



**UFOP**

Universidade Federal  
de Ouro Preto

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL



**Moisés Cáffaro Júnior**

**PROJETO AUTOMÁTICO DE VIGAS PROTENDIDAS USANDO OTIMIZAÇÃO E  
INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL**

OURO PRETO

Janeiro 2026

**Moisés Cáffaro Júnior**

**PROJETO AUTOMÁTICO DE VIGAS PROTENDIDAS USANDO OTIMIZAÇÃO E  
INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL**

Trabalho de conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Civil.

Orientador: Dr. Francisco de Assis das Neves

**OURO PRETO**

Janeiro 2026

## SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

C129p Caffaro Junior, Moises.

Projeto automático de vigas protendidas usando otimização e inteligência artificial. [manuscrito] / Moises Caffaro Junior. - 2026.  
108 f.: il.: color., gráf., tab.. + Quadro.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves.

Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Graduação em Engenharia Civil .

1. Concreto protendido. 2. Otimização estrutural. 3. Algoritmos computacionais - Jaya Algorithm. 4. Redes neurais (Computação). I. Neves, Francisco de Assis das. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 624

Bibliotecário(a) Responsável: Maristela Sanches Lima Mesquita - CRB-1716



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Moisés Cáffaro Júnior**

### **Projeto automático de vigas protendidas usando otimização e inteligência artificial**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Civil

Aprovada em 23 de janeiro de 2026

#### Membros da banca

D.Sc. Francisco de Assis das Neves - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto  
D.Sc. Andréa Regina Dias da Silva - Universidade Federal de Ouro Preto  
D.Sc. Amilton Rodrigues da Silva - Universidade Federal de Ouro Preto

Francisco de Assis das Neves, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 28/01/2026



Documento assinado eletronicamente por **Francisco de Assis das Neves, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 28/01/2026, às 16:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1049213** e o código CRC **AAAACC60**.

Dedico este trabalho à minha família, pelo apoio constante, e aos professores que contribuíram para minha formação acadêmica e profissional

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, pela saúde, força e constância necessárias para chegar até esta etapa da minha formação. Aos meus pais, pelo apoio incondicional, pela confiança em cada decisão e pelo exemplo diário de dedicação, que sempre serviu de referência para minha caminhada acadêmica e pessoal. Manifesto minha gratidão aos professores que fizeram parte da minha trajetória, em especial ao professor Assis, orientador deste trabalho, cuja orientação técnica e disponibilidade foram fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa, e ao professor Célio, responsável por me introduzir no meio científico e despertar meu interesse pela investigação acadêmica. Agradeço também aos meus amigos, pelo companheirismo e pela presença constante nos momentos de dificuldade e de conquista, contribuindo para tornar a jornada universitária mais leve e significativa. Por fim, registro meu reconhecimento à Universidade Federal de Ouro Preto e ao curso de Engenharia Civil, pelos conhecimentos e oportunidades proporcionados ao longo destes anos de formação.

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem para o dimensionamento de vigas de concreto protendido, combinando otimização meta-heurística e modelos de predição baseados em redes neurais artificiais. Inicialmente, o Enhanced Jaya Algorithm (EJAYA) é utilizado para gerar soluções ótimas de projeto, considerando variáveis geométricas e mecânicas e respeitando as restrições normativas da NBR 6118:2023 e da AASHTO LRFD. O treinamento supervisionado, realizado por *backpropagation* e apoiado por otimização bayesiana de hiperparâmetros, resultou em um modelo capaz de reproduzir com boa precisão o comportamento do modelo de otimização, reduzindo de forma significativa o custo computacional associado ao processo iterativo de busca. Os resultados demonstram que a integração entre modelo físico, algoritmos de otimização e técnicas de aprendizado de máquina é eficaz para estimar soluções de projeto com rapidez e confiabilidade, oferecendo uma alternativa promissora para análises paramétricas, estudos preliminares e sistemas automatizados de dimensionamento.

**Palavras-chaves:** Concreto protendido, Otimização estrutural, Jaya Algorithm, Redes neurais artificiais.

## ABSTRACT

This work presents an approach for the design of prestressed concrete beams, combining metaheuristic optimization and predictive models based on artificial neural networks. Initially, the Enhanced Jaya Algorithm (EJAYA) is employed to generate optimal design solutions, considering geometric and mechanical variables and complying with the requirements of NBR 6118:2023 and AASHTO LRFD. The supervised training, performed using *backpropagation* and supported by Bayesian hyperparameter optimization, resulted in a model capable of reproducing with good accuracy the behavior of the optimization model, significantly reducing the computational cost associated with the iterative search process. The results demonstrate that the integration between physical modeling, optimization algorithms and machine learning techniques is effective for estimating design solutions with speed and reliability, offering a promising alternative for parametric analyses, preliminary studies and automated design systems.

**Keywords:** Prestressed concrete, Structural optimization, Jaya Algorithm, Artificial neural networks.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1– Representação esquemática de uma rede neural .....	33
Figura 2 – Fluxograma da metodologia.....	40
Figura 3– Diagrama tensão deformação do concreto .....	41
Figura 4– Diagrama tensão deformação do aço. ....	41
Figura 5– Domínios de deformação do concreto.....	42
Figura 6– Análise da viga como treliça de Mörsch. ....	44
Figura 7– Esquema conceitual das variáveis de entrada e saída da rede neural.....	55
Figura 8– Representação do traçado do cabo de protensão e posicionamento nodal no modelo em elementos finitos.....	60
Figura 9 – Viga engastada – livre com geometria variável. ....	69
Figura 10 – Função tangente. ....	72
Figura 11 – Função sigmoideal. ....	73
Figura 12 – Função rampa.....	74
Figura 13 – Função linear.....	75
Figura 14 – Elemento B10L carregado.....	77
Figura 15 – Comparação otimização e redes neurais B10L. ....	79
Figura 16 – Viga carregada Pierott <i>et al.</i> .....	81
Figura 17 – Comparação otimização e redes neurais Pierott <i>et al.</i> .....	82
Figura 18 – Problema original Shabbir e Khan. ....	84
Figura 19 – Comparação otimização e redes neurais Shabbir e Khan. ....	87

Figura 20 – Excentricidade da armadura de protensão.....	88
Figura 21 – Seção transversal Jasinski <i>et al.</i> ....	90
Figura 22 – Comparação momento Jasinski <i>et al.</i> .....	92
Figura 23 – Comparação otimização e redes neurais Jasinski <i>et al.</i> .....	93
Figura 24 –Convergência da Otimização Moraes <i>et al.</i> ....	98
Figura 25 – Traçado da armadura de protensão Moraes <i>et al.</i> ....	99

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Resultados funções de benchmark.....	68
Quadro 2 – Resultados Vanderplaats.....	69
Quadro 3 – Resultados Vanderplaats complementar.....	70
Quadro 4 – Resultados funções de ativação. ....	71
Quadro 5 –Parâmetros físicos do problema <i>Duysak et al.</i> .....	78
Quadro 6 – Variáveis de decisão <i>Duysak et al.</i> .....	78
Quadro 7 – Comparação resultados <i>Duysak et al.</i> .....	78
Quadro 8 – Parâmetros físicos e variáveis otimizadas <i>Pierott et al.</i> .....	81
Quadro 9 – Comparação resultados <i>Pierott et al.</i> .....	82
Quadro 10 – Parâmetros físicos <i>Shabbir e Khan.</i> .....	85
Quadro 11 –Variáveis otimizadas <i>Shabbir e Khan.</i> .....	85
Quadro 12 – Comparação resultados <i>Shabbir e Khan.</i> .....	86
Quadro 13 – Parâmetros físicos <i>Jasinski et al.</i> .....	91
Quadro 14 –Variáveis otimizadas <i>Jasinski et al.</i> .....	91
Quadro 15 – Parâmetros físicos <i>Moraes et al.</i> .....	95
Quadro 16 – Variáveis otimizadas <i>Moraes et al.</i> .....	95
Quadro 17 – Carregamento <i>Moraes et al.</i> .....	96
Quadro 18 – Comparação resultados <i>Moraes et al.</i> .....	96
Quadro 19 – Resultado dos parâmetros otimizados. ....	97

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	14
1.1. Objetivo .....	15
1.1.1. Objetivos específicos .....	15
1.2. Justificativa .....	16
2. REVISÃO DA LITERATURA .....	17
2.1. Concreto Protendido .....	17
2.1.1. Classificação .....	18
2.1.2. Parâmetros normativos .....	21
2.2. Otimização .....	23
2.2.1. Conceituação .....	23
2.2.2. Algoritmo Jaya .....	27
2.3. Redes neurais .....	30
2.3.1. Histórico .....	30
2.3.2. Estrutura geral.....	32
2.3.3. Treinamento.....	35
3. METODOLOGIA .....	39
3.1. Dimensionamento .....	40
3.2. Otimização .....	49
3.3. Redes Neurais .....	54
3.4. Análise estrutural .....	57
3.5. Algoritmo desenvolvido .....	64
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES .....	68
4.1. Algoritmo de otimização .....	68
4.2. Funções de ativação das redes neurais.....	70
4.3. Dimensionamento .....	75
4.3.1. Otimização de viga de concreto armado submetida à torção. ....	76

4.3.2. Otimização de viga de concreto armado com variáveis geométricas e resistência do concreto. ....	80
4.3.3. Otimização de viga de concreto protendido em perfil I. ....	83
4.3.4. Otimização do traçado da armadura de protensão. ....	89
4.3.5. Otimização de viga de concreto protendido considerando a redução das emissões de CO <sub>2</sub> . ....	94
4.4. DISCUSSÃO .....	100
5. CONCLUSÃO .....	103
REFERÊNCIAS .....	105

## 1. INTRODUÇÃO

As vigas protendidas são elementos estruturais amplamente utilizados na engenharia civil devido à sua eficiência estrutural, permitindo melhor distribuição de esforços internos, redução de fissuração e deformações, permitindo a capacidade de vencer grandes vãos com menor consumo de material (Hanai, 2005). No entanto, o dimensionamento dessas estruturas envolve múltiplos parâmetros, como geometria da seção, restrições normativas e critérios econômicos, que elevam significativamente a complexidade do processo (Albuquerque; Bittencourt, 2005). Diante desse cenário, algoritmos de otimização têm se mostrado eficazes na busca por soluções viáveis para esse tipo de problema. Entre eles, destaca-se o algoritmo Jaya, que apresenta bom desempenho na exploração de espaços multidimensionais, aliado a um baixo custo computacional (Rao, 2016).

Com os avanços da inteligência artificial, especialmente no uso de redes neurais artificiais, novas possibilidades vêm sendo exploradas para aproximar soluções ótimas em problemas físicos, matemáticos e de engenharia (Macedo, 2021). A combinação de redes neurais com algoritmos de otimização se apresenta como uma abordagem promissora para melhorar a qualidade das soluções e reduzir o tempo de processamento computacional (Braga *et al.*, 2000). Nesse contexto, este trabalho investiga a aplicação integrada de redes neurais artificiais ao algoritmo Jaya no processo de dimensionamento de vigas protendidas, buscando compreender em que medida essa integração contribui para a obtenção de soluções mais eficientes e com menor custo computacional no projeto dessas estruturas. Parte-se da hipótese de que essa integração é capaz de aprimorar o processo de dimensionamento estrutural, proporcionando soluções estruturalmente mais eficientes, com menor custo computacional e maior qualidade nos resultados, em comparação aos métodos convencionais de otimização.

Apesar dos avanços consolidados no campo da protensão e do amplo uso de métodos normativos no projeto estrutural, o processo de dimensionamento de vigas protendidas ainda é marcado por um elevado grau de complexidade operacional. A necessidade de atender simultaneamente a critérios de resistência, serviço, durabilidade e economia conduz, na prática, a procedimentos iterativos extensos, nos quais pequenas alterações nas variáveis de projeto podem provocar mudanças significativas no comportamento estrutural da viga.

Além disso, quando se considera a aplicação de métodos de otimização, surge o desafio do custo computacional associado à avaliação repetitiva de modelos estruturais completos. Nesse contexto, a utilização de modelos aproximadores, como redes neurais artificiais, mostra-se uma alternativa promissora para reduzir o tempo de processamento sem comprometer a confiabilidade dos resultados. A integração entre algoritmos de otimização e técnicas de aprendizado de máquina permite explorar soluções de projeto de forma mais eficiente, criando bases para o desenvolvimento de rotinas automatizadas capazes de apoiar o engenheiro estrutural em análises paramétricas, estudos preliminares e processos de tomada de decisão.

### 1.1. OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma abordagem computacional para a otimização de vigas protendidas, por meio da implementação de uma rotina utilizando o algoritmo Jaya em conjunto com uma rede neural artificial treinada para esse tipo de aplicação.

#### 1.1.1. Objetivos específicos

Os objetivos específicos desse trabalho são:

- Avaliar o potencial do algoritmo Jaya para gerar soluções otimizadas no dimensionamento de vigas protendidas, considerando desempenho estrutural e eficiência computacional;
- Analisar o comportamento de vigas prismáticas protendidas sob diferentes configurações de projeto, com foco em aspectos geométricos e econômicos;
- Desenvolver uma abordagem híbrida que combine o algoritmo Jaya com redes neurais artificiais para aperfeiçoar o processo de otimização estrutural;
- Investigar a capacidade preditiva de redes neurais artificiais em problemas de cálculo estrutural aplicados a elementos protendidos;
- Comparar os resultados obtidos com a abordagem proposta aos dados de referência disponíveis na literatura técnica;
- Contribuir para o avanço do conhecimento sobre a aplicação de técnicas de inteligência artificial na engenharia estrutural, com ênfase na protensão.

## 1.2. JUSTIFICATIVA

A escolha do tema se justifica porque o dimensionamento de vigas de concreto protendido é um processo naturalmente complexo, já que envolve muitas variáveis de projeto e verificações normativas simultâneas, tanto em Estados Limites Últimos quanto em Estados Limites de Serviço, com atenção especial às tensões e às perdas de protensão ao longo do tempo (Hanai, 2005; Nawy, 2009; Gilbert et al., 2017). Na prática, isso tende a exigir várias tentativas até se chegar a uma solução viável e economicamente interessante, o que consome tempo e aumenta a chance de escolhas conservadoras ou pouco eficientes.

Nesse cenário, a otimização computacional é uma ferramenta para auxiliar na busca por soluções mais econômicas e consistentes, permitindo comparar configurações de forma objetiva (Kirsch, 1993; Rao, 2016). Além disso, o uso de redes neurais artificiais no apoio ao dimensionamento estrutural é um tema relativamente recente dentro da engenharia civil, com crescimento de aplicações justamente por permitir aproximar respostas de modelos mais pesados com custo computacional muito menor, o que abre espaço para análises paramétricas e etapas preliminares de projeto mais rápidas (Braga et al., 2000; Araújo, 2015; Paula, 2016). Dessa forma, este trabalho se justifica por propor a integração entre otimização e redes neurais como uma abordagem promissora para acelerar e automatizar o projeto de vigas protendidas sem perder o vínculo com critérios normativos e com o comportamento estrutural esperado.



## 2. REVISÃO DA LITERATURA

A presente revisão da literatura tem como objetivo estabelecer as bases teóricas que sustentam o desenvolvimento deste trabalho, abordando os principais conceitos relacionados ao concreto protendido, à otimização estrutural e à aplicação de redes neurais artificiais no contexto da engenharia civil. Inicialmente, será discutido o concreto protendido, destacando sua evolução histórica, fundamentos técnicos e vantagens em relação a outras técnicas estruturais. Em seguida, apresenta-se o conceito de otimização e sua relevância no dimensionamento de estruturas, com ênfase em métodos metaheurísticos. Por fim, serão exploradas as redes neurais artificiais, suas características gerais, arquitetura e aplicabilidade no auxílio ao processo de tomada de decisão em problemas estruturais complexos. Essa abordagem teórica visa fundamentar a proposta metodológica adotada no trabalho e justificar a integração entre essas técnicas na busca por soluções estruturais mais eficientes.

O concreto protendido tem se consolidado como uma solução de alto desempenho no campo da engenharia estrutural, especialmente em obras que exigem elevada eficiência técnica, controle de deformações e maior liberdade arquitetônica. Sua aplicação se destaca em virtude da capacidade de antecipar os efeitos de tração por meio da introdução de compressões prévias ao concreto, otimizando o uso dos materiais e ampliando a durabilidade das estruturas (Nawy, 2009; Gilbert *et al.*, 2017). Ao longo de sua evolução, a protensão incorporou avanços significativos em materiais, sistemas de ancoragem e técnicas executivas, tornando-se uma alternativa estratégica frente às limitações do concreto armado convencional (Cholfe; Bonilha, 2018). Conforme observa Hanai (2005), essa técnica representa um marco na racionalização das estruturas de concreto, permitindo a obtenção de elementos mais leves, esbeltos e duráveis. Albuquerque e Bittencourt (2005) também ressaltam que o concreto protendido desempenha papel decisivo na modernização das obras de infraestrutura e na industrialização da construção civil. Esta seção apresentará, de forma sistemática, os aspectos históricos, classificações, fundamentos normativos e metodologias de dimensionamento que sustentam o uso do concreto protendido nas práticas projetuais atuais.

### 2.1.1. Classificação

O concreto protendido é um tipo de concreto estrutural no qual são introduzidas tensões compressivas previamente ao início da solicitação em serviço, por meio da aplicação da força de protensão. Essa técnica foi desenvolvida como solução para superar as limitações do concreto armado frente aos esforços de tração, reduzindo ou eliminando tensões trativas no concreto durante as fases de utilização da estrutura. Como descreve Hanai (2005), as principais vantagens dessa estratégia é o aumento da capacidade resistente, a possibilidade de vencer maiores vãos e a melhoria do desempenho global da estrutura, especialmente quanto à fissuração e à durabilidade. Cholfe e Bonilha (2018), em concordância, que apontam a protensão como um artifício técnico que permite o uso mais eficiente dos materiais, a redução do peso próprio e a obtenção de geometrias mais livres e esbeltas.

Embora o conceito pareça recente, os primeiros registros sobre o uso da protensão são do século XIX. Segundo Albuquerque e Bittencourt (2005), em 1866, o engenheiro norte-americano Peter. H. Jackson obteve uma patente para a aplicação de tensões prévias em arcos de concreto (Jackson, 1872). Em 1890, na Alemanha, Carl Eduard Wilhelm Doehring propôs um sistema semelhante para lajes. Porém, ambas as tentativas não lograram êxito (Doehring, 1890). De acordo com Albuquerque e Bittencourt (2005), o insucesso se deu por fatores como a baixa resistência dos aços utilizados, a falta de controle sobre o comportamento reológico do concreto e a inexistência de sistemas de ancoragem eficientes. Essa limitação também é abordada por Hanai (2005), ao apontar que, na ausência de mecanismos adequados para compensar as perdas de força, os sistemas tendem a se comprometer logo após sua execução.

Foi somente a partir das pesquisas de Eugène Freyssinet, na década de 1930, que o concreto protendido passou a ser viável do ponto de vista técnico (Gilbert *et al.*, 2017). Gilbert *et al.* (2017) destacam que Freyssinet foi pioneiro ao reconhecer a influência das perdas de protensão, especialmente aquelas relacionadas à retração e fluência e ao propor soluções como a adoção de aços de alta resistência e a utilização de cunhas cônicas como sistema de ancoragem. Essa combinação permitiu a aplicação de elevados esforços de compressão no concreto, com controle e segurança. Nawy (2009), ao analisar os sistemas desenvolvidos por Freyssinet, enfatiza o papel fundamental da injeção de nata de cimento nas bainhas como forma de criar aderência entre os cabos e o concreto, o que ampliava a rigidez da estrutura e a integridade do sistema ao longo do tempo.

Esse novo paradigma possibilitou a disseminação do concreto protendido na Europa e, posteriormente, em outras partes do mundo. De acordo com Albuquerque e Bittencourt (2005), o período pós-guerra impulsionou o uso da técnica em obras de infraestrutura, aumentando a adoção da protensão em obras de infraestrutura, como pontes e viadutos. Neste mesmo período, engenheiros como Tung-Yen Lin Fritz Leonhardt e Peter Walter Abeles desenvolveram teorias e aplicações práticas que consolidaram a técnica como alternativa viável ao concreto armado. Cholfe e Bonilha (2018), ao tratar da aplicação da protensão no contexto brasileiro, observam que a primeira ponte protendida foi executada em 1948, no Rio de Janeiro. Já a produção nacional de cordoalhas só teve início em 1952, com a atuação da Companhia Belgo-Mineira, fato que contribuiu decisivamente para a expansão da técnica no país. Cholfe e Bonilha (2018) também mencionam esse período como crucial, ressaltando que a nacionalização dos insumos viabilizou sua utilização em obras públicas e industriais em todo o território nacional.

Do ponto de vista técnico, a protensão consiste na introdução de tensões compressivas em regiões do concreto que, em regime de serviço, estariam submetidas a tração. Para Hanai (2005), essa compressão inicial pode ser obtida por meio de sistemas de protensão aderente, em que os cabos são ancorados e aderem ao concreto após a injeção de nata de cimento, ou não aderente, em que os cabos ficam livres para deslizar dentro de bainhas lubrificadas. Gilbert *et al.* (2017) fazem distinção semelhante, acrescentando que o tipo de protensão adotado influencia diretamente o comportamento estrutural, o cálculo das perdas e os procedimentos executivos. Ambos os autores convergem ao destacar a importância da compatibilização entre a tecnologia adotada e o objetivo da estrutura, enquanto sistemas aderentes oferecem maior rigidez e segurança estrutural, os não aderentes permitem ajustes e monitoramentos ao longo do tempo. Quanto ao momento de aplicação da força de protensão, os sistemas podem ser classificados em pré-tensão, quando os cabos são tracionados antes do lançamento do concreto e permanecem ancorados externamente até o seu endurecimento, e pós-tração, quando a protensão é aplicada após o concreto atingir resistência suficiente. Ressalta-se que tanto a pré-tensão quanto a pós-tensão podem resultar em sistemas de protensão aderente, diferenciando-se fundamentalmente pelo instante de aplicação da força e pelos procedimentos executivos adotados.

A eficiência do concreto protendido depende diretamente do controle das perdas de protensão. Nawy (2009) identifica dois grupos principais, as perdas instantâneas, como

escorregamento nas ancoragens, perda por atrito e encurtamento elástico do concreto, e as perdas diferidas, associadas à fluência, retração e relaxação do aço. Hanai (2005) apresenta o mesmo entendimento, mas acrescenta que a precisão no tensionamento e na escolha do aço são fatores cruciais para mitigar os efeitos dessas perdas. Nota-se que, embora os dois autores partam de fundamentos semelhantes, Nawy (2009) enfatiza mais os modelos de cálculo e a aplicação de coeficientes de segurança, enquanto Hanai (2005) destaca as boas práticas executivas e o controle tecnológico como pilares de confiabilidade do sistema. Ambos, contudo, reforçam a ideia de que o sucesso da protensão exige domínio técnico multidisciplinar.

Outro ponto recorrente entre os autores é a discussão sobre as vantagens do sistema protendido. Cholfe e Bonilha (2018) destacam que, ao permitir maior aproveitamento da resistência dos materiais e controle das deformações, a técnica promove racionalização construtiva, sendo ideal para lajes com grandes vãos, reservatórios, obras pré-moldadas e estruturas de longa duração. Hanai (2005) concorda com essa avaliação, porém enfatiza que o uso da protensão deve ser justificado caso a caso, considerando o custo inicial, a complexidade do projeto e a capacitação da equipe envolvida. Esse equilíbrio entre custo e desempenho também aparece nos estudos de Gilbert *et al.* (2017), que associam a adoção do concreto protendido a contextos de maior exigência estrutural, onde o investimento inicial se compensa pela economia de materiais e pela redução na manutenção.

Dessa forma, observa-se que o concreto protendido consolidou-se como uma solução eficiente, segura e tecnologicamente avançada. Sua evolução acompanha o desenvolvimento de novos materiais, ferramentas computacionais e exigências normativas, configurando-se como um campo fértil para inovações, inclusive com a aplicação de métodos de otimização e inteligência artificial, como será explorado nas seções seguintes.

### 2.1.2. Parâmetros normativos

O dimensionamento de estruturas de concreto protendido é amplamente baseado em normativas técnicas nacionais e internacionais que asseguram a segurança, o desempenho funcional e a durabilidade das obras. Dentre as principais referências, destacam-se a NBR 6118:2023, Projeto de Estruturas de Concreto, da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), e a AASHTO LRFD Bridge Design Specifications, elaborada pela American Association of State Highway and Transportation Officials. Ambas fornecem os critérios essenciais para o projeto, a verificação e o detalhamento de elementos estruturais submetidos à protensão, ainda que com abordagens distintas e voltadas a realidades de aplicação diferentes (ABNT, 2023; AASHTO, 2020).

A NBR 6118:2023 é a norma brasileira de referência para o projeto de estruturas de concreto armado e protendido, adotando uma abordagem baseada nos Estados Limites Últimos (ELU) e Estados Limites de Serviço (ELS). Sua estrutura normativa trata de forma sistemática questões como resistência à flexão e ao cisalhamento, estabilidade global, controle de fissuração, perdas de protensão e compatibilidade de deformações, estabelecendo diretrizes tanto para verificações em regime último quanto em regime de serviço. Além disso, contempla aspectos como os tipos de protensão (aderente e não aderente), os critérios para aceitação de materiais e a classificação das estruturas quanto ao grau de protensão necessário em função da agressividade do ambiente (ABNT, 2023).

Já a AASHTO LRFD é a principal norma utilizada nos Estados Unidos para o projeto de pontes e estruturas viárias, e adota uma filosofia de dimensionamento baseada em fatores de carga e resistência calibrados (Load and Resistance Factor Design – LRFD). Diferentemente da NBR 6118, que é aplicável a uma variedade de tipologias estruturais, a AASHTO apresenta prescrições bastante específicas para elementos estruturais em pontes, com foco em segurança frente à fadiga, cargas móveis, ações acidentais e durabilidade em ambientes agressivos. A norma organiza os critérios de dimensionamento em quatro estados limites principais: *Strength* (resistência), *Service* (serviço), *Extreme Event* (eventos extremos) e *fatigue and fracture* (fadiga e fratura), atribuindo coeficientes de segurança e fatores de resistência distintos para cada situação (AASHTO, 2020).

Apesar das normas supracitadas partirem dos mesmos fundamentos estruturais, como estabilidade, resistência, durabilidade e funcionalidade, há diferenças marcantes entre elas. A

NBR 6118 utiliza uma abordagem semi-probabilística baseada em combinações de ações com coeficientes majoradores e minoradores padronizados, conforme a confiabilidade desejada para cada tipo de verificação. Já a AASHTO LRFD adota coeficientes calibrados estatisticamente com base em históricos de desempenho, oferecendo uma estrutura de combinações de carga mais segmentada, de modo a tratar de forma distinta os diferentes tipos de ação e os níveis de confiabilidade esperados (ABNT, 2023; AASHTO, 2020). Outro ponto de distinção relevante é o tratamento das perdas de protensão. A NBR 6118 classifica as perdas em imediatas e diferidas, indicando métodos simplificados ou avançados para sua estimativa. Já a AASHTO apresenta tabelas específicas e modelos baseados em simulações de longo prazo, com ênfase especial nos efeitos de fluência, retração e relaxação em ambientes agressivos (AASHTO, 2020).

Por outro lado, tais normas se baseiam em dois conceitos centrais no projeto de estruturas, os Estados Limites Últimos (ELU) e os Estados Limites de Serviço (ELS). É importante ressaltar que na AASHTO é utilizado o termo Strength Limit State para o ELU e Service Limit State para o ELS. O ELU representa a condição de colapso estrutural, onde ocorre falha completa por ruptura do concreto, escoamento da armadura, instabilidade global ou local, entre outros fenômenos. Trata-se do limite máximo de resistência da estrutura, e sua verificação tem como objetivo garantir que o sistema suporte, com segurança, as ações extremas previstas durante sua vida útil. Na NBR 6118:2023, o ELU é verificado através da Equação 2.1.

$$S_d \leq R_d \quad (2.1)$$

em que,  $S_d$  é o efeito de cálculo das ações aplicadas e  $R_d$  é a resistência de cálculo da seção.

De forma análoga, a AASHTO LRFD expressa o mesmo princípio por meio da Equação (2.2).2.

$$\phi R_n \geq R_u \quad (2.2)$$

onde,  $\phi$  é o fator de resistência,  $R_n$  é a resistência nominal da seção e  $R_u$  é a resistência de cálculo.

Por sua vez, o Estado Limite de Serviço (ELS) refere-se à condição de funcionamento da estrutura em regime normal de uso. Nesse contexto, são verificadas a abertura de fissuras, os deslocamentos excessivos, a vibração e a perda de protensão, a fim de garantir conforto, funcionalidade e durabilidade. A AASHTO, por sua vez, estabelece tensões máximas admissíveis no concreto comprimido e tracionado, além de limites para deflexões sob cargas permanentes e variáveis. A norma inclui também critérios específicos para estruturas submetidas a fadiga, como valores limite de variação de tensão nas armaduras e controle de trincas em regiões com solicitações repetitivas (AASHTO, 2020). Em síntese, a análise comparativa entre a NBR 6118:2023 e a AASHTO LRFD revela que, embora adotem enfoques diferentes em termos de prescrição e filosofia de projeto, as duas normas buscam garantir segurança estrutural, desempenho duradouro e são importantes ferramentas para o dimensionamento.

## 2.2. OTIMIZAÇÃO

A otimização tem assumido papel central na engenharia estrutural contemporânea, sendo aplicada desde o traçado de armaduras até a escolha de sistemas construtivos e materiais, sempre com o objetivo de alcançar soluções mais econômicas, eficientes e sustentáveis. Essa abordagem permite lidar com a crescente complexidade dos projetos, explorando grandes volumes de dados e múltiplos critérios de desempenho. Trabalhos recentes, como os de Fonseca (2007), Macedo (2021) e Mageveske Netto (2023), mostram que o uso de algoritmos computacionais em problemas estruturais, especialmente envolvendo protensão, tem resultado em ganhos expressivos de racionalidade, precisão e redução de custos. Nesse contexto, a presente seção discute os fundamentos, aplicações e categorias de métodos de otimização, estabelecendo as bases teóricas que justificam a escolha do algoritmo Jaya neste trabalho.

### 2.2.1. Conceituação

A otimização pode ser compreendida como uma técnica que busca identificar, dentre diversas soluções possíveis, aquela que melhor atende a um ou mais objetivos específicos, considerando as restrições impostas por um determinado problema. Nos problemas de engenharia, essa prática está associada à busca pelo melhor desempenho de um sistema, seja minimizando custos, peso ou energia, seja maximizando resistência, eficiência ou durabilidade. Kirsch (1993) aponta que o desenvolvimento de métodos de otimização em

engenharia estrutural surgiu justamente da necessidade de racionalizar o uso dos materiais, reduzindo o custo das estruturas sem comprometer a segurança. Em linha semelhante, Macedo (2021) destaca que, à medida que os modelos estruturais se tornaram mais complexos e passaram a incorporar múltiplos estados limites e critérios de desempenho, a otimização deixou de ser apenas uma ferramenta teórica para se tornar um componente central no processo de projeto. Fonseca (2007) reforça essa visão ao mostrar que procedimentos de busca sistemática permitem explorar alternativas de dimensionamento que dificilmente seriam avaliadas apenas com base em julgamentos manuais.

Essa evolução é contextualizada por Souza Júnior (2010), que observa que os métodos de otimização romperam as barreiras do campo teórico e passaram a ser implementados em softwares de análise estrutural, como ANSYS, SAP2000 e ABAQUS. Essa integração permitiu simular, testar e ajustar modelos com agilidade, otimizando dimensões, materiais e configurações com base em parâmetros técnicos e econômicos. O autor afirma que, ao substituir o método de tentativa e erro por algoritmos baseados em lógica matemática e busca computacional, as soluções obtidas são mais confiáveis e replicáveis. Essa transição de paradigma é considerada, segundo Souza Júnior (2010), como um avanço fundamental para tornar os projetos mais rápidos, precisos e alinhados com as exigências de racionalização de recursos e desempenho estrutural.

Ao abordar a aplicação da otimização em problemas estruturais, Macedo (2021) ressalta que o objetivo central é encontrar a melhor configuração de um sistema que atenda aos critérios de segurança, estabilidade e funcionalidade, respeitando ao mesmo tempo restrições normativas, econômicas e ambientais. A autora defende que o uso de algoritmos de otimização no dimensionamento de estruturas permite reduzir significativamente o volume de materiais, mantendo o desempenho exigido em projeto. Essa visão é complementada por Reno (2007), que destaca que a otimização estrutural, ao evitar o superdimensionamento, contribui também para a sustentabilidade ambiental da construção civil, ao passo que reduz a emissão de CO<sub>2</sub> associada à produção de concreto.

Com relação à natureza dos métodos utilizados, é comum classificar os algoritmos de otimização em duas grandes categorias: métodos exatos e métodos aproximados. Os métodos exatos, como o método dos multiplicadores de Lagrange e o método Simplex, são baseados em técnicas analíticas e garantem a obtenção da solução ótima global. A aplicação desses



métodos é possível desde que o problema satisfaça certas condições matemáticas, como linearidade, convexidade e continuidade. No entanto, conforme ressalta Santos (2009), esses métodos se tornam impraticáveis quando aplicados a problemas com múltiplas variáveis, restrições não lineares ou espaços de busca descontínuos, condições típicas de problemas reais em engenharia civil. A complexidade computacional envolvida nesse tipo de situação limita sua aplicabilidade a casos simples ou altamente idealizados.

Para superar essas limitações, surgem os métodos aproximados, também conhecidos como heurísticos e metaheurísticos. Ao contrário dos métodos exatos, eles não garantem a obtenção da melhor solução absoluta, mas fornecem soluções satisfatórias com maior flexibilidade e menor custo computacional (Macedo, 2021). Segundo Maia (2009), os métodos metaheurísticos, como algoritmos genéticos, enxame de partículas (PSO), colônia de formigas e simulação por recozimento (SA), são especialmente eficazes em problemas altamente complexos, nos quais a função objetivo não é diferenciável ou não possui uma forma matemática explícita. Esses algoritmos, inspirados em processos naturais, sociais ou físicos, são capazes de explorar vastos espaços de busca de forma adaptativa e eficiente.

A esse respeito, Mageveske Netto (2023) contribuiu significativamente ao aplicar algoritmos de otimização em estruturas protendidas. Em sua pesquisa, o autor formulou um modelo computacional para otimização do custo total de vigas protendidas em aço, utilizando um algoritmo genético implementado em MATLAB. A proposta mostrou que é possível alcançar reduções expressivas de custo e peso estrutural ao se adotar métodos computacionais de busca inteligente, sem comprometer a segurança nem violar os critérios normativos. Essa aplicação prática ilustra como os algoritmos aproximados se tornam não apenas viáveis, mas indispensáveis em projetos de engenharia, especialmente na protensão.

Essa relevância dos algoritmos aproximados também é discutida por Macedo (2021), que reforça que os métodos de otimização devem considerar, além da geometria e da resistência estrutural, critérios ambientais e econômicos. Ela afirma que, em um cenário de crescente preocupação com sustentabilidade, os algoritmos que permitem explorar múltiplas soluções sob diferentes objetivos, como ocorre em abordagens multiobjetivo, se destacam por sua aplicabilidade prática. Essa linha de raciocínio é reforçada por Reis *et al.* (2021), que aplicam técnicas de otimização considerando simultaneamente parâmetros como custo,

rigidez, impacto ambiental e tempo de execução, representando essas variáveis em frentes de Pareto.

Outro autor que contribui para essa discussão é Santos (2009), ao aplicar algoritmos de otimização na identificação de danos estruturais. Embora o foco de sua pesquisa não esteja na concepção de novos projetos, o autor demonstra como a otimização pode ser utilizada como ferramenta de monitoramento e manutenção, ajustando modelos computacionais a partir da resposta dinâmica real das estruturas.

Além dos aspectos técnicos e computacionais, é necessário destacar o papel da otimização como mudança de paradigma na forma de projetar em engenharia. Segundo Macedo (2021), os métodos de otimização permitiram a transição de um processo sequencial e empírico para uma abordagem iterativa, automatizada e informacional, em que a interação entre modelo numérico e algoritmo de busca passa a orientar as decisões de projeto. Fonseca (2007) observa que, ao integrar rotinas de otimização a programas de análise estrutural, torna-se possível não apenas encontrar soluções adequadas em termos de segurança e economia, mas também investigar o efeito de diferentes combinações de parâmetros, identificando tendências e oportunidades de melhoria contínua no processo projetual. Kirsch (1993) acrescenta que essa integração entre modelagem e otimização amplia a capacidade de inovação do engenheiro projetista, ao permitir que hipóteses de projeto sejam testadas de maneira sistemática, com base em critérios quantitativos bem definidos.

Por fim, é importante ressaltar que a otimização aplicada à engenharia estrutural encontra aplicações em múltiplas frentes, desde a definição de seções ideais e traçado de armaduras, até a escolha de sistemas estruturais, alocação de materiais e estratégias construtivas. Em todos esses casos, o uso de algoritmos de otimização, sejam exatos ou aproximados, representa um avanço importante na busca por soluções mais eficientes, econômicas e sustentáveis. Esse pano de fundo é essencial para compreender, na próxima seção, como algoritmos específicos como o Jaya se inserem nesse contexto, oferecendo alternativas simples e eficazes para resolver problemas de engenharia com elevada complexidade.

### 2.2.2. Algoritmo Jaya

O algoritmo Jaya insere-se no conjunto das metaheurísticas de população voltadas à otimização contínua. Tendo sido proposto por Rao (2016) como uma alternativa simples aos algoritmos evolutivos clássicos, em especial àqueles que dependem de um grande número de parâmetros de ajuste. A ideia central é que, em cada iteração, cada solução candidata é aproximada da melhor solução atualmente conhecida e, ao mesmo tempo, afastada da pior solução da população. Segundo Rao (2016), essa estratégia materializa de forma explícita o princípio de que o processo de otimização deve sempre conduzir a estados mais desejáveis do ponto de vista da função objetivo, sem a necessidade de operadores específicos de cruzamento, mutação ou pesos de inércia. Essa simplicidade estrutural explica a rápida difusão do algoritmo em problemas de engenharia, motivando inclusive o desenvolvimento de variantes mais robustas para problemas altamente restritos, como o Enhanced Jaya Algorithm (EJAYA), discutido por Zhang, Chi e Mirjalili (2021), que introduzem mecanismos adicionais de exploração global e local para melhorar o desempenho.

O Jaya trabalha diretamente no espaço das variáveis reais de projeto. Em problemas de dimensionamento estrutural, essa representação significa descrever cada indivíduo da população como um vetor contendo, por exemplo, larguras e alturas de seção transversal, quantidade e posição de armaduras, níveis de protensão, bem como parâmetros associados ao traçado dos cabos, além de variáveis ligadas ao custo ou ao impacto ambiental. Reis *et al.* (2021) mostram que esse tipo de representação direta é particularmente adequado quando a função objetivo passa a combinar múltiplos critérios, como custo de construção, emissão de CO<sub>2</sub> associada ao consumo de materiais e energia e penalizações relacionadas ao atendimento aos Estados Limites. Nessa linha, trabalhos que adotam o Jaya, como o de Reis *et al.* (2021), formulam a função objetivo a partir de modelos de dimensionamento baseados em normas de projeto, de modo análogo ao que se pretende neste trabalho com a NBR 6118:2023 e a AASHTO LRFD.

As restrições normativas são incorporadas ao problema por meio de técnicas de penalização acopladas à função objetivo. Lemonge e Barbosa (2004) discutem esquemas de penalidade adaptativa em algoritmos genéticos, nos quais a intensidade da punição é ajustada ao longo das gerações de acordo com a evolução da população. Deb (2000) propõe uma estratégia sem parâmetros adicionais, baseada em regras de comparação entre soluções

viáveis e inviáveis, que se mostrou eficiente em problemas de otimização estrutural com múltiplas restrições. A formulação adotada para o Jaya neste trabalho segue a mesma filosofia, aplicando penalizações crescentes a soluções que violem os requisitos da NBR 6118:2023 ou da AASHTO LRFD, de forma que o valor de função objetivo de cada indivíduo sejam acrescido de termos de penalidade proporcionais ao grau de violação. Essa abordagem está alinhada com as recomendações de Deb (2000) e de Lemonge e Barbosa (2004), ao reservar um espaço na população para soluções menos competitivas, mas ainda assim viáveis ou quase viáveis, o que ajuda a preservar a diversidade do conjunto de busca.

O núcleo operacional do Jaya está no mecanismo de atualização das soluções em cada iteração. Em linhas gerais, identifica-se a melhor solução da população,  $x_{best}$ , e a pior solução,  $x_{worst}$ . Para cada indivíduo  $x_i$ , e para cada variável de projeto  $j$ , o algoritmo gera dois números aleatórios  $r_1$  e  $r_2$ , uniformemente distribuídos no intervalo  $[0,1]$ , e atualiza a variável por meio de uma regra de atração-repulsão segundo a Equação 2.(2.3) proposta por Rao (2016).

$$x_{j,new}^k = x_j^k + r_1 \cdot (x_{best,j} - |x_j^k|) - r_2 \cdot (x_{worst,j} - |x_j^k|) \quad (2.3)$$

em que  $x_{ij}$  representa o valor atual da  $j$ -ésima variável do  $i$ -ésimo indivíduo,  $x_{best,j}$  é o valor dessa variável na melhor solução da população e  $x_{worst,j}$  o correspondente na pior solução. Os termos  $r_1$  e  $r_2$ , randômicos entre 0 e 1, introduzem a aleatoriedade necessária para explorar a vizinhança de busca (RAO, 2016). O primeiro termo de correção aproxima a solução corrente da melhor candidata conhecida, enquanto o segundo termo atua no sentido de afastá-la da pior, equilibrando exploração e intensificação. Após essa atualização, a nova população é avaliada e, para cada posição, mantém-se o indivíduo de melhor desempenho, em uma lógica de seleção elitista simples (RAO, 2016).

Uma consequência direta dessa formulação é a redução significativa do número de parâmetros de ajuste do método. Ao contrário de algoritmos genéticos ou de enxame de partículas, o Jaya requer apenas a escolha do tamanho da população, do número máximo de iterações ou de outro critério de parada equivalente, além dos limites de variação das variáveis de projeto. Essa característica é apontada por Rao (2016) como uma das principais vantagens do método, pois simplifica a calibração numérica e reduz a sensibilidade a escolhas arbitrárias do usuário. Zhang, Chi e Mirjalili (2021) reforçam esse argumento ao mostrar que, mesmo em

sua versão aprimorada (Enhanced Jaya), o algoritmo continua essencialmente livre de parâmetros adicionais de controle, preservando sua atratividade em aplicações de engenharia.

Em problemas de dimensionamento estrutural, cada avaliação da função objetivo envolve análises de esforços, verificações normativas em ELU e ELS e, no caso de elementos protendidos, o cálculo de perdas de protensão ao longo do tempo, de forma semelhante ao que é apresentado por Nawy (2009) e Gilbert *et al.* (2017). Por esse motivo, a literatura recomenda combinar um número máximo de gerações com um limite para o número total de avaliações da função objetivo, além de critérios de estagnação baseados na ausência de melhoria relativa da melhor solução ao longo de um certo número de iterações consecutivas, como discutido por Rao (2016) e por Zhang, Chi e Mirjalili (2021).

Estudos de projeto ótimo de elementos de concreto armado e protendido indicam que essa combinação entre estrutura simples e tratamento adequado das restrições torna o Jaya competitivo em problemas reais de engenharia. Reis *et al.* (2021) mostram que metaheurísticas baseadas em populações, quando acopladas a modelos estruturais de verificação normativa, são capazes de produzir soluções que equilibram o custo e o consumo de materiais sem violar os requisitos de segurança estabelecidos pelas normas de Estados Limites. Resultados semelhantes são relatados por Kirsch (1993) ao analisar estratégias de projeto ótimo em concreto armado com outros algoritmos de busca. Esses trabalhos reforçam que algoritmos de busca estocástica, como o Jaya, podem encontrar soluções mais econômicas do que aquelas obtidas por processos manuais iterativos, especialmente quando o número de variáveis e de restrições é elevado.

O Enhanced Jaya Algorithm, apresentado por Zhang, Chi e Mirjalili (2021), representa uma evolução do método original, mantendo o algoritmo do Jaya e incorporando estratégias de exploração mais refinadas. Os autores introduzem operadores locais superiores e inferiores, bem como o uso de informações históricas da população, de modo a equilibrar melhor a exploração global do espaço de busca e a exploração local da vizinhança das melhores soluções. Os resultados numéricos apresentados por Zhang, Chi e Mirjalili (2021) indicam ganhos de desempenho em problemas de projeto de engenharia com muitas restrições, sem perda da característica de baixo número de parâmetros. Assim, a combinação entre a formulação básica de Rao (2016), os esquemas de penalidade inspirados em Deb (2000) e Lemonge e Barbosa (2004) e as melhorias de exploração propostas por Zhang, Chi e Mirjalili

(2021) consolida o algoritmo Jaya como uma alternativa promissora para a otimização do dimensionamento de elementos de concreto armado e protendido no contexto das normas NBR 6118:2023 e AASHTO LRFD.

### 2.3. REDES NEURAIAS

As Redes Neurais Artificiais (RNAs) têm se consolidado como uma das abordagens mais relevantes no campo da inteligência computacional, em virtude de sua capacidade de modelar relações complexas entre variáveis e de aprender padrões a partir de dados (Paula, 2016; Araújo, 2015). Inicialmente inspiradas em modelos neurobiológicos, essas estruturas matemáticas evoluíram significativamente, tornando-se ferramentas versáteis para diversas aplicações, inclusive na engenharia estrutural. Araújo (2015) destaca que as RNAs são particularmente adequadas para problemas que envolvem comportamento não linear de materiais, dimensionamento de elementos estruturais e predição de variáveis críticas a partir de grandezas de entrada medidas ou calculadas. Em aplicações voltadas ao dimensionamento e verificação estrutural, Paula (2016) mostra que a combinação entre RNAs e rotinas de cálculo normativo permite reproduzir, com boa precisão, resultados obtidos por métodos tradicionais, com potencial para redução de custo computacional. Trabalhos mais recentes, como os de Masalkas e Felix (2021) e Reis *et al.* (2021), reforçam esse cenário ao explorar redes neurais em conjunto com algoritmos de otimização, evidenciando o papel dessas técnicas na automatização do projeto de estruturas de concreto.

#### 2.3.1. Histórico

As Redes Neurais Artificiais (RNAs) surgiram como um campo interdisciplinar inspirado na estrutura e no funcionamento do cérebro humano. Sua origem remonta aos trabalhos pioneiros de McCulloch e Pitts, em 1943, que propuseram um modelo matemático simples de neurônio artificial, baseando-se em lógica numérica (McCulloch e Pitts, 1943). Esse modelo, ainda rudimentar, serviu como base para o desenvolvimento de uma vasta gama de estruturas neurais mais complexas, tendo seu potencial reconhecido posteriormente em aplicações que envolvem tomada de decisão, classificação e identificação de padrões (Paula, 2016).

Com o passar das décadas, especialmente a partir dos anos 1980, houve uma retomada do interesse pelas redes neurais devido à introdução do algoritmo de retropropagação do erro,

que possibilitou o treinamento de redes multicamadas. Esse marco técnico permitiu que as RNAs superassem limitações dos modelos anteriores e fossem aplicadas a problemas mais complexos, ganhando espaço no campo da inteligência artificial aplicada à engenharia. Conforme destaca Araújo (2015), esse avanço foi essencial para permitir a aplicação de RNAs em sistemas estruturais, com capacidade de aprender comportamentos complexos e não lineares de materiais e estruturas.

No contexto da engenharia civil, especialmente em problemas de dimensionamento e análise estrutural, as RNAs passaram a ser estudadas como alternativas promissoras aos métodos clássicos baseados em formulações analíticas ou puramente numéricas. Masalkas e Felix (2021) exploram o uso de redes do tipo *feedforward* treinadas por algoritmos como *backpropagation* para estimar a armadura necessária em vigas de concreto armado submetidas à flexão, mostrando que, com uma base de dados bem estruturada, é possível obter respostas próximas àquelas obtidas por softwares convencionais de cálculo. Esse mesmo enfoque é tratado por Araújo (2015), que também ressalta a robustez das RNAs em problemas estruturais não lineares.

Paula (2016), em seu trabalho de graduação, também investigou o potencial das RNAs para o dimensionamento de elementos estruturais, observando que essas redes têm capacidade de generalização e baixo custo computacional em comparação com simulações baseadas em métodos numéricos tradicionais, como o método dos elementos finitos. O autor destaca ainda que a aplicabilidade das RNAs em estruturas com alta variabilidade geométrica e de carregamentos se mostra viável e confiável quando treinadas adequadamente.

A consolidação das redes neurais artificiais no contexto do dimensionamento estrutural foi possibilitada pelo aumento da capacidade computacional e pela disponibilidade de bases de dados robustas para treinamento. Em ambientes controlados, as redes podem aprender relações entre variáveis estruturais (como carga, momento, seção, tipo de concreto) e as respostas esperadas (como flechas, tensões, necessidade de armadura). No artigo de Silva *et al.* (2016), as RNAs são utilizadas para prever o comportamento último de elementos submetidos à compressão, indicando um nível de precisão compatível com os critérios normativos. De maneira semelhante, Araújo (2015) reforça que a confiabilidade dessas ferramentas está associada à qualidade dos dados utilizados em sua calibração.

Araújo (2015) complementa que, além da capacidade preditiva, as redes neurais têm sido integradas a métodos numéricos clássicos como uma forma de reduzir tempo computacional. Essa integração tem se mostrado eficiente, por exemplo, em análises não lineares de estruturas e na calibração de modelos constitutivos, onde o custo de simulação é elevado. Dessa forma, as RNAs não apenas substituem métodos tradicionais, mas também os complementam, permitindo a obtenção de respostas com boa aproximação e com significativa economia de recursos computacionais. Paula (2016) reforça essa vantagem ao discutir que a utilização de RNAs permite uma modelagem eficiente sem a necessidade de malhas refinadas em softwares baseados em elementos finitos.

Outro aspecto relevante do histórico das redes neurais é sua evolução arquitetural. Inicialmente limitadas a redes *perceptron* de camada única, as RNAs expandiram-se para modelos mais profundos, com múltiplas camadas ocultas, ativadas por funções não lineares e treinadas com algoritmos de otimização avançados. Embora as aplicações em engenharia estrutural ainda se concentrem em arquiteturas relativamente simples, há um crescente interesse por redes profundas (*deep learning*), sobretudo em problemas que envolvem grandes conjuntos de dados e análise de comportamento estrutural complexo (Araújo, 2015). Renato de Paula (2016) reforça que, mesmo com modelos simples, os resultados obtidos já se mostraram competitivos frente a soluções obtidas por meios tradicionais.

Portanto, o histórico das RNAs demonstra que seu uso não apenas acompanha a evolução computacional, mas também responde a uma demanda crescente por eficiência e inovação no campo da engenharia estrutural. Em vista disso, seu emprego no projeto automático de estruturas, especialmente quando integradas a algoritmos de otimização como o Jaya, revela-se uma direção promissora para superar limitações dos métodos tradicionais e expandir as possibilidades de solução em engenharia civil (Masalkas e Felix, 2021).

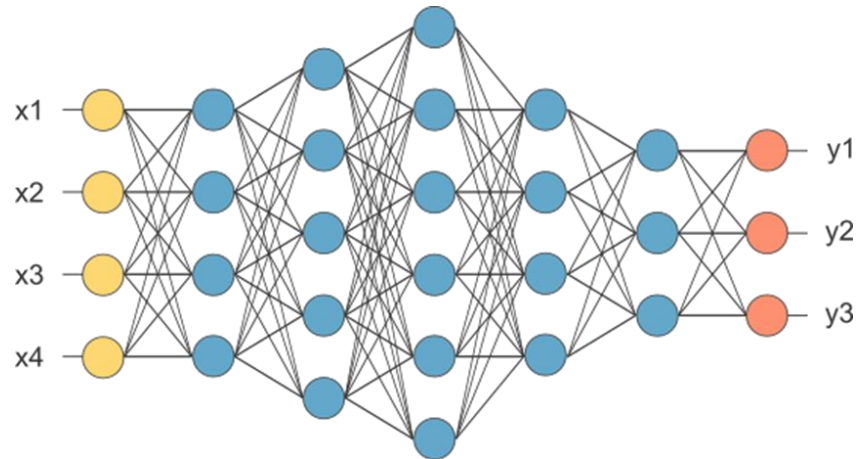
### **2.3.2. Estrutura geral**

Do ponto de vista estrutural, as Redes Neurais Artificiais utilizadas neste trabalho podem ser descritas como modelos do tipo *perceptron* multicamadas, organizados em camadas de entrada, camadas ocultas e camada de saída, com conexões totalmente interligadas entre camadas sucessivas. Segundo Paula (2016), o arranjo *feedforward* é o mais adequado para problemas de aproximação funcional contínua, nos quais se busca mapear um conjunto de variáveis de entrada em respostas estruturais de interesse. Araújo (2015) reforça



que, para aplicações em engenharia estrutural, essa configuração oferece um bom compromisso entre capacidade de generalização e custo computacional, sendo amplamente adotada em modelos destinados ao dimensionamento de elementos de concreto. A estrutura geral de uma rede neural artificial do tipo perceptron multicamadas é ilustrada esquematicamente na Figura 1.

Figura 1- Representação esquemática de uma rede neural



Fonte: DECOM-UFOP (2017).

Em nível de neurônio individual, cada unidade da rede recebe um conjunto de sinais de entrada, associa a eles pesos sinápticos e acrescenta um termo de viés, produzindo um potencial de ativação que, em seguida, é transformado por uma função não linear. De forma sintética, Paula (2016) apresenta esse funcionamento por meio de uma expressão na qual o potencial interno de um neurônio é obtido pela soma ponderada dos produtos entre entradas e pesos acrescida do viés, sendo a saída calculada pela aplicação de uma função de ativação a esse potencial, segundo a Equação 2.(2.4).

$$u = \sum (w_i \cdot x_i) + b \quad (2.4)$$

na qual  $u$  representa o potencial de ativação do neurônio,  $x_i$  corresponde às entradas do modelo,  $w_i$  são os pesos sinápticos associados a cada entrada e  $b$  é o termo de viés.

Em relação as camadas, a entrada reúne as variáveis que caracterizam o problema estrutural, como parâmetros geométricos da seção transversal, propriedades mecânicas dos materiais e ações atuantes. Araújo (2015) e Silva *et al.* (2016) mostram que a escolha

adequada dessas variáveis é determinante para o desempenho da rede, uma vez que ela define o espaço de informação sobre o qual o modelo será treinado. As camadas ocultas, por sua vez, são responsáveis por extrair combinações não lineares dessas variáveis, enquanto a camada de saída produz diretamente as grandezas a serem previstas, como esforços resistentes, áreas de armadura ou índices de aproveitamento da seção Masalkas e Felix (2021).

No contexto específico deste trabalho, a camada de entrada é construída a partir de grandezas envolvidas no projeto de vigas de concreto armado e protendido conforme as normas NBR 6118:2023 e AASHTO LRFD. Entre essas variáveis, incluem-se, por exemplo, a altura útil da seção, a largura da seção, os valores de resistência característica do concreto e do aço, o vão teórico, os momentos fletores de cálculo e parâmetros associados ao nível de protensão, como a força inicial aplicada e a posição dos cabos em relação ao eixo da seção. Trabalhos como os de Masalkas e Felix (2021) e Paula (2016) mostram que essa forma de representação direta das variáveis físicas, sem necessidade de codificações binárias, facilita a integração da RNA com modelos estruturais baseados em normas, além de favorecer a interpretação dos resultados por parte do projetista.

A camada de saída, por sua vez, é definida de modo a reproduzir grandezas relacionadas ao problema de otimização, e não necessariamente o dimensionamento convencional em si. Em aplicações voltadas ao dimensionamento à flexão, Masalkas e Felix (2021) utilizam como saídas da rede a área de armadura necessária e o momento resistente de cálculo, permitindo comparar diretamente as respostas da RNA com aquelas fornecidas pelos procedimentos normativos. Paula (2016) adota estratégia semelhante ao empregar saídas associadas a esforços últimos e flechas em elementos estruturais. Nesta pesquisa, entretanto, as saídas são escolhidas de forma a fornecer diretamente as informações utilizadas pelo processo de otimização, como o custo total da viga, o consumo de materiais ou índices derivados de restrições normativas, de modo que a RNA funcione como um modelo aproximador da função objetivo e das verificações em ELU e ELS acoplado ao algoritmo Jaya.

Outro aspecto relevante da estrutura geral diz respeito à escolha das funções de ativação. Para capturar o comportamento não linear típico de materiais como o concreto e o aço, adotam-se funções suaves nas camadas ocultas, como sigmóides logísticas ou tangente hiperbólica, enquanto a camada de saída utiliza funções lineares quando se deseja prever

grandezas físicas em escala real, como custos, áreas de armadura ou momentos resistentes. Paula (2016) e Araújo (2015) destacam que essa combinação, funções não lineares em camadas internas e função linear na saída, é particularmente eficaz em problemas de regressão contínua, caso dos modelos de previsão empregados em dimensionamento e otimização de estruturas.

Por fim, cabe destacar que os pesos sinápticos e os termos de viés constituem os parâmetros livres da rede, ajustados durante o processo de treinamento a partir dos pares de dados de entrada e saída. Em conjunto com a definição do número de camadas e da quantidade de neurônios em cada uma, esses parâmetros determinam a arquitetura da RNA e condicionam sua capacidade de representar com fidelidade o comportamento estrutural e os resultados de otimização que se deseja aproximar. Paula (2016) e Araújo (2015) apontam que redes muito simples tendem a não captar a complexidade do problema, enquanto arquiteturas excessivamente grandes aumentam o risco de sobreajuste e o custo computacional. Nesse contexto, a estrutura adotada neste trabalho busca um equilíbrio entre expressividade do modelo e eficiência numérica, de modo a viabilizar sua integração com o algoritmo Jaya no projeto automático de vigas protendidas, em linha com aplicações recentes de RNAs em dimensionamento e otimização estrutural apresentadas por Masalkas e Felix (2021).

### **2.3.3. Treinamento**

O treinamento de redes neurais artificiais consiste em ajustar, de forma iterativa, os pesos sinápticos e os termos de viés para que o modelo seja capaz de reproduzir, com precisão satisfatória, a relação entre as variáveis de entrada e de saída observadas em um conjunto de dados. Paula (2016) comenta que esse processo pode ser entendido como um procedimento de aproximação funcional, no qual a rede busca minimizar a diferença entre as respostas que produz e os valores alvo fornecidos pelo usuário.

Em termos de paradigmas de aprendizado, é comum classificar o treinamento de RNAs em três categorias principais: aprendizado supervisionado, não supervisionado e por reforço. No aprendizado supervisionado, a rede recebe pares de exemplos compostos por um vetor de entrada e o valor de saída desejado, e o objetivo é aprender o mapeamento entre esses dois conjuntos de informações. Paula (2016) observa que esse é o tipo de treinamento mais empregado em aplicações de engenharia estrutural, já que os dados de saída são conhecidos a partir de modelos analíticos ou numéricos consolidados. No aprendizado não supervisionado,

por outro lado, não há valores alvo explícitos, e a rede procura identificar padrões, agrupamentos ou estruturas latentes nos dados, sendo mais utilizada em análise exploratória. O aprendizado por reforço se baseia em interações sequenciais com um ambiente, em que a rede recebe recompensas ou penalidades, e é menos comum em problemas clássicos de dimensionamento e análise de estruturas, como comentam Araújo (2015) e Paula (2016).

No contexto de redes neurais do tipo perceptron multicamadas, o treinamento supervisionado é conduzido a partir da definição de uma função de erro que mede a qualidade da aproximação realizada pela rede. Uma escolha bastante utilizada é o erro quadrático médio, que pode ser escrito, segundo a Equação 2.(2.5).

$$E = 1/N \cdot \sum (y_i - t_i)^2 \quad (2.5)$$

na qual  $E$  representa o erro médio do conjunto de dados,  $N$  é o número de padrões considerados,  $y_i$  é a saída produzida pela rede para o padrão  $i$  e  $t_i$  é o valor alvo correspondente. Paula (2016) mostra que essa forma de medir o erro é adequada para problemas de regressão, nos quais se desejado aproximar grandezas contínuas a partir de variáveis de entrada. A partir dessa função de erro, o treinamento consiste em ajustar os pesos e vieses de modo a reduzir  $E$  ao longo das iterações.

O algoritmo de treinamento mais difundido em redes multicamadas é o *backpropagation*, que utiliza o método do gradiente descendente para ajustar os parâmetros da rede. Araújo (2015) descreve esse procedimento em duas etapas principais. Na etapa direta, o vetor de entrada é propagado pela rede camada a camada, até a obtenção da saída na última camada. Em seguida, na etapa de retropropagação, calcula-se o erro na saída e determina-se o gradiente desse erro em relação a cada peso e viés, propagando essa informação no sentido inverso, da saída para a entrada. A atualização dos pesos pode ser expressa, de forma genérica, segundo a Equação 2.(2.6).

$$w^{(n+1)} = w^{(n)} - \eta \cdot \partial E / \partial w \quad (2.6)$$

em que  $w^{(n)}$  é o valor do peso em uma dada iteração,  $w^{(n+1)}$  é o valor atualizado,  $\eta$  é a taxa de aprendizado e  $\partial E / \partial w$  representa a derivada parcial do erro em relação a esse peso. Paula (2016) destaca que a escolha de  $\eta$  influencia diretamente a estabilidade e a velocidade de

convergência do treinamento, já que valores muito elevados podem causar oscilações e valores muito pequenos tendem a tornar o processo excessivamente lento.

Além do algoritmo de *backpropagation* padrão, diferentes variações têm sido estudadas com o objetivo de melhorar o desempenho do treinamento. Silva *et al.* (2016) mencionam, por exemplo, o uso de termos de momento, que acrescentam à atualização um componente proporcional à variação anterior do peso, suavizando o caminho de descida na superfície de erro. Paula (2016) também discute algoritmos baseados em gradiente conjugado e métodos quase newtonianos, que utilizam informações adicionais sobre a curvatura da função de erro para acelerar a convergência, especialmente em problemas com um grande número de parâmetros. Em todos esses casos, o princípio permanece o mesmo, isto é, ajustar os pesos para reduzir sistematicamente a medida de erro definida sobre o conjunto de treinamento.

Outro aspecto importante do treinamento diz respeito à forma como os dados são apresentados à rede. Araújo (2015) distingue entre treinamento em modo batch e em modo incremental. No treinamento batch, todos os padrões de treinamento são processados antes de cada atualização global dos pesos, o que proporciona uma estimativa mais estável do gradiente do erro, porém com maior custo computacional por iteração. No treinamento incremental, também chamado de on-line, os pesos são atualizados a cada padrão apresentado, o que pode acelerar a adaptação em algumas situações, mas torna o processo mais sensível à ordem de apresentação dos dados. Silva *et al.* (2016) observam que, em aplicações de engenharia estrutural, uma estratégia intermediária, com pequenos lotes de dados, costuma ser uma alternativa interessante, combinando estabilidade e eficiência computacional.

O controle do processo de treinamento exige ainda a definição de critérios de parada adequados. Paula (2016) aponta que os critérios mais comuns envolvem o atingimento de um número máximo de épocas de treinamento, a estabilização do erro em um patamar que se considere satisfatório ou a observação de que o erro em um conjunto de validação começa a crescer, indicando possível sobreajuste. Araújo (2015) ressalta que a escolha equilibrada desses critérios é essencial para evitar tanto o subtreinamento, em que a rede ainda não aprendeu adequadamente o padrão dos dados, quanto o sobreajuste, em que o modelo passa a reproduzir ruídos específicos da base de treinamento em vez de capturar a tendência geral.

A etapa de treinamento normalmente é acompanhada de procedimentos de pré-processamento e de avaliação do desempenho. A normalização das entradas e, quando necessário, das saídas, é apontada por Silva *et al.* (2016) como uma etapa fundamental para garantir que todas as variáveis participem de forma equilibrada no cálculo do erro e na atualização dos pesos. Após o treinamento, Paula (2016) recomenda a utilização de um conjunto de teste independente para avaliar a capacidade de generalização da rede, isto é, sua habilidade de fornecer respostas adequadas para dados que não foram utilizados durante o ajuste dos parâmetros. Esse conjunto de práticas consolida o treinamento como uma etapa crítica na construção de modelos neurais confiáveis para aplicações em engenharia.

Por fim, cabe destacar que o desempenho da rede neural artificial está diretamente condicionado ao processo de treinamento ao qual ela é submetida. A rede aprende a mapear relações entre variáveis de entrada e saída a partir de um conjunto específico de dados, refletindo as hipóteses físicas, geométricas e normativas adotadas na geração desses dados. Assim, a aplicação do modelo treinado a problemas distintos daqueles considerados neste trabalho, como outras tipologias estruturais, diferentes faixas de carregamento ou critérios normativos alternativos, exige necessariamente um novo processo de treinamento. Dessa forma, a rede neural atua como um modelo de aproximação válido dentro do domínio para o qual foi treinada, não substituindo de forma genérica os modelos físicos de dimensionamento.

Apesar das vantagens associadas ao uso de redes neurais artificiais, é importante reconhecer suas limitações. O desempenho da RNA está diretamente condicionado à qualidade, à representatividade e à abrangência da base de dados utilizada no treinamento, de modo que sua aplicação fora do domínio de variáveis considerado pode resultar em previsões imprecisas ou fisicamente inconsistentes. Conforme destacado por Paula (2016) e Araújo (2015), redes neurais possuem capacidade limitada de extrapolação e tendem a apresentar melhores resultados quando empregadas em problemas de interpolação dentro do espaço de dados previamente aprendido. Além disso, Maslakas e Felix (2021) ressaltam que modelos baseados em RNA não substituem os modelos físicos e normativos de dimensionamento, devendo ser utilizados como ferramentas auxiliares de apoio à decisão, especialmente em aplicações que envolvem segurança estrutural. Assim, neste trabalho, a rede neural é empregada como um modelo aproximador, válido no domínio de treinamento considerado, sendo necessária a realização de novo processo de treinamento caso se deseje estender sua aplicação a problemas com características significativamente distintas.

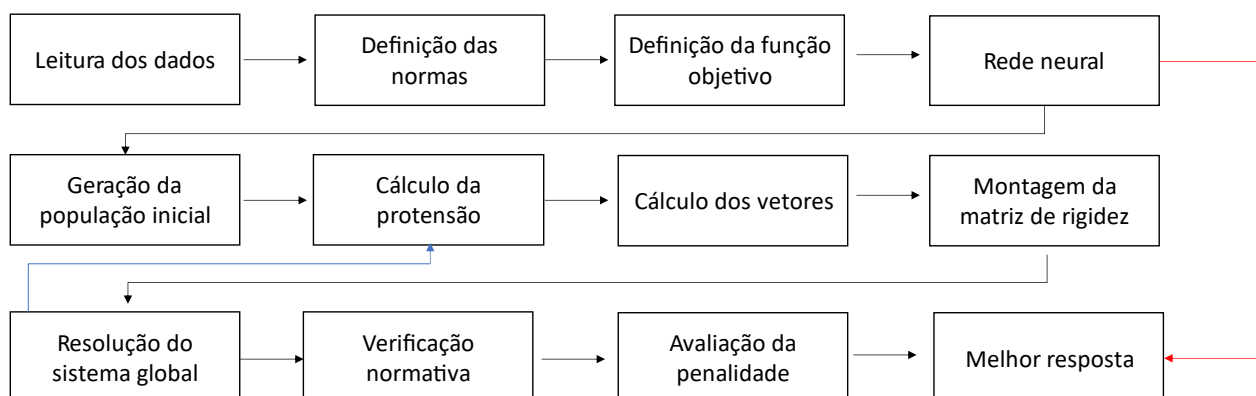
### 3. METODOLOGIA

A metodologia adotada neste trabalho foi estruturada em etapas sequenciais e iterativas, abrangendo desde a implementação da rotina de otimização até a integração das redes neurais artificiais ao processo de dimensionamento estrutural. Conforme ilustrado na Figura 2, o procedimento inicia-se com a leitura dos dados de entrada, definição das normas de projeto e estabelecimento da função objetivo. Em seguida, é gerada a população inicial de soluções, que passa a ser avaliada por meio do cálculo dos esforços estruturais, da montagem da matriz de rigidez e da verificação das condições normativas.

A cada iteração, as soluções são atualizadas pelo algoritmo Jaya e sua versão aprimorada Enhanced Jaya Algorithm, incorporando estratégias de exploração local e global. A avaliação das soluções considera uma função objetivo penalizada, de modo a tratar as restrições normativas de forma integrada ao processo de otimização. O ciclo iterativo prossegue até que o critério de parada seja satisfeito, sendo a melhor solução identificada utilizada como referência para o treinamento e a validação das redes neurais artificiais. Esse procedimento permite avaliar o desempenho da abordagem híbrida proposta e sua capacidade de generalização para novos casos de dimensionamento.

As variáveis de entrada consideradas no processo de otimização e no treinamento das redes neurais incluem parâmetros geométricos da seção transversal, propriedades mecânicas dos materiais, condições de carregamento e limites normativos aplicáveis ao dimensionamento estrutural. As variáveis de saída correspondem às grandezas de projeto ajustadas pelo algoritmo de otimização, tais como dimensões da seção, propriedades resistentes e parâmetros associados à armadura e à protensão. O critério de parada do algoritmo de otimização é definido com base na convergência da função objetivo, sendo o processo interrompido quando a variação entre valores sucessivos torna-se inferior a  $10^{-5}$  ou quando é atingido um número máximo de iterações.

Figura 2 – Fluxograma da metodologia



Fonte: Elaborado pelo autor.

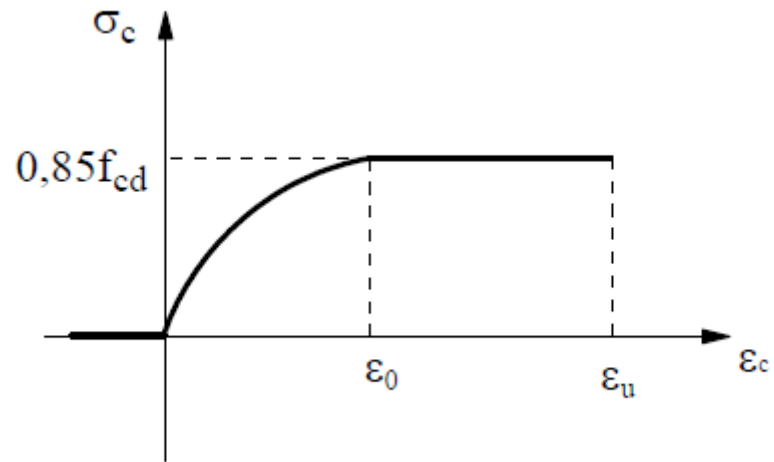
### 3.1. DIMENSIONAMENTO

A NBR 6118:2023 define que os critérios de dimensionamento à flexão baseiam-se na análise dos Estados Limites Últimos (ELU), com foco na resistência à ruptura, e dos Estados Limites de Serviço (ELS), com foco na fissuração. A análise estrutural à flexão considera o comportamento mecânico do concreto e do aço sob diferentes níveis de sollicitação. Em situações normais de projeto, adota-se como hipótese que o concreto resiste apenas à compressão, enquanto a armadura de aço é responsável por resistir aos esforços de tração. Essa simplificação decorre da baixa resistência do concreto à tração direta, cuja ruptura ocorre com pequenas deformações por se tratar de um material cerâmico. De acordo com a NBR 6118:2023, essa abordagem é válida desde que o concreto esteja em regime linear até atingir sua resistência característica à compressão, e que as armaduras estejam posicionadas corretamente em relação ao momento atuante (ABNT, 2023).

O modelo mecânico clássico para a análise da seção em flexão considera a hipótese da seção plana, segundo a qual as deformações normais variam linearmente ao longo da altura da seção. Essa premissa, também adotada pela AASHTO LRFD (2020), permite determinar o diagrama de tensões a partir da posição da linha neutra e da relação entre as deformações do concreto comprimido e da armadura tracionada. A NBR 6118 define o diagrama constitutivo do concreto em compressão como sendo parabólico-retangular, com deformação última igual a 3,5‰, assim como apresentado pela Figura 3.



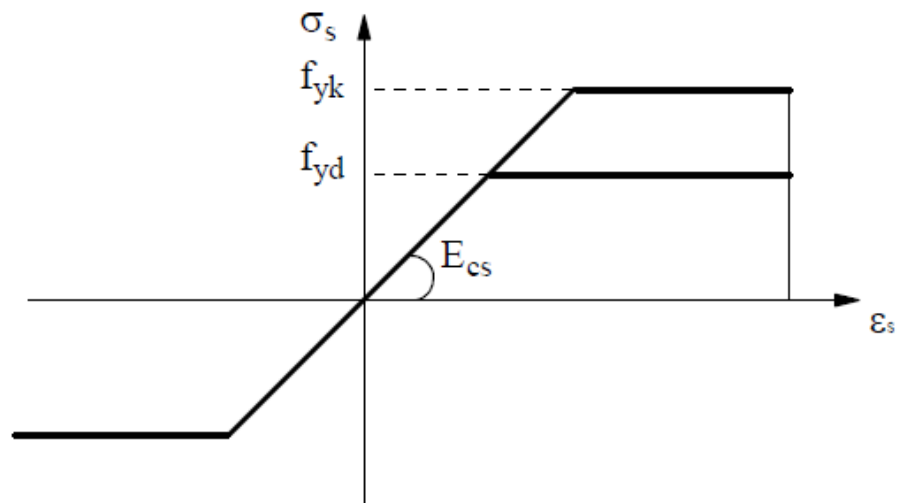
Figura 3- Diagrama tensão deformação do concreto



Fonte: Elaborado pelo autor.

A armadura de tração, por sua vez, é modelada como material elástico-plástico, como apresentado pela Figura 4.

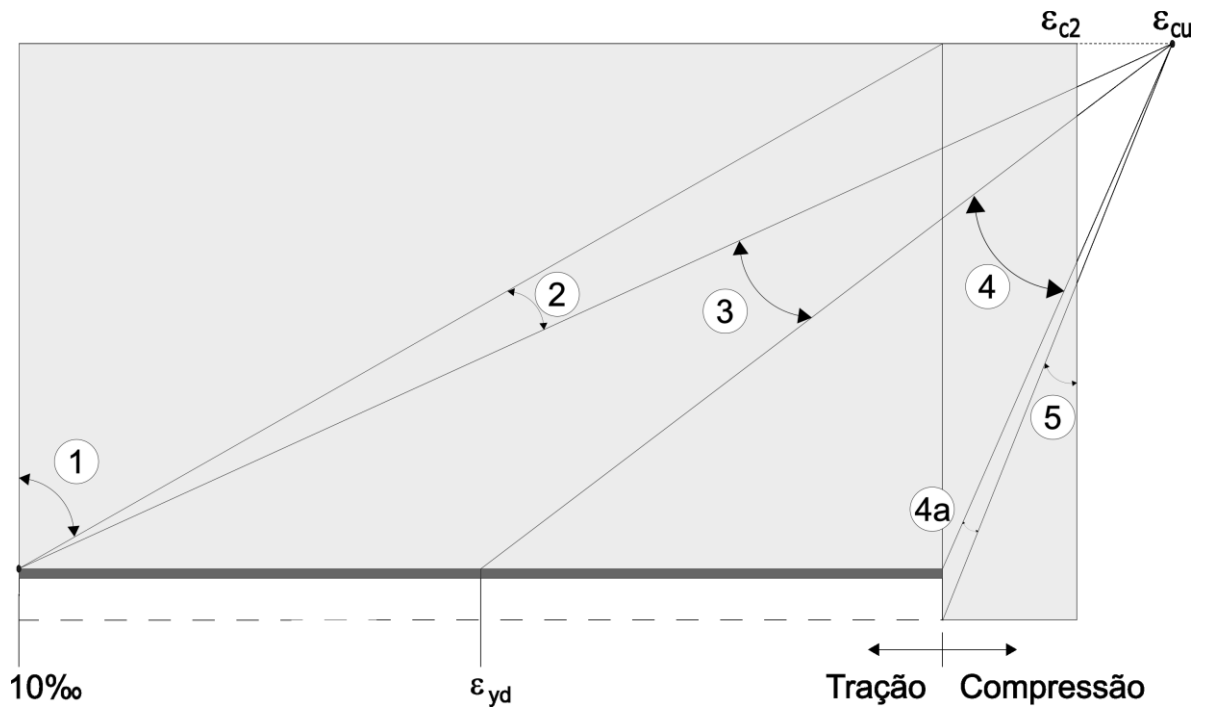
Figura 4- Diagrama tensão deformação do aço.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise da flexão pura em seções retangulares permite identificar três domínios distintos de comportamento, conforme o grau de deformação da armadura e do concreto. A NBR 6118 considera que o dimensionamento à flexão normal deve assegurar que a ruptura ocorra preferencialmente pela plastificação da armadura tracionada (domínio 3), garantindo ductilidade ao sistema. Esse domínio é caracterizado por uma deformação da armadura tracionada superior ao escoamento ( $\epsilon_s \geq \epsilon_{yd}$ ) e uma deformação do concreto comprimido menor ou igual a 3,5‰. Para verificar esse regime, é necessário que a linha neutra esteja localizada dentro de um intervalo específico da altura útil da seção. Os domínios de deformação do concreto podem ser visualizados graficamente através da Figura 5.

Figura 5- Domínios de deformação do concreto.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A resistência última da seção é determinada pelo equilíbrio entre as forças internas e o momento resultante. No caso de uma viga submetida à flexão simples, com uma única armadura tracionada, o momento resistente da seção pode ser calculado conforme indicado na NBR 6118, pela Equação 3.1.

$$M_{Rd} = A_s \cdot f_{yd} \cdot z \quad (3.1)$$

em que,  $A_s$  é a área da armadura tracionada,  $f_{yd}$  é a resistência de cálculo do aço e  $z$  é o braço de alavanca entre as linhas de ação da compressão e tração internas.

Além da verificação da resistência última, é necessário garantir o cumprimento dos Estados Limites de Serviço (ELS), relacionados a deformações excessivas, fissuração e vibrações. A abertura das fissuras é um dos parâmetros mais relevantes e é controlada por meio de fórmulas que levam em consideração o espaçamento entre as barras, o recobrimento e a deformação média da armadura. A Equação 3.2 é utilizada para o cálculo da abertura de fissuras.

$$w_k = s_r \cdot \varepsilon_{sm} \quad (3.2)$$

na qual,  $w_k$  é a abertura característica da fissura,  $s_r$  é o espaçamento médio entre fissuras e  $\varepsilon_{sm}$  é a deformação média da armadura em serviço. A verificação da flecha, ou deformação vertical da viga sob cargas permanentes e variáveis, também é exigida em situações onde o desempenho funcional e o conforto dos usuários são critérios de projeto. Segundo a NBR 6118, a flecha total não deve ultrapassar 1/250 do vão.

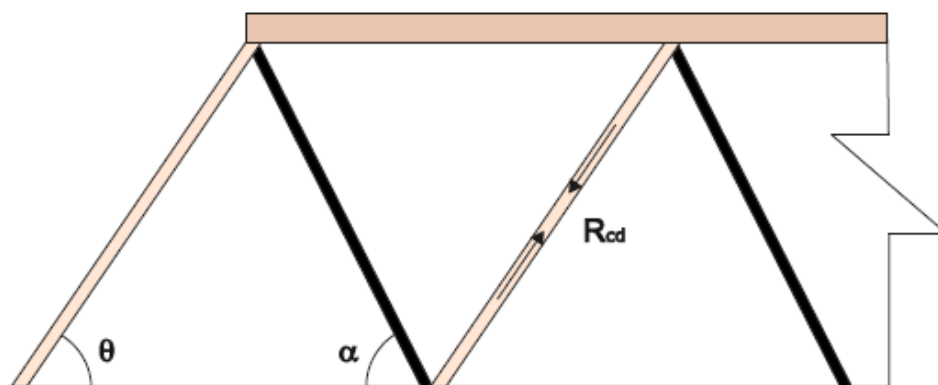
A norma AASHTO LRFD adota diretrizes similares, embora com enfoque mais restrito, especialmente no caso de pontes e estruturas sujeitas a tráfego dinâmico. O dimensionamento à flexão, considera a análise elástica da seção e o uso de fatores de resistência ( $\phi$ ) para cada tipo de solicitação. A fórmula equivalente ao ELU na AASHTO é definida pela Equação 3.3.

$$\phi M_n \geq M_u \quad (3.3)$$

onde,  $M_n$  é o momento nominal resistente,  $M_u$  é o momento fletor de cálculo e  $\phi$  é o fator de resistência, geralmente 0,9 para flexão em seções normais. Ambas as normas convergem na exigência de que a ruptura ocorra com aviso prévio, ou seja, com escoamento do aço antes da compressão excessiva do concreto, o que assegura ductilidade à estrutura.

A análise de cisalhamento em vigas de concreto armado, segundo a NBR 6118:2023, tem foco na ruptura por tração diagonal ou por esmagamento das bielas comprimidas de concreto e fissuração excessiva e deformações incompatíveis com o uso da estrutura (ABNT, 2023). De forma simplificada, a norma parte da hipótese clássica de que o concreto resiste integralmente às tensões normais de compressão, enquanto a armadura longitudinal e a armadura transversal (estribos) são responsáveis por resistir às tensões de tração decorrentes do esforço cortante e da flexão. Esse tratamento é compatível com a interpretação física do cisalhamento em vigas, em que o fluxo de tensões tende a produzir fissuras inclinadas, que passam a ser resistidas pela armadura transversal, configurando um mecanismo resistente semelhante ao modelo de treliça idealizado por Morsch (Nawy, 2009; Gilbert *et al.*, 2017). A Figura 6 apresenta um esquema da análise da viga como a treliça de Morsch, tendo a força de compressão na biela representada como  $R_{cd}$ , o ângulo da biela comprimida como  $\theta$  e o ângulo do estibo como  $\alpha$ .

Figura 6– Análise da viga como treliça de Morsch.



Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com a NBR 6118:2023, a verificação ao cisalhamento em seções de vigas retangulares é conduzida, em regime último, por meio da comparação entre o esforço cortante de cálculo atuante e a resistência de cálculo da seção. Em termos gerais, a norma define que a força cortante resistente de cálculo pode ser expressa como a soma de duas parcelas principais, uma associada ao concreto comprimido e outra à armadura transversal, o que pode ser representado, pela Equação 3.4.

$$V_{Rd} = V_c + V_{sw} \quad (3.4)$$

em que  $V_{Rd}$  é a força cortante resistente de cálculo,  $V_c$  é a parcela de resistência atribuída ao concreto e  $V_{sw}$  é a parcela resistida pela armadura transversal, compatível com o modelo de treliça adotado na norma (ABNT, 2023). Para efeitos de projeto, a NBR 6118:2023 adota ainda a verificação da tensão de cisalhamento na alma da viga, definida como a razão entre o esforço cortante atuante de cálculo e o produto entre a largura da alma e a altura útil da seção. Assim como apresentado pela Equação 3.5.

$$\tau_{sd} = \frac{V_{sd}}{(b_w \cdot d)} \quad (3.5)$$

em que  $V_{sd}$  é o esforço cortante de cálculo,  $\tau_{sd}$  é a tensão média de cisalhamento de cálculo atuante na seção,  $b_w$  é a largura da alma e  $d$  é a altura útil da seção. A partir desse parâmetro, a norma estabelece limites para a tensão resistente do concreto, de forma a evitar a ruptura frágil por esmagamento das diagonais comprimidas, garantindo uma reserva mínima de ductilidade antes da ruína (ABNT, 2023; Nawy, 2009).

A determinação da contribuição da armadura transversal é baseada na hipótese de treliça inclinada, em que os estribos trabalham predominantemente à tração, formando os tirantes da treliça, enquanto o concreto comprimido forma as bielas inclinadas. Nesse contexto, a NBR 6118:2023 relaciona a força cortante resistida pela armadura transversal à resultante das tensões de tração desenvolvidas nos estribos. Assim, parcela  $V_{sw}$  pode calculada usando a Equação 3.6.

$$V_{sw} = \frac{0,9 \cdot A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot d}{s} \cdot \sen \alpha \cdot \cos \alpha \quad (3.6)$$

em que  $A_{sw}$  é a área de aço da armadura transversal por unidade de comprimento da viga,  $f_{yd}$  é a resistência de cálculo ao escoamento do aço,  $s$  é o espaçamento entre estribos e  $\alpha$  é o ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural (ABNT, 2023; Gilbert *et al.*, 2017).

A AASHTO utiliza como base para a análise do cisalhamento a combinação das contribuições do concreto e da armadura transversal em um modelo constituído de tensões médias compatíveis com o estado fissurado (AASHTO, 2020). Em termos de verificação, a norma expressa o Estado Limite de Resistência ao cisalhamento por meio da Equação 3.7.

$$V_u \leq \phi \cdot V_n \quad (3.7)$$

em que  $V_u$  é o esforço cortante de cálculo atuante,  $V_n$  é a resistência nominal ao cisalhamento e  $\phi$  é o fator de resistência adotada no projeto. A resistência nominal  $V_n$  é, por sua vez, decomposta em parcelas atribuídas ao concreto e à armadura transversal, de forma análoga à expressão da NBR, porém com coeficientes obtidos a partir de calibrações probabilísticas e resultados experimentais voltados, sobretudo, ao comportamento de pontes em concreto armado e protendido (AASHTO, 2020).

O dimensionamento de vigas de concreto protendido à flexão exige, além das verificações usuais de resistência e de serviço, o controle explícito das tensões em cada fase de vida da estrutura, desde a transferência da protensão até a combinação final de cargas permanentes e variáveis. De acordo com a NBR 6118:2023, a análise deve considerar, no mínimo, a fase de transferência, em que atuam a força de protensão e o peso próprio, e a fase de serviço, na qual se combinam ações permanentes, sobrecargas de utilização e efeitos diferidos, como fluência e retração do concreto (ABNT, 2023; HANAI, 2005). A AASHTO LRFD, por sua vez, organiza essas verificações dentro dos estados limites de serviço e de resistência, adotando fatores de carga e de resistência calibrados para estruturas de pontes protendidas, mas com a mesma preocupação central de limitar tensões excessivas e garantir margem adequada de segurança ao colapso (AASHTO, 2020; Nawy, 2009).

Do ponto de vista mecânico, o cálculo das tensões normais em uma seção protendida resulta da superposição dos efeitos da força axial de protensão e dos momentos fletores associados às ações externas. Considerando uma viga com força de protensão de cálculo  $P_d$ , área da seção  $A_c$ , momento de inércia  $I_c$  e excentricidade  $e$  medida em relação ao centro de gravidade da seção, a tensão normal em uma fibra genérica situada a uma distância  $y$  da linha neutra pode ser obtida, segundo a Equação 3.8.

$$\sigma(x,y) = \frac{Pd}{Ac} \pm \frac{Pd \cdot e \cdot y}{Ic} \pm \frac{Md(x) \cdot y}{Ic} \quad (3.8)$$

em que  $Md$  é o momento fletor de cálculo devido às ações externas na posição considerada. Esse modelo, apresentado em diferentes formas por Hanai (2005), Nawy (2009) e Gilbert *et al.* (2017), permite avaliar, em cada fase de carregamento, as tensões máximas de compressão e tração no concreto e as tensões na armadura ativa.

Na fase de transferência da protensão, a NBR 6118:2023 estabelece limites mais restritivos para as tensões no concreto, uma vez que o material ainda se encontra em idade jovem e sujeito a variações volumétricas significativas. Em termos gerais, a norma admite que a tensão de compressão na fibra mais solicitada não ultrapasse uma fração da resistência característica à compressão  $f_{ck}$  na idade de transferência (ABNT, 2023; Hanai, 2005). De forma análoga, a AASHTO LRFD define limites específicos para as tensões de compressão e tração em serviço inicial, distinguindo entre regiões pré-fissuradas e não fissuradas e considerando a influência da protensão no fechamento de fissuras pré-existentes (AASHTO, 2020; Nawy, 2009).

Para a avaliação da resistência última à flexão, tanto a NBR 6118:2023 quanto a AASHTO LRFD admitem que, no estado limite último, a seção protendida se comporte de maneira semelhante a uma seção de concreto armado, com formação de um bloco comprimido de concreto e plastificação das armaduras tracionadas. A NBR 6118 utiliza o diagrama retângulo–parabólico simplificado para o concreto comprimido e modelos bilineares para o aço e para a armadura ativa, permitindo representar a situação de ruptura por meio do equilíbrio entre a resultante de compressão no concreto e a resultante de tração nas armaduras ativa e passiva (ABNT, 2023). Desse equilíbrio é obtido o momento resistente de cálculo  $M_{rd}$ , que pode ser descrito pela Equação 3.9.(3.9)

$$M_{rd} = C \cdot z \quad (3.9)$$

em que  $C$  é a resultante de compressão no concreto e  $z$  é o braço de alavanca entre as resultantes de compressão e tração. Em vigas protendidas, a força de tração é composta pela armadura ativa efetiva  $P_{eff}$  somada, quando existente, à contribuição da armadura passiva tracionada (Nawy, 2009; Gilbert *et al.*, 2017).

Além disso, no dimensionamento de seções protendidas é necessário considerar as perdas de protensão. A NBR 6118:2023 distingue perdas imediatas, como atrito, encurtamento elástico e deslizamento nas ancoragens, e perdas diferidas, associadas à fluência e retração do concreto e à relaxação do aço, recomendando que o dimensionamento em estado limite último seja realizado com a força de protensão efetiva após todas as perdas relevantes (ABNT, 2023; HANAI, 2005). Em termos operacionais, essa força pode ser estimada, segundo a Equação 3.10.(3.10)

$$P_{eff} = P_o - \Delta P \quad (3.10)$$

na qual  $P_o$  é a força inicial aplicada no cabo e  $\Delta P$  representa a soma das parcelas de perda previstas ao longo do tempo. Nawy (2009), Gilbert *et al.* (2017) mostram que o valor de  $P_{eff}$  tem influência direta tanto na verificação dos estados limites de serviço, por meio das tensões iniciais e finais, quanto na resistência última à flexão, já que a posição da linha neutra e o tamanho do bloco comprimido dependem do nível de protensão efetivamente disponível.

A AASHTO LRFD aprofunda ainda mais o tratamento das perdas de protensão, adotando um modelo explícito de evolução da tensão no cabo ao longo do tempo. A norma trabalha com o conceito de tensão efetiva na armadura de protensão, obtida a partir de uma tensão inicial e da subtração sucessiva das parcelas de perda imediata e diferida, assim como apresentado na Equação 3.11.

$$f_{pe} = f_{pi} - \Sigma \Delta f_i \quad (3.11)$$

sendo  $f_{pe}$  a tensão efetiva na armadura utilizada nas verificações de serviço e de resistência,  $f_{pi}$  a tensão inicial de protensão logo após o alongamento e ancoragem e  $\Sigma \Delta f_i$  representa a soma de todas as perdas consideradas no dimensionamento (AASHTO, 2020).

As perdas imediatas abrangem, principalmente, os efeitos de encurtamento elástico do concreto, o atrito ao longo do traçado dos cabos e o escorregamento nas ancoragens. No caso do encurtamento elástico, a AASHTO assume a compatibilidade de deformações entre o concreto comprimido e o aço protendido, de modo que a variação de tensão no cabo pode ser aproximada, segundo a Equação 3.12.



$$\Delta f_{es} \approx E_p \cdot \varepsilon_c \quad (3.12)$$

em que  $\Delta f_{es}$  é a variação de tensão no aço devido ao encurtamento elástico,  $E_p$  é o módulo de elasticidade da armadura de protensão e  $\varepsilon_c$  é a deformação média de encurtamento do concreto na região onde a protensão é transferida (AASHTO, 2020; NAWY, 2009). De forma análoga, as perdas por atrito são relacionadas ao comprimento do cabo, ao coeficiente de atrito e ao ângulo acumulado de desvio, enquanto o escorregamento nas ancoragens é tratado por meio de comprimentos equivalentes de perda.

Para as perdas diferidas, a norma reúne, em um mesmo quadro teórico, os efeitos da fluência e retração do concreto e da relaxação do aço de protensão. Assim, a AASHTO expressa a parcela de perda por fluência como proporcional à deformação de fluência desenvolvida ao longo do tempo, multiplicada pelo módulo de elasticidade da armadura e por coeficientes que levam em conta o nível de tensão inicial, o tipo de seção e as condições de exposição. De forma semelhante, a perda por retração é associada à deformação de retração livre do concreto, também multiplicada por  $E_p$  e por fatores que consideram a idade do concreto na protensão e a espessura equivalente da peça (AASHTO, 2020; GILBERT *et al.*, 2017). Já a relaxação do aço é estimada a partir de expressões empíricas que relacionam a queda de tensão ao tempo, à temperatura e à fração da tensão inicial em relação à resistência última do cabo.

Uma característica importante da abordagem da AASHTO LRFD é que essas parcelas podem ser avaliadas em diferentes fases do ciclo de vida da estrutura, permitindo um cálculo incremental das perdas. A norma recomenda que o projetista estime a evolução da tensão de protensão entre, por exemplo, o instante da protensão inicial, a retirada das escoras, a aplicação dos carregamentos permanentes e o estágio de longo prazo, resultando em diferentes valores de  $f_{pe}$  para cada fase de verificação (AASHTO, 2020). Essa estratégia é coerente com modelos de análise dependente do tempo desenvolvidos para vigas protendidas isostáticas e contínuas, em que a fluência e a retração do concreto são consideradas de forma progressiva na avaliação das tensões e deformações (NAWY, 2009; GILBERT *et al.*, 2017).

### 3.2. OTIMIZAÇÃO

A etapa de otimização foi implementada em ambiente MATLAB, versão R2023a, tomando como base o algoritmo Jaya previamente descrito na revisão da literatura e sua

versão aprimorada Enhanced Jaya Algorithm. Inicialmente, o foco foi validar a implementação do Jaya em problemas de benchmark de otimização contínua, sem relação direta com o dimensionamento estrutural. Para isso, foram selecionadas funções de teste, com e sem restrições, amplamente utilizadas na literatura para avaliação de desempenho de metaheurísticas. Em cada caso, o algoritmo foi executado diversas vezes, com diferentes sementes de números aleatórios, e os resultados foram comparados com os valores ótimos conhecidos, de modo a verificar se a rotina numérica era capaz de reproduzir, com boa precisão, os mínimos globais esperados. Essa fase inicial teve como objetivo principal assegurar que a implementação do esquema de atualização do Jaya, dado pela Equação 2.7, estivesse correta e que os mecanismos de avaliação da função objetivo fossem robustos frente a diferentes topologias de superfície de busca.

Uma vez validada a implementação do Jaya básico, foi incorporada a versão aprimorada do método, o Enhanced Jaya Algorithm. A adaptação consistiu em incluir, no código, termos adicionais de perturbação e estratégias de exploração local e global que modificam a regra de atualização original, mantendo a lógica de aproximação da melhor solução e afastamento da pior, mas com maior diversidade de movimento no espaço de busca.

A adoção de estratégias distintas de exploração local e exploração global no Enhanced Jaya Algorithm decorre da necessidade de equilibrar dois objetivos conflitantes no processo de otimização. A exploração global, apresentada pela Equação 3.13, tem como finalidade ampliar a cobertura do espaço de busca, permitindo que o algoritmo investigue regiões diversas e reduza a probabilidade de convergência prematura para mínimos locais. Essa etapa é particularmente relevante nas fases iniciais do processo iterativo, quando ainda há grande incerteza quanto à localização da solução ótima global. Por outro lado, a exploração local, representada pela Equação 3.14 atua na intensificação da busca nas proximidades das melhores soluções já identificadas, refinando gradualmente os resultados e promovendo a convergência do algoritmo. Essa estratégia torna-se mais eficaz nas fases intermediárias e finais da otimização, quando o espaço de busca relevante já foi parcialmente identificado. Assim, a combinação dessas duas estratégias permite ao EJAYA manter diversidade populacional nas etapas iniciais, ao mesmo tempo em que assegura precisão e estabilidade na convergência final das soluções, característica fundamental em problemas de otimização estrutural com múltiplas restrições.

$$x_i^{j,new} = x_i^j + \kappa \cdot (x\_rand^j - x_i^j) \quad (3.13)$$

$$x_i^{j,new} = x_i^j + \kappa \cdot (x\_best^j - x_i^j) \quad (3.14)$$

Nas expressões apresentadas,  $x_i^j$  representa o valor da  $j$ -ésima variável de projeto associada ao  $i$ -ésimo indivíduo da população na iteração corrente, enquanto  $x_i^{j,new}$  corresponde ao valor atualizado dessa variável após a aplicação da estratégia de exploração. O termo  $x\_best^j$  indica o valor da variável  $j$  na melhor solução da população, sendo utilizado na estratégia de exploração local para direcionar a busca em direção às regiões mais promissoras do espaço de soluções. Já  $x\_rand^j$  corresponde ao valor da variável  $j$  em um indivíduo selecionado aleatoriamente da população, sendo empregado na estratégia de exploração global com o objetivo de ampliar a diversidade e promover deslocamentos para regiões ainda pouco exploradas. O parâmetro  $\kappa$  atua como um fator de escala que controla a intensidade do deslocamento aplicado a cada variável, influenciando diretamente o equilíbrio entre exploração e intensificação ao longo do processo iterativo. Na prática, a rotina de atualização foi reescrita em MATLAB, versão R2023a, para que, a cada iteração, além da variação principal definida pelo Jaya, fossem aplicados deslocamentos controlados em torno das melhores soluções, seguindo as formulações apresentadas nos artigos de referência do Enhanced Jaya. O mesmo conjunto de funções-teste utilizado na etapa anterior foi empregado para comparar o desempenho das duas versões do algoritmo, analisando-se a convergência, a estabilidade das soluções obtidas e a sensibilidade aos parâmetros de tamanho de população e número de iterações máximas.

Após essa fase de validação em problemas matemáticos, a rotina de otimização passou a ser aplicada diretamente ao projeto de vigas de concreto armado e pretendido em problemas isostáticos e hiperestáticos. Nessa etapa, cada indivíduo da população passou a representar um vetor de variáveis de projeto associadas à viga, tais como dimensões da seção transversal, quantidade e posição das armaduras. Para cada vetor de variáveis, é realizada uma chamada à rotina de dimensionamento estrutural, que calcula esforços resistentes, verifica os Estados Limites Últimos e de Serviço e estima as perdas de protensão de acordo com os procedimentos normativos adotados. A partir dessas informações, a função objetivo é avaliada. Na formulação de referência deste trabalho, a função objetivo principal está associada ao custo global da viga, incluindo volume de concreto, massa de aço passivo, massa

de aço ativo e, quando pertinente, custos indiretos relacionados ao sistema de protensão. De forma genérica, essa função pode ser escrita, segundo a Equação 3.15.

$$F(x) = C(x) + P(x) \quad (3.15)$$

em que  $F(x)$  representa o valor da função objetivo para um vetor de projeto  $x$ ,  $C(x)$  corresponde ao custo direto da solução e  $P(x)$  é um termo de penalidade associado à violação das restrições normativas.

O termo de penalidade  $P(x)$  é responsável por incorporar as restrições da NBR 6118:2023 e da AASHTO LRFD na rotina de otimização. Neste trabalho, a avaliação das soluções é feita com base em uma função de custo penalizada, inspirada no esquema adaptativo proposto por Lemonge e Barbosa (2004), que utiliza informações da própria população para definir o peso de cada restrição. Em vez de trabalhar com coeficientes de penalidade fixos, a rotina calcula, a cada geração, um valor de avaliação  $\Phi(x)$  que depende do custo  $C(x)$ , das violações de restrições e de estatísticas da população corrente. De forma simplificada, a avaliação penalizada pode ser escrita da seguinte maneira:

Se a solução é viável, então utiliza-se a Equação 3.16.

$$\Phi(x) = C(x) \quad (3.16)$$

Se a solução é inviável, é utilizada a Equação 3.17.

$$\Phi(x) = C_{\text{med}} + \sum_{j=1}^m k_j \cdot v_j(x) \quad (3.17)$$

em que  $m$  representa o número total de restrições consideradas no problema,  $v_j(x)$  é a violação da  $j$ -ésima restrição para o indivíduo  $x$  (assumindo valor zero quando a restrição é satisfeita),  $k_j$  é o coeficiente de penalidade associado à  $j$ -ésima restrição, que pondera a importância relativa daquela condição na função objetivo penalizada, e  $C_{\text{med}}$  é um valor de custo médio adaptativo calculado a partir da população atual, utilizado como referência para separar soluções viáveis e inviáveis.

Esse último termo,  $C_{\text{med}}$  é calculado como a média dos valores de  $C(x)$  da população corrente, considerando tanto indivíduos viáveis quanto inviáveis. Com isso, soluções

inviáveis com custo aparentemente baixo não são favorecidas indevidamente, pois a avaliação  $\Phi(x)$  passa a ser sempre “pior” do que a média da população quando há violação de restrições. Os coeficientes  $k_j$  também são definidos de forma adaptativa, em função das violações médias de cada restrição na população. Segundo a Equação 3.18, o valor de  $k_j$  é dado por:

$$k_j = |f(x)| \cdot \frac{v_j(x)}{\sum_{l=1}^m [vl(x)]^2} \quad (3.18)$$

em que,  $k_j$  é calculado como o módulo da média da função objetivo multiplicado pela violação média da  $j$ -ésima restrição e dividido pela soma dos quadrados das violações médias de todas as restrições. Dessa forma, as restrições que apresentam maior dificuldade de atendimento recebem coeficientes de penalidade mais elevados, enquanto restrições facilmente satisfeitas tendem a ter penalidades menores. O esquema permanece, assim, essencialmente livre de parâmetros definidos arbitrariamente, ajustando-se automaticamente ao longo da otimização.

Na implementação deste trabalho, a função objetivo  $F(x)$  continua sendo definida, para fins de interpretação de resultados, como  $F(x) = C(x) + P(x)$ , conforme a Equação 3.13. No entanto, a ordenação das soluções dentro do algoritmo Jaya e do Enhanced Jaya é feita com base na função penalizada  $\Phi(x)$ . Em outras palavras,  $C(x)$  é usado para medir o custo direto da solução, enquanto  $\Phi(x)$  é o valor efetivamente utilizado para identificar a melhor e a pior solução em cada geração.

O critério de parada do processo de otimização foi definido com base na convergência da função objetivo. O algoritmo era encerrado quando a diferença entre os valores da função objetivo obtidos em iterações consecutivas tornava-se inferior a uma tolerância previamente estabelecida, adotada neste trabalho como  $10^{-5}$ . Adicionalmente, foi definido um número máximo de iterações como critério de segurança, de modo a evitar execuções excessivamente longas em casos de convergência lenta.

### 3.3. REDES NEURAS

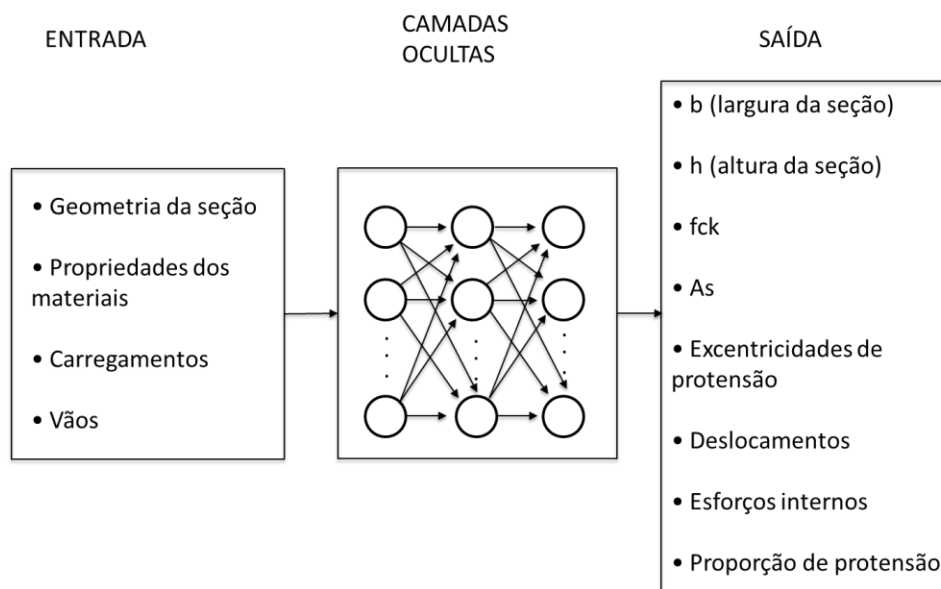
A etapa seguinte da metodologia consiste na integração entre o algoritmo de otimização e as Redes Neurais Artificiais (RNAs), de forma que a rede seja capaz de reproduzir, com precisão satisfatória, os resultados fornecidos pelo Enhanced Jaya Algorithm (EJAYA), substituindo-o nas fases subsequentes de projeto. Essa integração tem como motivação principal a redução do custo computacional associado à busca estocástica, uma vez que a avaliação completa da função objetivo envolve o dimensionamento estrutural e verificações normativas, etapas que demandam tempo de processamento significativo quando executadas em grande volume de iterações. A RNA passa, portanto, a atuar como um mecanismo de aproximação do comportamento do otimizador, aprendendo, a partir de exemplos previamente gerados, a relação entre as variáveis de entrada e as soluções ótimas obtidas pelo EJAYA.

A rede neural adotada possui arquitetura do tipo feedforward multicamadas, composta por uma camada de entrada, uma ou mais camadas ocultas e uma camada de saída. A camada de entrada recebe as variáveis que descrevem o problema estrutural, enquanto as camadas ocultas são responsáveis por capturar as relações não lineares existentes entre essas variáveis. A camada de saída fornece as respostas associadas às soluções ótimas de projeto. Essa estrutura permite que a RNA represente funções altamente não lineares, adequadas à complexidade do problema de dimensionamento estrutural tratado.

Para compor a base de dados utilizada no treinamento, foram executadas 5000 otimizações independentes do EJAYA, cada uma delas com diferentes combinações de variáveis iniciais, parâmetros do algoritmo e condições normativas. Em cada execução, o algoritmo produziu um conjunto final de variáveis ótimas referentes ao problema de dimensionamento, largura da seção ( $b$ ), altura total ( $h$ ), resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ ), excentricidade de armadura de protensão ( $e$ ), proporção de protensão ( $\alpha_{PP}$ ), deslocamentos, esforços internos e área total de armadura tracionada ( $A_s$ ). Esses parâmetros representam o núcleo decisório do processo de projeto, pois são as quantidades ajustadas pelo otimizador para minimizar o custo estrutural sem violar as restrições da NBR 6118:2023 e da AASHTO LRFD. Assim, essas variáveis constituem o conjunto de saída da RNA, configurando um problema de regressão multivariada em que a rede deve prever simultaneamente as quatro grandezas.

Do ponto de vista funcional, o problema tratado pela RNA é formulado como uma regressão multivariada. O vetor de entrada da rede é composto por variáveis associadas à geometria inicial da seção, propriedades mecânicas dos materiais, condições de carregamento, limites normativos e parâmetros do processo de otimização. Como saída, a rede fornece simultaneamente as principais variáveis de projeto resultantes do processo de otimização, permitindo estimar diretamente soluções estruturais viáveis a partir das condições iniciais do problema. A Figura 7 apresenta, de forma esquemática, a estrutura da rede neural adotada neste trabalho, evidenciando o conjunto de variáveis de entrada, o processamento nas camadas ocultas e as variáveis de saída associadas às soluções de projeto.

Figura 7– Esquema conceitual das variáveis de entrada e saída da rede neural



Fonte: Elaborado pelo autor.

As variáveis de entrada da RNA foram selecionadas tendo em vista a influência direta que exercem sobre o comportamento estrutural e sobre a solução ótima encontrada pelo EJAYA. Entre essas variáveis, incluem-se as propriedades geométricas iniciais da seção, módulo de elasticidade e  $f_{ck}$ , os carregamentos aplicados, os limites normativos de tensão e deformação e os próprios parâmetros empregados no EJAYA, como tamanho da população e número de iterações máximas. Embora nem todas essas grandezas sejam variáveis de decisão no processo de otimização, elas condicionam o espaço admissível de soluções e influenciam o ponto ótimo, motivo pelo qual são incorporadas ao vetor de entrada.

Cada instância de otimização produz, portanto, um par entrada-saída, permitindo estruturar uma base de dados com 5000 linhas, cada qual associada à solução ótima de uma execução do EJAYA. Após seu processamento, os dados foram divididos em duas partes, 80% destinados ao treinamento da rede e 20% reservados para teste, permitindo avaliar o desempenho do modelo em exemplos não utilizados na fase de ajuste dos parâmetros sinápticos. A arquitetura adotada é do tipo multicamadas, com uma camada de entrada contendo todas as variáveis selecionadas e uma camada de saída com quatro neurônios correspondentes às respostas a serem previstas. O número de camadas ocultas e a quantidade de neurônios em cada uma não são definidos inicialmente, para isso, utilizou-se o recurso de otimização bayesiana disponível no MATLAB, que seleciona automaticamente a combinação de hiperparâmetros mais adequada ao problema.

As funções de ativação consideradas incluem alternativas clássicas como tangente, sigmoide, rampa e funções do tipo linear, todas testadas dentro do processo de otimização bayesiana. O treinamento foi conduzido pelo algoritmo de *backpropagation*, nesse método, o processo de aprendizado ocorre a partir da minimização iterativa do erro entre as respostas fornecidas pela rede e os valores alvo provenientes das soluções ótimas do EJAYA. Inicialmente, as entradas são propagadas no sentido direto (*forward*), gerando uma estimativa das variáveis de saída. Em seguida, calcula-se o erro associado a essa estimativa, que é retropropagado (*backward*) através das camadas da rede, permitindo determinar a sensibilidade do erro em relação a cada peso sináptico. A partir dessas derivadas, os pesos e vieses são ajustados no sentido oposto ao gradiente, reduzindo progressivamente o erro global e refinando a capacidade preditiva do modelo.

Ressalta-se que a capacidade preditiva da RNA está diretamente associada à qualidade e à representatividade da base de dados utilizada no treinamento. Assim, a rede é válida dentro do domínio de variáveis e condições consideradas neste trabalho, sendo necessária nova etapa de treinamento caso se deseje aplicá-la a problemas com características significativamente distintas. Após o treinamento, a RNA foi submetida à fase de teste, na qual foram avaliadas métricas de desempenho como o erro quadrático médio e a dispersão entre as previsões da rede e os resultados originais do EJAYA. A rede foi então integrada ao fluxo metodológico como substituta direta do otimizador, dadas novas condições de entrada, o modelo passa a fornecer instantaneamente uma estimativa das variáveis ótimas de projeto, sem a necessidade de executar um ciclo completo do EJAYA. Esse procedimento reduz o



custo computacional associado ao dimensionamento iterativo e permite que a otimização estrutural seja realizada de forma mais eficiente.

### 3.4. ANÁLISE ESTRUTURAL

A metodologia adotada para a análise das vigas hiperestáticas protendidas, considerando os efeitos diferidos do concreto e as perdas de protensão ao longo do tempo, fundamenta-se no modelo proposto por Paez e Sensale (2021). Esse trabalho apresenta um estudo consistente para vigas com protensão não aderente, incorporando de forma integrada os efeitos de fluência, retração, relaxação do aço de protensão e atrito entre o cabo e seu duto. Além disso, os autores propõem uma formulação numérica baseada no método dos elementos finitos, capaz de representar, com precisão adequada, o comportamento de vigas simplesmente apoiadas e contínuas submetidas a carregamentos de longa duração. O ponto de partida do modelo é a decomposição da deformação total do concreto em componentes instantâneas e diferidas, conforme a Equação 3.19.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{cr}(t,t_0) + \varepsilon_{sh}(t,t_s) \quad (3.19)$$

em que  $\varepsilon_e(t)$  é a deformação elástica instantânea,  $\varepsilon_{cr}(t,t_0)$  corresponde à fluência causada pela tensão aplicada na idade  $t_0$  e  $\varepsilon_{sh}(t,t_s)$  representa a deformação por retração iniciada na idade  $t_s$ . A partir dessa definição, Paez e Sensale (2021) adotam o princípio da superposição linear para descrever o concreto como um material viscoelástico dentro do regime de serviço. A deformação ao longo do tempo, devido a um histórico de tensões  $\sigma_c(\tau)$ , é obtida com base na Equação 3.20.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot (1 + \varphi(t,t_0)) + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{1 + \varphi(t,\tau)}{E_c(\tau)} \cdot d\sigma_c(\tau) + \varepsilon_{sh}(t,t_s) \quad (3.20)$$

em que  $\varphi(t,\tau)$  é o coeficiente de fluência e  $E_c(\tau)$  o módulo de elasticidade do concreto na idade  $\tau$ . No caso da protensão não aderente, a tensão no aço é obtida a partir da deformação global da viga. A variação de alongamento do cabo passa a depender da deformação do concreto ao longo de todo o seu comprimento. A compatibilidade é expressa pela Equação 3.21.

$$\Delta l_p = \int_{x=0}^{x=l} \Delta \varepsilon_{c,p}(x) dx \quad (3.21)$$

em que  $\Delta \varepsilon_{c,p}(x)$  é a variação de deformação do concreto no nível do cabo. A formulação também permite contabilizar o atrito entre o cabo e o duto, o que altera a distribuição da deformação ao longo do cabo. Esse efeito é incluído por meio da Equação 3.22 referente a perda por atrito.

$$\Delta \varepsilon_p(x) = \Delta \varepsilon_p(s) \cdot \Psi(x - s) \quad (3.22)$$

com  $\Psi(x - s)$  dado pela Equação 3.23.

$$\Psi(x - s) = e^{-(\mu \cdot \alpha (x - s) + k \cdot |x - s|)} \quad (3.23)$$

em que  $\mu$  é o coeficiente de atrito,  $k$  representa o efeito *wobble* e  $\alpha(x - s)$  é a variação angular entre os trechos considerados. A partir da combinação entre a variação da força no cabo  $\Delta P_p(t)$ , a compatibilidade global e os efeitos de fluência, retração e relaxação, os autores demonstram que a perda de protensão ao longo do tempo pode ser expressa pela Equação 3.24.

$$\Delta P_p(t) = \frac{\frac{\varphi(t,t_0)}{l \cdot E_c(t_0)} \int_0^l \sigma_{cp}(t_0,x) dx + \varepsilon_{sh}(t,t_0) - \frac{\Delta \sigma_{pr}(t - t_0)}{E_p}}{\frac{1}{E_p \cdot A_p} + \frac{1}{l \cdot E_{ct}(t,t_0)} \cdot \int_0^l \left[ \frac{1}{A_c} + \frac{e_{cp}(x) - \hat{e}_{cp}(x)}{I_c} \cdot e_{cp}(x) \right] \cdot dx} \quad (3.24)$$

em que  $\sigma_{cp}(t_0, x)$  é a tensão inicial no nível do cabo,  $\Delta \sigma_{pr}(t - t_0)$  representa a variação de tensão por relaxação,  $E_p$  é o módulo de elasticidade do aço de protensão,  $A_p$  é a área dos cabos,  $E_{ct}(t,t_0)$  é o módulo de elasticidade efetivo do concreto ao longo do tempo,  $A_c$  e  $I_c$  são a área e o momento de inércia da seção e  $e_{cp}(x)$  e  $\hat{e}_{cp}(x)$  são excentricidades geométricas associadas ao cabo. Essa equação sintetiza o comportamento ao longo do tempo e destaca, de forma compacta, a contribuição conjunta da fluência do concreto, da retração e da relaxação reduzida do aço protendido, dependente da tensão local.

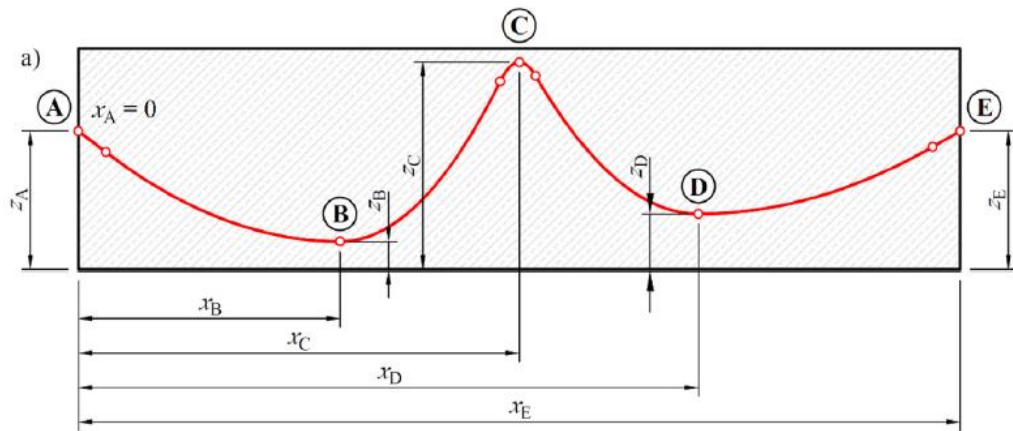
Para representar numericamente esse comportamento, a formulação proposta por Paez e Sensale (2021) adota um modelo híbrido baseado no Método dos Elementos Finitos, no qual o concreto é discretizado por elementos de viga unidimensionais, responsáveis por representar

o comportamento flexional e axial do elemento estrutural. A armadura passiva é modelada por elementos de treliça, compatibilizados cinematicamente com os elementos de viga do concreto, assegurando a interação entre aço e concreto ao longo do comprimento do elemento.

Os cabos de protensão não aderentes, por sua vez, não são representados como elementos estruturais clássicos, sendo introduzidos no modelo por meio de forças equivalentes aplicadas aos elementos de viga, considerando a excentricidade do traçado ao longo do vão. Essa estratégia permite incorporar, em um único modelo numérico, o comportamento instantâneo do concreto e do aço, os efeitos diferidos, as perdas por atrito ao longo do cabo, a variação de rigidez associada ao envelhecimento do concreto e a ausência de aderência entre o aço de protensão e o concreto.

A discretização da viga em elementos finitos é realizada de modo a coincidir com os pontos característicos do traçado do cabo de protensão. Em particular, os nós do modelo são posicionados nos pontos em que ocorre inversão da ondulação do cabo, isto é, nos trechos em que a curvatura muda de sinal ao longo do comprimento da viga. Essa estratégia permite representar de forma mais precisa a variação da excentricidade da protensão, uma vez que cada elemento finito passa a conter um trecho do cabo com curvatura aproximadamente constante. A Figura 8 ilustra o traçado típico do cabo de protensão e a identificação dos pontos utilizados para a definição dos nós do modelo em elementos finitos.

Figura 8– Representação do traçado do cabo de protensão e posicionamento nodal no modelo em elementos finitos



Fonte: Elaborado pelo autor.

O elemento de viga adotado segue a teoria de Navier–Bernoulli, com deslocamento axial linear e deslocamento transversal cúbico. A matriz de rigidez para o estado instantâneo no tempo  $t = t_s$  é dada pela Equação 3.25.

$$[\mathbf{K}_b^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{E_c \cdot A_c}{l^{(e)}} & 0 & 0 & -\frac{E_c \cdot A_c}{l^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E_c \cdot I_c}{(l^{(e)})^3} & \frac{6 \cdot E_c \cdot I_c}{(l^{(e)})^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E_c \cdot I_c}{(l^{(e)})^3} & \frac{6 \cdot E_c \cdot I_c}{(l^{(e)})^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E_c \cdot I_c}{(l^{(e)})^2} & \frac{4 \cdot E_c \cdot I_c}{l^{(e)}} & 0 & -\frac{6 \cdot E_c \cdot I_c}{(l^{(e)})^2} & \frac{2 \cdot E_c \cdot I_c}{l^{(e)}} \\ -\frac{E_c \cdot A_c}{l^{(e)}} & 0 & 0 & \frac{E_c \cdot A_c}{l^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E_c \cdot I_c}{(l^{(e)})^3} & -\frac{6 \cdot E_c \cdot I_c}{(l^{(e)})^2} & 0 & \frac{12 \cdot E_c \cdot I_c}{(l^{(e)})^3} & -\frac{6 \cdot E_c \cdot I_c}{(l^{(e)})^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E_c \cdot I_c}{(l^{(e)})^2} & \frac{2 \cdot E_c \cdot I_c}{l^{(e)}} & 0 & -\frac{6 \cdot E_c \cdot I_c}{(l^{(e)})^2} & \frac{4 \cdot E_c \cdot I_c}{l^{(e)}} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

em que  $l$  é o comprimento do elemento,  $E_c = E_c(t_s)$  é o módulo de elasticidade do concreto na idade  $t_s$  e  $A_c$  e  $I_c$  são, respectivamente, a área e o momento de inércia da seção de concreto. O aço é modelado como elemento de treliça com rigidez axial assim como apresentado na Equação 3.26.

$$[\mathbf{K}_s^{(e)}] = \frac{E_s \cdot A_s}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Para acoplar a armadura ao elemento de viga, utiliza-se uma matriz de transformação que relaciona os deslocamentos do elemento de treliça às componentes nodais do elemento de viga. A matriz de transformação é expressa pela Equação 3.27.

$$[Ts] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -e_s \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

em que  $e_s$  é a excentricidade da armadura em relação ao centro de gravidade da seção. A matriz de rigidez transformada da armadura é obtida pela Equação 3.28.

$$[K_s^{(e)}]_{\text{transf}} = \sum_{i=1}^{i=ms} \frac{E_s A_s(i)}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_{s(i)} & -1 & 0 & e_{s(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_{s(i)} & 0 & e_{s(i)}^2 & e_{s(i)} & 0 & -e_{s(i)}^2 \\ -1 & 0 & e_{s(i)} & 1 & 0 & -e_{s(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_{s(i)} & 0 & -e_{s(i)}^2 & -e_{s(i)} & 0 & e_{s(i)}^2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

A rigidez total do elemento, considerando concreto e aço, é obtida pela Equação 3.29.

$$[K^{(e)}] = [K_b^{(e)}] + [K_s^{(e)}]_{\text{transf}} \quad (3.298)$$

sendo possível incluir múltiplas camadas de armadura por meio da soma das contribuições individuais. O comportamento dos cabos não aderentes é inserido no modelo por meio de forças e momentos equivalentes aplicados ao elemento de viga, reproduzindo o efeito do cabo sobre o concreto. Sejam  $N_{p,i}$  e  $N_{p,j}$  as forças axiais no início e no fim do segmento de cabo. A partir do equilíbrio, obtêm-se as ações equivalentes nos nós do elemento, representadas na Equação 3.30.

$$\begin{aligned}
H_i &= -N_{p,i} \cdot \cos(\alpha_i^{(e)}) \\
V_i &= -N_{p,i} \cdot \sin(\alpha_i^{(e)}) \\
M_i &= N_{p,i} \cdot e_{cp,i} \cdot \cos(\alpha_i^{(e)}) \\
H_j &= N_{p,j} \cdot \cos(\alpha_i^{(e)}) \\
V_j &= N_{p,j} \cdot \sin(\alpha_i^{(e)}) \\
M_j &= -N_{p,j} \cdot e_{cp,j} \cdot \cos(\alpha_i^{(e)})
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Além dessas componentes nodais, são incluídos carregamentos distribuídos equivalentes devido ao atrito podem ser expressas conjuntamente pela Equação 3.31.

$$m_{p,i} = \left( \frac{N_{pi} - N_{pj}}{l_{p,i}^{(e)}} \right) \cdot \cos(\alpha_i^{(e)}) + \left( \frac{N_{pi} - N_{pj}}{l_{p,i}^{(e)}} \right) \cdot \sin(\alpha_i^{(e)}) \tag{3.31}$$

O vetor de forças nodais equivalentes devido ao cabo é então descrito pela Equação (3.32).

$$[P_i^{(e)}] = -[H_i \ V_i \ M_i \ H_j \ V_j \ M_j]^T + [f_{q,p}^{(e)}] + [f_{h,p}^{(e)}] + [f_{m,p}^{(e)}] \tag{3.32}$$

em que  $[f_{q,p}^{(e)}]$ ,  $[f_{h,p}^{(e)}]$  e  $[f_{m,p}^{(e)}]$  são vetores equivalentes associados às componentes distribuídas de força vertical, força horizontal e momento. A curvatura no elemento de viga é determinada pela Equação 3.33.

$$\kappa(x) = - \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \tag{3.33}$$

e a deformação axial média é dada pela Equação 3.34.

$$\varepsilon_r(t_j, \xi) = \left[ -\frac{1}{l^{(e)}} \ \frac{1}{l^{(e)}} \right] \cdot [aa^{(e)}(t_j)] \tag{3.34}$$

em que  $[aa^{(e)}]$  é o vetor de deslocamentos axiais nodais. A deformação no nível do cabo resulta da combinação entre deformação axial e curvatura, gerando as equações presentes na Equação 3.35.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{cp,i} &= \varepsilon_r(t_j, -1) + e_{cp,i} \cdot \kappa(t_j, -1) \\ \varepsilon_{cp,j} &= \varepsilon_r(t_j, 1) + e_{cp,i} \cdot \kappa(t_j, 1)\end{aligned}\quad (3.35)$$

Essas expressões são fundamentais para o cálculo da compatibilidade global da protensão não aderente e para a atualização da força nos cabos ao longo do tempo. Os efeitos diferidos do concreto são incorporados ao modelo por meio de forças equivalentes associadas à fluência em flexão, à fluência axial e à retração. Para cada instante de tempo  $t_j$ , define-se um conjunto de vetores equivalentes de fluência,  $[f_{f,cr}^{(e)}(t_j)]$  e  $[f_{a,cr}^{(e)}(t_j)]$ , além do vetor devido à retração,  $[f_{sh}^{(e)}(t_j)]$ . Com isso, o equilíbrio incremental no instante  $t_j$  pode ser descrito através da Equação 3.36.

$$[K_b^{(e)}(t_j)] \cdot [D^{(e)}(t_j)] = -[f_{cr}^{(e)}(t_j)] + [f_{sh}^{(e)}(t_j)] + [q(t_j)^{(e)}] - \sum_{i=0}^{j-1} [f^{(e)}(t_i)] \quad (3.36)$$

em que  $[D^{(e)}(t_j)]$  é o vetor de deslocamentos nodais no tempo  $t_j$ ,  $[q^{(e)}(t_j)]$  representa as cargas externas e  $[f_{cr}^{(e)}(t_j)]$  e  $[f^{(e)}(t_i)]$  são vetores internos associados às tensões diferidas e ao histórico de carregamentos. A relaxação do aço de protensão é incorporada por meio de um vetor adicional como apresentado pela Equação 3.37.

$$\begin{aligned}[\Delta P_{pr,i}^{(e)}] &= [\Delta H_{pr} \Delta V_{pr} \Delta M_{pr} \Delta H_{pr} \Delta V_{pr} \Delta M_{pr}]^T \\ &+ (\Delta \sigma_{pr,i}(t_j-t_0) - \Delta \sigma_{pr,j}(t_j-t_0)) \cdot A_p \cdot \sin(\alpha_i^{(e)}) \cdot \left[ 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{l_i^{(e)}}{12} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{l_i^{(e)}}{12} \right]^T \\ &+ \left( \frac{\Delta \sigma_{pr,i}(t_j-t_0) - \Delta \sigma_{pr,j}(t_j-t_0)}{2} \right) \cdot A_p \cdot \cos(\alpha_i^{(e)}) \cdot [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T \\ &+ \left( \frac{\Delta \sigma_{pr,i}(t_j-t_0) - \Delta \sigma_{pr,j}(t_j-t_0)}{2} \right) \cdot \cos(\alpha_i^{(e)}) \\ &- \left( \frac{\Delta \sigma_{pr,i}(t_j-t_0) - \Delta \sigma_{pr,j}(t_j-t_0)}{2} \right) \cdot \sin(\alpha_i^{(e)}) \cdot A_p \cdot [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0]^T\end{aligned}\quad (3.37)$$

garantindo que a perda por relaxação seja corretamente incorporada à força equivalente do cabo. Em cada passo de tempo  $t_j$  procede-se à montagem da rigidez global  $K(t_j)$  a partir das contribuições de todos os elementos, bem como dos vetores equivalentes de protensão, fluência, retração e relaxação. Dessa forma, a solução pode ser obtida através da Equação 3.38.

$$K(t_j) \cdot D(t_j) = F(t_j) \quad (3.38)$$

atualizam-se as deformações e forças internas nos elementos e calcula-se a nova força nos cabos. O processo é repetido de forma incremental até que se obtenha a convergência para cada estágio de carregamento e idade do concreto. Essa formulação numérica, que combina rigidez do concreto, contribuição da armadura passiva, forças equivalentes dos cabos e efeitos diferidos, constitui a base metodológica para o cálculo das vigas protendidas hiperestáticas analisadas neste trabalho e será utilizada tanto na avaliação das perdas de protensão ao longo do tempo quanto na geração dos resultados de referência empregados nas etapas de otimização e de uso da rede neural.

### 3.5. ALGORITMO DESENVOLVIDO

O código desenvolvido neste trabalho foi estruturado de forma modular, integrando de maneira consistente o algoritmo de otimização JAYA e sua versão aprimorada (EJAYA), o modelo estrutural baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF) e uma Rede Neural Artificial (RNA) utilizada como modelo aproximador. A lógica computacional adotada segue um fluxo iterativo no qual a otimização gera candidatos de projeto, que são avaliados estruturalmente por meio do MEF, considerando efeitos dependentes do tempo, verificações normativas e penalidades associadas às restrições. A partir das soluções avaliadas, são extraídas informações para atualização da população, adaptação dos coeficientes de penalidade e, posteriormente, para o treinamento e aplicação da RNA. O algoritmo apresentado na tabela 1 descreve, em forma de pseudocódigo, a sequência de operações, funções e interações entre os diferentes módulos implementados, permitindo a reprodução do procedimento computacional adotado neste estudo.



Tabela 1– Algoritmo computacional

---

1. Dados gerais

1.1 Ler: geometria, materiais, carregamentos, condições de contorno.

1.2 Definir: normas.

1.3 Definir variáveis de projeto  $x$  e limites:  $lb \leq x \leq ub$ .

1.4 Definir parâmetros do otimizador:  $n$  (população),  $n_{max}$  (iterações),  $tol$  (convergência).

## 2. População inicial

2.1 Gerar população inicial  $P = \{x_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dentro de  $[lb, ub]$ .

2.2 Para cada indivíduo  $x_i$ : executar análise completa (Passo 6), obter  $C_i$ , violações  $v_i$  e  $\Phi_i$ .

## 3. Inicialização do processo de busca

3.1 Definir melhor e pior:

$$x_{best} = \operatorname{argmin}(\Phi_i) ; x_{worst} = \operatorname{argmax}(\Phi_i)$$

3.2 Definir  $\Phi_{bestold} = \Phi(x_{best})$ .

4. PARA CADA GERAÇÃO  $k = 1, 2, \dots, n_{max}$ 

4a. Atualizar referências da população

Atualizar  $x_{best}$  e  $x_{worst}$  com base em  $\Phi$ .

4b. PARA CADA INDIVÍDUO  $i = 1, 2, \dots, n$

4b.1 Atualização JAYA (base)

Gerar  $r1, r2 \sim U(0,1)$

Atualizar candidato:

$$x_{i,new} = x_i + r1 \cdot (x_{best} - |x_i|) - r2 \cdot (x_{worst} - |x_i|)$$

Aplicar limites:  $x_{i,new} \leftarrow \operatorname{clamp}(x_{i,new}, lb, ub)$

4b.2 Atualização EJAYA (refino local/global)

Gerar  $\kappa \sim U(0,1)$

Se modo local:

$$x_{i,new} = x_{i,new} + \kappa \cdot (x_{best} - x_{i,new})$$

Se modo global:

Selecionar  $x_{rand}$  na população

$$x_{i,new} = x_{i,new} + \kappa \cdot (x_{rand} - x_{i,new})$$

Aplicar limites:  $x_{i,new} \leftarrow \operatorname{clamp}(x_{i,new}, lb, ub)$

4b.3 Análise estrutural completa (MEF + tempo)

Executar Passo 6 com  $x_{i,new}$  e obter:

---

---


$$C_{\text{new}}, V_{\text{new}}, \Phi_{\text{new}}$$

4c. Critério de parada por convergência

$$\Phi_{\text{best}} = \min(\Phi_i)$$

Se  $|\Phi_{\text{best}} - \Phi_{\text{bestold}}| < \text{tol}$  então parar

Atualizar  $\Phi_{\text{bestold}} \leftarrow \Phi_{\text{best}}$

5. Penalidade adaptativa (aplicada na avaliação de cada solução)

5.1 Formar medida escalar de violação:  $V(x)$

5.2 Atualizar peso adaptativo:

$$\omega(k) = \omega_0 \cdot (1 + \alpha \cdot k)$$

5.3 Penalidade:

$$P(x) = \omega(k) \cdot V(x)$$

5.4 Função penalizada:

$$\Phi(x) = C(x) + P(x)$$

6. Avaliação estrutural (MEF com dependência do tempo) — executada para cada candidato  $x$

6a. Atualizar modelo com  $x$

Atualizar seção, armaduras, protensão/traçado, propriedades mecânicas.

6b. Definir nós (discretização)

Definir nós em: apoios; pontos de carga; mudanças de inclinação do cabo; inversões de ondulação; ancoragens (quando houver).

Gerar elementos entre nós consecutivos.

6c. Montagem global (para cada estado/instante de análise)

Montar matriz global  $K$  e vetor global  $F$ :

6d. PARA CADA INSTANTE  $t \rightarrow t+\Delta t$  (análise dependente do tempo)

Definir deslocamentos, velocidades e acelerações no instante  $t$ :  $u^t, \dot{u}^t, \ddot{u}^t$

6d.1 Matriz de rigidez efetiva

6d.2 Vetor de cargas efetivo

6d.3 Obter incremento de deslocamentos

$$\text{Resolver: } \hat{K} \cdot \Delta u = \hat{F} - R_{\text{int}}$$

$$\text{Atualizar: } u^{\{t+\Delta t\}} = u^t + \Delta u$$

6d.5 Processo iterativo (quando necessário)

Enquanto  $\|\text{Res}\| > \text{tol\_NR}$ :

$$\text{Atualizar esforços internos e resíduo: } \text{Res} = F_{\text{ext}} - F_{\text{int}}$$

$$\text{Corrigir: } \hat{K} \cdot \delta u = \text{Res}$$

$$\text{Atualizar: } u \leftarrow u + \delta u$$


---

---

6e. Pós-processamento (em cada instante relevante)

Calcular esforços internos: N, V, M e T

Calcular tensões no concreto e no aço

Calcular flechas (instantânea e/ou longo prazo, conforme o caso)

6f. Verificações normativas (gerar violações  $v$ )

ELU: resistência (flexão/cisalhamento/torção)

ELS: tensões e deformações (flechas/limites)

Limites geométrico-construtivos: cobrimento, espaçamentos, dimensões mínimas

Montar  $v(x)$ :  $v_j > 0$  violação;  $v_j = 0$  atendida

6g. Função objetivo

Calcular custo/medida-alvo  $C(x)$

Aplicar penalidade adaptativa  $P(x)$

Definir  $\Phi(x) = C(x) + P(x)$

7. Rede Neural Artificial (RNA)

Para um novo conjunto  $x$ , a RNA estima rapidamente  $C(x)$  e demais saídas.

---

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A presente seção reúne os resultados obtidos nas diferentes etapas da pesquisa, apresentando e discutindo o comportamento das vigas protendidas analisadas, o desempenho do algoritmo de otimização e a capacidade preditiva da rede neural artificial desenvolvida.

### 4.1. ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO

Inicialmente foram realizados testes do uso do algoritmo de otimização para as funções de benchmark, com e sem restrição a fim de validar o Jaya e o EJAYA. Os resultados obtidos estão apresentados no Quadro 1.

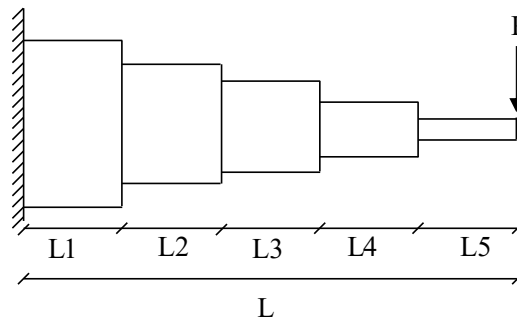
Quadro 1 – Resultados funções de benchmark

Função	Dimensão (D)	Intervalo de Busca	Presente pesquisa		Ótimo Real
			JAYA	EJAYA	
<i>sphere</i>	30	[-100;100]	0	0	0
<i>Easom</i>	2	[-100;100]	-1	-1	-1
<i>Beale</i>	5	[-4,5;4,5]	0	0	0
<i>Fletcher_powell 10</i>	10	$[-\pi; \pi]$	0	0	0
G01	13	$x_1 \dots x_9 \in [0, 1]$ $x_{10}, x_{11}, x_{12} \in [0, 100]$ $x_{13} \in [0, 1]$	-15	-15	-15
G02	20	(0, 10]	-0,80361	-0,80361	-0,80362
G03	10	(0, 10]	-1,0005	-1,0005	-1,0005

Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, foi testado o exemplo proposto no livro do Vanderplaats(1984), *numerical optimization techniques for engineering design*, que consiste em uma viga engastada e livre com 5 trechos e com redução da geometria do elemento em cada um dos trechos, conforme apresentada na Figura 9.

Figura 9 – Viga engastada – livre com geometria variável.



Fonte: Proprio autor.

O livro define que a viga possui seção transversal retangular de comprimento 5 metros, dividida igualmente em 5 partes e a carga  $P$  é 50000 N. Além disso, o deslocamento vertical máximo deve ser inferior a 2,5 cm, a tensão máxima deve ser inferior a 14000 N/cm<sup>2</sup> e a altura de cada seção deve ser inferior ou igual a vinte vezes a base. Por fim é definido que a função objetivo é o volume da viga. A população utilizada foi de 30 indivíduos para as análises. Os resultados obtidos são apresentados pelo Quadro 2.

Quadro 2 – Resultados Vanderplaats.

Variável	Inicial (cm)	Presente pesquisa		Vanderplaats (cm) Método da função de penalidade interior estendida linear	Vanderplaats (cm) Genético
		JAYA (cm)	EJAYA (cm)		
b1	5,00	3,085	3,083	3,1	3,12
b2	5,00	2,936	2,937	2,87	2,91
b3	5,00	2,649	2,65	2,6	2,62
b4	5,00	2,217	2,215	2,56	2,25
b5	5,00	1,762	1,762	1,77	1,76
h1	40,00	61,142	61,143	61,93	62,48
h2	40,00	58,526	58,527	57,41	58,12
h3	40,00	52,19	52,187	51,97	50
h4	40,00	44,086	44,087	45,12	45
h5	40,00	34,993	34,995	35,04	35,17
Volume	100,00	65,815	65,8	65,718	65,775
Número de avaliações de funções	-	500000	500000	930	1000000

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se que a resposta obtida pelo Jaya e pelo EJAYA tiveram uma boa aproximação em comparação com os resultados de Vanderplaats. Posteriormente a esse exemplo, Vanderplaats utilizou a mesma estrutura impondo as condições:

- b1 e h1 → valores inteiros;
- b2 e b3 → valores entre 2,4; 2,6; 2,8 e 3,1;
- h2 e h3 → valores entre 45,00; 50,00; 55,00 e 60,00;
- b4, b5, h4 e h5 → valores contínuos.

Os resultados para esse exemplo estão apresentados no Quadro 3. Foi utilizada novamente 30 indivíduos para a resolução do problema.

Quadro 3 – Resultados Vanderplaats complementar.

Variável	Presente pesquisa		Vanderplaats (cm)
	JAYA (cm)	EJAYA (cm)	
b1	3,000	3,000	3,000
b2	3,100	3,100	3,100
b3	2,600	2,600	2,600
b4	2,276	2,200	2,200
b5	1,750	1,750	1,750
h1	60,000	61,000	61,000
h2	55,000	60,000	60,000
h3	50,000	50,000	50,000
h4	45,528	44,120	44,070
h5	34,995	35,001	34,980
Volume	64,537 cm <sup>3</sup>	65,727 cm <sup>3</sup>	65,707 cm <sup>3</sup>
Diferença percentual	1,781 %	0,030%	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se que o Jaya e o EJAYA não tiveram tanta diferença de resultados, mesmo se tratando de um algoritmo randômico.

#### 4.2. FUNÇÕES DE ATIVAÇÃO DAS REDES NEURAS

Antes da aplicação da Rede Neural Artificial ao problema de otimização estrutural, foram realizados testes preliminares com o objetivo de avaliar a influência das diferentes funções de ativação no desempenho do modelo. Para isso, a RNA foi treinada para aproximar funções

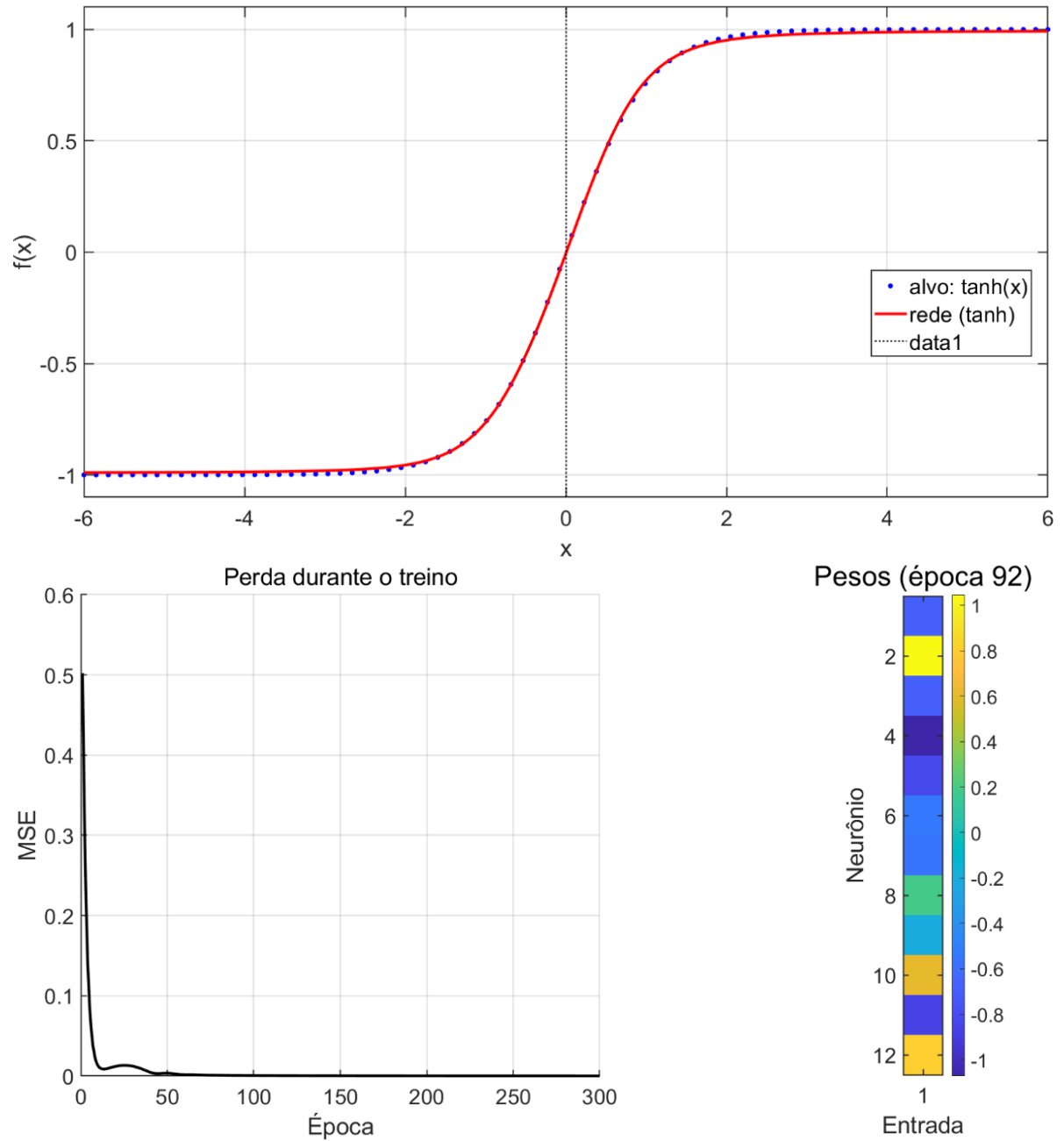
matemáticas conhecidas, permitindo analisar sua capacidade de aprendizado, convergência e generalização. Os resultados obtidos para a otimização beysiana com as funções de ativação tangente, sigmoidal, rampa e linear estão apresentados no Quadro 4, enquanto os respectivos gráficos de convergência entre a resposta da rede e a função alvo são apresentados nas Figuras 10, 11, 12 e 13.

Quadro 4 – Resultados funções de ativação.

Função	Camadas ocultas	Neurônios
Tangente	1	12
Sigmoidal	3	352, 376, 51
Rampa	1	10
Linear	1	8

Fonte: Elaborado pelo autor.

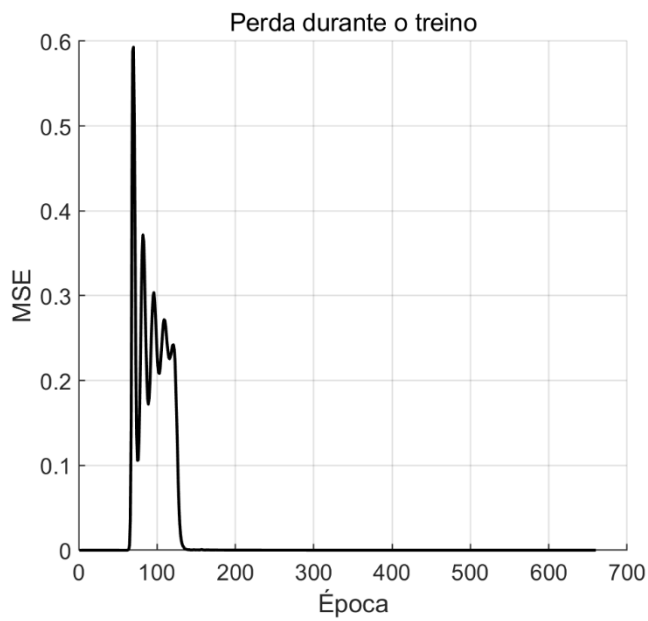
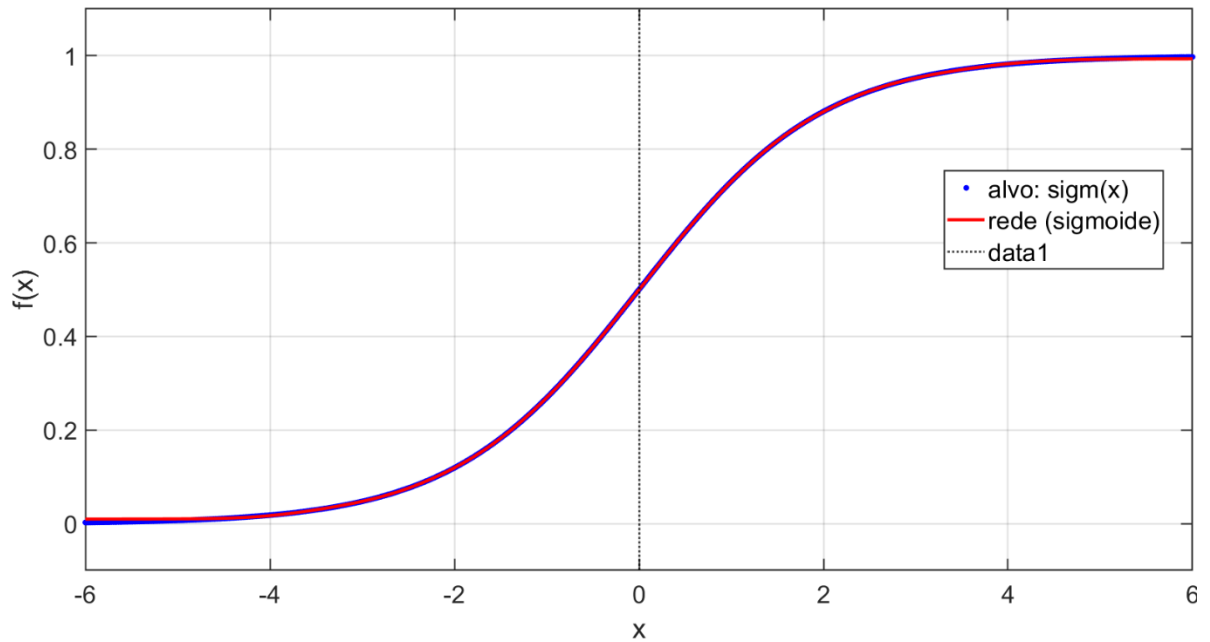
Figura 10 – Função tangente.



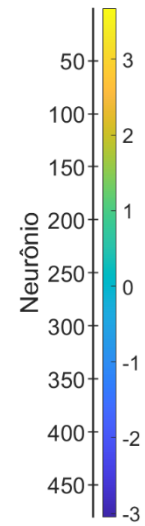
Fonte: Elaborado pelo autor.



Figura 11 – Função sigmoidal.

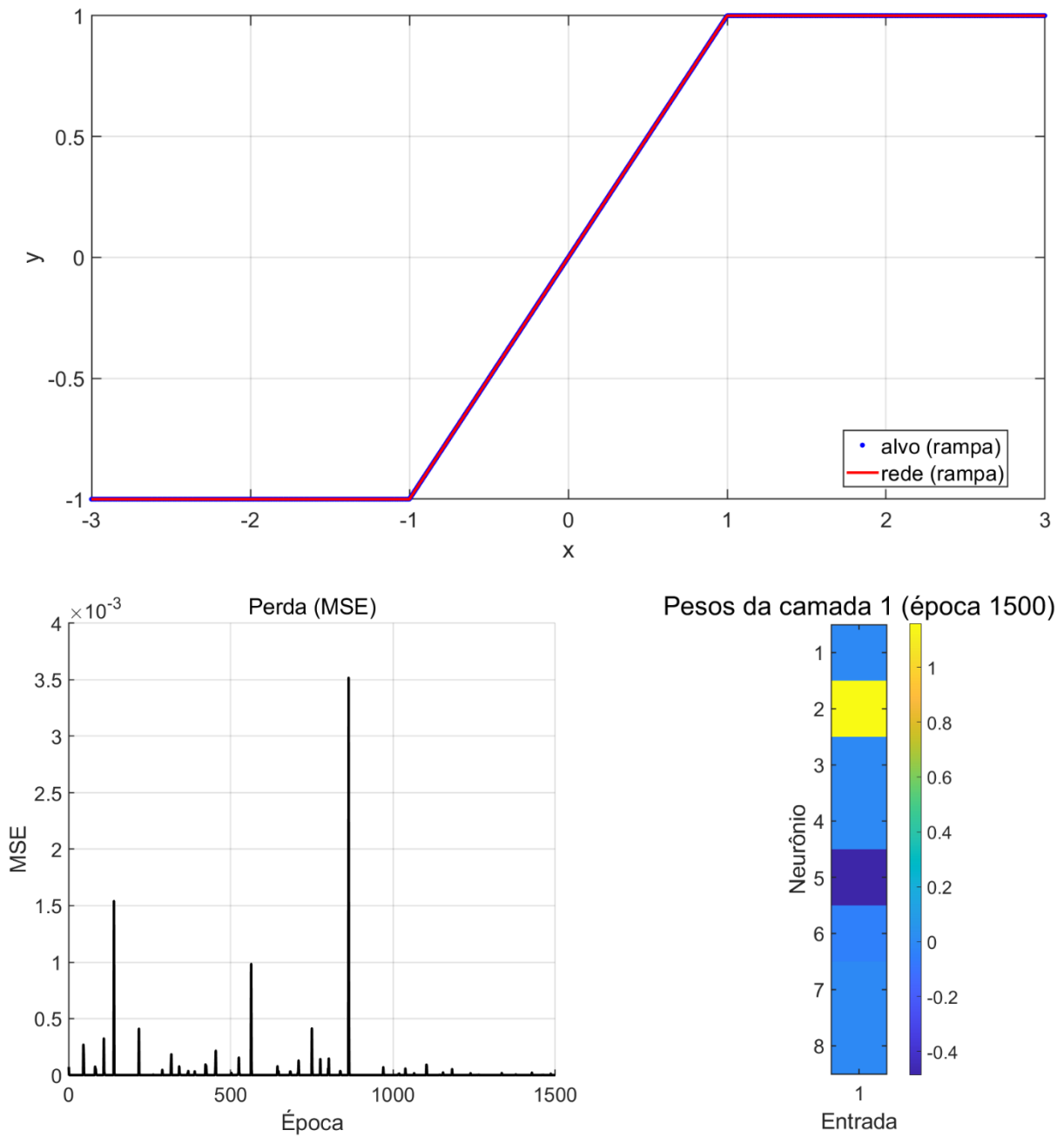


Pesos da camada 1 (época 660)



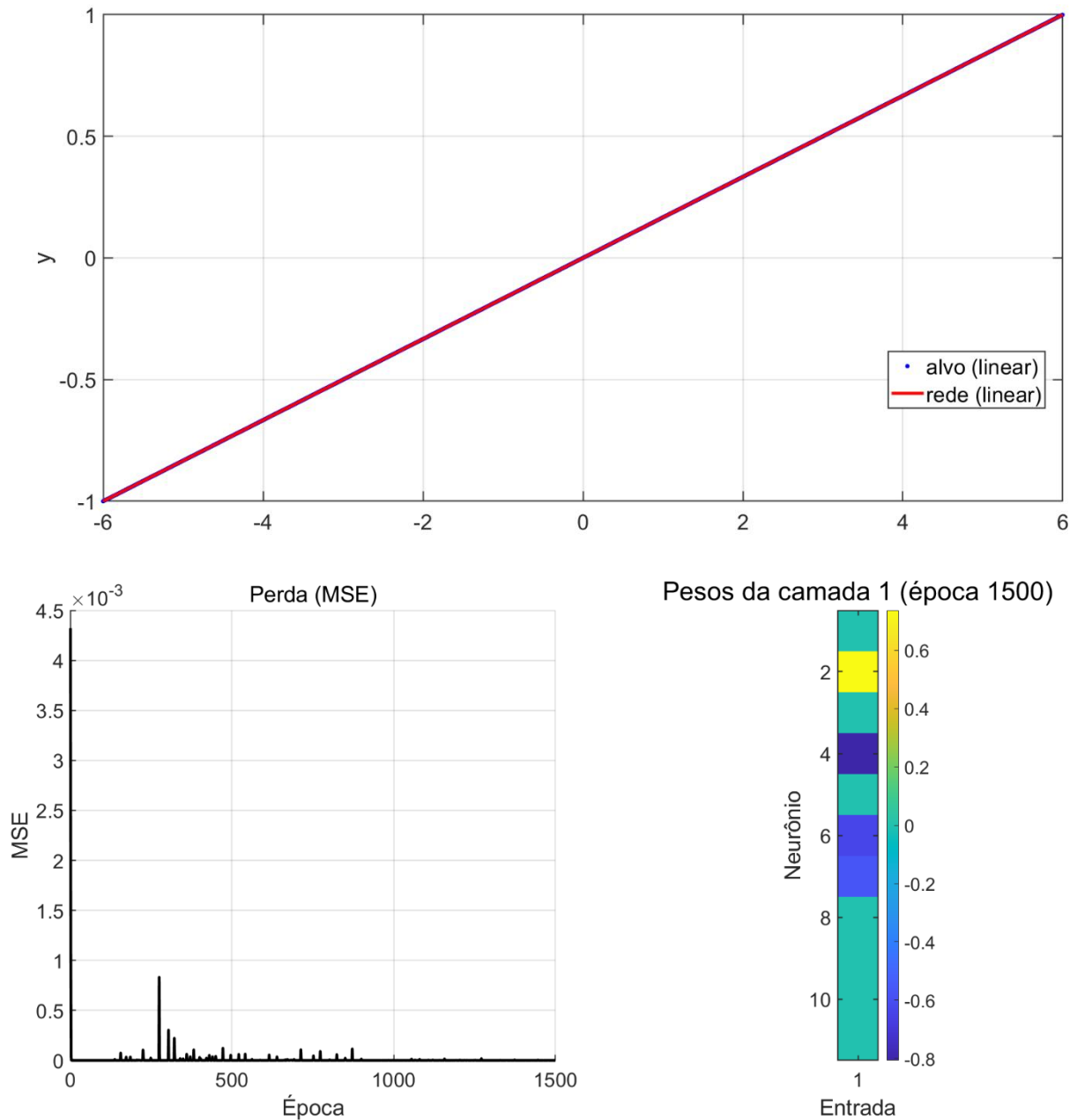
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 12 – Função rampa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 13 – Função linear.



A partir da análise dos gráficos apresentados, observa-se que a implementação das redes neurais produziu resultados satisfatórios, sendo capaz de reproduzir com boa precisão o comportamento das funções analisadas.

#### 4.3. DIMENSIONAMENTO

A atuação conjunta do algoritmo de otimização e da Rede Neural Artificial foi avaliada a partir de exemplos de dimensionamento, analisando-se o desempenho do modelo integrado na obtenção das soluções ótimas.

#### 4.3.1. Otimização de viga de concreto armado submetida à torção.

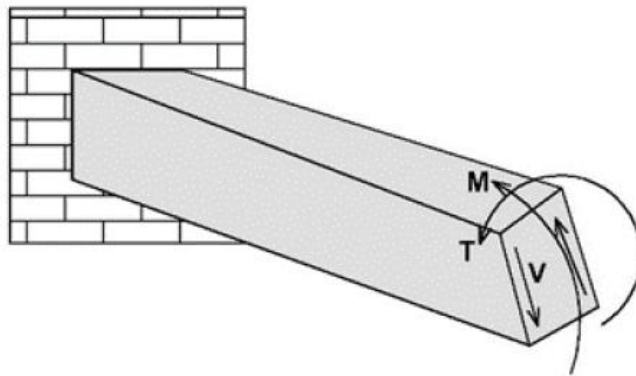
A primeira aplicação considerou o caso B10L apresentado por Duysak et al. (2024), no qual o algoritmo Jaya é empregado na otimização do dimensionamento de uma viga de concreto armado. A Figura 14 apresenta o elemento analisado, as condições do problema, e o intervalo de busca das variáveis de decisão são apresentados no Quadro 6. Nesse estudo, a função objetivo é definida como uma função de custo baseada no consumo de materiais, considerando o volume de concreto e a quantidade de armadura, permitindo comparar alternativas de dimensionamento sem depender de preços de mercado. Ambas as soluções adotaram a ACI 318 para as verificações normativas. As variáveis otimizadas incluem as dimensões da seção transversal, representadas pela base ( $b_w$ ) e pela altura total ( $h$ ), além do parâmetro associado à armadura transversal, em especial o diâmetro do estribo. A comparação entre o resultado de referência, o valor obtido pelo processo de otimização e a estimativa fornecida pela rede neural está apresentada no Quadro 7, enquanto a Figura 15 apresenta a comparação do comportamento de convergência e dos valores finais obtidos.

O problema analisado corresponde a uma viga de concreto armado submetida simultaneamente à flexão, cisalhamento e torção, com condições de contorno e carregamentos conforme definidos por Duszyk et al. (2024). A avaliação das soluções foi realizada com base no Estado Limite Último à torção, considerando também as verificações associadas aos esforços combinados, de acordo com os critérios da ACI 318. As ações aplicadas incluem esforço cortante, momento fletor e torque, cujos valores são apresentados no Quadro 5. O problema de otimização foi formulado com o objetivo de minimizar o custo associado ao consumo de materiais, representado principalmente pelo volume de concreto e pela quantidade de armadura. O algoritmo JAYA foi executado com uma população composta por 30 indivíduos, adotando-se um número máximo de 300 iterações.

As soluções obtidas no processo de otimização foram avaliadas com base nos Estados Limites Últimos, considerando simultaneamente as verificações de resistência à flexão, ao cisalhamento e à torção. A restrição à flexão foi imposta exigindo que o momento fletor solicitante de cálculo fosse inferior ou igual ao momento resistente último da seção, determinado em função da geometria da viga, da resistência característica do concreto e da área de armadura longitudinal. A verificação ao cisalhamento foi realizada impondo que a força cortante solicitante fosse inferior à resistência total fornecida pelo concreto e pela

armadura transversal, respeitando os limites normativos de espaçamento e diâmetro dos estribos. A restrição à torção foi avaliada exigindo que o momento torsor solicitante fosse inferior à resistência última à torção da seção, considerando a contribuição conjunta do concreto e da armadura transversal e longitudinal, conforme os critérios normativos adotados. Todas as verificações foram aplicadas de forma simultânea para cada solução candidata, sendo descartadas aquelas que violassem qualquer uma das condições de resistência ou dos limites geométricos e construtivos prescritos.

Figura 14 – Elemento B10L carregado.



Fonte: Duysak *et al* (2024).

Quadro 5 – Parâmetros físicos do problema *Duysak et al.*

Variável	Valor
fck (MPa)	30
fyk (MPa)	420
E (MPa)	27800
$\gamma_c$ (t/m <sup>3</sup> )	2,5
$\gamma_s$ (t/m <sup>3</sup> )	7,86
d' (mm)	40
V (kN)	100
M (kN)	100
T (kN)	10

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 6 – Variáveis de decisão *Duysak et al.*

Variável	Valor
h (mm)	250-400
b (mm)	350-600
$\Phi_t$ (mm)	8 -14

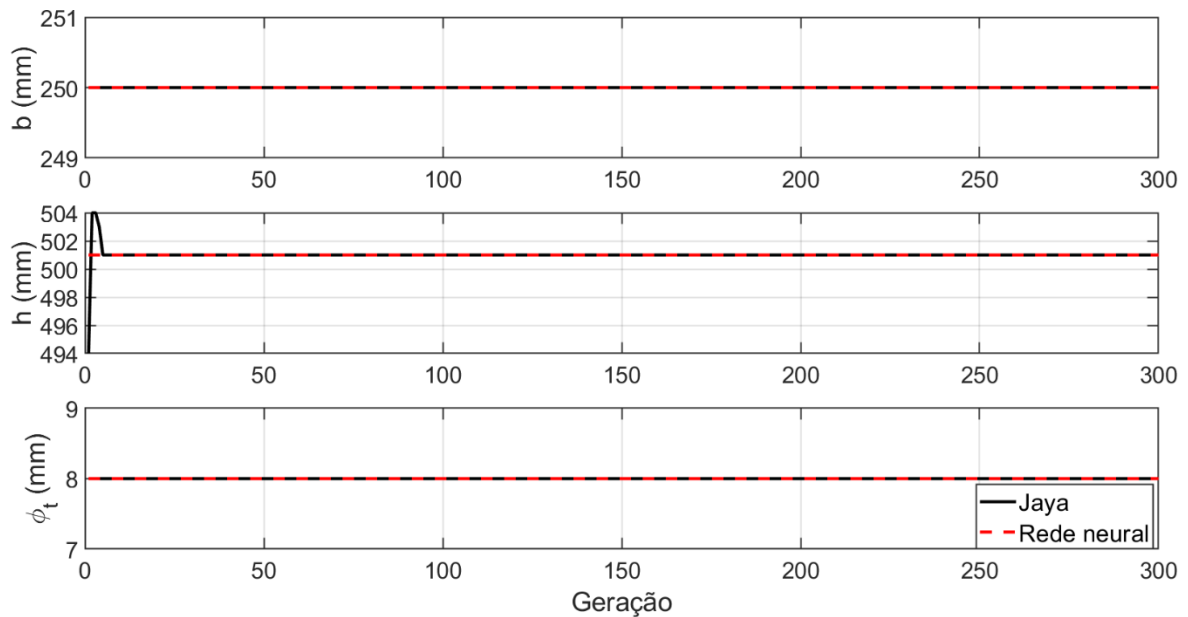
Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 7 – Comparação resultados *Duysak et al.*

Variável	Presente pesquisa		<i>Duysak et al.</i>
	EJAYA	Rede neural	
b (mm)	250	250	250
h (mm)	501	501	500
$\Phi_t$ (mm)	8	8	8

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 15 – Comparação otimização e redes neurais B10L.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se que os valores obtidos para as variáveis geométricas e de armadura apresentam excelente concordância com os resultados reportados por Duszyk et al. (2024), indicando que a formulação adotada é capaz de reproduzir soluções ótimas consistentes. A proximidade entre os resultados obtidos pelo processo de otimização e aqueles estimados pela rede neural reforça a capacidade da RNA em aproximar o comportamento do otimizador, mantendo a viabilidade estrutural e as restrições normativas do problema. A arquitetura da rede obtida pela otimização beysiana foi de 3 camadas ocultas com respectivamente 236, 179 e 88 neurônios, tendo como parâmetros de entrada comprimento do elemento, as propriedades físicas dos material, o carregamento e o tipo de seção, tendo como saída, base, altura, armadura de flexão, armadura de cisalhamento e o custo total. O tempo de processamento computacional médio associado ao processo completo de otimização foi da ordem de 5,7 segundos, enquanto a utilização da rede neural reduziu esse tempo para aproximadamente 0,000637 segundos, evidenciando o ganho computacional da abordagem proposta.

### **4.3.2. Otimização de viga de concreto armado com variáveis geométricas e resistência do concreto.**

Na sequência, o modelo integrado foi aplicado ao problema de otimização apresentado por Pierott *et al.* (2021), que propõe um modelo matemático para o dimensionamento de vigas de concreto armado, resolvido por algoritmo genético. Nesse estudo, o problema de otimização tem como função objetivo a minimização do custo de fabricação da viga, composto pelas parcelas de concreto, aço e fôrmas. As variáveis de projeto incluem a geometria da seção ( $b_w$  e  $h$ ), a resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ ) e a configuração das armaduras (arranjos de barras longitudinais e armadura transversal), enquanto as restrições de projeto contemplam verificações de estados limites últimos e de serviço, conforme a NBR 6118. A Figura 16 apresenta o esquema do elemento analisado, o Quadro 8 reúne os parâmetros considerados e os limites das variáveis de decisão, e o Quadro 9 apresenta a comparação entre o valor de referência do artigo, o resultado do algoritmo e a estimativa fornecida pela rede neural, sendo a convergência ilustrada na Figura 17.

A avaliação das soluções foi realizada considerando os Estados Limites Últimos e de Serviço, de acordo com os critérios estabelecidos pela NBR 6118:2023, incluindo verificações de resistência à flexão e limites de deformação em serviço. O problema de otimização foi formulado com o objetivo de minimizar o custo total da viga, composto pelas parcelas associadas ao consumo de concreto, aço e formas, conforme os valores apresentados no Quadro 8. As restrições do problema abrangem as verificações normativas impostas pela NBR 6118:2023, além de limites geométricos e construtivos. O algoritmo JAYA foi executado com uma população de 30 indivíduos e um número máximo de 300 iterações.

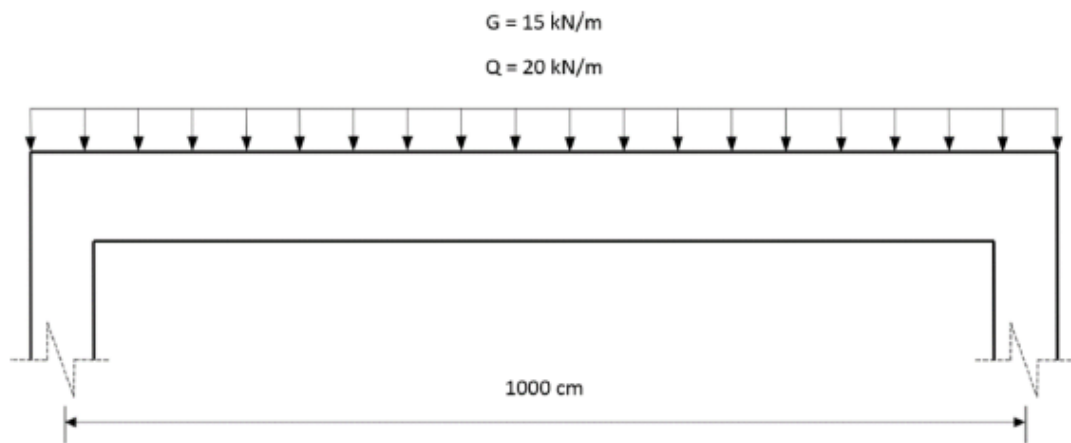
As soluções obtidas no processo de otimização foram avaliadas exclusivamente com base nos Estados Limites Últimos. As restrições estruturais consideradas incluem a resistência à flexão e ao cisalhamento, verificadas de forma simultânea para cada solução candidata gerada pelo algoritmo. A verificação à flexão foi realizada impondo que o momento fletor solicitante de cálculo fosse inferior ou igual ao momento resistente último da seção, determinado em função da geometria da viga, da resistência característica do concreto e da área de armadura longitudinal. O Estado Limite Último ao cisalhamento foi avaliado exigindo que a força cortante solicitante fosse inferior à resistência fornecida pelo concreto e pela



armadura transversal, respeitando também os limites normativos de espaçamento e diâmetro dos estribos.

Em Estado Limite de Serviço, adotaram-se as verificações previstas no modelo de referência, incluindo limites de deformação (flecha) e controle de fissuração, quando aplicáveis ao caso analisado. Adicionalmente, foram impostas restrições geométricas e construtivas às dimensões da seção e às armaduras, garantindo viabilidade de execução. Assim, apenas soluções que atenderam simultaneamente às verificações adotadas foram consideradas viáveis durante o processo de busca.

Figura 16 – Viga carregada Pierott *et al.*



Fonte: Pierott *et al* (2021).

Quadro 8 – Parâmetros físicos e custo do fck Pierott *et al.*

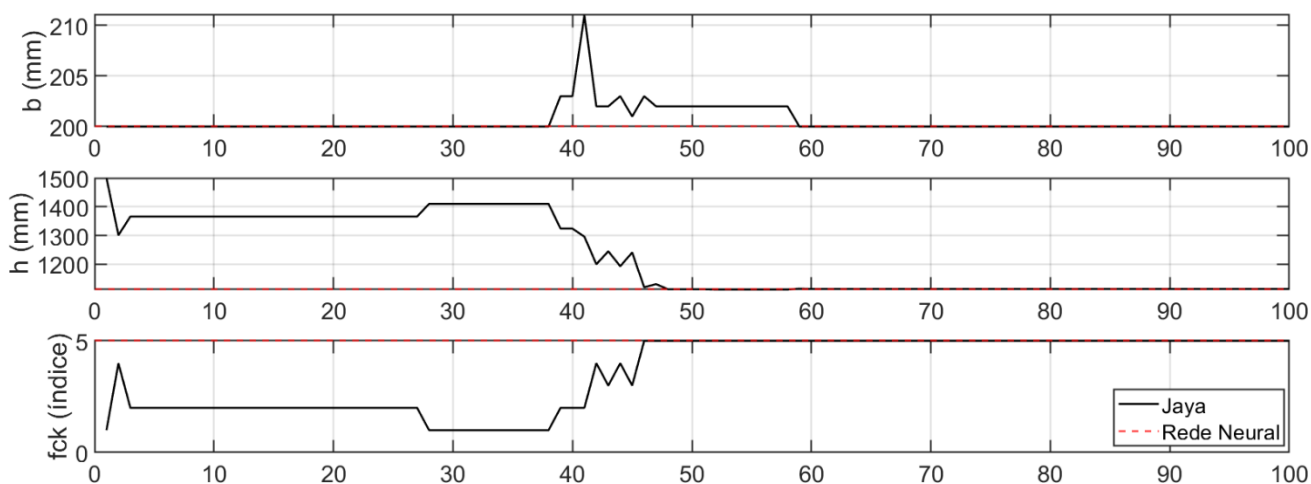
Variável	Custo
Concreto fck 15 MPa	50,38(\$/m <sup>3</sup> )
Concreto fck 20 MPa	55,15(\$/m <sup>3</sup> )
Concreto fck 25 MPa	59,28(\$/m <sup>3</sup> )
Concreto fck 30 MPa	64,50(\$/m <sup>3</sup> )
Concreto fck 40 MPa	69,60(\$/m <sup>3</sup> )
Aço 300 MPa	0,72(\$/kg)
Fôrma	2,155(\$/m <sup>2</sup> )
Cobrimento de 30 mm	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 9 – Comparação resultados Pierott *et al.*

Variável	Presente pesquisa		Pierott <i>et al.</i>	Chakrabarty (1992)	Coello <i>et al.</i>
	EJAYA	Rede neural			
h (cm)	111,4	111,5	70	97,47	87,7
b (cm)	20	20	35	30	20,68
Área de aço (cm <sup>2</sup> )	25,4	25,41	28,49	37,69	31,16
fck (MPa)	40	40	35	30	30
Custo total (\$)	35,09	35,087	32,22	37,25	38,85
Diferença percentual (%)	8,91	8,90	0,00	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 17 – Comparação otimização e redes neurais Pierott *et al.*

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se que nesse artigo, o autor não informou o valor do metro cúbico do concreto com 35MPa, dessa forma não sendo possível usar essa especificação que poderia influenciar no resultado obtido. Apesar dessa limitação, observa-se que os resultados obtidos na presente pesquisa apresentam tendência compatível com aqueles reportados na literatura, indicando que o modelo de otimização é robusto frente a pequenas variações nos parâmetros de custo. A arquitetura da rede obtida pela otimização beysiana foi de 3 camadas ocultas com respectivamente 269, 160 e 94 neurônios, tendo como parâmetros de entrada comprimento do elemento, as propriedades físicas dos material, o carregamento e o tipo de seção, tendo como saída, base, altura, armadura de flexão, o fck e o custo total. A proximidade entre os resultados obtidos pelo algoritmo e aqueles estimados pela rede neural reforça a capacidade

da RNA em reproduzir o comportamento do otimizador, mantendo a coerência estrutural e normativa das soluções. O tempo de processamento computacional médio associado ao processo completo de otimização foi da ordem de 7,8 segundos, enquanto a utilização da rede neural reduziu esse tempo para aproximadamente 0,000596 segundos, evidenciando o ganho computacional da abordagem proposta.

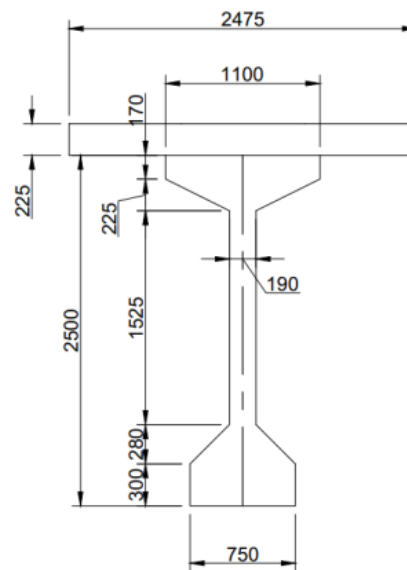
#### **4.3.3. Otimização de viga de concreto protendido em perfil I.**

Na sequência, o modelo foi aplicado ao problema de otimização do dimensionamento de uma viga isostática protendida em seção tipo I, conforme apresentado no estudo desenvolvido por Shabbir e Khan (2022). A Figura 18 apresenta a seção do elemento analisado. Nesse trabalho, o algoritmo Jaya é empregado na otimização de uma viga protendida de ponte, tendo como função objetivo a minimização do custo total da estrutura, definido em função do volume de concreto e da quantidade de aço de protensão. As variáveis de projeto consideradas incluem as dimensões geométricas da seção transversal e o número de cordoalhas por tendão, os parâmetros físicos e variáveis otimizadas estão apresentados no Quadro 10 e Quadro 11 respectivamente, enquanto as restrições de projeto abrangem critérios de tensões, resistência à flexão, cisalhamento, deformações e limitações geométricas, conforme as especificações da AASHTO LRFD. A comparação entre o resultado de referência, o valor obtido pelo processo de otimização e a estimativa fornecida pela rede neural está apresentada no Quadro 12, enquanto a Figura 19 apresenta o comportamento comparativo do processo e os valores finais. Além disso a AASHTO LRFD estabelece o conjunto de cargas permanentes e móveis que devem ser combinadas e consideradas para aviação do projeto

Essas ações consideradas na análise correspondem às cargas permanentes e variáveis atuantes na viga protendida, conforme o modelo estrutural adotado por Shabbir e Khan (2022), sendo os esforços solicitantes determinados a partir da combinação dessas ações com os efeitos da força de protensão e de sua excentricidade ao longo do vão. Todas as verificações normativas descritas foram impostas simultaneamente como restrições do problema de otimização, de modo que apenas soluções que atendessem integralmente aos critérios de resistência, serviço e construtibilidade fossem consideradas viáveis pelo algoritmo. O processo de otimização foi conduzido utilizando uma população de 30 indivíduos e um número máximo de 300 iterações, parâmetros adotados de forma a garantir a convergência das soluções sem custo computacional excessivo.

As soluções geradas no processo de otimização foram avaliadas conforme as diretrizes da AASHTO LRFD (2017). As verificações incluíram limites de tensões admissíveis no banzo superior e inferior da viga, avaliados em diferentes estágios de carregamento, com base na combinação entre a força de protensão, a excentricidade, as propriedades geométricas da seção e os momentos atuantes. Em Estado Limite Último, a restrição à flexão foi imposta exigindo que o momento solicitante fatorado fosse inferior ou igual à resistência nominal à flexão da seção, considerando o fator de resistência, e também que a capacidade última fosse suficiente para atender ao critério adicional de desenvolvimento de momento mínimo em relação ao momento crítico adotado no estudo. A resistência ao cisalhamento foi verificada impondo que a força cortante solicitante fatorada fosse inferior ou igual à resistência total, composta pelas parcelas do concreto e da armadura transversal, conforme o procedimento adotado pelos autores. Em serviço, a flecha de longo prazo foi limitada por um critério do tipo  $L/800$ . Além disso, foram impostas restrições geométricas e construtivas mínimas, incluindo cobrimento, espaçamentos livres entre tendões e armaduras, dimensões necessárias para acomodar placa de apoio e macaco de protensão, e uma limitação relacionada à razão vão/mesa superior para evitar instabilidade por flexão lateral na fase de transferência da protensão. A Figura 20 apresenta a disposição da armadura de protensão obtida pelo código computacional.

Figura 18 – Problema original Shabbir e Khan.



Fonte: Shabbir e Khan (2022) (medidas em mm).

Quadro 10 – Parâmetros físicos Shabbir e Khan.

Variável	Valor
Vão da viga (L) (m)	40
Resistência última do aço de protensão ( $f_{pu}$ ) (MPa)	1862
Diâmetro da cordoalha ( $\phi$ ) (mm)	12,7
Resistência do concreto ( $f_c$ ) (MPa)	41
Peso específico do concreto ( $\gamma_c$ ) (kN/m <sup>3</sup> )	24
Massa linear do aço de protensão (kg/m)	0,775
Custo do aço de protensão (CPS) (R\$/ton)	224657,89
Custo do concreto (CC) (R\$/m <sup>3</sup> )	15255,49

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 11 – Variáveis otimizadas Shabbir e Khan.

Variável	Valor
Largura da mesa superior ( $b_1$ ) (mm)	500 – 2000
Largura da mesa inferior ( $b_2$ ) (mm)	300 – 1000
Espessura da alma ( $b_3$ ) (mm)	100 – 500
Altura total da viga ( $d_1$ ) (mm)	1500 – 3500
Espessura da mesa superior ( $d_2$ ) (mm)	100 - 400
Espessura da transição da mesa superior ( $d_3$ ) (mm)	100 – 400
Espessura da transição da mesa inferior ( $d_4$ ) (mm)	50 – 400
Espessura da mesa inferior ( $d_5$ ) (mm)	50 – 700
Cordões (fios) por tendão (s)	5 - 15

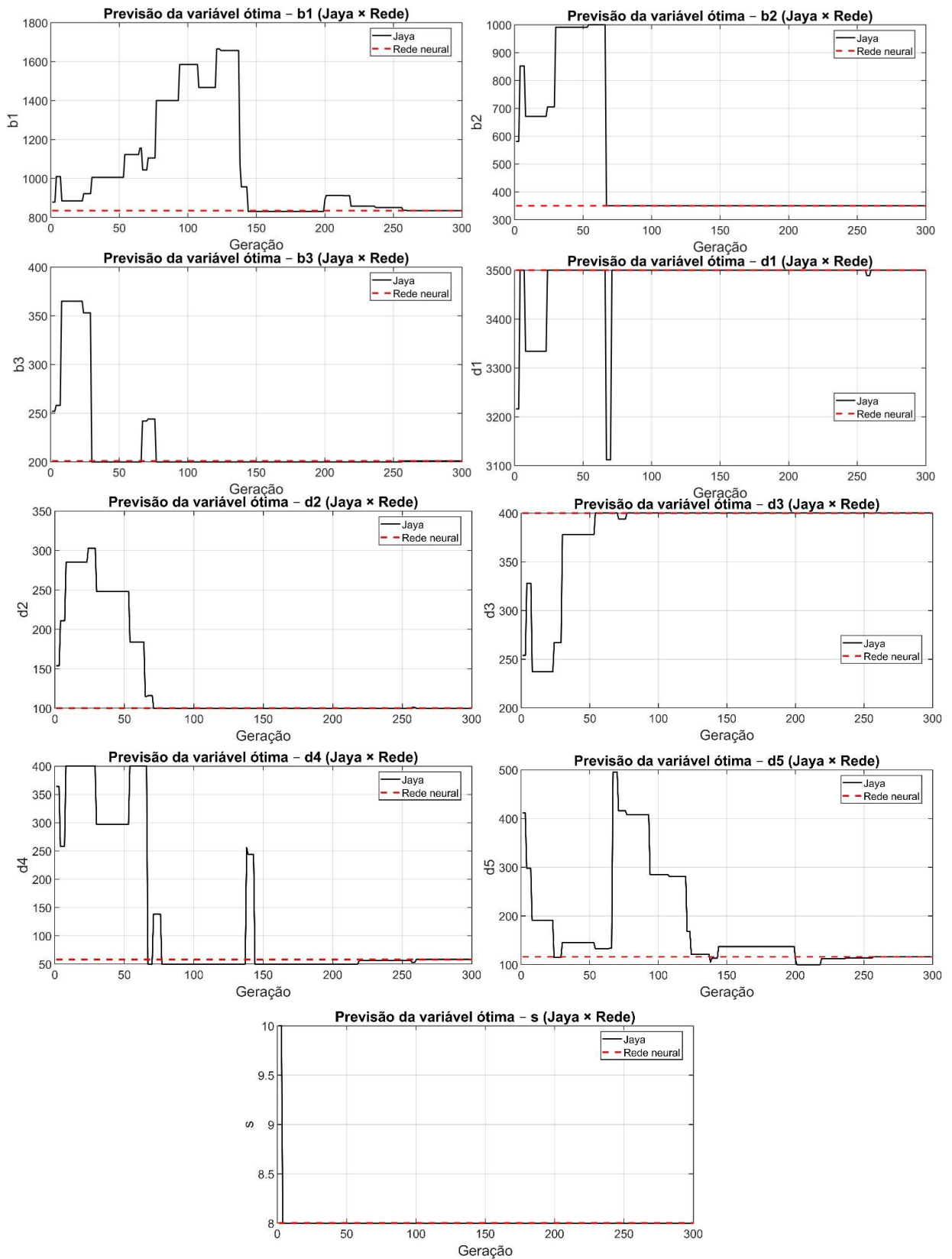
Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 12 – Comparação resultados Shabbir e Khan.

Variável	Presente pesquisa		Shabbir e Khan (2022).	Resultado original
	EJAYA	Rede neural		
Largura da mesa superior (b1) (mm)	1466	1466	887	1100
Largura da mesa inferior (b2) (mm)	360	360	615	750
Espessura da alma (b3) (mm)	201	201	163	190
Altura total da viga (d1) (mm)	3497	3497	3034	2500
Espessura da mesa superior (d2) (mm)	100	100	100	170
Espessura da transição da mesa superior (d3) (mm)	102	102	100	225
Espessura da mesa inferior (d5) (mm)	105	105	101	280
Espessura da transição da mesa inferior (d4) (mm)	107	107	200	300
Cordões (fios) por tendão (s)	8	8	8	12
Custo (PKR)	800485,7	800485,7	777862	1108311
Diferença percentual (%)	2,91	2,91	0,00	-

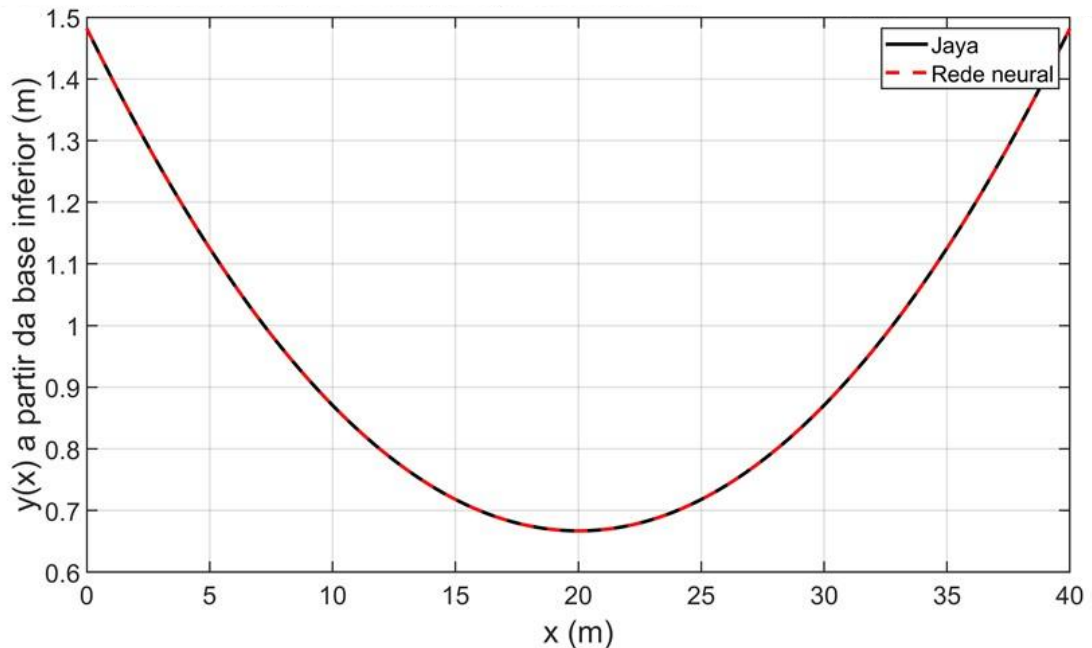
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 19 – Comparação otimização e redes neurais Shabbir e Khan.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 20 – Excentricidade da armadura de protensão



Fonte: Elaborado pelo autor.

A diferença entre os resultados de Shabbir e Khan (2022) e os obtidos neste trabalho acontece porque, no artigo de referência, parte da configuração geométrica e do arranjo de protensão foi tratada como fixa (posição e perfil do tendão), o que limita o espaço de busca da otimização. Já no presente trabalho, essas dimensões foram calculadas e verificadas a partir da AASHTO LRFD, isto é, cobrimento, espaçamentos mínimos, limites geométricos e requisitos de verificação em serviço e resistência, que passam a funcionar como restrições do problema. Na prática, isso faz com que o algoritmo tenha que ajustar larguras, espessuras e altura total para atender simultaneamente às verificações e aos limites prescritos, e por isso as combinações finais de  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_4$  e  $d_5$  acabam diferindo, refletindo também em custos distintos, mesmo quando a quantidade de cordões por tendão permanece a mesma. A arquitetura da rede obtida pela otimização bayesiana foi de 3 camadas ocultas com respectivamente 317, 205 e 102 neurônios, tendo como parâmetros de entrada foram comprimento do elemento, as propriedades físicas dos materiais, o carregamento e o tipo de seção, tendo como saída, a geometria, número de cordões de protensão, armadura ativa, traçado e excentricidades do cabo de proteção e o custo total. O tempo de processamento computacional médio associado ao processo completo de otimização foi da ordem de 6,9



segundos, enquanto a utilização da rede neural reduziu esse tempo para aproximadamente 0,000354 segundos, evidenciando o ganho computacional da abordagem proposta.

#### **4.3.4. Otimização do traçado da armadura de protensão.**

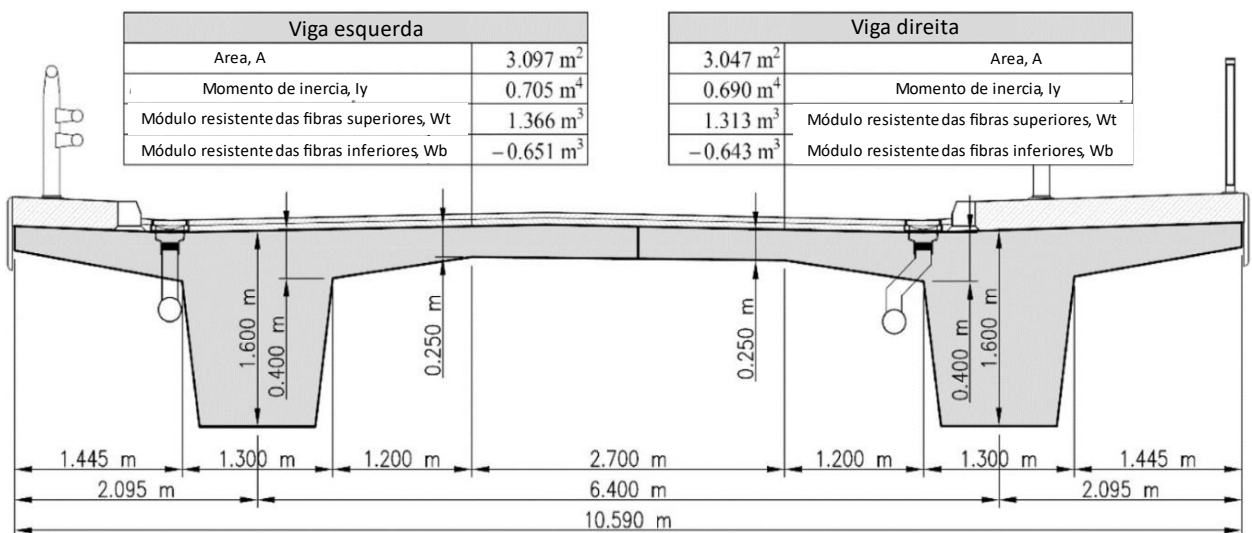
Na sequência, o modelo foi aplicado ao problema de otimização do traçado dos cabos de protensão em uma estrutura hiperestática proposta por Jasinski et al. (2024). Nesse estudo, a otimização do perfil dos cabos tem como objetivo melhorar o desempenho estrutural ao longo do vão, atendendo simultaneamente às condições de resistência e de serviço da viga com seção transversal apresentada pela Figura 21, além disso, é importante ressaltar que a base da viga é de 1 metro. As variáveis de projeto estão associadas à geometria do traçado ao longo do comprimento da viga, controlando a posição do cabo e sua excentricidade nos trechos definidos, sendo possível observar essas excentricidades na Figura 23 como  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$ . Além disso, essas variáveis estão apresentadas no Quadro 13 e Quadro 14, enquanto as restrições abrangem limites de tensões no concreto em serviço, condições de equilíbrio e compatibilidade. A Figura 22 apresenta a comparação entre o diagrama de momentos de referência do estudo e o resultado obtido neste trabalho, enquanto a Figura 23 apresenta a comparação do traçado ótimo e a resposta estimada pela rede neural. A função objetivo adotada consiste na minimização do peso total do aço de protensão, enquanto as restrições de projeto garantem que as tensões no concreto permaneçam dentro dos limites admissíveis nas seções críticas, especialmente no apoio intermediário e no vão, além de respeitar o envelope geométrico do traçado.

O modelo estrutural considerado corresponde a uma viga hiperestática contínua com dois vãos, submetida a carregamentos permanentes e variáveis distribuídos ao longo do comprimento, conforme definido por Jasinski et al. (2024). A análise estrutural foi realizada por meio de um modelo de elementos de viga, admitindo comportamento linear elástico global, com a introdução dos efeitos da protensão por meio de forças equivalentes associadas ao traçado dos cabos. As combinações de carregamento adotadas são os estabelecidos para pontes pela EUROCODE e visam reproduzir as condições críticas de serviço e de resistência ao longo do vão, sendo avaliadas especialmente as seções no apoio intermediário e no meio do vão, onde ocorrem os valores máximos de momentos fletores e tensões. As variáveis de projeto do problema estão exclusivamente associadas ao traçado da armadura de protensão, sendo representadas pelas excentricidades do cabo em trechos previamente definidos ao longo

da viga. Conforme apresentado no Quadro 14, essas variáveis controlam a posição vertical do cabo nos trechos laterais e na região central do vão, respeitando limites geométricos mínimos e máximos impostos pelo envelope da seção transversal e pelas condições construtivas. A geometria da seção transversal, o número de vãos, o comprimento total da viga e as propriedades mecânicas dos materiais são mantidos constantes durante o processo de otimização.

A função objetivo do problema foi definida como a minimização do peso total do aço de protensão, diretamente relacionado ao comprimento efetivo do traçado e à força necessária para atender às condições de serviço impostas. Dessa forma, o processo de otimização busca identificar o traçado do cabo que reduza a quantidade total de aço empregado, mantendo simultaneamente as tensões no concreto dentro dos limites admissíveis nas seções críticas da estrutura e respeitando o envelope geométrico definido para o posicionamento da armadura de protensão. O processo de otimização foi conduzido utilizando uma população inicial composta por  $n$  de 200 indivíduos, conforme indicado no estudo de referência, sendo adotado como critério de parada o número máximo de gerações ou a estabilização da função objetivo. Cada indivíduo representa um conjunto admissível de excentricidades ao longo do vão, sendo avaliado por meio da análise estrutural correspondente.

Figura 21 – Seção transversal Jasinski *et al.*



Fonte: Jasinski et al. (2024).

Quadro 13 – Parâmetros físicos Jasinski et al.

Variável	símbolo	Valor
Número de vãos	–	2
Comprimento de cada vão	L	32,0 m
Comprimento total	Lt	64,0 m

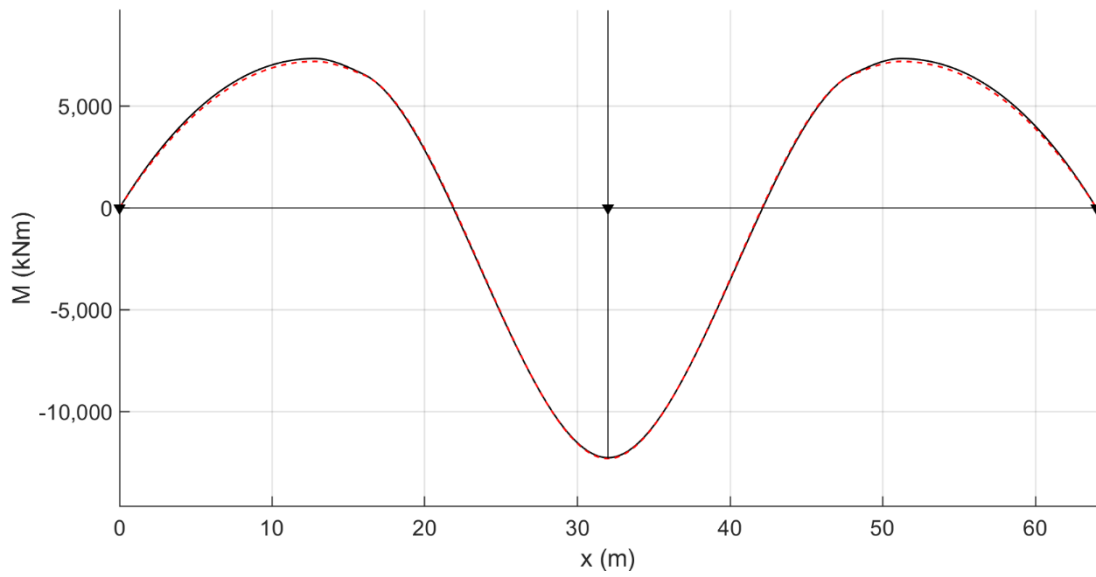
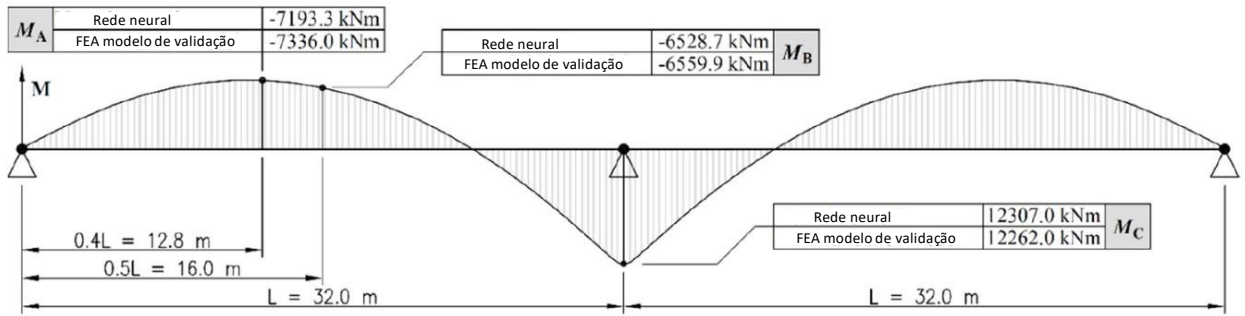
Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 14 – Variáveis otimizadas Jasinski et al.

Variável	símbolo	Valor
Excentricidade do cabo no trecho lateral esquerdo	e1	$0 \leq e1 \leq 0,445$ m
Excentricidade do cabo na região central	e2	$0 \leq e2 \leq 1,223$ m
Excentricidade do cabo no trecho lateral direito	e3	$0 \leq e3 \leq 0,445$ m

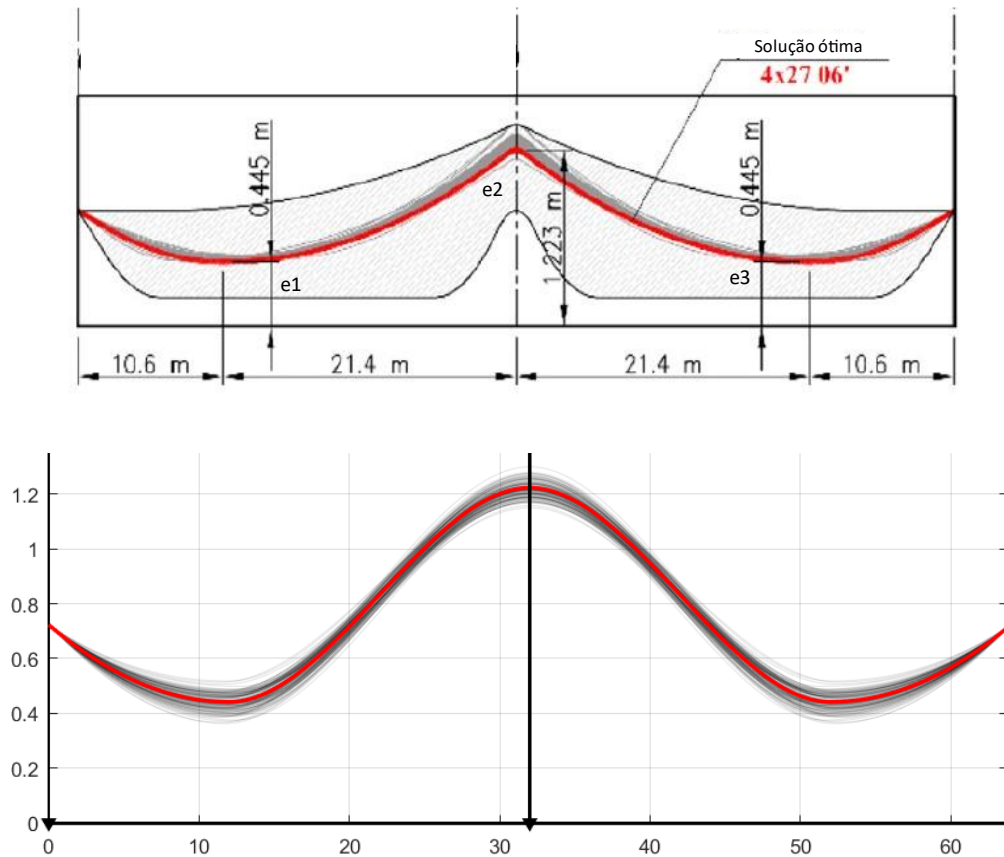
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 22 – Comparação momento Jasinski *et al.*



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 23 – Comparação otimização e redes neurais Jasinski *et al.*



Fonte: Elaborado pelo autor.

O custo computacional médio associado à avaliação completa do modelo estrutural durante o processo de otimização foi da ordem de 10,9 segundos por execução, considerando a análise estrutural completa para cada indivíduo da população ao longo das gerações. Após o treinamento, a utilização da rede neural artificial permitiu reduzir esse tempo para aproximadamente 0,000354 segundos, fornecendo estimativas diretas do traçado ótimo do cabo com elevada concordância em relação aos resultados obtidos pelo processo de otimização. Essa redução significativa do custo computacional evidencia a eficiência da abordagem híbrida proposta, especialmente em problemas de otimização do traçado de armaduras de protensão, nos quais a avaliação estrutural apresenta elevado custo numérico devido à natureza hiperestática e à necessidade de verificação contínua das tensões em serviço. A arquitetura da rede obtida pela otimização beysiana foi de 3 camadas ocultas com respectivamente 256, 159 e 102 neurônios, tendo como parâmetros de entrada foram comprimento do elemento, as propriedades físicas dos material, o carregamento e o tipo de

seção, tendo como saída, a armadura de protensão e suas excentricidades e os esforços internos.

#### **4.3.5. Otimização de viga de concreto protendido considerando a redução das emissões de CO<sub>2</sub>.**

Na sequência, foi analisada a aplicação do modelo integrado com base no estudo apresentado por Moraes *et al.* (2022), que propõe a otimização do dimensionamento de vigas pré-fabricadas protendidas com foco na redução das emissões de CO<sub>2</sub> associadas ao processo construtivo. Nesse trabalho, o problema é formulado a partir de uma função objetivo que minimiza a emissão total de carbono nas etapas de produção, transporte e montagem da viga, mantendo atendidas as restrições normativas de dimensionamento e verificação em serviço segundo a NBR 6118:2023. As variáveis de projeto consideradas incluem parâmetros geométricos da seção transversal, a excentricidade da protensão e a proporção da força aplicada, cujos intervalos de busca são apresentados no Quadro 15. Os resultados obtidos para os diferentes cenários de carregamento definidos no estudo são apresentados no Quadro 18, enquanto a Figura 24 apresenta a comparação entre o processo de otimização e a resposta estimada pela rede neural para cada simulação analisada.

No estudo analisado, o problema de otimização foi resolvido considerando exclusivamente os Estados Limites Últimos e de Serviço aplicáveis a vigas pré-moldadas e protendidas, conforme as diretrizes normativas adotadas pelos autores. As verificações estruturais incluíram resistência à flexão e ao cisalhamento, bem como limitações de tensões no concreto e no aço de protensão em diferentes estágios de carregamento apresentados pelo Quadro 17. Os carregamentos considerados compreendem ações permanentes associadas ao peso próprio da viga e ações variáveis distribuídas ao longo do vão, conforme os casos analisados. As variáveis de projeto otimizadas incluem dimensões geométricas da seção transversal, parâmetros associados à protensão e características dos materiais, enquanto as restrições do problema abrangem critérios normativos de resistência, limites geométricos e requisitos de desempenho estrutural. O algoritmo de otimização foi executado com uma população inicial de tamanho fixo, conforme definido no estudo de referência, e um número máximo de iterações previamente estabelecido, garantindo a convergência das soluções avaliadas.

No problema analisado, a avaliação das soluções geradas foi realizada com base nos Estados Limites Últimos e de Serviço, conforme os critérios normativos adotados por Moraes et al. (2022) e pela NBR 6118. As restrições estruturais consideradas incluem a verificação da resistência à flexão e ao cisalhamento, bem como os limites de tensões no concreto em diferentes estágios de carregamento. Adicionalmente, foram impostas restrições relacionadas ao nível de protensão aplicada, à excentricidade do cabo ao longo do vão e aos limites geométricos da seção transversal, garantindo a viabilidade construtiva e o desempenho estrutural adequado. Os carregamentos considerados abrangem ações permanentes associadas ao peso próprio da viga e ações variáveis definidas conforme os casos simulados, sendo cada solução avaliada individualmente por meio da análise estrutural correspondente. O algoritmo de otimização usado por Moraes foi o algoritmo de vaga-lume. No Jaya foi executado com uma população de 30 indivíduos. A posição da excentricidade dos cabos de protensão está apresentada pela Figura 25 e os resultados das variáveis otimizadas estão apresentados no Quadro 19.

Quadro 15 – Parâmetros físicos Moraes *et al.*

Variável	símbolo	Valor
Comprimento da viga	L	20 m (39,43 kg CO <sub>2</sub> /m)
Resistência característica do concreto	f <sub>ck</sub>	55 MPa (384,76 m <sup>3</sup> CO <sub>2</sub> )
Cobrimento	c <sub>nom</sub>	3,5 cm
Distância de transporte (50 km)	D	50 km (76,38 kg CO <sub>2</sub> /t)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 16 – Variáveis otimizadas Moraes *et al.*

Variável	símbolo	Valor
Altura da seção	h	70 - 200 cm
Largura da seção	b	15 - 60 cm
Proporção de excentricidade da protensão na região central em relação a base inferior do elemento	e <sub>p</sub>	1/6 - 9/20
Proporção do nível de protensão aplicada	α <sub>PP</sub>	0,85 - 1,00

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 17 – Carregamento Moraes *et al.*

Caso	Carga
SIM-01	4,50
SIM-02	9,00
SIM-03	6,00
SIM-04	5,00
SIM-05	5,00
SIM-06	7,00
SIM-07	7,00
SIM-08	8,50
SIM-09	9,50
SIM-10	8,00

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 18 – Comparação resultados Moraes *et al.*

Caso	Presente pesquisa				Moraes <i>et al.</i>
	EJAYA		Rede neural		
	CO <sub>2</sub> (kg)	Diferença percentual (%)	CO <sub>2</sub> (kg)	Diferença percentual (%)	CO <sub>2</sub> (kg)
SIM-01					
SIM-02	2898,01	0,750	2898	0,750	2919,91
SIM-03	3609,33	0,697	3609,3	0,696	3584,36
SIM-04	3182,97	0,730	3182,95	0,730	3159,89
SIM-05	2952,27	2,029	2952,29	2,028	3013,41
SIM-06	2952,98	1,925	2952,93	1,926	3010,93
SIM-07	3248,17	2,062	3248,13	2,064	3316,57
SIM-08	3300,14	0,537	3300,19	0,536	3317,96
SIM-09	3552,38	1,002	3552,36	1,001	3517,15
SIM-10	3667,77	0,682	3667,7	0,680	3642,92

Fonte: Elaborado pelo autor.

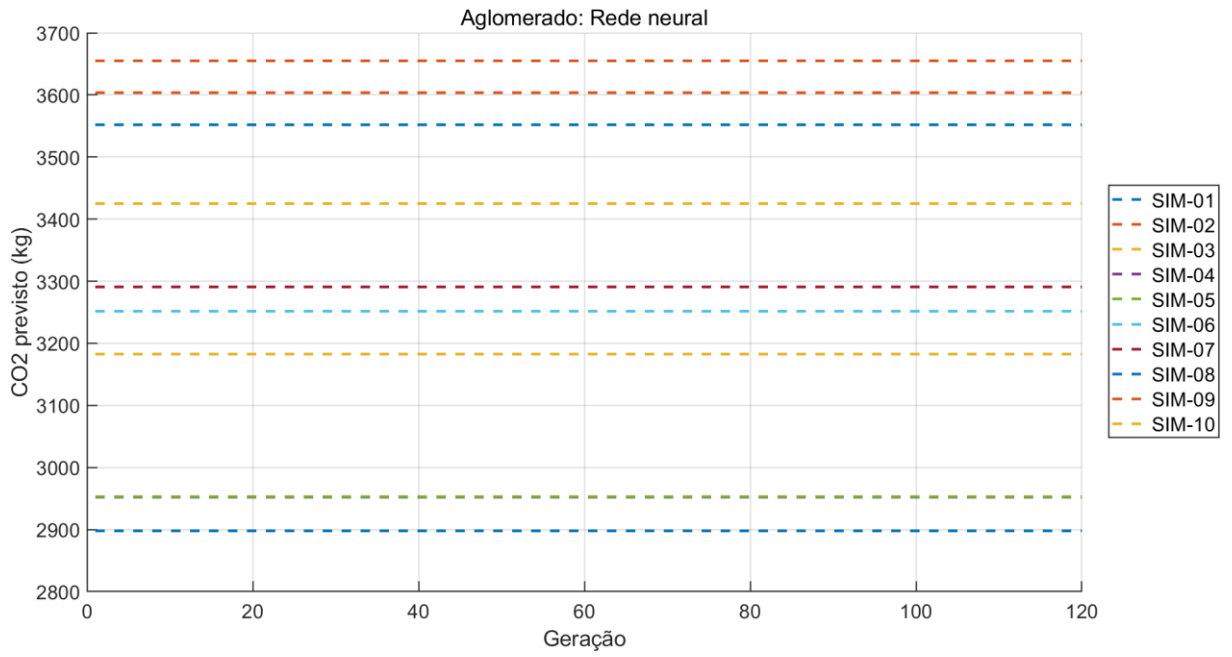
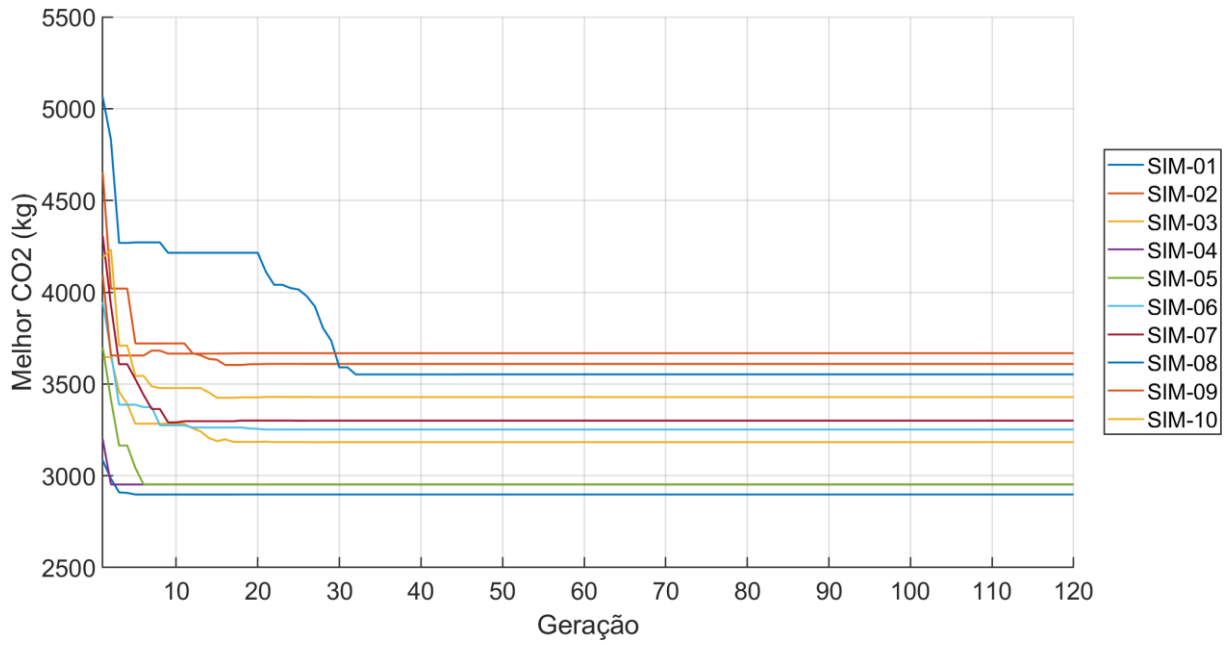


Quadro 19 – Resultado dos parâmetros otimizados.

Case	EJAYA				Rede neural			
	h (cm)	b (cm)	ep	$\alpha$ PP	h (cm)	b (cm)	ep	$\alpha$ PP
SIM-01	70,00	15,00	0,1667	0,90	70,01	15,00	0,1667	0,91
SIM-02	86,65	15,00	0,1667	0,85	86,66	15,00	0,1667	0,85
SIM-03	77,67	15,00	0,1667	0,85	77,65	15,00	0,1667	0,85
SIM-04	70,00	15,00	0,1667	0,85	70,00	15,00	0,1667	0,85
SIM-05	70,00	15,00	0,1667	0,90	70,00	15,00	0,1667	0,90
SIM-06	74,63	15,00	0,1667	0,90	74,65	15,00	0,1667	0,90
SIM-07	78,72	15,00	0,1667	0,85	78,76	15,00	0,1667	0,86
SIM-08	85,96	15,00	0,1667	0,85	85,95	15,00	0,1667	0,85
SIM-09	87,45	15,00	0,1667	0,85	87,47	15,00	0,1667	0,85
SIM-10	80,48	15,00	0,1667	0,85	80,45	15,00	0,1667	0,85

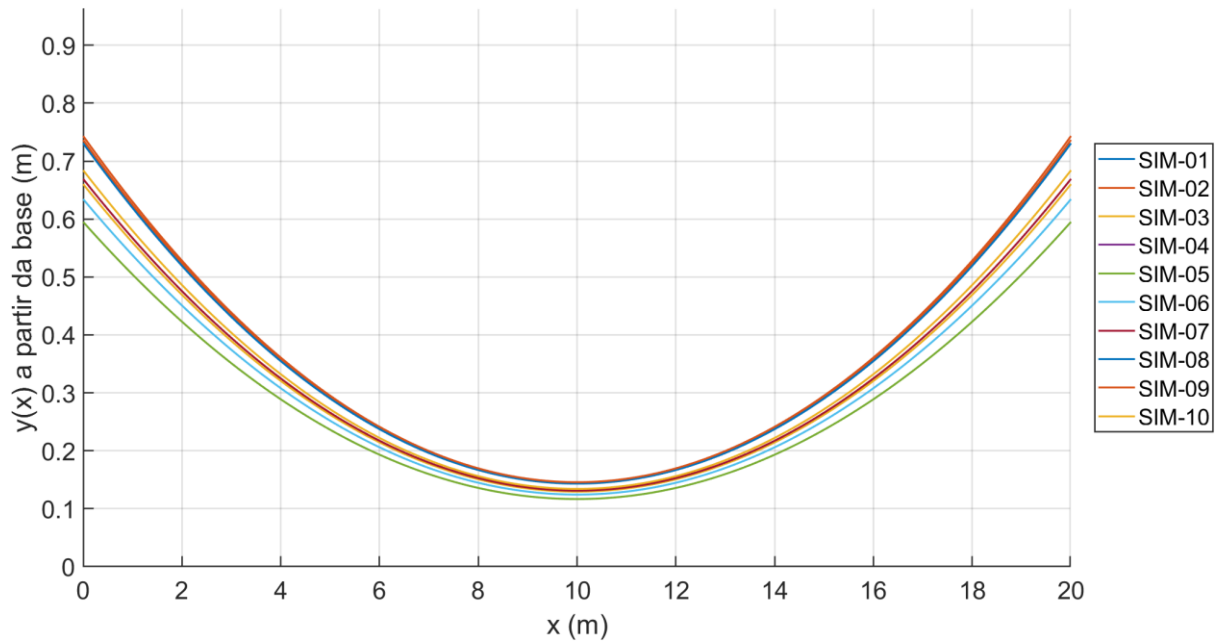
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 24 –Convergência da Otimização da emissão de CO<sub>2</sub>.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 25 – Traçado da armadura de protensão.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O custo computacional médio associado à avaliação completa do modelo estrutural durante o processo de otimização foi da ordem de 25,63 segundos, considerando a análise estrutural, as verificações normativas e o cálculo da função objetivo para cada solução candidata. Após o treinamento da rede neural artificial, a estimativa das soluções ótimas passou a ser realizada com custo computacional significativamente reduzido, da ordem de 0,000852 segundos, possibilitando a obtenção de resultados aproximados com elevado ganho de eficiência. A arquitetura da rede obtida pela otimização bayesiana foi de 3 camadas com respectivamente 315, 208 e 116 neurônios, tendo como parâmetros de entrada foram comprimento do elemento, as propriedades físicas dos materiais, o carregamento e o tipo de seção, tendo como saída, a geometria, armadura ativa, traçado e excentricidades do cabo de proteção, proporção de protensão e a emissão de  $\text{CO}_2$ . Esses resultados evidenciam o potencial da abordagem híbrida proposta para aplicações em problemas de otimização estrutural de maior complexidade, nos quais o custo computacional do modelo físico completo pode se tornar um fator limitante.

#### 4.4. DISCUSSÃO

Os resultados obtidos nos testes iniciais com funções benchmark indicam que os algoritmos JAYA e EJAYA apresentaram convergência consistente para os valores ótimos conhecidos, confirmando a adequação das implementações empregadas. Observa-se que, para as funções avaliadas, ambos os algoritmos atingiram valores ótimos finais equivalentes na maioria dos casos analisados.

Ainda assim, as diferenças observadas no comportamento de convergência ao longo do processo iterativo sugerem que as estratégias adicionais de exploração incorporadas ao EJAYA podem influenciar a dinâmica de busca, especialmente em problemas com maior número de restrições. No contexto dos testes realizados, a equivalência dos ótimos finais reforça que o comportamento global do processo de otimização é estável e que as implementações não apresentam instabilidades numéricas.

No exemplo de extraído de Vanderplaats (1984), os resultados evidenciam que os métodos geraram soluções compatíveis com as restrições estabelecidas, permitindo observar a influência de discretizações e condições adicionais impostas ao espaço de busca. A comparação entre o exemplo original e o exemplo complementar mostra que pequenas alterações nas condições do problema podem modificar significativamente a solução ótima, especialmente quando restrições geométricas e limites de desempenho atuam de forma simultânea. Esse comportamento é esperado em problemas de otimização estrutural, nos quais o ótimo frequentemente se encontra em regiões próximas às fronteiras de viabilidade.

Os testes realizados com a Rede Neural Artificial, utilizando diferentes funções de ativação, demonstram que a capacidade de aproximação da rede é sensível à escolha da função não linear adotada. As respostas obtidas indicam que funções como tangente hiperbólica e sigmoideal tendem a fornecer melhor aderência em regiões de transição mais acentuada, enquanto ativações de caráter linear ou por rampa apresentam limitações quando o comportamento da função alvo é fortemente não linear. A otimização bayesiana aplicada aos hiperparâmetros contribuiu para reduzir a dependência de escolhas empíricas, permitindo identificar arquiteturas mais adequadas e diminuindo a variabilidade do desempenho entre configurações testadas.

Na etapa de dimensionamento, a aplicação do modelo aos problemas da literatura demonstra que a rede neural foi capaz de reproduzir, com precisão satisfatória, as variáveis ótimas produzidas pelos algoritmos de otimização, mantendo boa concordância com os valores de referência. No exemplo de Duysak *et al.* (2024) (Exemplo 4.3.1 - Otimização de viga de concreto armado submetida à torção), observa-se proximidade entre os parâmetros geométricos e de detalhamento obtidos pelo processo de otimização e aqueles previstos pela rede, indicando que o modelo foi capaz de capturar a relação entre as entradas do problema e as decisões ótimas de projeto. Nos casos seguintes, envolvendo maior número de variáveis, observa-se que pequenas discrepâncias entre a solução otimizada e a previsão da rede permanecem pontuais e coerentes com a característica de aproximação do modelo, sem comprometer o entendimento do comportamento global do problema.

No estudo de Pierott *et al.* (2021) (Exemplo 4.3.2 - Otimização de viga de concreto armado com variáveis geométricas e resistência do concreto), em que diferentes parâmetros do dimensionamento e detalhamento podem atuar como variáveis discretas, os resultados sugerem que a rede neural mantém capacidade de aproximação mesmo quando a solução ótima depende de combinações específicas de escolhas normativas e construtivas. Esse aspecto é relevante, pois problemas estruturais frequentemente combinam variáveis contínuas e discretas, o que tende a aumentar a complexidade do espaço de busca e exigir maior representatividade na base de treinamento.

No exemplo de Shabbir e Khan (2022) (Exemplo 4.3.3 - Otimização de viga de concreto protendido em perfil I), as diferenças observadas entre o resultado original, os valores obtidos pelo EJAYA e a resposta da rede indicam que o comportamento do problema pode ser fortemente influenciado por hipóteses adicionais do modelo de referência e por particularidades nas restrições de projeto. Ainda assim, o resultado final apresentado teve um custo inferior ao resultado original e um valor próximo ao do autor do artigo. Além disso, a concordância entre EJAYA e RNA reforça que a rede está reproduzindo o padrão do algoritmo utilizado para gerar os dados de treinamento, o que é o objetivo principal do modelo substituto.

No caso de otimização do traçado dos cabos em estruturas hiperestáticas (Exemplo 4.3.4 - Otimização do traçado da armadura de protensão), os resultados mostram que a comparação entre momentos e configurações ótimas indica elevada aderência do modelo ao

comportamento esperado, especialmente quando se observa a consistência do perfil ótimo com a distribuição de esforços ao longo do vão. Por fim, no exemplo de Moraes *et al.* (2022) (Exemplo 4.3.5 - Otimização de viga de concreto protendido considerando a redução das emissões de CO<sub>2</sub>), observou-se elevada proximidade entre os valores de emissão de CO<sub>2</sub> obtidos pelo processo de otimização e aqueles estimados pela rede neural, indicando boa capacidade do modelo em reproduzir os resultados de referência em todos os casos analisados

## 5. CONCLUSÃO

O desenvolvimento deste trabalho permitiu avaliar a aplicação de técnicas de otimização e de modelagem via Redes Neurais Artificiais no dimensionamento de vigas de concreto protendido. A formulação numérica adotada, baseada no modelo proposto por Paez e Sensale (2021), mostrou-se adequada para descrever o comportamento de vigas hiperestáticas ao longo do tempo, permitindo a consideração simultânea da fluência, retração, relaxação do aço e perdas por atrito, requisitos essenciais para a representação realista da resposta estrutural. A capacidade dessa formulação em capturar a redistribuição de esforços e a evolução temporal das deformações assegurou a confiabilidade das soluções produzidas, servindo como base sólida para a etapa subsequente de otimização.

A utilização do Enhanced Jaya Algorithm (EJAYA) permitiu explorar um amplo espaço de soluções para o problema de dimensionamento. Esse processo reforçou o potencial dos métodos meta-heurísticos em problemas estruturais de natureza não linear, nos quais coexistem múltiplas restrições normativas e interações entre variáveis geométricas, mecânicas e construtivas. A base de dados resultante da otimização foi representativa, sendo essencial para o treinamento da Rede Neural Artificial.

A RNA treinada demonstrou capacidade satisfatória de generalização, sendo capaz de prever, de forma praticamente instantânea, as variáveis que caracterizam a solução ótima para o problema de dimensionamento. A arquitetura ajustada por otimização bayesiana apresentou desempenho compatível com a complexidade do fenômeno, reproduzindo com boa precisão o comportamento originalmente encontrado pelo EJAYA. Com isso, a rede se estabeleceu como um modelo eficiente, reduzindo drasticamente o custo computacional associado à obtenção de soluções ótimas em novos cenários de carregamento ou combinações de parâmetros. Além disso, o trabalho contribui para a literatura ao demonstrar, de forma estruturada, a compatibilidade entre modelos físicos detalhados, algoritmos de otimização e técnicas modernas de inteligência artificial no contexto da engenharia estrutural.

Por fim, destaca-se que o método desenvolvido não elimina a necessidade de análise estrutural criteriosa, mas oferece uma alternativa rápida para estimativas iniciais ou análises paramétricas, ampliando o potencial de uso de modelos híbridos no processo de projeto. Como perspectivas futuras, recomenda-se a ampliação da base de dados com diferentes

tipologias estruturais, a inclusão de variáveis relacionadas ao desempenho em estados limites último e de fissuração, bem como a investigação de arquiteturas neurais mais avançadas, capazes de incorporar incertezas e fornecer estimativas probabilísticas das soluções de projeto.



## REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, A. T.; BITTENCOURT, C. P. **Apontamentos de concreto protendido**. São Carlos: EESC/USP, 2005.

AMERICAN ASSOCIATION OF STATE HIGHWAY AND TRANSPORTATION OFFICIALS. **AASHTO LRFD bridge design specifications: SI units**. 4th ed. Washington, DC: AASHTO, 2020.

ARAÚJO, Thabatta Moreira Alves de. **Redes neurais incorporadas a métodos numéricos para solução de problemas de engenharia estrutural**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil – Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2015.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118:2023: projeto de estruturas de concreto**. 4. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2023.

BRAGA, Antônio de Pádua e LUDERMIR, Teresa Bernarda e CARVALHO, André Carlos Ponce de Leon Ferreira de. **Redes neurais artificiais: teoria e aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

CHOLFE, L. M.; BONILHA, J. C. **Concreto protendido: teoria e prática**. 2. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2018.

DEB, Kalyanmoy. **An efficient constraint handling method for genetic algorithms**. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 186, p. 311–338, 2000.

DOEHRING, C. F. **Einrichtung zur Herstellung von mit Draht durchzogenen, zu dem unter No. 49024 patenretirten Abschluss für Balkenlangen zu verwendenden Latten**. Prussian Patent 53548. Filed 23 Oct. 1888. Issued 2 Oct. 1890.

DUYSAK, Yasin; NIGDELI, Sinan Melih; BEKDAS, Gebrail. **Optimum design of reinforced concrete beam sections with Jaya algorithm**. *Challenge Journal of Concrete Research Letters*, v. 15, n. 4, p. 134–141, 2024. DOI: 10.20528/cjcr1.2024.04.003.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1992-1-1 Eurocode 2: Design of concrete structures – General rules and rules for buildings**. Brussels, 2004.

FONSECA, Marcelo da. **Otimização de estruturas treliçadas planas e espaciais sob carregamentos estáticos e dinâmicos, usando algoritmos genéticos e redes neurais**. 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Ouro Preto, Escola de Minas, Ouro Preto, 2007.

FREYSSINET, Eugène; SÉAILLES, Jean. **Manufacturing process for reinforced concrete parts**. French Patent FR680547A. Publication date: 1 May 1930.

GILBERT, R. I. et al. **Design of prestressed concrete to Eurocode 2**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2017.

HANAI, J. B. **Concreto protendido: fundamentos e aplicações**. São Carlos: EESC/USP, 2005.

JACKSON, Peter H. **Improvement in girders**. United States Patent US 126396. 7 May 1872.

JASINSKI, Marcin; SALAMAK, Marek; GERGES, Michael. **Tendon layout optimization in statically indeterminate structures using neural networks and genetic algorithm**. *Engineering Structures*, [S.l.], v. 305, art. 117713, 2024. DOI: 10.1016/j.engstruct.2024.117713.

KIRSCH, U. **Optimum Structural Design: Concepts, Methods and Applications**. 2. ed. Nova York: McGraw-Hill, 1993.

LEMONGE, A. C. C.; BARBOSA, H. J. C. **An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization**. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 59, p. 703–736, 2004.

MACEDO, Camila Andrade de. **Avaliação da otimização de lajes nervuradas com protensão não aderente utilizando programação genética e algoritmo genético multiobjetivo**. 2021. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2021.

MAGEVESKE NETTO, Protáze; CALENZANI, Adenílca Fernanda Grobério; ALVES, Élcio Cassimiro. **Optimum design of prestressed steel beams via genetic algorithm**. *REM - International Engineering Journal*, Ouro Preto, v. 76, n. 1, p. 29–37, jan./mar. 2023. DOI: 10.1590/0370-44672022760010.

MAIA, João Paulo Ribeiro. **Aplicação de metaheurísticas na otimização de seções transversais em estruturas reticuladas planas**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2009.

MASALKAS, João Victor Fernandes; FELIX, Emerson Felipe. **Treinamento de redes neurais artificiais para o dimensionamento à flexão de vigas de concreto armado**. In: *Coleção Desafios das Engenharias: Engenharia de Produção 2*. Estácio, 2021. p. 302–315.

MCCULLOCH, Warren S.; PITTS, Walter. **A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity**. Bulletin of Mathematical Biophysics, v. 5, p. 115–133, 1943. DOI: 10.1007/BF02478259.

MORAES, Matheus Henrique Morato de; PEREIRA JUNIOR, Wanderlei Malaquias; ALMEIDA, Sylvia Regina Mesquita de; GONÇALVES FILHO, Geraldo Magela; VASCONCELOS, Rebeca Freitas. **Optimum design of precast and prestressed beams with focus on CO2 emission reduction**. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, v. 15, n. 6, e15606, 2022. DOI: 10.1590/S1983-41952022000600006.

NAWY, E. G. **Prestressed concrete: a fundamental approach**. 6. ed. New Jersey: Pearson, 2009.

PÁEZ, Pablo M.; SENSALÉ-COZZANO, Beradi. **Time-dependent analysis of simply supported and continuous unbonded prestressed concrete beams**. Engineering Structures, v. 240, art. 112376, 2021. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.112376.

PAULA, Renato Filho Ximenes de. **Redes neurais artificiais para dimensionamento de seções de concreto armado submetidas à flexão simples**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Uberlândia, 2016.

PCI – PRECAST/PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE. **Precast prestressed concrete parking structures: recommended practice for design and construction**. 3. ed. Chicago: PCI, 2015.

PIEROTT, Rodrigo; HAMMAD, Ahmed W. A.; HADDAD, Assed; GARCIA, Sergio; FALCÓN, Gines. **A mathematical optimisation model for the design and detailing of reinforced concrete beams**. Engineering Structures, v. 245, art. 112861, 2021. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.112861.

RAO, R. Venkata. **Jaya: a simple and new optimization algorithm for solving constrained and unconstrained optimization problems**. International Journal of Industrial Engineering Computations, [S.l.], v. 7, p. 19–34, 2016.

REIS, Rafael Pereira de; PEREIRA, Adriano Moreira; PEREIRA, João Vitor Costa. **Otimização estrutural utilizando algoritmo genético aplicado ao dimensionamento de treliças**. Revista Eletrônica de Engenharia Civil, v. 17, n. 1, p. 1–20, 2021.

RENÓ, Maria Luiza Grillo. **Uso de Técnicas de Otimização Robusta Multi-Objetivos na Produção de Cimento**. 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá.

SANTOS, Genasil Francisco dos. **Identificação de danos estruturais em estruturas contínuas através de métodos de otimização**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2009.

SHABBIR, Imran; KHAN, Qaisar-uz-Zaman. **Using Jaya algorithm optimum design of prestressed concrete girder**. In: CONFERENCE ON SUSTAINABILITY IN CIVIL ENGINEERING (CSCE), 4., 2022, Islamabad, Pakistan. Anais... Islamabad: Capital University of Science and Technology, 2022. p. 1–6. Paper ID. 22-209.

SILVA, Camila Aparecida da. **Aplicação de algoritmos genéticos no dimensionamento ótimo de elementos estruturais em concreto armado**. 2022. TCC (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, 2022.

SILVA, Eliane Aparecida da et al. **Redes neurais artificiais aplicadas ao dimensionamento de pilares de concreto armado**. Revista Científica da Faculdade de Engenharia, v. 28, n. 1, p. 27-33, 2016.

SOUZA JÚNIOR, João Luiz de. **Modelos de otimização aplicados ao projeto de estruturas civis com o uso de métodos heurísticos e metaheurísticos**. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO. Departamento de Computação. **Fundamentos de redes neurais**. Ouro Preto, 2017. Disponível em: <https://www2.decom.ufop.br/imobilis/fundamentos-de-redes-neurais/>. Acesso em: 20 dez. 2025.

VANDERPLAATS, Garret N. **Numerical optimization techniques for engineering design: with applications**. 1. ed. New York: McGraw-Hill College, 1984.

ZHANG, Yiyang; CHI, Aining; MIRJALILI, Seyedali. **Enhanced Jaya algorithm: a simple but efficient optimization method for constrained engineering design problems**. Knowledge-Based Systems, v. 233, art. 107555, 2021. DOI: 10.1016/j.knosys.2021.107555.