



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Carlos Eduardo Lima Estanislau

*Analogias entre eletromagnetismo em espaços curvos e
materiais anisotrópicos*

Ouro Preto

Março 2025

Carlos Eduardo Lima Estanislau

***Analogias entre eletromagnetismo em espaços curvos e
materiais anisotrópicos***

Monografia apresentada ao curso de bacharelado em Física da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Escobar Colla.

Ouro Preto

Março 2025

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

E794a Estanislau, Carlos Eduardo Lima.

Analogias entre eletromagnetismo em espaços curvos e materiais anisotrópicos. [manuscrito] / Carlos Eduardo Lima Estanislau. - 2025.
58 f.: il.: gráf..

Orientador: Prof. Dr. Thiago Escobar Colla.

Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Física .

1. Óptica - Óptica de transformação. 2. Geometria diferencial. 3.
Ondas eletromagnéticas - Propagação. I. Colla, Thiago Escobar. II.
Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 537.87

Bibliotecário(a) Responsável: Sione Galvão Rodrigues - CRB6 / 2526



FOLHA DE APROVAÇÃO

Carlos Eduardo Lima Estanislau

"Analogia entre eletromagnetismo em espaços curvos e materiais anisotrópicos"

Monografia apresentada ao Curso de **BACHARELADO em FÍSICA** da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de **BAHAREL em FÍSICA**

Aprovada em 26 de março de 2025

Membros da banca

Doutor - Thiago Escobar Colla - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto

Doutor - André Herkenhoff Gomes - Universidade Federal de Ouro Preto

Doutor - Gustavo Henrique Costa de Souza - Universidade Federal de Ouro Preto

Thiago Escobar Colla, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 26/03/2025



Documento assinado eletronicamente por **Thiago Escobar Colla, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 06/11/2025, às 10:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Andre Herkenhoff Gomes, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 06/11/2025, às 14:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0880165** e o código CRC **DC97AF0C**.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha gratidão a todos envolvidos no auxílio do desenvolvimento do presente trabalho. Primeiramente ao meu orientador Prof. Dr. Thiago Escobar Colla, pela dedicação, paciência e orientação durante todo o processo. Agradeço também aos meus colegas e professores, que sempre me apoiaram e me ajudaram a compreender melhor o caminho que estou trilhando. Por fim, gostaria de agradecer ao grupo PET e a UFOP pelo suporte com as bolsas e espaços, que foram essenciais para a dedicação necessária deste projeto.

“A vida é uma sequência de encontros inéditos com o mundo, e portanto ela não se deixa traduzir em fórmulas de nenhuma espécie”.

Clóvis de Barros Filho

RESUMO

Avanços recentes na engenharia de dispositivos ópticos na escala nanométrica levaram à rápida consolidação de uma nova, promissora área da óptica clássica, denominada *Óptica de Transformação*. Esse interessante campo da óptica introduz ferramentas da geometria diferencial, amplamente utilizadas no estudo de propagação da luz ao redor de campos gravitacionais, no estudo de propagação da luz em materiais anisotrópicos. A ideia central dessa abordagem se baseia na associação de geometrias intrínsecas a meios anisotrópicos, estabelecendo uma conexão unívoca entre geometria e transformações induzidas por materiais de impedâncias combinadas. Isso permite a aplicação de conceitos bem estabelecidos no estudo de propagação de ondas em geometrias curvas ao estudo de materiais a anisotrópicos, abrindo uma promissora linha de pesquisa que permite conectar fenômenos aparentemente distintos. O objetivo desse trabalho é o de apresentar ao leitor as ideias básicas da óptica de transformação, ilustrando com exemplos concretos a forma como esses conceitos podem ser implementados de forma simples na projeção de dispositivos de invisibilidade.

Palavras-Chave: Propagação de Campos Clássicos, Óptica de Transformação, Geometria Diferencial, Dispositivos de Invisibilidade.

ABSTRACT

Recent advances in the designing of optical devices at a nanometer scale have led to the rapid establishment of a new, promising area of classical optics, known as transformation optics. This interesting field of optics is based on the application of classical tools from differential geometry – largely employed on the study of light propagation around gravitational fields – to investigate light propagation into anisotropic materials. The central idea of this approach is to assign anisotropic media an intrinsic geometry, thus establishing a unique connection between geometry and transformations induced by impedance-matched materials. This allows for the application of well-known concepts from the study of light propagation in curved geometries to investigate anisotropic materials, opening a promising new line of research that connects phenomena of seemingly different natures. The goal of this work is to present the reader the basic ideas of transformation optics, showing with concrete examples how these concepts can be implemented in a simple way in the designing of invisibility devices.

Keywords: Classical Field Propagation, Transformation Optics, Differential Geometry, Invisibility Devices.

SUMÁRIO

Introdução e Objetivo	2
1 Óptica de transformação	2
2 Objetivo	3
Equações de Maxwell no vácuo	4
1 Lei de Gauss	4
2 Lei de Ampère	5
3 Lei de indução de Faraday	8
4 Resumo do Capítulo	10
Equações de Maxwell em meios materiais	12
1 Eletrostática em meios materiais	12
2 Magnetismo em meios materiais	15
3 Ondas eletromagnéticas em materiais isotrópicos	18
Introdução à Geometria Diferencial	22
1 Transformação de Coordenadas	23
2 Tensor métrico	25
3 Derivada covariante e coeficientes de conexão	27
4 Geodésica e Transporte paralelo	28
5 Curvatura	30
6 Mapeamento conforme	31
7 Reescrevendo os operadores diferenciais	32
7.1 Divergente	32
7.2 Rotacional	33
7.3 Laplaciano	34
8 Considerações finais	35
Relação entre eletromagnetismo em geometrias curvas e meios anisotrópicos	37
1 Equação da onda para um espaço curvo	40
2 Caminho ótico em materiais anisotrópicos	41
3 Transformações Gerais	44

Aplicações de Óptica de transformação	47
1 Dispositivo de invisibilidade	47
2 Exemplo de dispositivo de invisibilidade cilíndrico	51
Conclusões	57
Referências Bibliográficas	59

Introdução e Objetivo

O campo da óptica de transformação se destaca como uma área pioneira na modelagem de caminhos ópticos controláveis em materiais [1] [2]. Essa abordagem é de extrema importância, pois com a utilização dos metamateriais, podemos projetar dispositivos com propriedades ópticas personalizadas [3]. Obtemos essas propriedades introduzindo anisotropias no material de forma que o caminho ótico é alterado durante a propagação e pode ser descrito pela formulação da óptica de transformação.

Além disso, a utilização da óptica de transformação junto dos metamateriais abre caminhos para a criação de analogias que buscam compreender a natureza da gravidade. Isso ocorre devido às analogias entre as abordagens que descrevem a propagação da luz em campos gravitacionais e aquelas que modelam o caminho ótico em metamateriais. Dessa forma, proporciona-se a oportunidade de criar um estudo laboratorial sobre efeitos gravitacionais que não são observados ou de aprofundar o estudo daqueles que já foram observados.

1 Óptica de transformação

O princípio de Fermat estabelece uma base para um estudo da propagação da luz em um meio independentemente de sua geometria. Se conseguirmos relacionar o índice de refração com a geometria do espaço, podemos interpretar a trajetória da luz como uma geodésica. A óptica de transformação tem por objetivo criar essa ponte entre geometria e parâmetros constitutivos do material [4].

Veremos que considerando as equações de Maxwell em um espaço arbitrário, podemos criar uma conexão sólida entre a geometria e os parâmetros constitutivos do material, mais precisamente o tensor de permissividade elétrica e o tensor de permeabilidade magnética. Com isso, podemos utilizar transformações de coordenadas para encontrar os parâmetros constitutivos, e assim desenvolver o material com propriedades de interesse.

A geometria diferencial fornece as ferramentas matemáticas necessárias para descrever esses sistemas em geometrias arbitrárias. E, ao mapear um sistema ótico para um espaço virtual com uma geometria específica, podemos utilizar de transformações de coordenadas

nesse espaço virtual para atingir o efeito desejado.

Essa abordagem tem implicações importantes em diversas áreas, desde o desenvolvimento de dispositivos ópticos como lentes planas, mantos de invisibilidade e lentes de índice de refração negativo [5] [6]. Também podemos utilizá-la para melhor compreender a natureza do campo gravitacional, permitindo uma compreensão mais ampla da estrutura do universo[7]. Essa analogia pode ser feita utilizando as relações que obtemos para a geometria do espaço-tempo, aplicando-as para desenvolver materiais óticos que simulem esses efeitos.

2 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo introduzir o leitor aos conceitos e às ferramentas matemáticas básicas e necessárias para o entendimento da óptica de transformação, bem como às implicações no desenvolvimento de novos materiais. Apresentaremos cálculos de propriedades ópticas e discutiremos alguns resultados relevantes.

Nos capítulos seguintes, apresentaremos uma revisão sucinta das equações básicas do eletromagnetismo no vácuo e em meios materiais anisotrópicos. A seguir, serão abordados conceitos básicos de geometria diferencial, necessários para o estudo da óptica de transformação. Mostramos então que uma analogia pode ser feita entre a propagação de campos em materiais anisotrópicos e em espaços curvos dotados de uma geometria intrínseca.

Finalmente, consideraremos o caso de uma transformação em uma geometria cilíndrica, que permite estudar de forma simples e clara de como os raios luminosos podem ser manipulados no contexto da óptica de transformação, de modo a criar regiões de “invisibilidade” nas quais raios luminosos são desviados, permitindo ocultação de objetos inseridos nessas regiões.

Equações de Maxwell no vácuo

Podemos afirmar que um dos pontos mais relevantes da física teórica do século XIX foi a união da teoria elétrica com a magnética, levando a leis de propagação de ondas eletromagnéticas que permitiram reconhecer a luz como um caso particular dessa manifestação. Essa união nasce quando James C. Maxwell observa uma inconsistência matemática na lei de Ampère e procura corrigi-la utilizando o princípio básico de conservação de carga. Começaremos introduzindo o conjunto de equações que descrevem a eletrodinâmica clássica conhecidas como equações de Maxwell.

1 Lei de Gauss

A primeira equação que iremos discutir se baseia na Lei de Gauss, que é uma análise do fluxo de campo elétrico criado por uma carga ou distribuição de cargas estacionária. Suponhamos que existe uma distribuição localizada de cargas no espaço; a qual podemos envolver com uma superfície gaussiana “S”. A Lei de Gauss afirma que a variação do fluxo do campo elétrico em um ponto do espaço é diretamente proporcional à da densidade de carga contida nesse ponto [8]. Para relacionar essas grandezas, devemos calcular a variação de fluxo do campo elétrico, que será dada, segundo a Lei de Gauss, por: $d\Phi_e = \frac{dq}{\epsilon_0}$; em que dq é um elemento infinitesimal de carga, $d\Phi$ é o fluxo e ϵ_0 a permissividade do vácuo. O fluxo total pode ser obtido pela soma de todas as contribuições infinitesimais de fluxo. Então, integrando sobre toda a superfície, obtemos a lei de Gauss em sua forma integral:

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

em que Q_{int} é a carga total no interior da superfície gaussiana, a qual pode ser escrita como

$$Q_{int} = \int \rho(\mathbf{r}) dV, \quad (2)$$

onde $\rho(\mathbf{r})$ representa a densidade de carga no ponto \mathbf{r} . Essa forma da lei de Gauss é chamada de forma integral. Para nossos estudos, essa forma não será diretamente utilizada, mas podemos utilizar o teorema do divergente para transformá-la na forma

diferencial, que será de maior utilidade no que segue.

O teorema do divergente estabelece que podemos associar a integral de volume do divergente de um campo vetorial à integral de fluxo desse mesmo campo por uma superfície fechada. De forma mais precisa, podemos escrever

$$\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV \quad (3)$$

Usando esse resultado em (1), podemos concluir que

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Agora, sabemos que essa expressão tem que ser válida para qualquer volume arbitrário. Então, podemos substituir a expressão para a carga total na relação anterior e retirar as integrais, visto que as quantidades no integrando devem necessariamente coincidir. Obtemos assim a lei de Gauss em sua forma diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (5)$$

Essa relação nos diz que as cargas atuam como fontes de linhas de campo elétrico.

2 Lei de Ampère

A Lei de Ampère, originalmente baseada em observações experimentais, pode ser deduzida a partir da Lei de Biot-Savart, que estabelece a criação de um campo magnético pela presença de uma corrente elétrica.

Começaremos escrevendo a lei de Biot-Savart de maneira geral [9]

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \quad (6)$$

onde μ_0 é a chamada permeabilidade magnética do vácuo, e $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ define a densidade de corrente no ponto \mathbf{r}' . Essa quantidade mede o transporte de portadores de carga no

espaço. Vamos primeiramente notar que podemos escrever $\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$ como

$$\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (7)$$

em que o operador “ ∇ ” se refere ao gradiente em relação a \mathbf{r} . Agora podemos utilizar a identidade

$$\nabla \times (f \mathbf{V}) = \nabla f \times \mathbf{V} + f \nabla \times \mathbf{V}, \quad (8)$$

onde f e \mathbf{V} são campos escalares e vetorial, respectivamente, para reescrever (6) em uma forma mais conveniente. Como o operador ∇ não atua nas coordenadas \mathbf{r}' , utilizando a relação acima concluímos que $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$. Assim, obtemos

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (9)$$

Substituindo a relação (9), obtemos

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'. \quad (10)$$

A equação (10) nos garante imediatamente a condição $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, que tem como consequência a interpretação da não existência de monopólos magnéticos [8]. Ainda dessa condição, podemos introduzir a ideia de um potencial vetor, \mathbf{A} , a partir do qual o campo magnético pode ser escrito como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (11)$$

sendo o potencial vetor definido na forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \quad (12)$$

Se calcularmos agora o rotacional de \mathbf{B} , obtemos

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left[\nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \right] \quad (13)$$

Fazendo uso da identidade

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}, \quad (14)$$

válida para qualquer campo vetorial \mathbf{F} , e simplificando, obtemos

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \right] - \nabla^2 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) \quad (15)$$

Usando agora a relação $\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, e substituindo na expressão (15) obtemos

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \right] + \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (16)$$

É fácil ver que $\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$ (onde ∇' atua nas coordenadas fonte \mathbf{r}'). Substituindo esse resultado, e resolvendo a integral restante por partes (considerando que a integração é em todo espaço) obtemos

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' = - \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (17)$$

onde usamos a identidade $\nabla \cdot (f\mathbf{V}) = \nabla f \cdot \mathbf{V} + f\nabla \cdot \mathbf{V}$, assim como o fato de que a distribuição de cargas deve se anular no infinito [8]. Agora, utilizando a equação da continuidade para correntes estacionárias, $\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$, obtemos a forma diferencial da Lei de Biot-Savart, válida no regime da magnetostática:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (18)$$

Ressaltamos que essa equação só é válida para a magnetostática, pois a equação da continuidade assume que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ o que só é válido para correntes estacionárias, onde não há acúmulo de cargas no espaço. Podemos generalizar esse resultado se considerarmos a equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (19)$$

Essa equação estabelece que a variação de cargas em pontos do espaço ocorre devido ao fluxo de cargas pela vizinhança do ponto, estabelecendo assim a lei da conservação de

cargas. Agora, se substituirmos ρ dado pela equação de Gauss (5), obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (20)$$

Podemos definir uma nova densidade de corrente \mathbf{I} que é dada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \equiv \mathbf{I}(\mathbf{r}, t) \quad (21)$$

de forma que agora a lei de Ampère em termos de \mathbf{I} pode ser escrita na sua forma mais geral como:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{I}(\mathbf{r}, t) \quad (22)$$

Substituindo agora $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$, e novamente utilizando a identidade vetorial dada por (14), obtemos:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (23)$$

Notamos que potencial vetor, definido a partir da relação $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, é dotado da chamada *liberdade de calibre*, por ser essa invariante frente à transformação $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \psi$, sendo ψ um campo escalar arbitrário. Em particular, podemos escolher ψ de modo que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (calibre de Lorenz). Dessa forma, o potencial vetor passa a obedecer a seguinte equação de Poisson:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (24)$$

Determinando o potencial vetor por meio dessa relação, conseguimos determinar completamente o campo magnético apenas tomando o rotacional desse potencial.

3 Lei de indução de Faraday

A equação (5) descreve o módulo e o sentido do campo elétrico e não contém nenhuma informação sobre sua direção, de modo que não podemos determinar totalmente o campo elétrico gerado por uma distribuição de cargas com ela [8]. Porém, um resultado do cálculo vetorial estabelece que, se obtivermos o divergente e o rotacional de um campo vetorial em todo o espaço, conseguiremos determiná-los de forma única [9].

Começaremos estudando o trabalho realizado por um campo elétrico, gerado por uma

distribuição arbitrária de cargas, ao mover uma carga teste ao longo de um caminho fechado Γ . Esse trabalho será dado por

$$W = \oint_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (25)$$

em que $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ é a força elétrica, definida por $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ sendo q a carga teste. Substituindo acima, obtemos:

$$W = q \oint_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (26)$$

Podemos utilizar o teorema de Stokes, que relaciona a integral de linha de um campo vetorial em um caminho fechado à uma integral de superfície do rotacional desse campo. Dessa forma, podemos concluir que o trabalho pode ser representado na forma

$$\varepsilon = \int_S \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a} \quad (27)$$

em que $\varepsilon = \frac{W}{q}$ é a chamada força eletromotriz.

Por outro lado, Faraday notou experimentalmente que a força eletromotriz gerada por uma indução magnética é dada por

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad (28)$$

onde Φ_m representa o fluxo do campo magnético sobre a superfície na qual a força eletromotriz é induzida. Sabemos que o fluxo magnético Φ_m em uma superfície aberta Λ é dado por

$$\Phi_m = \int_{\Lambda} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a} \quad (29)$$

Levando em consideração que os fluxos obtidos experimentalmente são idênticos e que Λ pode ser escolhida arbitrariamente, podemos concluir que

$$\int_{\Lambda} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a} \quad (30)$$

Usando a regra de Leibniz para diferenciação sob o sinal de integral e assumindo uma superfície Λ é fixa no tempo, podemos escrever

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (31)$$

Para o caso eletrostático, não há movimentação de cargas para gerar uma corrente e, por consequência, não há um campo magnético. Dessa forma podemos escrever:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (32)$$

que é válida no domínio da eletrostática. Sabemos do cálculo vetorial que, se o rotacional de um campo vetorial é nulo, esse campo é conservativo. Portanto, ele pode ser descrito como o negativo do gradiente de um campo escalar [8]. Isso nos permite escrever o campo \mathbf{E} como sendo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) \quad (33)$$

onde $\varphi(\mathbf{r})$ é o potencial elétrico.

Tomando o divergente do campo eletrostático, obtemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \nabla\varphi(\mathbf{r}) \quad (34)$$

Logo, temos $\nabla \cdot \nabla\varphi(\mathbf{r}) = \nabla^2\varphi(\mathbf{r})$ o que resulta, utilizando a lei de Gauss, que:

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (35)$$

. A equação acima é conhecida como equação de Poisson. Para o caso em que $\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} = 0$ chegamos na equação de Laplace:

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad (36)$$

Podemos notar esse resultado é consequência direta da condição de sabermos o rotacional e o divergente do campo. Então, ao determinarmos o potencial elétrico, podemos determinar totalmente o campo eletrostático.

4 Resumo do Capítulo

Neste capítulo, foram desenvolvidas as equações básicas do eletromagnetismo, que sintetizam as Leis que regem eletromagnetismo. No entanto, essas equações não estão em sua forma mais geral, pois estamos considerando que o meio é isotrópico. Assim, deixamos de incluir fenômenos como a magnetização e a polarização, que serão essenciais para as discussões futuras. Podemos resumir as equações de Maxwell no vácuo discutidas nesse

capítulo como

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (37)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (38)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (39)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{I}(\mathbf{r}, t) \quad (40)$$

No próximo capítulo, faremos a transição das equações de Maxwell de um meio isotrópico para um meio anisotrópico, assim englobando todos os aspectos necessários para tratar do magnetismo em materiais.

Equações de Maxwell em meios materiais

Agora que sabemos como as equações de Maxwell se comportam no vácuo, estamos prontos para tratar dos meios materiais. Tais meios não podem ser descritos pelas equações anteriores, pois elas desconsideram efeitos adicionais que ocorrem devido à presença de múltiplas partículas carregadas, provenientes da estrutura atômica/molecular dos meios materiais. Devido a esse grande número de partículas dentro de um material, o comportamento das quantidades \mathbf{E} e \mathbf{B} pode variar de ponto a ponto. Isso nos leva à necessidade de descrevê-las em termos de valores médios [10], que fornecem uma descrição adequada do comportamento macroscópico do eletromagnetismo nesses meios.

1 Eletrostática em meios materiais

Estudamos no capítulo anterior a criação de um campo elétrico devido à presença de uma distribuição de cargas livres. Porém, em um meio material, há uma interação entre essas cargas e as chamadas *cargas ligadas*, que são aquelas inerentes à estrutura atômica do material. Isso pode gerar duas características nos materiais: a condutividade elétrica e a isolação elétrica, o que nos leva a classificar, do ponto de vista do eletromagnetismo clássico, os materiais em dois tipos básicos: os condutores e os dielétricos. Cada um desses meios terá uma resposta diferente à aplicação de um campo elétrico externo.

Quando aplicamos um campo elétrico externo em um condutor, as cargas irão se organizar de forma a cancelar o campo externo no interior do material, gerando assim uma corrente elétrica transiente no sentido oposto ao campo aplicado. Isso ocorre porque os condutores possuem um excesso de cargas livres. Nos dielétricos, a resposta à aplicação de um campo externo resulta na re-orientação de dipolos elétricos e magnéticos, que também buscam blindar os campos em seu interior, sem gerar corrente elétrica nesse processo [8].

Para tratar da eletrostática em condutores, devemos considerar que todas as cargas livres irão se distribuir de forma que o campo elétrico interno no condutor se anule, dessa forma minimizando a energia eletrostática no interior do material. Isso se deve à presença

de um número suficiente de cargas livres capazes de migrar para a superfície do condutor, assim blindando completamente um campo externo aplicado. Podemos notar, devido a essa propriedade, que a diferença entre o campo macroscópico e o microscópico existe apenas na superfície do condutor. Pois, na média, as flutuações do campo macroscópico no interior do material são nulas e o campo líquido se torna o campo gerado pela distribuição de cargas superficiais do material [10]. Logo, para condutores, na ausência de cargas livres no interior do material, o campo elétrico satisfaz:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (2)$$

Para dielétricos, por outro lado, consideramos que a carga total é neutra, devido ao fato de que as cargas estão ligadas na forma de dipolos ou multipolos, resultando em carga líquida nula. No entanto, sabemos experimentalmente que tais objetos ainda sentem a ação de um campo elétrico externo aplicado. Isso ocorre por meio da separação de cargas devido à aplicação do campo, sendo esse fenômeno conhecido como polarização. A polarização \mathbf{P} se refere à existência de pequenos momentos de dipolos por unidade de volume do dielétrico. Essa grandeza é definida como a densidade de momento dipolar \mathbf{p} em um volume V , na forma:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} \quad (3)$$

A polarização nos ajuda a entender melhor o campo elétrico criado dentro de um dielétrico, pois podemos relacioná-la ao potencial eletrostático através do potencial de um dipolo ideal. Podemos calcular o potencial de um dipolo no vácuo pela equação:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^3}, \quad (4)$$

sendo \mathbf{r}' a posição do dipolo ideal, definido como cargas opostas de mesma magnitude q , separadas por uma distância \mathbf{d} , de modo que $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$. Se considerarmos uma distribuição contínua de dipolos, podemos substituir na equação acima a densidade de dipolos dada por (3). Recorrendo ao princípio da superposição linear, obtemos então

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (5)$$

Mas, usando a relação (7), essa expressão pode ser reescrita na forma

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'. \quad (6)$$

Utilizando de integração por partes e o teorema da divergência, obtemos que o potencial dipolar é dado por

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_S \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{a}' - \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')) dV' \right]. \quad (7)$$

Da equação acima, concluímos que a primeira integral é o potencial gerado por uma distribuição de “cargas” superficial $\sigma_{lig}(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}$, em que $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal à superfície de integração, e a segunda é o potencial gerado por uma densidade volumétrica dada por $\rho_{lig}(\mathbf{r}') = -\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')$. Para continuar, consideraremos que $\sigma_{lig} = 0$, o que pode ser feito se considerarmos que as integrais acima se estendem ao infinito, onde o vetor de polarização se anula.

Queremos agora aplicar a lei de Gauss para descrever o campo elétrico no interior do material. Para isso, podemos redefinir a densidade de cargas na equação (37) em termos de densidades de cargas ligadas e livres:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_{livre}(\mathbf{r}) + \rho_{lig}(\mathbf{r}) \quad (8)$$

Usando a relação para a densidade de cargas volumétricas ligadas, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{livre} - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})) \quad (9)$$

A partir dessa relação, definimos um novo campo chamado *deslocamento elétrico*, que é dado por

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}). \quad (10)$$

Com isso, a lei de Gauss para meios materiais se torna

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_{livre}. \quad (11)$$

Para alguns materiais, temos que a polarização é diretamente proporcional ao campo

aplicado, sendo essa relação a seguinte:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad (12)$$

em que χ_e define a chamada de suscetibilidade elétrica. Essa grandeza mede a resposta elétrica do material à aplicação de um campo. A proporcionalidade entre polarização e campo implica que os dipolos elétricos no meio irão orientar-se na direção do campo, em uma tentativa de blindar o campo total no interior do material [9]. Diferentemente dos meios condutores, essa blindagem não é completa, pois as cargas ligadas são capazes apenas de reorientar-se na presença do campo. Considerando novamente a equação (10), podemos substituir a polarização pela relação (12), obtendo assim:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (13)$$

em que $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ é a chamada permissividade elétrica do material. Os materiais que seguem essa relação linear entre \mathbf{D} e \mathbf{E} são chamados de dielétricos lineares. Com isso, temos que a forma macroscópica das equações de Maxwell para a eletrostática são

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{livre}, \quad (14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (15)$$

Devemos tomar cuidado com essas equações, pois, embora alguns materiais não sejam condutores nas condições normais de temperatura e pressão, eles ainda podem ser ionizados por algum efeito externo, assim gerando uma quantidade de cargas livres que devem ser consideradas ao se aplicar a lei de Gauss [9].

2 Magnetismo em meios materiais

Por meio da mecânica quântica, sabe-se que todos os materiais possuem dipolos magnéticos intrínsecos, originados pelos spins dos átomos que compõem esses materiais. Porém, devido à organização desses spins, muitos materiais não possuem propriedades magnéticas macroscópicas [9]. Entretanto, quando um material é submetido a um campo magnético externo, os spins podem re-orientar-se e assumir configurações específicas. Esse processo

é conhecido como magnetização. Para materiais paramagnéticos, a magnetização faz com que os dipolos magnéticos sofram um torque que tende a alinhá-los na direção do campo magnético. Para os diamagnéticos, a indução magnética faz com que os dipolos se alinhem antiparalelamente ao campo. Podemos definir a magnetização macroscópica como sendo a soma dos momentos de dipolos magnéticos médios por unidade de volume da seguinte forma

$$\mathbf{M} = \sum_i N_i \langle \mathbf{m}_i \rangle \quad (16)$$

em que $\langle \mathbf{m}_i \rangle$ é o momento de dipolo médio da molécula i , N_i é o número de moléculas por unidade de volume.

De forma análoga ao caso eletrostático, podemos calcular o potencial vetor gerado por um dipolo magnético ideal. O potencial gerado por um dipolo magnético ideal é dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (17)$$

Assumindo que, para uma distribuição contínua, cada momento de dipolo médio pode ser aproximado por um momento de dipolo ideal, podemos escrever a magnetização como

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta V} \quad (18)$$

Assim, usando o princípio da superposição linear, podemos reescrever o potencial como sendo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (19)$$

Podemos usar agora a relação (7), de forma a obter

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'. \quad (20)$$

Resolvendo a integral por partes, e considerando que a magnetização é bem localizada, obtemos da integração que o potencial é dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \int_V \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \right]. \quad (21)$$

A segunda integral acima pode ser manipulada por meio do teorema do divergente [8]

para um campo vetorial. Com isso, podemos reescrever o potencial vetor como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\oint_S \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{a}' - \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')) dV' \right]. \quad (22)$$

Analogamente ao caso eletrostático, podemos associar o potencial magnetostático em um material à uma distribuição de correntes superficiais e à distribuição de correntes volumétricas. Para isso, definimos as grandezas $\mathbf{K}_M(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}$, onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal a superfície de integração, e $\mathbf{J}_M(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')$. Reconhecemos a grandeza \mathbf{K}_M como a corrente superficial ligada, sendo \mathbf{J}_M a corrente volumétrica ligada. Considerando que a magnetização é suficientemente localizada, podemos considerar que uma integração em todo o espaço geraria um potencial nulo para as correntes superficiais, de forma que o potencial apenas dependa das correntes volumétricas. Assim, o potencial pode ser reescrito como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (23)$$

Vemos que, para o caso em que não há uma movimentação de cargas livres, ainda obtemos uma contribuição para o potencial, proveniente da corrente de magnetização. Assim, podemos redefinir a corrente total como a combinação das correntes de cargas livres e as correntes de Magnetização, na forma:

$$\mathbf{J}_T(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_{livre}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_M(\mathbf{r}), \quad (24)$$

Substituindo a corrente total na lei de Ampère, obtemos

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}_T(\mathbf{r}) \quad (25)$$

Novamente, de maneira análoga caso eletrostático, podemos introduzir um campo auxiliar $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ para reescrever a lei de Ampère. Para isso, consideramos

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0} = \mathbf{J}_{livre}(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{M} \quad (26)$$

Reorganizando essa expressão, temos

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r}) \right) = \mu_0 \mathbf{J}_{livre}(\mathbf{r}) \quad (27)$$

Podemos definir então o campo auxiliar como sendo

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (28)$$

Para materiais em que a magnetização responde linearmente à aplicação de um campo magnético externo, podemos relacionar as grandezas acima pela seguinte expressão

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (29)$$

em que χ_m define a susceptibilidade magnética do material. Essa quantidade mede a resposta do material ao campo aplicado. Substituindo essa relação na equação para o campo magnético, obtemos uma expressão semelhante à obtida para o deslocamento elétrico:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (30)$$

em que definimos $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ como sendo a permeabilidade magnética do material. Dessa forma, podemos reescrever as equações do magnetismo em meios materiais em termos do campo auxiliar \mathbf{H} como sendo

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_{livre}(\mathbf{r}) \quad (31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (32)$$

3 Ondas eletromagnéticas em materiais isotrópicos

Na seção anterior, definimos as grandezas macroscópicas \mathbf{D} e \mathbf{B} , e mostramos como elas se relacionam com seus análogos microscópicos. Essas relações são descritas pelas equações constitutivas (13) e (30)

Antes de derivarmos a equação de propagação de uma onda eletromagnética em um meio, devemos reescrever as equações de Maxwell em termos de \mathbf{D} e \mathbf{H} . Dessa forma, as equações de Maxwell para materiais lineares se tornam

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{livre} \quad (33)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (34)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{I}_{livre} \quad (35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (36)$$

Note que \mathbf{I}_{livre} é definida por

$$\mathbf{I}_{livre} = \mathbf{J}_{livre} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (37)$$

Agora que transformamos as equações de Maxwell, iremos considerar o caso em que $\rho_{livre} = 0$ e $\mathbf{J}_{livre} = 0$. Esse caso representa a situação onde não há fontes livres, podendo ser estendida à propagação no vácuo mediante às substituições $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ e $\mu \rightarrow \mu_0$.

Matematicamente, as equações acima descrever um sistema de quatro equações diferenciais e duas incógnitas, sendo essas incógnitas relacionadas por rotacionais. Com essa informação, podemos calcular o rotacional de alguma dessas quantidades para conseguirmos acoplar duas equações em uma. Faremos isso para o campo elétrico:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (38)$$

Utilizando a propriedade (23) dos rotacionais, obtemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (39)$$

que implica em

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (40)$$

Usando a Lei de Gauss, podemos concluir que essa expressão se reduz a seguinte forma

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (41)$$

Por outro lado, sabemos da lei de Ampère que

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu(\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{I}_{livre} \quad (42)$$

Combinando esses resultados, obtemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (43)$$

Para o caso que estamos estudando, temos que $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$. Logo, nossa equação para a propagação do campo elétrico se torna

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (44)$$

Essa equação mostra que o campo elétrico se propaga como uma onda no interior de materiais lineares, de velocidade definida por $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$. Notemos que podemos associar essa velocidade com o índice de refração do material pela relação

$$v = \frac{c}{n} \quad (45)$$

em que n é o índice de refração, sendo dado por $n = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}}$. Caso queiramos descobrir uma equação para o campo magnético, podemos proceder da mesma forma, porém considerando agora para o rotacional do campo magnético. Se isso for feito, chegaremos à uma equação idêntica, trocando apenas \mathbf{E} por \mathbf{B} . Isso mostra que o sistema de equações de Maxwell pode ser reduzido de quatro equações de primeira ordem acopladas para duas equações desacopladas de segunda ordem. Resulta dessas equações que os campos se propagam como ondas de mesma velocidade. Além disso, é fácil de verificar, através das Leis de Faraday, Gauss, e ausência de monopolos, que os campos são mutuamente perpendiculares, sendo também ortogonais à direção de propagação.

Com a equação (44), conseguimos descrever o comportamento de uma onda eletromagnética no interior de um material. Em um caso mais geral, podemos notar que essas ondas não necessariamente devem se propagar com a mesma velocidade em todas as direções. Isso ocorre porque, caso haja mudança no índice de refração em alguma das direções de propagação no material, segue da relação (45) que a velocidade nessa direção mudará. Podemos notar também que para o vácuo, a relação (45) se resume a relação

$$v = c \quad (46)$$

Com posse dessas equações, conseguimos determinar exatamente a velocidade que a onda

eletromagnética irá se propagar em qualquer meio linear. Além disso, sabemos que essas ondas devem ter, para meios homogêneos e isotrópicos, a mesma velocidade em qualquer direção e em qualquer ponto do espaço.

Veja que as equações desenvolvidas acima consideram o meio isotrópico e homogêneo, de forma que as quantidades ϵ e μ são constantes com a posição e, sendo escalares, independem da direção de propagação. Para um meio anisotrópico e inhomogêneo [1] considerarmos que as suscetibilidades são descritas por matrizes. Dessa forma, é conveniente expressar tanto o deslocamento dielétrico quanto a indução magnética em termos de matrizes $\boldsymbol{\epsilon}$ e $\boldsymbol{\mu}$, respectivamente. Dessa forma, podemos generalizar as relações constitutivas na forma:

$$\begin{aligned} 1. \quad \boldsymbol{D} &= \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{E} \\ 2. \quad \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{H} \end{aligned} \tag{47}$$

em que $\boldsymbol{\epsilon} = 1 + \boldsymbol{\chi}_e$ e $\boldsymbol{\mu} = 1 + \boldsymbol{\chi}_m$. Como veremos adiante, podemos usar as relações acima para conectar as propriedades de meios anisotrópicos com aquelas de um espaço curvo qualquer. Notamos também que as relações acima implicam que os campos em materiais anisotrópicos não são necessariamente paralelos aos campos externos que os induzem, refletindo a anisotropia intrínseca da distribuição de cargas e correntes ligadas ao material.

Introdução à Geometria Diferencial

Agora que estamos familiarizados com os conceitos do eletromagnetismo em materiais, iremos introduzir os conceitos de geometria diferencial que nos ajudarão a criar uma analogia entre espaços curvos e a presença de anisotropia óptica em materiais dielétricos. Para facilitar a abordagem, iniciaremos com a definição de grandezas e convenções adotadas com frequência no contexto da geometria diferencial. Começaremos introduzindo a convenção de *somatório de Einstein*, que facilitará nossa notação a medida que avançamos no desenvolvimento da formulação teórica. Essa notação estabelece que:

- Índices que aparecem uma única vez em um termo podem assumir valores de 1 a 3 (coordenadas espaciais).
- Índices que se repetem em um termo são entendidos como uma soma de 1 a 3.

A título de ilustração, podemos considerar a seguintes expressões:

$$\sum_{i=1}^3 A_{ii} = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33},$$
$$\sum_{i=1}^3 A_i B^i = A_i B^i = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3.$$

Devemos observar que, quando realizamos uma soma sobre objetos diferentes, devemos garantir que os índices estejam de acordo com o exemplificado, um sobreescrito e outro subscrito.

Definimos a delta de Kronecker δ_{ij} como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (1)$$

Da mesma maneira, definimos o chamado símbolo de Levi-Civita $[ijk]$ para 3 dimensões

como sendo

$$[ijk] = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k) \text{ é uma permutação par de } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ é uma permutação ímpar de } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{se quaisquer índices se repetem.} \end{cases} \quad (2)$$

esses dois objetos são essenciais para manter a coerência da convenção da soma. Dessa forma, conseguimos escrever várias propriedades vetoriais em termos desses dois objetos de forma simples e compacta.

1 Transformação de Coordenadas

Nos capítulos anteriores, nos utilizamos de vetores para descrever as quantidades do eletromagnetismo, atribuindo a essas quantidades um módulo e uma direção. Porém, nada foi dito sobre quais sistemas de coordenadas foram utilizados para descrever esses vetores. É assumido que tais quantidades devem, necessariamente, ser invariantes frente à mudança de referencial. Isso implica que, independente do sistema escolhido, deve ser sempre possível transcrevê-lo para outro sistema de coordenadas, de modo a manter invariantes as equações do eletromagnetismo. Sabemos da álgebra linear que, dado um vetor \mathbf{x} podemos aplicar nesse vetor uma transformação linear, tal que o vetor \mathbf{x}' seja dado por

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (3)$$

onde \mathbf{T} é a matriz transformação que representa a transformação linear. Devemos observar que o vetor \mathbf{x} possui uma base associada. Uma possível interpretação da transformação acima consiste em considerar que os vetores da base são afetados pela transformação linear. Então, quanto aplicamos uma transformação em um vetor, estamos aplicando uma transformação em sua base. Uma maneira de encontrar a matriz de transformação é considerando 2 conjuntos de bases, \mathbf{e}_i e \mathbf{e}'_i , sendo essas as bases original e transformada, respectivamente. Como os vetores dessas bases são linearmente independentes, podemos escrever cada componente da base transformada como sendo combinações lineares dos

vetores da base original da seguinte forma:

$$\mathbf{e}'_i = F_i^k \mathbf{e}_k, \quad (4)$$

em que F_i^k são componentes da transformação. No caso de bases cartesianas, essas componentes são constantes. Da mesma maneira, podemos escrever as componentes da base sem linha (original) em termos da base linha (transformada) como

$$\mathbf{e}_i = G_i^k \mathbf{e}'_k. \quad (5)$$

Podemos notar a seguinte relação

$$\mathbf{e}_i = F_i^k \mathbf{e}'_k = F_i^k (G_k^j \mathbf{e}_j) = \delta_i^j \mathbf{e}_j. \quad (6)$$

Dessa forma, concluímos que a matriz \mathbf{G} tem que ser necessariamente a inversa da matriz \mathbf{F} , pois quando é feito a contração em k obtemos a delta de Kronecker.

Note que o vetor transformado \mathbf{x}' pode ser expresso na base original. Suas componentes \tilde{x}^i nessa base podem ser obtidas considerando-se

$$\mathbf{x}' = x^i \mathbf{e}'_i = x^i F_i^k \mathbf{e}_k, \quad (7)$$

de onde identificamos a expansão $\mathbf{x} = \tilde{x}^k \mathbf{e}_k$, com coeficientes \tilde{x}^k dados por

$$\tilde{x}^k = F_i^k x^i. \quad (8)$$

Notamos então que as componentes se transformam de forma inversa aos vetores da base, pela mesma transformação. Diferenciando a expressão acima em relação a x^j e usando $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$, podemos representar os coeficientes F_i^k na forma:

$$F_k^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k}. \quad (9)$$

Usando ainda $\delta_i^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}$, concluímos que $G_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}$. Note que essas relações valem para sistemas cartesianos.

De forma geral, a transformação entre sistemas de coordenadas não segue uma lei linear

como visto acima. Além disso, a lei de transformação depende do ponto particular que está sendo transformado. Nesse caso, a transformação entre coordenadas x^j e \tilde{x}^i segue uma lei geral da forma $x^j = x^j(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$. Nesse caso, podemos generalizar o resultado acima através da matriz Jacobiana dessa transformação, cujos elementos são definidos da seguinte forma:

$$J_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}. \quad (10)$$

O Jacobiano nos informa a relação entre um vetor em dois sistemas de coordenados distintos, em que as funções das coordenadas podem ser derivadas. Para verificar isso é simples, suponha que \mathbf{R} é um vetor que dependa das coordenadas x^i e que podemos escrever $x_i = x_i(\tilde{x}^j)$. Então pela regra da cadeia temos

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tilde{x}^j} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^i}, \quad (11)$$

que é exatamente

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tilde{x}^j} = J_j^i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^i}. \quad (12)$$

O Jacobiano obedece a todas as regras que definimos para transformações, podendo ser identificado como uma generalização da matriz de transformação de bases.

2 Tensor métrico

Na seção anterior, descrevemos como um sistema de coordenadas se transforma, e mostramos como a transformação entre sistemas pode ser generalizado através da matriz Jacobiana. Porém, apenas isso não nos fornece informações suficientes acerca do espaço que queremos estudar, em particular sobre suas propriedades geométricas. Precisamos então descobrir como acessar as propriedades inerentes ao espaço. Para tal, introduzimos o conceito de métrica, a partir da qual podemos extrair toda informação sobre a geometria do espaço que queremos estudar. Podemos defini-la de maneira simples considerando que a medida de distâncias é algo inerente à qualquer espaço. Assim, podemos adotar um elemento de distância ds em um sistema euclidiano como sendo

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (13)$$

Como sabemos a medida de distância deve ser invariante frente a mudanças de sistema de coordenadas, podemos igualar essa quantidade àquela obtida após a aplicação de uma mudança de coordenadas:

$$ds^2 = \delta_{ij} J_k^i J_l^j dx^k dx^l \equiv g_{kl} dx^k \cdot dx^l \quad (14)$$

Aqui, definimos como métrica o objeto $g_{kl} = \delta_{ij} J_k^i J_l^j = J_k^i J_l^j$. Essa grandeza nos informa a maneira como a medida de distância varia quando mudamos de um sistema coordenado para outro. Podemos observar também que a equação (14) pode ser reescrita como o módulo quadrado de um vetor \mathbf{V} . Assim, podemos também expressar a métrica em termos dos eixos coordenados. Para isso, consideramos a relação

$$|\mathbf{A}|^2 = A^i A^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j. \quad (15)$$

Note que os eixos \mathbf{e}_i acima não precisam ser ortogonais ou normalizados, como é o caso cartesiano. Dessa forma conseguimos associar a métrica ao vetores de base do espaço através da seguinte relação:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij} \quad (16)$$

dessa forma conseguimos definir uma métrica inclusive para sistemas que não são ortogonais. Note que, no caso cartesiano, a métrica tem a forma euclidiana $g_{ij} = \delta_{ij}$. É fácil verificar que a métrica deve obedecer algumas regras importantes, sendo elas:

- Simetria: $g_{ij} = g_{ji}$.
- Possuir inversa: $g^{ij} g_{ik} = \delta_k^j$

O tensor métrico possui propriedades fundamentais que são frequentemente utilizadas na geometria diferencial. Uma delas é a capacidade de converter índices covariantes (índices inferiores) em contravariantes (índices superiores), conforme

$$A^i = g^{ij} A_j. \quad (17)$$

Assim, o mesmo vetor \mathbf{A} pode ser representado nas formas covariante e contravariante, estando essas formas (ditas duais) conectadas pela métrica do espaço. Outra propriedade importante, derivada do conceito de comprimento de arco, é a definição de um elemento

de volume, dado por

$$dv = \sqrt{g} d^3x, \quad (18)$$

onde $g = \det(g_{ij})$ é o determinante do tensor métrico. Essa propriedade segue diretamente da relação $g_{ij} = J_i^k J_j^k$, a qual implica $g = \det(J)^2$.

Por fim, temos de enunciar um teorema importante da geometria diferencial, chamado *Teorema da Existência de Coordenadas Normais de Riemann* [11] que pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 1. *Dado um espaço vetorial, podemos sempre definir nas proximidades de um ponto P , um sistema de coordenadas que se diferencia da métrica euclidiana apenas por uma função escalar $f(x^k)$. Isso é*

$$g_{ij} = f(x^k) \delta_{ij} \quad (19)$$

Tais coordenadas são chamadas de **coordenadas normais de Riemann** em torno do ponto p .

O teorema (1) garante que em torno de qualquer ponto de um espaço podemos escrever a métrica como uma métrica diagonal. Note que o espaço difere do espaço cartesiano apenas por uma função $f(x^k)$, como consequência podemos definir todas as propriedades do espaço em torno desse ponto apenas sabendo quem é $f(x^k)$.

3 Derivada covariante e coeficientes de conexão

Para um sistema não cartesiano, sistemas de coordenadas associados a pontos diferentes do espaço em geral serão distintos, pois estão relacionados à uma particular lei de transformação. Então, para um vetor \mathbf{A} escrito nessa base, o diferencial em relação à coordenada x^k é

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^k} dx^k \quad (20)$$

Uma vez que os vetores da base são funções da posição, podemos expressar a derivada parcial do vetor \mathbf{A} na forma

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^k} = \frac{\partial(A^i \mathbf{e}_i)}{\partial x^k} = \mathbf{e}_i \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + A^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k}. \quad (21)$$

Se quisermos apenas saber qual é a variação das componentes de \mathbf{A} , basta fazermos o

produto interno com a base covariante \mathbf{e}^j . Dessa forma, obtemos

$$\frac{\partial A^j}{\partial x^k} = \frac{\partial A^j}{\partial x^k} + A^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{e}^j, \quad (22)$$

onde usamos $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^j = g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$. Definimos agora a quantidade $\Gamma_{ik}^j \equiv \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{e}^j$. Reescrevendo a expressão acima em termos dessa grandeza, e trocando o símbolo de derivada parcial por “ ∇ ”, obtemos

$$\nabla_k A^j = \frac{\partial A^j}{\partial x^k} + A^i \Gamma_{ik}^j, \quad (23)$$

em que Γ_{ik}^j é chamado de coeficiente da conexão, ou símbolos de Christoffel do segundo tipo. Os coeficientes de conexão são objetos nos informam o quanto um vetor é “inclinado” ou “curvado” quando é transportado paralelamente em uma determinada direção no espaço curvo. Isso porque o segundo termo acima pode ser interpretado como a variação do vetor \mathbf{A} quando este é transportado paralelamente (isto é, mantendo sua forma original) do ponto inicial ao ponto vizinho, onde o sistema de eixos sofre uma mudança.

A equação (23) é a forma mais utilizada para se calcular a derivada covariante. Porém torna-se claro que encontrar os coeficientes da conexão pode ser trabalhoso, dependendo do tipo de vetores de base que estamos utilizando. Para resolver esse problema, introduzimos a chamada conexão de Levi-Civita, que é definida para uma conexão que é simétrica nos índices i e k . Por definição, a conexão de Levi-Civita [12] é dada por

$$\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{2} g^{jl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right). \quad (24)$$

Essa conexão é extremamente importante, pois ela garante que a derivada covariante da métrica seja nula. Isso garante que o módulo do vetor e seus ângulos são preservados. A partir de agora, iremos assumir que para os espaços que estamos tratando obedecem a essa conexão.

4 Geodésica e Transporte paralelo

Agora que sabemos como calcular a métrica e vimos que para espaços curvos precisamos de uma conexão que define como nossos vetores variam entre pontos vizinhos, é nor-

mal também perguntarmos como um vetor varia quando percorre um caminho no espaço curvo. Uma forma direta de se fazer isso é considerando um princípio variacional, onde o caminho percorrido é minimizado com relação à geometria curva do espaço. Devido às características geométricas do nosso problema, podemos considerar uma função *lagrangiana* equivalente, aplicando assim o princípio de mínima ação. O caminho total a ser percorrido pode ser escrito na forma

$$\int ds = \int \frac{ds}{dt} dt = \int \sqrt{g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}} dt. \quad (25)$$

Vemos daí que é natural escolhermos a seguinte *lagrangiana* [1]

$$L = \frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} \quad (26)$$

em que \dot{x}^i é definido como $\frac{dx^i}{dt}$. Substituindo (26) na equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \quad (27)$$

obtemos a chamada equação da *geodésica* que possui a forma

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (28)$$

A equação (28) mostra como as componentes de um vetor mudam quando percorrem um caminho parametrizado em um espaço curvo. Para o caso da luz, essa equação descreve como o meio material irá alterar o caminho da luz de acordo com a propagação dela pelo meio. Outra forma de interpretar essa equação é notando que $\frac{dx^j}{ds}$ é exatamente a componente de um vetor unitário tangente parametrizado pelo comprimento de arco. Podemos simplificar essa equação escrevendo

$$\frac{dx^j}{ds} = A^j \quad (29)$$

substituindo (29) em (28), obtemos

$$\frac{dA^i}{ds} + \Gamma_{jl}^i A^j A^l = 0. \quad (30)$$

Podemos manipular essa equação, através do uso de regra da cadeia, para obter o seguinte resultado:

$$A^l \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{jl}^i A^j \right) = 0, \quad (31)$$

que pode ser reescrito na forma

$$A^l \nabla_l A^i = 0. \quad (32)$$

Com esse resultado vemos que, para um vetor que segue uma geodésica, a variação desse vetor na direção do caminho é nula. Chamamos esse fenômeno de transporte paralelo. Isso significa que a variação do vetor é paralela e igual em todos os pontos do o caminho percorrido.

5 Curvatura

Tendo estudado a definição e sentido geométrico dos símbolos de conexão, iremos introduzir um novo objeto que depende exclusivamente dessas grandezas. O *tensor de Riemann* é fundamental na geometria diferencial, sendo o responsável por caracterizar a curvatura do espaço de interesse [13]. Uma maneira fácil de definir o tensor de Riemann é utilizando a relação

$$[\nabla_k, \nabla_l] V^i = R_{jkl}^i V^j \quad (33)$$

em que $[\nabla_k, \nabla_l]$ é o comutador entre as derivadas covariantes associadas a conexão de Levi-Civita. Explicitamente, podemos expressar o tensor R_{jkl}^i como

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jm}^i \Gamma_{kl}^m - \Gamma_{km}^i \Gamma_{jl}^m. \quad (34)$$

O tensor de Riemann, quando expresso de forma totalmente covariante, obedece às chamadas identidades de Bianchi [12], que fornecem informações cruciais sobre sua antissimetria. A primeira identidade de Bianchi refere-se à antissimetria dos três últimos índices do tensor de Riemann, e pode ser escrita na forma

$$R_{mkl} + R_{mklj} + R_{mljk} = 0. \quad (35)$$

A segunda identidade de Bianchi relaciona a antissimetriação das derivadas covariantes do tensor de Riemann, sendo expressa como

$$\nabla_m R_{jkl}^i + \nabla_k R_{jlm}^i + \nabla_l R_{jm}^i = 0 \quad (36)$$

A partir do tensor de Riemann, podemos obter outro objeto que engloba informações relevantes sobre a curvatura do espaço, o chamado tensor de Ricci. Ele pode ser obtido pela contração do tensor de Riemann, na seguinte forma

$$R_{jil}^i = R_{jl} \quad (37)$$

O tensor de Ricci descreve a curvatura seccional do espaço, dessa forma nos fornecendo uma caracterização local da curvatura do espaço. Além disso, podemos introduzir um número escalar associado ao tensor de Ricci, conhecido como o escalar de Ricci. Ele é obtido pela contração total do tensor de Ricci, da seguinte forma

$$R_{jj} = R \quad (38)$$

Dessa maneira, o escalar de Ricci sintetiza informações sobre a curvatura facilitando o estudo das propriedades geométricas do espaço.

6 Mapeamento conforme

Na geometria diferencial, podemos definir um subconjunto de espaços curvos que possuem seu tensor de curvatura definido apenas por uma função escalar de acordo com o teorema (1)

A importância disso é o fato de essa propriedade garantir que o tensor de curvatura irá apenas depender dessa função escalar $f(x^i)$. A consequência de utilizar um subespaço que obedeça essa condição é o fato de que agora o módulo dos vetores não será mais conservado, porém o ângulo entre dois vetores será. Espaços que obedecem a esse princípio são chamados de conformalmente planos, pois diferem do espaço plano apenas por uma transformação conformal. A utilidade desses mapas vem primeiramente do teorema de Riemann, e segundo do fato de que eles nos permitem calcular facilmente as componentes

do tensor de Riemann em qualquer dimensão, utilizando

$$\begin{aligned}
R_{jkl}^i &= \frac{1}{f} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^k} \delta_{il} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^l} \delta_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^k} \delta_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^l} \delta_{jk} \right) \\
&+ \frac{1}{f^2} \left[\frac{\partial f}{\partial x^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^l} \delta_{ik} - \frac{\partial f}{\partial x^k} \delta_{il} \right) + \frac{\partial f}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} \delta_{jl} - \frac{\partial f}{\partial x^l} \delta_{jk} \right) \right. \\
&\left. - \frac{\partial^2 f}{\partial (x^m)^2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \right]. \tag{39}
\end{aligned}$$

Por fim, para os nossos estudos estaremos interessados em criar mapas que podem ser escritos por transformações conformais, pois facilitará obtenção dos parâmetros ópticos e permitirá uma analogia simples entre o espaço físico e o espaço virtual em que iremos trabalhar.

7 Reescrevendo os operadores diferenciais

Após discutirmos os conceitos básicos de geométrica diferencial, podemos agora utilizar de algumas relações obtidas para reescrever os operadores diferenciais usualmente definidos em coordenadas cartesianas. Primeiramente, iremos reescrever o divergente, e em seguida o rotacional, terminando com a definição do Laplaciano em coordenadas quaisquer.

7.1 Divergente

O divergente na convenção da soma pode ser escrito como $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i}$; se considerarmos um sistema de coordenadas qualquer, essa expressão pode ser relacionada com a derivada covariante como

$$\nabla_j A^j = \frac{\partial A^j}{\partial x^j} + A^i \Gamma_{ij}^j. \tag{40}$$

Sabemos que a derivada covariante de um vetor qualquer em um espaço que obedece a conexão de Levi-Civita pode ser escrita como

$$\nabla_j A^j = \frac{\partial A^j}{\partial x^j} + A^i \left[\frac{1}{2} g^{jl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} \right) \right], \tag{41}$$

onde usamos explicitamente a forma dos coeficientes de conexão dadas por (24). Podemos notar que, se trocarmos os índices mudos e utilizarmos a simetria da métrica, obtemos

$$g^{jl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) = 0 \quad (42)$$

De forma que para uma conexão de Levi-Civita obtemos

$$\nabla_j A^j = \frac{\partial A^j}{\partial x^j} + A^i \left(\frac{1}{2} g^{jl} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} \right) \quad (43)$$

Utilizando o resultado de que $g^{jl} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i}$, obtemos

$$\nabla_j A^j = \frac{\partial A^j}{\partial x^j} + \frac{A^i}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} \quad (44)$$

A equação acima pode ser reescrita utilizando a regra da cadeia, de forma que obtemos para o divergente a relação

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} A^i). \quad (45)$$

Com a expressão acima conseguimos determinar facilmente o divergente em qualquer sistema de coordenadas em um espaço que obedece a conexão de Levi-Civita.

7.2 Rotacional

Sabemos do cálculo vetorial que o rotacional de um campo vetorial é escrito na convenção da soma como

$$\nabla \times \mathbf{A} = \varepsilon^{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \mathbf{e}_i, \quad (46)$$

onde ε^{ijk} representa o símbolo de Levi-Civita no sistema transformado. Usando as propriedades usuais de transformação, obtemos:

$$\varepsilon^{ijk} = \pm \frac{1}{\sqrt{g}} [ijk], \quad (47)$$

sendo $[ijk]$ o símbolo de permutação definido em (2). A escolha do sinal na relação acima está vinculada ao sistema transformado obedecer ou não o sistema de mão direita.

Substituindo na equação para o rotacional, obtemos a forma final como sendo

$$\nabla \times \mathbf{A} = \pm \frac{1}{\sqrt{g}} [ijk] \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \mathbf{e}_i. \quad (48)$$

7.3 Laplaciano

Antes de definir o Laplaciano, precisamos definir a forma do operador gradiente em coordenadas generalizadas. Vamos considerar a situação em que queremos encontrar a variação de um campo potencial ao longo de um elemento de caminho. Podemos escrever então que

$$dU = \nabla U \cdot d\mathbf{r}. \quad (49)$$

Em termos das componentes dos campos vetoriais e dos vetores de base, temos

$$dU = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j (\nabla U)^i dx^j = g_{ij} (\nabla U)^i dx^j. \quad (50)$$

Por outro lado, para um escalar $U = U(x^1, x^2, x^3)$, podemos escrever

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x^j} dx^j. \quad (51)$$

Comparando as expressões acima (válidas para dx^j arbitrários), concluímos que

$$\frac{\partial U}{\partial x^j} = (\nabla U)^i g_{ij}. \quad (52)$$

Multiplicando os dois lado pelo inverso da métrica g^{ij} , e usando o fato da métrica ser simétrica, obtemos que as componentes do vetor gradiente em coordenadas generalizadas são

$$(\nabla U)^i = g^{ij} \frac{\partial U}{\partial x^j}. \quad (53)$$

Fazendo uso da relação acima podemos, finalmente escrever o gradiente como sendo o objeto

$$\nabla U = (\nabla U)^i \mathbf{e}_i = g^{ij} \frac{\partial U}{\partial x^j} \mathbf{e}_i. \quad (54)$$

A partir da definição do gradiente obtida acima, e utilizando a forma do divergente,

equação (45), é direto obter o Laplaciano, que será

$$\nabla \cdot \nabla U = \nabla^2 U = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial U}{\partial x^j} \right) \quad (55)$$

A expressão acima pode ser diretamente generalizada para um campo vetorial \mathbf{A} qualquer, na forma

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^j} \right). \quad (56)$$

8 Considerações finais

Neste capítulo, revisamos os conceitos básicos da geométrica diferencial para a descrição de espaços vetoriais em três dimensões. Porém, para estudos mais avançados na óptica de transformação, torna-se necessário um aprofundamento maior dentro desse campo, fazendo-se uso de propriedades e relações que não foram discutidas nesse breve capítulo. Esse é o caso, por exemplo, das transformações realizadas em espaços de quadrvetores. A diferença fundamental nesse caso é que a métrica intrínseca do espaço não mais é euclidiana. Além disso, as equações de Maxwell, discutidas nos capítulos anteriores, assumem formas mais compactas em termos do tensor de campo e do quadrvetor densidade de corrente. Esses tópicos estão fora do esboço do presente trabalho, cujo foco é o estudo da óptica de transformação no espaço real, no contexto de validade da óptica geométrica.

Para facilitar a busca, faremos um resumo das equações importantes que serão utilizadas no decorrer deste trabalho. Começaremos com os operadores vetoriais em coordenadas quaisquer:

1. $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} A^i)$
2. $\nabla \times \mathbf{A} = \pm \frac{1}{\sqrt{g}} [ijk] \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \mathbf{e}_i$
3. $\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^j} \right)$

Além disso, listamos aqui algumas das relações fundamentais da geometria diferencial:

1. $\nabla_k A^j = \frac{\partial A^j}{\partial x^k} + A^i \Gamma_{ik}^j$
 2. $[\nabla_k, \nabla_l] V^i = R_{jkl}^i V^j$
 3. $R_{m j k l} + R_{m k l j} + R_{m l j k} = 0$
 4. $\nabla_m R_{jkl}^i + \nabla_k R_{jlm}^i + \nabla_l R_{jm k}^i = 0$
- (58)

Iremos agora utilizar essas relações para descrever as leis do eletromagnetismo em um espaço curvo, comparando a forma dessas equações com aquelas obtidas em espaços euclidianos na presença de meios anisotrópicos. Com isso, vamos estabelecer uma analogia entre essas duas abordagens, aparentemente distintas.

Relação entre eletromagnetismo em geometrias curvas e meios anisotrópicos

Tendo desenvolvido o ferramental necessário para compreender as ideias básicas da geometria diferencial, podemos agora reescrever as equações de Maxwell no vácuo considerando uma geometria arbitrária, fazendo uso das equações (57), introduzidas no capítulo anterior. Como resultado, obtemos as expressões

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}g^{ij}E_j) = \frac{\sqrt{g}\rho_{livre}}{\varepsilon_0} \\
 2. \quad & [ijk]\frac{\partial E_k}{\partial x^j} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\pm\sqrt{g}g^{ij}H_j) \\
 3. \quad & \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}g^{ij}H_j) = 0 \\
 4. \quad & [ijk]\frac{\partial H_k}{\partial x^j} = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\pm\sqrt{g}g^{ij}E_j) \pm \sqrt{g}J^i
 \end{aligned} \tag{1}$$

Note que, nessas relações, eliminamos o campo magnético em favor do campo auxiliar $\mathbf{H} = \mu_0\mathbf{B}$. Além disso, as equações são escritas de modo que os vetores \mathbf{E} e \mathbf{H} aparecem em suas versões covariantes. Esse procedimento é essencial para estabelecer a conexão do espaço curvo em questão com o meio material. Queremos agora associar a geometria do espaço com as propriedades do meio. Pela discussão introduzida no final do Capítulo 3 sabemos que, em meios anisotrópicos, a permissividade elétrica e permeabilidade magnética agem como matrizes que transformam a maneira de propagação dos campos elétricos e magnéticos de acordo com a posição e com a direção. Das equações (47), podemos escrever as seguintes relações constitutivas:

$$\begin{aligned}
 D^i &= \varepsilon_0\varepsilon^{ij}E_j \\
 B^i &= \mu_0\mu^{ij}H_j
 \end{aligned} \tag{2}$$

Com base nas equações acima, vemos que as equações de Maxwell em um espaço arbitrário podem ser associadas a um meio anisotrópico, desde que as seguintes conexões sejam

estabelecidas:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ij} &= \pm\sqrt{g}g^{ij} = 1 + \chi_e^{ij} \\ \mu^{ij} &= \pm\sqrt{g}g^{ij} = 1 + \chi_m^{ij}\end{aligned}\tag{3}$$

Essas relações necessariamente implicam na condição $\varepsilon^{ij} = \mu^{ij}$. Tal condição é chamada de *correspondência de impedância*. Ela nos garante que as propriedades que calculamos no espaço virtual serão idênticas àquelas observadas no espaço físico. Essa condição é de extrema importância física, pois ela não ocorre naturalmente na natureza; de modo que torna-se necessário produzir materiais com esse tipo de propriedade, e estudar quais as condições microscópicas necessárias para garantir essa condição em diferentes materiais. Outro ponto importante é o fato dessa condição garantir que a impedância do material seja igual à do vácuo. Isso significa que não haverá reflexões indesejadas na interface entre o material e o vácuo [1]. Chegamos a essa conclusão por meio da análise dos determinantes em (3), onde:

$$\det(\boldsymbol{\varepsilon}) = \det(\sqrt{g}\mathbf{g}^{-1}).\tag{4}$$

Utilizando o fato de que $\det(a\mathbf{M}) = a^3 \det(\mathbf{M})$ e $\det(\mathbf{M}^{-1}) = (\det(\mathbf{M}))^{-1}$ (sendo \mathbf{M} uma matriz 3×3 e a um escalar), concluímos que $\det(\boldsymbol{\varepsilon}) = \pm\sqrt{g}$. Substituindo na equação (3) e isolando g^{ij} em termos de ε^{ij} obtemos

$$g^{ij} = \pm \frac{\varepsilon^{ij}}{\det(\boldsymbol{\varepsilon})} = \pm \frac{\mu^{ij}}{\det(\boldsymbol{\mu})}\tag{5}$$

É importante destacar que não estamos nos referindo à geometria do material, mas sim à geometria de um espaço abstrato, em que os efeitos da anisotropia do material aparecem como efeitos geométricos inerentes à esse espaço.

Da equação (5), podemos adquirir um significado da métrica para a propagação da luz no material considerando seus elementos diagonais. Por exemplo, segue da relação acima que o elemento g^{11} é

$$g^{11} = \frac{\varepsilon^{11}}{\det(\boldsymbol{\varepsilon})}.\tag{6}$$

Mas, considerando que no material o tensor de permissividade seja diagonal, com autovalores nos eixos principais ε_x , ε_y e ε_z , obtemos $\varepsilon^{11} = \varepsilon_x$. Como vimos que pelo teorema (1), podemos sempre escolher $\boldsymbol{\varepsilon}$ tal que ele seja diagonal localmente. Assim, podemos

escrever o determinante como $\det(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$. Dessa forma, temos

$$g^{11} = \frac{1}{\varepsilon_y \varepsilon_z}. \quad (7)$$

Como g^{ij} é diagonal, segue da relação acima que o elemento g_{11} da métrica será

$$g_{11} = \varepsilon_y \varepsilon_z. \quad (8)$$

Podemos interpretar um elemento de arco paralelo ao eixo principal \mathbf{e}_x do sistema cartesiano (antes da transformação) como sendo um elemento de caminho dl_x percorrido pela luz na ausência do material, isto é, no vácuo. Conforme vimos em (14), o elemento de arco dx percorrido no material está relacionado a dl_x por $(dl_x)^2 = g_{11}(dx)^2$. Se os elementos de arco são percorridos em um intervalo dt (invariante nos dois sistemas), podemos concluir que:

$$c^2 = g_{11} v_x^2 \longrightarrow g_{11} = \frac{v_x^2}{c^2}, \quad (9)$$

onde v_x é a velocidade da luz no meio. Assim, podemos identificar o elemento g_{11} com n_x^2 , onde $n_x = v_x/c$ é o índice de refração na direção do eixo principal x nesse ponto do material. Logo, $n_x^2 = g_{11} = \varepsilon_y \varepsilon_z$. Da mesma forma, concluímos facilmente que $g_{22} = n_y^2 = \varepsilon_x \varepsilon_z$ e $g_{33} = n_z^2 = \varepsilon_x \varepsilon_y$. Podemos definir uma matriz diagonal \mathbf{n} de elementos diagonais (n_x, n_y, n_z) , de modo que $\mathbf{g} = \mathbf{n}^2$. Como a relação entre dois tensores é independente do sistema de eixos, podemos concluir dessa discussão que:

$$(n_{ij})^2 = g_{ij}. \quad (10)$$

Vemos então uma conexão direta entre a métrica do espaço e o índice de refração local no material. Essa conexão é de extrema importância, pois ela que nos permite manipular as propriedades ópticas dos materiais da maneira que queiramos, além de relacionar facilmente as propriedades do material com a geometria de um espaço curvo. Digamos, por exemplo, que temos uma métrica semelhante à de Schwarzschild. Essa métrica nos diz que pode existir uma configuração para a qual o índice de refração pode ser tal que em torno de certa região temos uma distorção do caminho ótico que se assemelha à distorção causada por um buraco negro. Tais objetos são conhecidos como dispositivos de invisibilidade [14] [15] [16].

1 Equação da onda para um espaço curvo

Tendo definido a relação entre as equações de Maxwell em meios anisotrópicos e espaços curvos, iremos agora escrever a equação de uma onda que se propaga em um espaço vazio que possui uma geometria curva, de forma que poderemos utilizar as mesmas considerações feitas para a dedução de (44). Porém, trataremos nossas derivadas espaciais como sendo derivadas covariantes. Utilizando da notação indicial, podemos escrever:

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})]^i = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{klm} \nabla_j \nabla^l E^m \quad (11)$$

Usando a identidade $\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j$, obtemos

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})]^i = \nabla_j \nabla^i E^j - \nabla^l \nabla_l E^i \quad (12)$$

Podemos notar que o termo $\nabla_j \nabla^i E^j$ em situações que $\Gamma_{ik}^j = 0$ comutam, de forma que podemos interpretar o resultado como o gradiente do divergente. Para situações mais gerais em que não ocorre a comutação, podemos adicionar e subtrair $\nabla^i \nabla_j E^j$, de forma a obter

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})]^i = \nabla_j \nabla^i E^j - \nabla^l \nabla_l E^i + \nabla^i \nabla_j E^j - \nabla^i \nabla_j E^j. \quad (13)$$

Notamos que $\nabla_j \nabla^i E^j - \nabla^i \nabla_j E^j = [\nabla_j \nabla^i] E^j$. É interessante nesse estágio utilizarmos a métrica para baixar o índice i , pois assim conseguimos usar a relação (2) em (58), que é dada por $[\nabla_j, \nabla_i] E^j = R_{kji}^j E^k$. Dessa forma, multiplicando ambos os lados da igualdade pela métrica, obtemos

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})]_i = R_{ki} E^k - \nabla^l \nabla_l E_i. \quad (14)$$

De forma análoga ao que foi feito para a equação (44), podemos escrever o lado direito da Lei de Ampère, após a aplicação de $\varepsilon^{ijk} \nabla_j$, usando a Lei de Faraday. Em notação indicial, obtemos

$$\mu_0 \varepsilon^{ijk} \nabla_j \left(\frac{\partial H_k}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E^i}{\partial t^2} \quad (15)$$

Para igualar essa expressão à (14), devemos ainda baixar o índice i :

$$\mu_0 \varepsilon_i^{jk} \nabla_j \left(\frac{\partial H_k}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2}, \quad (16)$$

de forma a obter finalmente a equação

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = \nabla^l \nabla_l E_i - R_{ki} E^k. \quad (17)$$

A equação (17) é a forma de uma onda eletromagnética que se propaga em um espaço curvo e vazio. Podemos ver claramente que, para espaços que não possuem curvatura, o segundo termo do lado direito é nulo, e equação da onda “tradicional” no espaço cartesiano é recuperada. Utilizando a equação da onda nessa forma se torna mais fácil nossa análise da propagação da onda em um espaço curvo, pois as soluções das equações de propagação no vácuo podem ser associadas diretamente à propagação no meio material.

2 Caminho ótico em materiais anisotrópicos

Após generalizar a equação da onda eletromagnética se propagando em espaços curvos, vamos agora analisar o comportamento de propagação em um meio. Suponhamos que a solução da equação (17) tem forma similar à uma onda plana, de modo que o campo elétrico (ou magnético) pode ser escrito com a forma $E_i = A_i e^{i\phi}$, em que a fase ϕ é uma função do tempo e da posição, e A_i é a amplitude complexa do campo, que também depende do tempo e da posição. Calculando a derivada temporal de E_i , obtemos

$$\frac{dE_i}{dt} = e^{i\phi} \left(\frac{dA_i}{dt} + A_i \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (18)$$

Como queremos uma onda que seja coerente no tempo, podemos assumir que $\frac{d\phi}{dt}$ se anula. Calculando a derivada covariante de E_i , obtemos

$$\nabla_i E_i = e^{i\phi} (\nabla_i A_i + A_i \nabla_i \phi) \quad (19)$$

Podemos ver que $\nabla_i \phi$ define um gradiente que associamos ao vetor de propagação k_i , que aponta na direção normal às frentes de onda (onde ϕ é constante). De forma geral, podemos construir a fase ϕ como sendo

$$\phi = \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} \pm \omega t \quad (20)$$

em que $\omega = \frac{\partial \phi}{\partial t}$. O sinal depende de como estamos observando a direção de propagação: (-) para uma onda progressiva e (+) para uma onda regressiva.

Agora, vamos construir nossa solução partindo de duas suposições. A primeira é: a variação do comprimento de onda λ não varia muito para pequenas distâncias. A segunda hipótese é: para distâncias na escala do comprimento de onda, a curvatura efetiva é muito pequena. Matematicamente, podemos resumir as duas condições como sendo

$$\begin{aligned} |\nabla \lambda| &\ll 1 \\ |R_{ij}| \lambda^2 &\ll 1 \end{aligned} \tag{21}$$

A primeira dessas relações estabelece que a resolução espacial típica é muito maior que o comprimento de onda, sendo a condição usual de domínio da óptica geométrica em espaços planos. A segunda condição pode ser vista como uma extensão que incorpora efeitos de curvatura local do espaço em questão. É importante notar que essas equações são invariantes frente a transformações de coordenadas. Dessa forma, se elas são válidas no espaço virtual (antes da transformação), elas também serão válidas no espaço real (após a transformação). Essas relações garantem que o limite de análise seja o limite de óptica geométrica para geometrias arbitrárias, permitindo caracterizar a propagação da luz por meio de raios que descrevem sua trajetória no espaço.

Vamos agora analisar a equação da onda considerando essas condições. Substituindo E_i em (17), obtemos para o divergente

$$\nabla^j \nabla_j E_i = e^{i\phi} (\nabla^j \nabla_j A_i + 2ik^j \nabla_j A_i + iA_i \nabla_j k^j - k^j k_j A_i). \tag{22}$$

Para a derivada temporal, assumindo uma onda progressiva, obtemos

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = e^{i\phi} \left(\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial A_i}{\partial t^2} - \omega^2 A_i \right) \tag{23}$$

No domínio da óptica geométrica, as contribuições mais relevantes provém da variação da fase, pois ela varia de forma muito mais rápida que a amplitude. Podemos assumir que, na média, a maior contribuição para a variação dos campos é aproximadamente a maior

contribuição da variação da fase [10]. Com isso, conseguimos escrever

$$\begin{aligned}\nabla^j \nabla_j E_i &= -e^{i\phi} k^j k_j A_i \\ \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} &= -e^{i\phi} \omega^2 A_i\end{aligned}\tag{24}$$

Nos limites impostos por (21), podemos ignorar o tensor de Ricci. Dessa forma, substituindo as duas equações acima na equação da onda, obtemos

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^j k_j.\tag{25}$$

A relação (25) é chamada de relação de dispersão. Podemos reescrever-la em termos da métrica abaixando o índice do vetor de onda, obtendo assim

$$\frac{\omega^2}{c^2} = g^{ij} k_i k_j.\tag{26}$$

Agora reescrevemos a frequência de propagação da onda plana como sendo

$$\omega^2 = c^2 g^{ij} k_i k_j.\tag{27}$$

Segue da equação (10) que a frequência deve se alterar de acordo com o índice de refração segundo a seguinte relação:

$$\omega^2 = c^2 (n^{ij})^2 k_i k_j\tag{28}$$

Com a relação acima, podemos ver que existe uma dependência não-trivial entre a frequência de uma onda incidente e o índice de refração do material, o que pode gerar efeitos interessantes como por exemplo a decomposição de uma luz branca polarizada durante a propagação em uma mistura de água e açúcar. Nesse caso a mistura age como um meio anisotrópico que seleciona as frequências com base no sentido de polarização da luz, dessa forma muda a frequência da luz na saída do tubo dependendo de como a ela é polarizada antes de entrar no tubo.

Podemos mostrar também que, se a frequência da luz é constante durante todo o caminho, necessariamente a seguinte condição deve ser obedecida:

$$\nabla_j k^i k_i = k^i \nabla_j k_i = 0.\tag{29}$$

Essa relação é justamente a condição (32), ou seja, no espaço curvo a propagação luminosa continua sendo tal que a variação do vetor de onda obedece a equação da geodésica, seguindo assim o princípio de Fermat. Esse resultado mostra que, apesar de todas as considerações, ainda estamos obedecendo a o princípio fundamental da óptica de transformação.

É importante notar que, no caso de um espaço o mesmo vetor \mathbf{k} aparece de duas formas diferentes (covariante e contravariante), que representam duas grandezas distintas. Quando ele é contravariante (k^i) ele representa o *vetor de propagação*, e quando aparece em sua forma covariante k_i estamos falando do gradiente da fase. No espaço físico (transformado) esses dois objetos apontam em diferentes direções, a não ser que o espaço seja plano, ou seja, o material seja isotrópico. Enquanto as componentes $k_i = \nabla_i \phi$ são ortogonais aos planos de fase constante, as componentes k^i são tangentes aos arcos de caminho dx^i no meio. Isso pode ser visto diretamente da relação $\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k_i}$. Usando a relação de dispersão (26), vemos claramente que:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{cg^{ij}k_j}{\sqrt{g^{lm}k_l k_m}} = \frac{c}{\omega} k^i, \quad (30)$$

da onde concluímos que k^i aponta na direção do raio luminoso em cada ponto.

3 Transformações Gerais

Durante nosso estudo até aqui, tratamos apenas da aplicação de uma única transformação. Porém, problemas de eletromagnetismo são naturalmente simplificados dependendo do sistema de coordenadas que escolhemos para descrever a geometria do objeto que estamos estudando. Por exemplo, é mais simples escolher coordenadas esféricas para resolver um problema de uma esfera carregada ao invés de escolher qualquer outro tipo de coordenada. Como vimos na revisão de geometria diferencial, podemos definir uma métrica a partir de uma transformação nas coordenadas, de forma que o elemento de caminho seja mantido. Logo, podemos estender essa definição para o seguinte caso: dado um elemento de caminho em uma geometria qualquer, esse elemento se transforma como

$$(ds)^2 = g_{ij} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j = g_{ij} J_k^i J_l^j dx^k dx^l, \quad (31)$$

onde agora \tilde{x}^i representam as coordenadas em uma nova transformação, sendo J_j^i os elementos da Jacobiana que promove a transformação do sistema (curvo) x^i ao novo sistema \tilde{x}^i . Dessa forma, definimos a nova métrica na geometria do problema como sendo

$$\tilde{g}_{kl} = g_{ij} J_k^i J_l^j. \quad (32)$$

Se retomarmos para a definição dos parâmetros constitutivos, concluímos que os tensores de permeabilidade e permissividade serão dados por

$$\mu^{ij} = \varepsilon^{ij} = \pm \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}} g^{kl} J_k^i J_l^j \quad (33)$$

em que γ é o determinante da métrica do novo sistema de coordenadas curvilíneo, $\gamma = \det(\tilde{g})$. Assim, conseguimos tratar dos nossos problemas de forma mais geral, pois conseguimos imbuir a geometria do material dentro da nossa definição de espaço, dessa forma conseguindo generalizar a métrica, e por consequência o índice de refração.

Podemos escrever a relação anterior na forma matricial como sendo

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}} \frac{\mathbf{J} \mathbf{g}^{-1} \mathbf{J}^T}{\det(\mathbf{J})}. \quad (34)$$

Essa forma nos permite então criar um mapeamento entre a geometria que queremos aplicar e os parâmetros constitutivos do material, lembrando que sempre podemos fazer uma transformação conforme para obter resultados importantes para cada material localmente.

A equação (34) é importante para os casos em que supomos que nosso espaço é vazio. Para o caso em que o espaço a ser transformado é não vazio (meio material), obtemos que os parâmetros constitutivos são dados por [1]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}} \frac{\mathbf{J} \mathbf{g}^{-1} \mathbf{J}^T}{\det(\mathbf{J})} \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (35)$$

em que $\boldsymbol{\varepsilon}'$ é uma permissividade do espaço virtual.

Outro resultado importante que precisamos levar em consideração é o fato de que estamos interessados nos valores principais do tensor dielétrico, pois a partir deles podemos determinar os índices de refração do material considerado. Porém, quando estamos aplicando uma transformação entre espaços curvos, os valores principais são em geral modificados pelas transformações não ortogonais. O cálculo dos auto-valores ε_i deve ser

realizado em uma representação cartesiana, onde esses valores são invariantes. Logo, deveríamos introduzir uma forma de calcula-los após realizada a transformação. Um resultado da álgebra linear que podemos utilizar é relacionado à invariância dos valores principais sobre a uma transformação $\mathbf{M}' = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{T}$. Podemos provar isso considerando que, dado $\mathbf{M} \mathbf{v} = m \mathbf{v}$ em que $\mathbf{v}' = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{v}$, temos que

$$\mathbf{M}' \mathbf{v}' = (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{v}). \quad (36)$$

Simplificando a equação acima, obtemos

$$\mathbf{M}' \mathbf{v}' = (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{M}) \mathbf{v} = m \mathbf{v}'. \quad (37)$$

Um tensor misto se transforma seguindo essa mesma regra, pois podemos escrever a transformação como sendo $T_{j'}^{i'} = J_i^{i'} T_j^i J_{j'}^j$ ou, em notação matricial, $\mathbf{T}' = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{J}$. Isso garante que seus valores principais sejam os mesmos em qualquer sistema de coordenadas.

Com esse resultado, podemos então utilizar $\varepsilon_k^i = \varepsilon^{ij} g_{jk}$ e transformar o tensor dielétrico em um tensor misto. Dessa forma obtendo os valores principais desse novo tensor que é invariante sobre transformações. Agora que possuímos maneiras de calcular o tensor de permissividade e encontrar os valores principais para aplicar a transformação, iremos começar a tratar exemplos de aplicação.

Aplicações de Óptica de transformação

No capítulo anterior, discutimos as implicações da utilização da óptica de transformação, chegando aos resultados para conseguirmos estudar fenômenos ópticos a partir desse novo ponto de vista. Seguiremos agora ilustrando alguns exemplos de aplicações práticas das técnicas desenvolvidas no capítulo anterior.

1 Dispositivo de invisibilidade

Podemos construir esse tipo de dispositivo considerando que o material proporciona uma mudança de coordenadas no espaço onde a radiação se propaga. No caso de um dispositivo de invisibilidade, isso é feito de modo a criar uma região onde os pontos internos são mapeados em pontos fora dessa região no espaço virtual. Esse tipo de mapeamento permite que raios luminosos que se propagam no espaço físico (transformado) sejam descritos por transformações que não permitem a propagação deles dentro da região especificada, “ocultando” assim um objeto inserido nessa região.

Para ilustrar esses efeitos, vamos considerar uma geometria cilíndrica, conveniente para nosso problema. Por simplicidade dos cálculos, escolheremos uma transformação geral, mas que seja capaz de capturar o fenômeno de invisibilidade. Assim, consideramos a transformação

$$r = r(r') + R, \theta = \theta', z = z', \quad (1)$$

onde $x^1 = r'$, $x^2 = \theta'$ e $x^3 = z'$ são as coordenadas radial, polar e longitudinal, respectivamente, em um sistema cilíndrico (antes da aplicação da transformação óptica). Essa transformação leva de um sistema cilíndrico para outro sistema cilíndrico em que existe um buraco de tamanho R . Isso pode ser feito escolhendo-se a função $r(r')$ de modo que $r(r' = 0) = 0$. Isso faz com que todos os pontos do espaço virtual (original) sejam mapeados em pontos exteriores ao círculo $r = R$ no espaço físico (transformado). Observando a geometria do problema, vemos que nosso espaço físico definido por $\{r, \theta, z\}$ e nosso sistema virtual definido por $\{r', \theta', z'\}$, são ambos descritos por coordenadas cilíndricas.

Logo, podemos aplicar uma jacobiana apenas para a transformação (1).

Podemos agora escrever as métricas, que são nesse caso facilmente obtidas escrevendo-se um elemento de arco ds no sistema cilíndrico:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (dz)^2. \quad (2)$$

Comparando com a expressão (14), vemos que a métrica tem a forma diagonal. Assim, podemos escrever a métrica para o espaço físico como sendo:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Concluímos daí que $\sqrt{\det(g)} = r$. Da mesma forma, podemos escrever a métrica do espaço virtual como

$$g' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

com $\sqrt{\det(g')} = r'$. A inversa de g' é dada por

$$g'^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r'^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

e representa a métrica em sua forma contravariante. Calculando agora a matriz jacobiana para a transformação que estamos propondo, obtemos

$$J = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

onde definimos $\sigma = \frac{\partial r}{\partial r'}$. Nesse caso, temos que $J = J^T$, e o determinante da jacobiana é $\det(J) = \sigma$. Com isso, podemos aplicar a (34), considerando que nosso espaço virtual tem $\varepsilon' = 1 = \mu'$, e substituir os valores obtidos acima para escrever o tensor dielétrico.

Dessa forma, obtemos

$$\varepsilon^{-1} = \frac{r'}{r\sigma} \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r'^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

que pode ser simplificado na forma

$$\varepsilon^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{r'}{r}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{rr'\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r'}{r\sigma} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Apesar da forma diagonal, devemos notar que os elementos diagonais não correspondem aos valores principais de permissividade. Porém sabemos que, como visto no capítulo anterior, os valores principais de um tensor podem ser obtidos se transformarmos esse tensor em um tensor misto. Faremos isso utilizando a métrica do espaço físico, pois é o espaço de interesse. Obtemos assim

$$\varepsilon^{-1}\gamma = \begin{bmatrix} \frac{r'}{r}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{r'\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r'}{r\sigma} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Devido a matriz ser diagonal sabemos que seus valores principais são dados pelos elementos da diagonal principal, logo obtemos $\varepsilon_{diagonal} = \left\{ \frac{r'}{r}\sigma, \frac{r}{r'\sigma}, \frac{r'}{r\sigma} \right\}$. A partir daí, concluímos que as componentes do índice de refração na direção dos eixos principais são (conforme discutido no capítulo anterior) $n_r^2 = \varepsilon_\theta \varepsilon_z = 1/\sigma^2$, $n_\theta^2 = \varepsilon_r \varepsilon_z = (r'/r)^2$ e $n_z^2 = \varepsilon_r \varepsilon_\theta = 1$.

O tensor dielétrico (9) nos fornece uma forma geral para definir quais propriedades devemos introduzir no material para que consigamos criar um dispositivo que performe uma transformação cilíndrica no espaço virtual. Materiais que realizam esse tipo de transformação são conhecidos como *mantos de invisibilidade cilíndricos* [2]. Temos também os materiais que realizam transformações semelhantes, porém em um espaço esférico. Esses materiais são conhecidos como *mantos de invisibilidade totais* [17].

Agora que determinamos o tensor dielétrico, podemos calcular outra quantidade relevante ao estudo da propagação, que é o vetor de onda co-variante. Como visto no capítulo anterior, esse vetor é perpendicular às superfícies de fase constante (frentes de

onda). Fazemos isso considerando que o vetor de onda covariante que é dado por

$$\nabla_i \phi = k_i. \quad (10)$$

Vamos considerar que a onda que se propaga fora do material (espaço cartesiano) é uma onda plana que se propaga na direção x , sendo polarizada na direção z . Que representa uma onda que incide no plano transversal do cilindro. Podemos então escrever que a onda em coordenadas cartesianas do espaço virtual tem a forma

$$\mathbf{E}(x', t) = E_0 e^{i(k_x x' - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (11)$$

Porém devido a simetria do problema podemos reescrever nossa onda em coordenadas cilíndricas, assim ficando como o seguinte resultado

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}', t) = E_0 e^{i(k_x r' \cos(\theta) - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (12)$$

Identificando a fase $\phi = k_x r' \cos(\theta) - \omega t$, podemos aplicar o gradiente referentes as coordenadas do sistema físico. Note que não podemos utilizar o gradiente da base normalizada para esse cálculo, pois ele é intrinsecamente conectado às propriedades geométricas do meio. Ao normalizá-lo, estariam perdendo algumas informações importantes sobre a geometria efetiva. O gradiente então se torna

$$\nabla' \phi = k_x (\sigma^{-1} \cos(\theta) \mathbf{e}^r - r' \sin(\theta) \mathbf{e}^\theta), \quad (13)$$

onde \mathbf{e}^r e \mathbf{e}^θ são vetores contravariantes da base transformada. Agora, utilizamos a métrica do espaço virtual transformado

$$g'^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r'^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

para escrever $k_i = (\nabla' \phi)_i$ em sua versão contravariante, assim obtendo:

$$\mathbf{k} = k_x \left(\sigma \cos(\theta) \mathbf{e}_r - \frac{1}{r'} \sin(\theta) \mathbf{e}_\theta \right). \quad (15)$$

A partir desse vetor de onda, podemos traçar o caminho ótico e estudar melhor o comportamento da onda ao se propagar no dispositivo de invisibilidade. Isso ocorre porque, como visto no capítulo anterior, k^i é paralelo à direção de propagação no meio. Com isso, podemos visualizar geometricamente os efeitos para uma determinada transformação.

2 Exemplo de dispositivo de invisibilidade cilíndrico

Como demonstramos na seção anterior, podemos utilizar (9) para calcular as propriedades ópticas do nosso dispositivo de invisibilidade. Uma transformação comum que podemos aplicar é aquela que mapeia os pontos do espaço físico para uma região anelar no espaço virtual. Essa transformação é dada pelas seguintes condições

$$\begin{aligned} r(r') &= \frac{R_2 - R_1}{R_2} r' + R_1 \\ \theta &= \theta' \\ z &= z' \end{aligned} \tag{16}$$

em que R_1 e R_2 são respectivamente os raios internos e externos da região anelar ($R_2 > R_1$). Note que essa transformação equivale à uma compressão simples, seguida de uma translação da coordenada radial. Geometricamente, todos os pontos tais que $r' < R_1$ no espaço virtual são mapeados em $r > R_1$ no espaço físico, sendo os pontos do anel externo ($r' = R_2$) mapeados neles mesmos. Quando $R_2 \gg R_1$, o fator de compressão $\sigma = \frac{R_2 - R_1}{R_2}$ se aproxima da unidade, dificultando a obtenção dos efeitos invisibilidade. Isso pode ocorrer devido a fatores como absorção pelo material e efeitos de borda que podem surgir, assim não gerando os efeitos desejados. Agora, podemos simplesmente substituir essa transformação na equação para os valores principais do tensor dielétrico, e reescrevê-lo em termos das coordenadas do sistema físico r , obtendo assim:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{r-R_1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{r-R_1} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{R_2}{R_2-R_1}\right)^2 \frac{r-R_1}{r} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Calculando o vetor de onda para essa mesma transformação, obtemos que o vetor de

onda tem a forma

$$\mathbf{k} = k_x \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2} \right) \left(\cos(\theta) \mathbf{e}_r - \frac{1}{r - R_1} \sin(\theta) \mathbf{e}_\theta \right), \quad (18)$$

\mathbf{e}_r e \mathbf{e}_θ vetores covariantes da base transformada. Com isso, podemos simular a transformação do caminho ótico para o material que se propaga dessa forma.

Para termos uma ideia qualitativa do efeito da transformação, consideremos um conjunto de pontos que igualmente espaçados no sistema cartesiano. Esses pontos são mapeados seguindo a transformação proposta, de tal forma que conseguimos mapear todos eles para a região do anel.

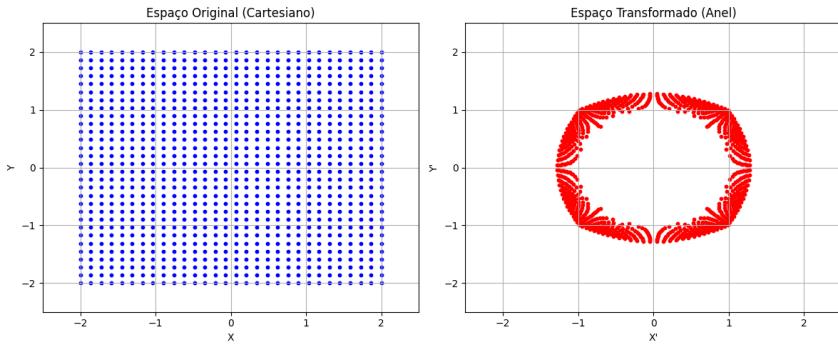


Figura 1: Mapeamento de pontos em um espaço cartesiano para a região de um anel. Podemos notar que os pontos próximos a origem são mapeados em pontos que estão no máximo à uma distância R_1 da origem no sistema do anel, criando assim uma região de invisibilidade.

A Fig. 1 ilustra como uma região de pontos no espaço cartesiano (região azul, gráfico à esquerda) são mapeados em pontos no espaço transformado (região em vermelho, gráfico à direita). Podemos notar que quaisquer pontos menores que R_1 serão mapeados para pontos fora dessa região, de forma que criamos uma região em que não vai haver nenhum ponto interior a R_1 . Isso é de extrema importância para os dispositivos de invisibilidade, pois é nessa região que os objetos que queremos deixar invisíveis devem ser posicionados. Note também que os pontos fora de R_2 não são de interesse para nossa análise, se considerarmos que fora da região a onda não estar interagindo com o meio.

A transformação induzida pelas equações (16) pode ser também visualizada considerando a transformação de raios que incidem na região de invisibilidade. Essa análise é realizada na Fig. 2, onde raios incidentes paralelamente ao eixo x no espaço virtual (gráfico à esquerda) são desviados devido à presença do material (gráficos central e da direita). Vemos claramente que os raios não penetram na região de invisibilidade ($r < R_1$),

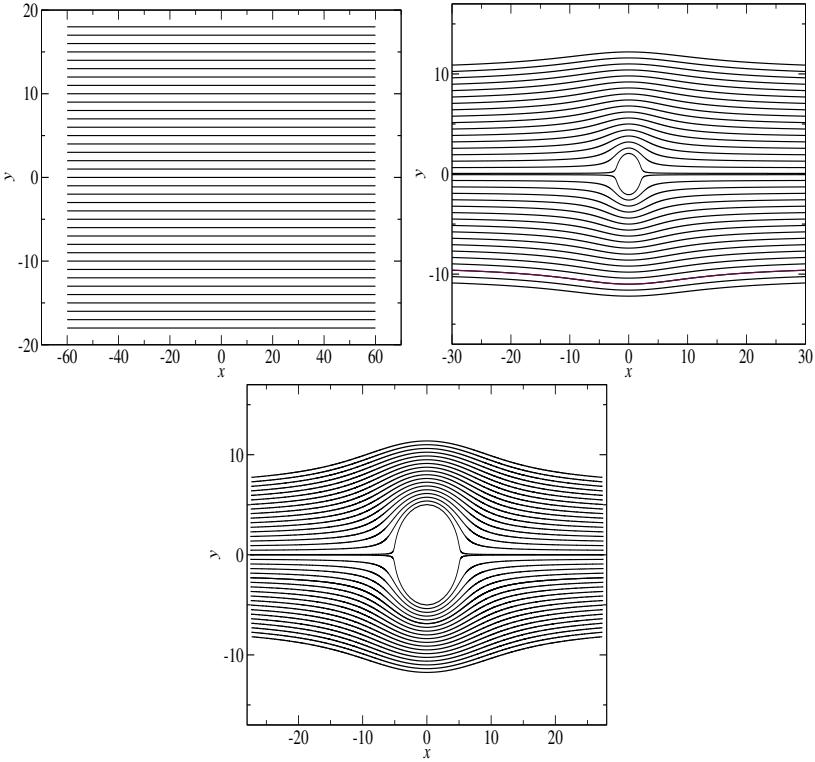


Figura 2: Representação de feixes nos espaços virtual (esquerda) e físico (gráficos central e da direita). Antes da transformação óptica, os feixes se propagam paralelamente ao eixo x . Após aplicada a transformação, ocorre um desvio dos feixes na região de invisibilidade. No painel central, os parâmetros são $R_1 = 2$ e $R_2 = 5$. No painel à esquerda, $R_1 = 5$ e $R_2 = 8$. Em ambos os casos, $k_x = 1$.

sendo desviados na vizinhança de R_1 antes de seguir sua trajetória. Em regiões suficientemente afastadas, o comportamento original do raio incidente é recuperado, de modo que a “ocultar” o efeito do dispositivo de invisibilidade. Esse efeito é maior quando a região de invisibilidade é menor, conforme ilustrado na Fig. 2. No painel central ($R_1 = 2$), os desvios do caminho retilíneo são menos perceptíveis, a longas distâncias, quando comparados aos raios de um dispositivo com $R_1 = 5$ (painel à direita), onde efeitos de curvatura tornam-se mais perceptíveis.

Outra análise interessante se refere ao cálculo dos índices de refração do material. Lembrando que a matriz de índices de refração é dada por:

$$n = \begin{bmatrix} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \frac{r - R_1}{r}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

A Fig. 3 exemplifica a relação do índice de refração com a posição dentro da região do

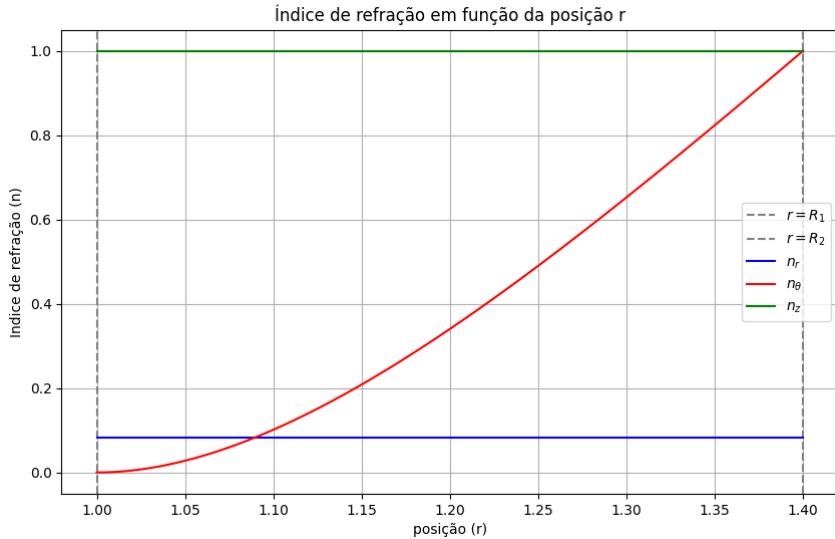


Figura 3: Plote do índice de refração em função posição radial dentro da região $R_1 \leq r \leq R_2$. Podemos notar que, como esperado, o índice de refração na direção angular cresce de forma a “curvar” a propagação da luz dentro do material

material, considerando os valores $R_1 = 1$ e $R_2 = 1.4$. Podemos notar que, a medida que aproximamos de R_1 , o índice de refração na direção polar diminui. Temos duas regiões de interesse uma em que o índice de refração radial é menor que o polar e uma em que ele é maior que o radial. Para os parâmetros selecionados, a mudança entre esses regimes ocorre para $r \sim 1.095$. No regime de $n_r > n_\theta$, a luz se propaga de maneira mais lenta na direção e_r . Logo, a luz sente um desvio maior nessa direção. Para o regime $n_r < n_\theta$, a luz se propaga mais lentamente na direção e_θ , sentindo assim um maior desvio nessa direção. Com isso podemos ver que, quanto mais perto da região $r = R_1$, maior será o desvio causado pelo material na direção \hat{r} , assim “expulsando” as ondas que se propagam nesse sentido. Enquanto no regime $n_r < n_\theta$ o meio fará com que a luz busque se propagar no sentido polar, rotacionando em torno da origem. Esse efeito é também evidenciado pelo crescimento radial de n_θ , indicando que a velocidade angular ao redor da origem aumenta na região anelar, evidenciando um movimento de “vórtice” da radiação ao redor do anel inferior. Podemos ver esse feito na Fig. 4 que representa o campo vetorial definido pelo vetor de onda \mathbf{k} .

Podemos notar pela Fig. 4 que há um comportamento anômalo da propagação do campo no espaço espaço físico. Fisicamente, esse comportamento resulta da criação de um campo de reação no interior do material, em resposta ao campo externo aplicado. Para exemplificar essa resposta podemos comparar, qualitativamente, esse feito àquele de

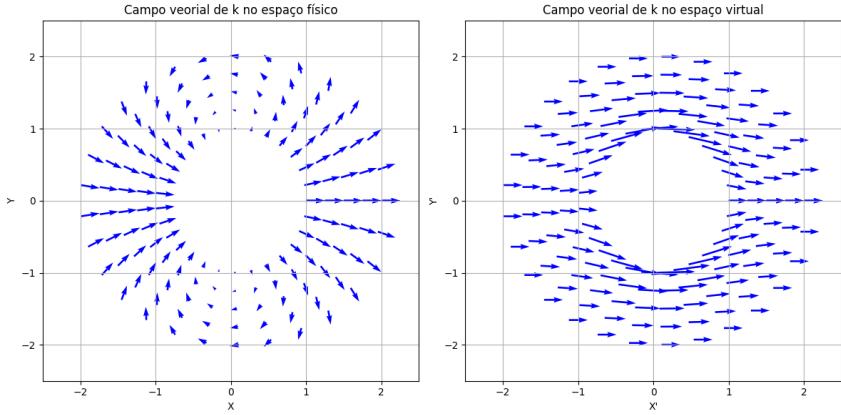


Figura 4: Representação dos campos vetoriais de propagação na região $R_1 \leq r \leq R_2$. Podemos ver que no espaço físico (esquerda) o campo tem um comportamento que busca rotacionar a propagação ao redor da origem, ao passo que no espaço virtual (direita) o campo se comporta como um fluxo normal na direção x . Os parâmetros utilizados para ambos os gráficos foram $R_1 = 1$, $R_2 = 2$ e $k_x = 1$

um dipolo elétrico alinhado paralelamente a um campo elétrico externo na direção x . A presença do campo deve re-alinhar o dipolo em sua direção, de modo que o dipolo produz um campo que irá se somar ao campo externo, assim criando uma onda distorcida em sua vizinhança. Porém, ele não cancela o campo externo, apenas distorce sua propagação na vizinhança próxima. Efeito similar ocorre com o vetor de onda devido à transformação induzida pelo material. Na ausência de matéria, ele se propaga na direção x . Porém, no interior do material a interação do campo com multipolos presentes no material leva à uma distorção dessa propagação. Como foi discutido anteriormente, esse efeito resulta justamente do fato de que os índices de refração no material são diferentes em cada ponto e direção no espaço de propagação (espaço físico).

O tensor dielétrico (17) no interior da região de interesse $R_1 \leq r \leq R_2$ possui todas as componentes positivas, o que pode ser observado pela Fig. 5. Porém, vemos que a componente desse tensor na direção θ decai rapidamente a medida em que $r \rightarrow R_2$, onde a propagação na ausência de matéria é recuperada. Esse comportamento que define o índice de refração que foi visto na Fig. 3. Veja que, para $r \rightarrow R_1$, a componente $\epsilon_{\theta\theta}$ diverge. É justamente essa característica que busca “expulsar” dessa região as ondas eletromagnéticas, assim blindando a região interior a $r = R_1$ tornando-a inacessível à radiação incidente.

Materiais que exibem esse tipo de comportamento já foram implementados experimentalmente em pequenas escalas [18], embora ainda exista uma grande dificuldade experi-

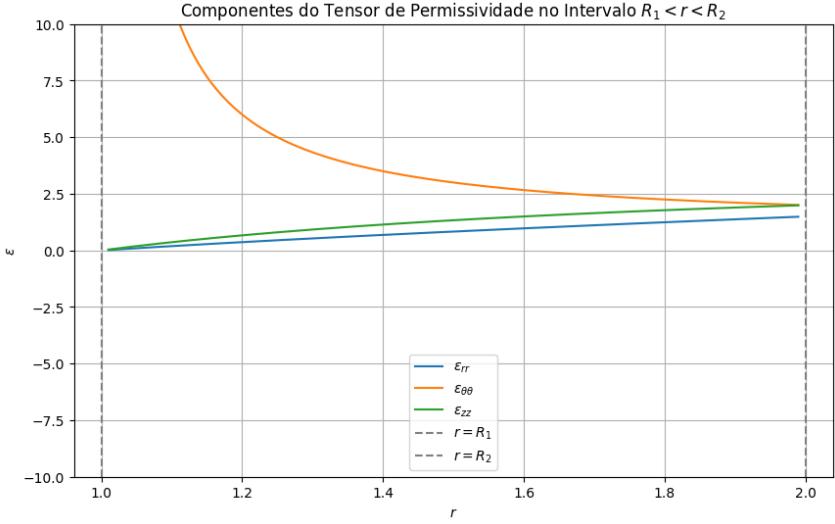


Figura 5: Variação das componentes do tensor dielétrico dentro da região $R_1 \leq r \leq R_2$, notemos que $\epsilon_{\theta\theta}$ diverge rapidamente para $r \rightarrow R_1$.

mental de implementar muitas das ideias resultantes das análises da óptica de transformação [18]. Muitas dessas dificuldades de implementação são advindas do comportamento quântico da matéria em pequenas escalas, que interferem na manipulação exata das propriedades exigidas para o material que desejamos [19] [14]. Por fim, cabe salientar que a permissividade em meios dielétricos varia de acordo com a frequência da radiação incidente. Assim, dispositivos de invisibilidade devem ser projetados para operar em faixas específicas do espectro eletromagnético, sendo em geral inoperantes nas demais.

Conclusões

Nesse trabalho, mostramos como podemos criar uma analogia entre o eletromagnetismo em espaços curvos e meios anisotrópicos, e como podemos utilizá-la para explorar a óptica de transformação e suas aplicações. Partindo da análise das equações de Maxwell, conseguimos construir grande parte da óptica de transformação utilizando o ferramental da geometria diferencial. Com isso, generalizamos a descrição dos campos a geometrias curvas, o que nos permitiu deduzir a ideia fundamental da óptica de transformação: a analogia entre materiais e geometrias, em condições onde a compatibilidade de impedâncias é satisfeita. Aplicando também alguns resultados da álgebra linear, estabelecemos conexões diretas entre efeitos óticos e efeitos geométricos.

No decorrer do trabalho, foram estudadas as equações de Maxwell no vácuo e em meios materiais, onde introduzimos as equações constitutivas do meio. A partir disso, desenvolvemos brevemente as relações mais fundamentais da geometria diferencial, e a partir delas reescrevemos as equações de Maxwell para sistemas curvos arbitrários. Com isso, verificamos que um meio anisotrópico poder ser visto como o agente de uma transformação geométrica, desde que a condição de compatibilidade de impedância seja satisfeita. A partir dessa condição, uma métrica intrínseca pode ser associada ao tensor de permissividade, deixando assim invariantes as equações de Maxwell.

Com esses resultados, propusemos uma breve aplicação para o caso de uma transformação radial geral em coordenadas cilíndricas. Obtivemos para essa transformação o tensor dielétrico e o vetor de onda. A partir daí, propomos uma transformação simples que visa simular o efeitos de invisibilidade. Mostramos como a transformação proposta associa cada ponto de um plano no espaço virtual a pontos dentro da região anelar no espaço físico, de modo a criar uma região na qual a luz é totalmente defletida. A seguir, calculamos para esse caso o tensor dielétrico e o vetor de onda. Com base nessas quantidades, analisamos a propagação de raios na região transformada, confirmando assim que essa transformação de fato cria uma região onde não há passagem de luz.

Concluímos deste trabalho que a óptica de transformação é um campo valioso para o desenvolvimento de novos materiais ópticos, em especial capas de invisibilidade. Além disso, por ser baseada na analogia com trajetórias da luz em espaços curvos, a teoria é

promissora em futuras aplicações visando o estudo de efeitos gravitacionais, reprodutíveis em laboratório.

Esse trabalho demonstrou que, sob as condições necessárias, é possível utilizar conceitos geométricos para estudar a óptica de materiais. Um exemplo é a generalização explícita do Princípio de Fermat a geometrias quaisquer, que nem sempre é de fácil visualização em sistemas complexo como materiais anisotrópicos. Por fim, destacamos que a necessidade do condição de compatibilidade de impedância limita a aplicação desses conceitos para efeitos naturais, tais como miragens. Isso nos leva a questionar a possibilidade de formulação de abordagens alternativas, que permitam eliminar essa condição, ampliando o leque de sistemas que podem ser utilizados na prática para o desenvolvimento de dispositivos ópticos com respostas controladas.

Referências Bibliográficas

- [1] U. Leonhardt and T. Philbin, Geometry and light: the science of invisibility. Courier Corporation, 2010.
- [2] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, “Controlling electromagnetic fields,” Science, vol. 312, no. 5781, pp. 1780–1782, 2006.
- [3] A. A. Zadpoor, M. J. Mirzaali, L. Valdevit, and J. B. Hopkins, “Design, material, function, and fabrication of metamaterials,” APL Materials, vol. 11, no. 2, 2023.
- [4] R. Zhu, T. Chen, K. Wang, H. Wu, and H. Lu, “Metasurface-enabled electromagnetic illusion with generic algorithm,” Frontiers in Materials, vol. 10, p. 1289250, 2023.
- [5] T. Hou, W. Xiao, and H. Chen, “Perfect hyperlens,” arXiv preprint arXiv:2407.19506, 2024.
- [6] Z. Shao, Y. Yang, J. Yang, W. Zhou, K. Liu, Z. Li, Y. Fang, X. Wu, and Y. Song, “Sensitivity optical non-linear measurement based on wide-band phase objects,” Frontiers in Materials, vol. 10, p. 1144236, 2023.
- [7] U. Leonhardt and T. G. Philbin, “General relativity in electrical engineering,” New Journal of Physics, vol. 8, no. 10, p. 247, 2006.
- [8] D. J. Griffiths, Introduction to electrodynamics fourth edition. Pearson Education, 2013.
- [9] J. Jackson, Classical Electrodynamics. John Wiley & Sons, 1975.
- [10] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Electrodynamics of continuous media. Pergamon Press Oxford, 1946.
- [11] M. P. Do Carmo, Geometria diferencial de curvas e superfícies. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- [12] B. Schutz, A first course in general relativity. Cambridge university press, 2022.

- [13] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Classical field theory, vol. 2. Pergamon Press Oxford, 1975.
- [14] P. Alitalo and S. Tretyakov, “Electromagnetic cloaking with metamaterials,” Materials today, vol. 12, no. 3, pp. 22–29, 2009.
- [15] H. Wang, W. Yang, B. He, and H. Liu, “Design and finite element simulation of information-open cloaking devices,” Journal of Computational Physics, vol. 426, p. 109944, 2021.
- [16] S. Horsley, “Transformation optics, isotropic chiral media and non-riemannian geometry,” New Journal of Physics, vol. 13, no. 5, p. 053053, 2011.
- [17] H. Chen, C. T. Chan, and P. Sheng, “Transformation optics and metamaterials,” Nature Materials, vol. 9, pp. 387–396, 2010.
- [18] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr, and D. R. Smith, “Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies,” Science, vol. 314, no. 5801, pp. 977–980, 2006.
- [19] J. Zhang, J. B. Pendry, and Y. Luo, “Transformation optics from macroscopic to nanoscale regimes: a review,” Advanced Photonics, vol. 1, no. 1, p. 014001, 2019.