qualquer, segue-se que para todo  $\varepsilon > 0$  pode-se escolher  $\delta = \frac{\varepsilon}{K} > 0$ . Assim, para todos  $x \in M$  tais que  $d(x, a) < \delta$  temos que

$$d(f(x), f(a)) \leq Kd(x, a) < K \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Portanto,  $f$  é contínua em  $a$ . □

**Exemplo A.5.** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. A métrica  $d$  é uma função contínua.

*Demonstração.* Sejam  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in M \times M$ . Considerando a métrica  $D_s$  para  $M \times M$ , temos que  $\forall \varepsilon > 0$ , pode-se escolher  $\delta = \varepsilon$ , daí se  $D_s(x, y) < \delta$ , segue-se da Proposição A.2 que

$$\begin{aligned} |d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2)| &= |d(x_1, x_2) - d(x_1, y_2) + d(x_1, y_2) - d(y_1, y_2)| \\ &\leq |d(x_1, x_2) - d(x_1, y_2)| + |d(x_1, y_2) - d(y_1, y_2)| \\ &\leq d(x_2, y_2) + d(x_1, y_1) = D_s(x, y) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto  $d$  é contínua. □

**Teorema A.1.** Sejam  $M, N$  espaços métricos e  $f : M \rightarrow N$ . São equivalentes:

- i)  $f$  é contínua em  $a \in M$ ;
- ii) Para toda sequência  $(x_n) \subset M$ , se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Se  $f$  é contínua em  $a$ , então para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe  $\delta_m > 0$  tal que se  $x \in M$  com  $d(x, a) < \delta_m$ , então

$$d(f(x), f(a)) < \frac{1}{m}.$$

Seja  $(x_n) \subset M$  convergindo para  $a$ , então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0$  implica que  $d(x_n, a) \leq \delta_n$ . Tomando  $m > n_0$ , temos que

$$d(x_n, a) < \delta_m \Rightarrow d(f(x_n), f(a)) < \frac{1}{m},$$

portanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Considere que para toda sequência  $(x_n) \subset M$ , se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Suponha que  $f$  seja descontínua em  $a$ . Daí existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\forall n > 0$ , existe  $x_n \in M$  satisfazendo

$$d(x_n, a) < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon.$$

Ora a sequência  $(x_n) \subset M$  construída satisfaz  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , porém não satisfaz  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ , uma contradição. Portanto  $f$  é contínua.  $\square$

Sejam  $N_1, N_2$  e  $M$  espaços métricos e  $f : M \rightarrow N_1 \times N_2$ , dada por  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ , em que  $f_1 : M \rightarrow N_1$  e  $f_2 : M \rightarrow N_2$ . Dizemos que  $f_1$  e  $f_2$ , são as funções coordenadas de  $f$ .

**Proposição A.7.** *A aplicação  $f : M \rightarrow N_1 \times N_2$  é contínua em  $a \in M$ , se e somente se, cada componente  $f_1$  e  $f_2$  são contínuas em  $a$ .*

*Demonstração.* Considere em a métrica  $D_m(x, y) = \max \{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$  em  $N_1 \times N_2$ , em que  $d_1$  e  $d_2$ , são as métricas em  $N_1$  e  $N_2$ , respectivamente..

( $\Rightarrow$ ) Seja  $f$  contínua em  $a \in M$ . Então para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta$  implica que

$$D_m(f(x), f(a)) = D_m((f_1(x), f_2(x)), (f_1(a), f_2(a))) < \varepsilon.$$

Daí dado  $x \in M$  satisfazendo  $d(x, a) < \delta$  temos

$$d_1(f_1(x), f_1(a)) \leq D_m(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

e

$$d_2(f_2(x), f_2(a)) \leq D_m(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Portanto  $f_1$  e  $f_2$  são contínuas em  $a$ .

( $\Leftarrow$ ) Sejam  $f_1$  e  $f_2$  contínuas em  $a \in M$ . Daí, para todo  $\varepsilon > 0$  existem  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tais que

$$d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow d_1(f_1(x), f_1(a)) < \varepsilon$$

e

$$d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d_2(f_2(x), f_2(a)) < \varepsilon.$$

Tome  $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\} > 0$ . Daí,

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow D_m(f(x), f(a)) = \max \{d_1(f_1(x), f_1(a)), d_2(f_2(x), f_2(a))\} < \varepsilon.$$

Portanto,  $f$  é contínua em  $a$ .  $\square$

**Proposição A.8.** Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos e uma função  $f : M \rightarrow N$  contínua. Se  $K \subseteq M$  é compacto, então  $f(K)$  é compacto.

*Demonstração.* Seja  $(y_n) \subset f(K)$ , então existe uma sequência  $(x_n) \subset K$  tal que  $y_n = f(x_n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $K$  é compacto, existe uma subsequência  $(x_{n_k})$  que converge para  $a \in K$ . Como  $f$  é contínua segue-se que do Teorema A.1 que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(a) \in f(K).$$

Portanto, a subsequência  $(y_{n_k})$  converge para um ponto  $f(a) \in f(K)$ .  $\square$

**Proposição A.9.** Sejam  $M$  um espaço métrico e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Se  $K \subseteq M$  é compacto, então existem  $a, b \in K$  tais que  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$  para todos  $x \in K$ .

*Demonstração.* Segue-se das proposições A.8, A.5 e A.6, que  $f(K) \subset \mathbb{R}$  é fechado e limitado, isto é, existem  $u = \inf f(K)$  e  $v = \sup f(K)$ . Vamos mostrar que  $u, v \in f(K)$ . Com efeito, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existem  $x_n, y_n \in f(K) \subset \mathbb{R}$  tais que

$$u \leq x_n < u + \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad v - \frac{1}{n} < y_n \leq v.$$

Desta forma, as sequências  $(x_n), (y_n) \subset f(K)$  e convergem respectivamente para  $u$  e  $v$ . Desta forma,  $u, v \in \overline{f(K)}$ . Como  $f(K)$  é fechado, segue-se que  $u, v \in f(K)$ . Portanto existem  $a, b \in K$  tais que  $f(a) = u$  e  $f(b) = v$ .  $\square$

## A.5 Continuidade Uniforme de Funções

**Definição A.14.** Seja uma função  $f : M \rightarrow N$ , em que  $M$  e  $N$  são espaços métricos. Dizemos que  $f$  é uniformemente contínua quando para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$ , tal que, sejam quais forem  $x, y \in M$ ,  $d(x, y) < \delta$  implicam  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

**Teorema A.2.** Seja uma função  $f : M \rightarrow N$ , em que  $M$  e  $N$  são espaços métricos. Se  $f$  é contínua e  $M$  é compacto, então  $f$  é uniformemente contínua.

*Demonstração.* Suponha que  $f$  não seja uniformemente contínua. Então existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existem  $x_n, y_n \in M$  tais que

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \quad \text{mas} \quad d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0.$$

Como  $M$  é compacto, existe uma subsequência  $(x_{n_k})$  que converge para algum  $p \in M$ . Desta forma, existe  $n_{k_1} \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_{n_k}, p) < \frac{\varepsilon}{2}$ , para todo  $n_k > n_{k_1}$ . Além disso, existe  $n_{k_2} \in \mathbb{N}$  tal que  $n_k > n_{k_2}$  implica que  $\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Tomando  $n_0 = \max\{n_{k_1}, n_{k_2}\} \in \mathbb{N}$ , temos que  $n_k > n_0$  implica que

$$d(y_{n_k}, p) \leq d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, p) < \frac{1}{n_k} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto  $(y_{n_k})$  também converge para  $p$ . Como  $f$  é contínua, segue-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}).$$

Desta forma, para uma infinidade de índices  $n_k$  temos

$$d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d(f(x_{n_k}), f(p)) + d(f(p), f(y_{n_k})) < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0.$$

O que é um absurdo, pois as sequências  $(x_n)$  e  $(y_n)$  foram escolhidas tais que

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \text{ mas } d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,  $f$  é uniformemente contínua. □