



Universidade Federal de Ouro Preto  
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas  
Departamento de Engenharia Elétrica



## Trabalho de Conclusão de Curso

Técnicas de estimação de estados aplicadas  
em veículos aéreos

Felipe César Nepomuceno

João Monlevade, MG  
2025

**Felipe César Nepomuceno**

**Técnicas de estimação de estados aplicadas  
em veículos aéreos**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientadora: Profa. Wendy Yadira Eras Herrera

**Universidade Federal de Ouro Preto**  
**João Monlevade**  
**2025**

## SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

N441t Nepomuceno, Felipe Cesar.  
Técnicas de estimação de estado aplicadas em veículos aéreos.  
[manuscrito] / Felipe Cesar Nepomuceno. - 2025.  
41 f.

Orientadora: Profa. Dra. Wendy Yadira Eras Herrera.  
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.  
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Graduação em Engenharia  
Elétrica .

1. Aeronáutica - Medidas de segurança. 2. Aeronaves - Medidas de  
segurança. 3. kalman, Filtragem de. 4. Navegação aérea. 5. Teoria da  
estimativa. I. Herrera, Wendy Yadira Eras. II. Universidade Federal de  
Ouro Preto. III. Título.

CDU 621.3:519.2

Bibliotecário(a) Responsável: Flavia Reis - CRB6/2431



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Felipe César Nepomuceno**

### Técnicas de estimação de estados aplicadas em veículos aéreos

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia Elétrica

Aprovada em 02 de setembro de 2025

#### Membros da banca

Dra. Wendy Yadira Eras Herrera - Orientadora - Universidade Federal de Ouro Preto  
Dr. Caio Meira Amaral da Luz - Universidade Federal de Ouro Preto  
Dr. Rodrigo Cassio de Barros - Universidade Federal de Ouro Preto

Wendy Yadira Eras Herrera, orientadora do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 01/10/2025



Documento assinado eletronicamente por **Wendy Yadira Eras Herrera, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 01/10/2025, às 17:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0988340** e o código CRC **3AD77C6F**.

# Resumo

A correta estimação de estados é fundamental para a navegação e o controle de veículos aéreos em condições adversas. Este trabalho investiga e compara três técnicas de estimação de estado: o Filtro de Kalman Estendido (EKF), o Filtro de Kalman Unscented (UKF) e o Filtro de Partículas Auxiliar (APF). Foram empregados dois modelos dinâmicos, o movimento retilíneo e o movimento circular, com medições não lineares obtidas de um radar posicionado em solo. No cenário retilíneo, os valores médios do RMSE obtidos foram: UKF (posição = 1,95 e velocidade = 0,050), EKF (posição = 5,10 e velocidade = 0,09) e APF (posição = 6,95 e velocidade = 0,135), sendo o UKF o de melhor desempenho. Já no cenário circular, mais sujeito a não linearidades, os resultados médios foram: UKF (posição = 13,57 e velocidade = 0,0065), EKF (posição = 13,92 e velocidade = 0,38) e APF (posição = 167,30 e velocidade = 142,965), novamente com superioridade do UKF. Esses resultados, obtidos a partir das simulações, evidenciam que o UKF fornece estimativas mais precisas e estáveis, sobretudo em cenários não lineares, enquanto o EKF se mantém como uma alternativa válida em dinâmicas menos complexas e o APF requer ajustes para lidar com cenários mais desafiadores. Assim, este estudo contribui para a escolha criteriosa de técnicas de filtragem em aplicações aeronáuticas.

**Palavras-chave:** Veículos aéreos, Estimação de estado, Filtro de Kalman, EKF, UKF, APF.

# Abstract

Accurate state estimation is essential for the navigation and control of aerial vehicles under adverse conditions. This work investigates and compares three state-estimation techniques: the Extended Kalman Filter (EKF), the Unscented Kalman Filter (UKF), and the Auxiliary Particle Filter (APF). Two dynamic models were considered, straight-line and circular motion, using nonlinear measurements from a ground-based radar. In the straight-line scenario, the mean RMSE values obtained were: UKF (position = 1.95 and velocity = 0.050), EKF (position = 5.10 and velocity = 0.09), and APF (position = 6.95 and velocity = 0.135), with UKF performing best. In the circular scenario, characterized by higher nonlinearity, the mean results were: UKF (position = 13.57 and velocity = 0.0065), EKF (position = 13.92 and velocity = 0.38), and APF (position = 167.30 and velocity = 142.965), again with UKF outperforming the others. These findings, obtained from the simulations, indicate that the UKF provides more accurate and stable estimates, particularly in nonlinear scenarios, while the EKF remains a valid option in less complex dynamics and the APF requires further adjustments to cope with more challenging cases. Therefore, this study contributes to the careful selection of filtering techniques in aeronautical applications.

**Keywords:** Aerial vehicles, State estimation, Kalman Filter, EKF, UKF, APF, .

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama do algoritmo do filtro de Kalman que compreende recursivamente duas etapas: a etapa de predição e a etapa de assimilação de dados. . . . .	9
Figura 2 – Trajetória em vermelho movimento circular e trajetória em azul movimento retilíneo. . . . .	14
Figura 3 – Comparação da estimativa da posição em (a) e da velocidade em (b) e (c) da aeronave em movimento retilíneo. . . . .	21
Figura 4 – Erro de estimação das posições da aeronave em movimento retilíneo: (a) $p^x$ , (b) $p^y$ e (c) $p^z$ . . . . .	23
Figura 5 – Erro de estimação das velocidades da aeronave em movimento retilíneo: (a) $v^x$ e (b) $v^y$ . . . . .	24
Figura 6 – Comparação da estimativa: (a) posição, (b) e (c) velocidade no eixo $x$ e $y$ da aeronave no movimento circular. . . . .	25
Figura 7 – Erro de estimação das posições da aeronave em movimento circular: (a) $p^x$ , (b) $p^y$ e (c) $p^z$ . . . . .	27
Figura 8 – Erro de estimação das velocidades da aeronave em movimento circular: (a) $v^x$ e (b) $v^y$ . . . . .	28

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Comparação dos índices RMSE entre EKF, UKF e APF no movimento retilíneo em metros. . . . .	22
Tabela 2 – Comparação dos índices RMSE entre EKF, UKF e APF no movimento circular em metros. . . . .	26

# Lista de siglas e abreviaturas

- APF** Filtro de Partículas Auxiliar (Auxiliary Particle Filter)
- EKF** Filtro de Kalman Estendido (Extended Kalman Filter)
- UKF** Filtro de Kalman Unscented (Unscented Kalman Filter)
- KF** Filtro de Kalman (Kalman Filter)
- PF** Filtro de Partículas (Particle Filter)
- VANT** Veículo Aéreo Não Tripulado
- UAV** Unmanned Aerial Vehicle
- INS** Sistema de Navegação Inercial (Inertial Navigation System)
- GPS** Sistema de Posicionamento Global (Global Positioning System)
- PWM** Modulação por Largura de Pulso (Pulse Width Modulation)
- RMSE** Raiz do Erro Quadrático Médio (Root Mean Square Error)
- SNR** Relação Sinal-Ruído (Signal-to-Noise Ratio)
- DOF** Graus de Liberdade (Degrees of Freedom)
- PDF** Função Densidade de Probabilidade (Probability Density Function)
- PDFC** Função Densidade de Probabilidade Condicional
- MSE** Erro Quadrático Médio (Mean Squared Error)
- CPU** Unidade Central de Processamento (Central Processing Unit)
- GPU** Unidade de Processamento Gráfico (Graphics Processing Unit)

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Estado da arte	4
1.2	Formulação do problema	5
1.3	Objetivos	6
1.3.1	Objetivos específicos	6
1.4	Estrutura do trabalho	7
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>8</b>
2.1	Filtro de Kalman	8
2.2	Filtragem de Kalman para Sistemas Não-Lineares	9
2.2.1	Filtro de Kalman Estendido (EKF)	10
2.2.2	Filtro de Kalman Unscented (UKF)	10
2.2.3	Transformada Unscented	10
2.3	Filtro de Partículas (PF)	11
2.4	Filtro de Partículas Auxiliary (APF)	12
<b>3</b>	<b>DESCRIÇÃO DO SISTEMA</b>	<b>14</b>
3.1	Sistema 1: Modelo de movimento retilíneo	15
3.2	Sistema 2: Modelo de movimento circular	15
3.3	Modelo de observação	16
3.4	Metricas de desempenho	16
3.5	Condições de simulação e configuração das abordagens utilizadas	17
3.5.1	Cenário retilíneo	17
3.5.2	Cenário circular	18
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>20</b>
4.1	Modelo de movimento retilíneo	20
4.2	Modelo de movimento circular	22
4.3	Considerações parciais	26
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>29</b>
5.1	Trabalhos futuros	30
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>31</b>

# 1 Introdução

A estimação de estados é um elemento central para o funcionamento seguro e eficiente de aeronaves, sendo elas tripuladas ou não. Em termos gerais consiste em determinar, a partir de medições diretas e indiretas, um conjunto de variáveis que descrevem de forma completa a dinâmica do veículo em um dado instante, como: posição, velocidade, atitude e taxas angulares (STEVENSON; LEWIS, 2003). Na prática, sensores como GPS, unidades de medição inercial (IMUs, do inglês *Inertial Measurement Units*) e radares são usados para obter informações sobre esses estados. Entretanto, essas medições estão sujeitas a ruídos, falhas intermitentes e degradação de sinal, especialmente em ambientes com condições adversas ou restrições operacionais (SINOPOLI et al., 2004; FERREIRA, 2024). Nessas situações, confiar unicamente nas leituras dos sensores pode comprometer a segurança e a estabilidade do voo. Assim, torna-se fundamental a utilização de métodos de fusão sensorial e filtragem para combinar medições ruidosas com modelos matemáticos da dinâmica do voo, reduzindo incertezas e melhorando a confiabilidade das estimativas (BROWN; HWANG, 1997; KALMAN, 1960).

A literatura oferece uma ampla variedade de técnicas para estimação de estados, apropriadas a diferentes graus de linearidade, ruído e requisitos computacionais. Para sistemas lineares com ruídos gaussianos, o filtro de Kalman (KF, do inglês *Kalman Filter*) permanece como a escolha clássica (KALMAN, 1960; GELB, 1974; SIMON, 2006). Em contextos não lineares, alternativas como o Filtro de Kalman Estendido (EKF, do inglês *Extended Kalman Filter*) (JAZWINSKI, 1970) e o Filtro de Kalman Unscented (UKF, do inglês *Unscented Kalman Filter*) (WAN; MERWE, 2000; JULIER; UHLMANN, 2004) são amplamente aplicadas, sobretudo pela forma mais fiel como tratam a propagação das distribuições de incerteza. Abordagens baseadas em amostragem incluem o filtro de Kalman por Conjunto (EnKF, do inglês *Ensemble Kalman Filter*) que é eficaz para sistemas de alta dimensão com características aditivas de ruído (EVENSEN, 2003; EVENSEN, 2009), e filtros híbridos como o Filtro de Kalman por Partículas (PKF, do inglês *Particle Kalman Filter*), que combinam a flexibilidade dos Filtro de Partículas (PF, do inglês *Particle Filter*) com o KF. Os PF, por sua vez, e suas variantes como o Filtro de Partículas Auxiliar (APF, do inglês *Auxiliary Particle Filter*) e filtros de mistura gaussiana, são conhecidos por sua adaptabilidade em ambientes fortemente não lineares e com ruídos não gaussianos (ARULAMPALAM et al., 2002; DOUCET; FREITAS; GORDON, 2001; PITT; SHEPHARD, 1999; XUE; HU; LI, 2021). Outro conjunto de métodos baseia-se em problemas de otimização ao longo de uma janela temporal, como o Estimativa por Horizonte Móvel (MHE, do inglês *Moving Horizon Estimation*), que oferece alta precisão ao custo de maior exigência computacional, sendo aplicado em sistemas aeronáuticos (RAMACHANDRAN, 2024; AREZKI et al., 2020; ROTH et al., 2017). Ainda, observadores

clássicos (por exemplo, observador de Luenberger e variantes de alta ganância) são utilizados como alternativas determinísticas, especialmente quando há restrições em tempo real ou requisitos de simplicidade de implementação (BONNABEL; MARTIN; SALAÜN, 2009).

O conceito de estado de uma aeronave refere-se ao conjunto mínimo de variáveis que descreve completamente sua dinâmica em um determinado instante de tempo. Essas variáveis podem incluir posição, velocidade, aceleração, atitude (ângulos de rotação como rolagem, arfagem e guinada), taxas angulares, entre outras (STEVENS; LEWIS, 2003). A evolução dos estados ao longo do tempo é governada pelas equações da mecânica do voo, que levam em conta forças aerodinâmicas, efeitos gravitacionais e entradas de controle. A correta estimação desses estados é fundamental para o funcionamento seguro da aeronave, pois permite que sistemas de navegação e controle ajustem continuamente a trajetória, compensando perturbações externas e falhas em sensores.

Em um sistema de navegação aérea, a determinação precisa dos estados da aeronave, como posição e velocidade, é essencial para garantir a segurança e estabilidade do voo. No entanto, a medição direta dessas variáveis é frequentemente afetada por limitações tecnológicas, falhas de sensores e presença de ruídos nas medições. Em particular, sensores tradicionais como GPS e unidades inerciais (IMUs, do inglês *Inertial Measurement Units*) podem sofrer degradação do sinal devido a interferências, oscilações atmosféricas ou falhas técnicas (GELB, 1974). Para contornar essas dificuldades, neste trabalho é abordado um radar posicionado no solo como fonte principal de medições da aeronave, permitindo um monitoramento externo confiável da trajetória do veículo. No entanto, as medições obtidas por radar também estão sujeitas a ruídos e incertezas, exigindo um método robusto de filtragem para estimar corretamente os estados da aeronave.

Nesse contexto, o KF e suas variantes têm se consolidado como ferramentas indispensáveis, sendo amplamente utilizados para trabalhar com sistemas dinâmicos que apresentam comportamento estocástico. A variante clássica do KF é restrita a sistemas lineares com ruídos gaussianos; no entanto, a crescente complexidade dos cenários reais, caracterizados por não linearidades e ruídos não gaussianos, motivou a criação de técnicas como o EKF e o UKF. Essas metodologias aprimoradas permitem a aplicação em uma variedade maior de sistemas, incluindo aeronaves submetidas a manobras dinâmicas ou operações em ambientes incertos (BOERS; DRIESSEN, 2003a).

O KF é um estimador recursivo baseado em modelos matemáticos do sistema dinâmico e nas incertezas associadas às medições. Seu funcionamento é dividido em duas etapas principais: predição e correção. Na etapa de predição, o filtro utiliza um modelo do sistema para prever os estados futuros da aeronave e estimar a incerteza associada a essas previsões. Em seguida, na etapa de correção, as medições sensoriais são incorporadas para ajustar essa previsão, reduzindo o erro e melhorando a precisão da estimativa. Essa abordagem otimiza o uso de medições ruidosas, oferecendo um equilíbrio entre o mo-

delo dinâmico e as informações sensoriais disponíveis. O KF, entretanto, é estritamente limitado a sistemas lineares com ruído gaussiano, o que restringe sua aplicabilidade em cenários mais complexos (WAN; MERWE, 2000).

Para lidar com sistemas não lineares, como os encontrados em aeronaves, EKF introduz uma adaptação ao algoritmo original. No EKF, a não linearidade do sistema é tratada por meio da linearização local, utilizando a jacobiana, é possível aproximar sistemas não lineares por sistemas lineares na vizinhança de pontos de equilíbrio, facilitando a análise de estabilidade e comportamento dinâmico. Essa abordagem permite aplicar a estrutura do KF a sistemas que não seguem uma relação linear entre estados e medições. No entanto, o EKF pode apresentar erros significativos caso o sistema seja altamente não linear, pois a linearização pode introduzir aproximações imprecisas. Porém o UKF possui como limitação o maior custo computacional e a possível perda de acurácia em cenários altamente não lineares ou com distribuições não gaussianas (WAN; MERWE, 2000).

O UKF foi desenvolvido para superar essa limitação, substituindo a linearização do EKF pelo método dos pontos sigma. No UKF, um conjunto de pontos de amostragem representando a distribuição estatística do estado é propagado através do modelo não linear, capturando de maneira mais precisa a evolução da incerteza. Isso permite que o UKF ofereça melhor desempenho em cenários fortemente não lineares, garantindo estimativas mais confiáveis da posição e velocidade da aeronave (SIMON, 2006).

O PF é uma técnica de estimação de estados baseada em métodos de amostragem sequencial Monte Carlo (SMC), adequada para lidar com sistemas não lineares e não gaussianos, como os encontrados em aeronaves e veículos aéreos não tripulados (UAVs, do inglês *Unmanned Aerial Vehicles*). Ao contrário do KF e do EKF, que se baseiam em suposições lineares e gaussianas, o PF representa a distribuição de probabilidade dos estados por meio de um conjunto de partículas ponderadas (KABA; ERMEYDAN, 2022; SOUZA, 2022; CAMPOS, 2024).

Estudos recentes demonstram a eficácia do PF na estimação de atitude e trajetória de UAVs mesmo sob condições adversas. (KABA; ERMEYDAN, 2022) destacam ganhos na precisão ao lidar com ruídos sensoriais, enquanto (SOUZA, 2022) propôs uma versão adaptativa do filtro com ajuste dinâmico de covariâncias, aumentando sua robustez. (CAMPOS, 2024) aplicou o PF para reconstruir trajetórias utilizando sensores inerciais, demonstrando melhor desempenho frente ao EKF em cenários ruidosos.

Entre as variações do PF, destaca-se o APF, que antecipa medições esperadas para melhorar a seleção de partículas antes da reamostragem, aumentando a eficiência da estimação em sistemas fortemente não lineares (XUE; HU; LI, 2021). O APF tem se mostrado promissor em aplicações com sensores de radar e unidades inerciais, conforme evidenciado por (XUE; HU; LI, 2021).

Além do APF, outras abordagens como o Filtro de Partículas Unscented (UPF, do inglês *Unscented Particle Filter*) e o PF adaptativo têm sido exploradas para enfrentar

limitações do método clássico, especialmente a degeneração das partículas. Ghanizadegan e Hashim (GHANIZADEGAN; HASHIM, 2025) introduziram o QUPF-VIN, voltado para navegação visual-inercial utilizando quaternions, enquanto métodos híbridos como o PF-EKF e o PF-UKF têm combinado vantagens entre abordagens para melhorar a estimação em ambientes desafiadores (CHUGHATAI, 2025).

Neste trabalho, investiga-se o problema de estimação de estados de veículos aéreos utilizando os filtros EKF, UKF e APF, a fim de verificar o melhor desempenho para o sistema estudado. A abordagem busca fornecer estimativas confiáveis mesmo em situações em que sensores embarcados apresentem falhas ou degradação no desempenho. O impacto da escolha do filtro será avaliado por meio de simulações computacionais, comparando a eficácia do EKF, UKF e APF na estimação da posição e velocidade da aeronave, contribuindo assim para o desenvolvimento de sistemas de navegação mais resilientes.

## 1.1 Estado da arte

A estimação de estados em aeronaves utilizando o KF tem sido amplamente estudada na literatura, com diversos trabalhos destacando sua aplicação e eficácia. Por exemplo, no estudo de (BROWN; HWANG, 1997), os autores demonstram como o Filtro de Kalman pode ser implementado para aprimorar a precisão na navegação aérea, integrando dados de múltiplos sensores para estimar a posição e a velocidade da aeronave (BROWN; HWANG, 1997).

(JULIER; UHLMANN, 2004), em seu trabalho, introduziram o UKF como uma alternativa ao EKF para sistemas não lineares. Eles mostraram que o UKF oferece melhor desempenho na estimação de estados de aeronaves com dinâmicas não lineares, devido à sua capacidade de capturar de forma mais precisa a propagação de incertezas.

Em outro estudo, (KIM; LANGARI, 2005), os autores compararam o desempenho do EKF e do UKF na estimação de vibrações estruturais em asas de aeronaves. Os resultados indicaram que o UKF apresentou maior precisão e robustez na presença de ruídos e não linearidades, evidenciando sua vantagem em aplicações aeroespaciais (KIM; LANGARI, 2005).

Por fim, na investigação de (SINOPOLI et al., 2004), os autores investigaram a estimação de estados em sistemas aeronáuticos com observações intermitentes, utilizando o Filtro de Kalman. Eles propuseram estratégias para lidar com a perda de dados de sensores, garantindo a continuidade e a precisão na estimação dos estados da aeronave, mesmo em condições adversas.

Apesar da ampla utilização do KF e suas variações, sua performance pode ser limitada em cenários altamente não lineares ou com ruídos não gaussianos, comuns em ambientes reais enfrentados por aeronaves e UAVs. Nesse sentido, o PF tem se destacado como uma abordagem mais flexível e eficaz para a estimação de estados em tais contex-

tos.(KABA; ERMEYDAN, 2022) demonstraram que o PF melhora significativamente a estimação da atitude de quadrotors, especialmente quando expostos a ruídos sensoriais intensos e dinâmicas rápidas.

No estudo de (SOUZA, 2022), por sua vez, propôs uma versão adaptativa do PF (AdPF), capaz de ajustar dinamicamente as covariâncias do processo e das medições, proporcionando melhor desempenho em ambientes com alta variabilidade. Da mesma forma, Campos (CAMPOS, 2024) aplicou o PF na reconstrução de trajetórias de veículos aéreos utilizando sensores inerciais, destacando sua superioridade frente ao EKF em situações com medições altamente ruidosas.

Variações mais sofisticadas do PF também têm sido exploradas. (ZHU; WANG; CHEN, 2023) utilizaram um PF multirate integrando dados de IMU e câmera para estimação de atitude em drones, alcançando resultados promissores em tempo real mesmo em cenários sem GPS. Já (GHANIZADEGAN; HASHIM, 2025) propuseram o QUPF-VIN, que incorpora quaternions e navegação visual-inercial em um contexto particulado baseado na estrutura do UPF, adequado para aplicações autônomas.

Além disso, (XUE; HU; LI, 2021) implementaram o APF em sistemas de navegação inercial com sensores radar, evidenciando sua capacidade de antecipar medições e mitigar a degeneração das partículas. Por fim, (CHUGHTAI, 2025) combinou técnicas estatísticas com PF para lidar com ruídos não gaussianos e observações inconsistentes, mostrando avanços na estimação em ambientes complexos. Esses avanços recentes indicam que o PF e suas variações representam uma evolução natural dos métodos clássicos de estimação, oferecendo maior fidelidade na representação de incertezas e desempenho mais consistente em aplicações aeroespaciais exigentes.

## 1.2 Formulação do problema

Considera-se um sistema dinâmico não linear representado em espaço de estados como

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}, k - 1), \quad (1.1)$$

$$y_k = h(x_k, k) + v_k. \quad (1.2)$$

em que  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$  representam, respectivamente, os modelos de processo e de observação. O modelo de processo descreve a evolução do vetor de estados  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , enquanto o modelo de observação relaciona os estados com as medições  $y_k \in \mathbb{R}^m$ .

No contexto da estimação de estados, assume-se que, para cada instante  $k \geq 1$ , são conhecidos os seguintes elementos: as medições  $y_k \in \mathbb{R}^m$ , obtidas de sensores que podem conter ruídos e incertezas; as entradas de controle  $u_{k-1} \in \mathbb{R}^p$ , que influenciam a dinâmica do sistema; e as distribuições de probabilidade a priori dos estados iniciais  $p(x_0)$ , do ruído

de processo  $p(w_{k-1})$  e do ruído de medição  $p(v_k)$ . Os ruídos  $w_k \in \mathbb{R}^q$  e  $v_k \in \mathbb{R}^r$  modelam incertezas no processo e na medição, respectivamente, e são assumidos com distribuições de probabilidade conhecidas.

Dado esse modelo, a solução do problema de estimação consiste na determinação da distribuição de probabilidade condicional a posteriori do vetor de estados  $x_k$ , dada pelas medições passadas  $y_1, \dots, y_{k-1}$  e pela medição atual  $y_k$ , como

$$p(x_k | y_1, \dots, y_k). \quad (1.3)$$

A estimativa de estados ótima pode ser definida como o valor que maximiza a função de verossimilhança associada, dada por

$$J(x_k) = p(x_k | y_1, \dots, y_k). \quad (1.4)$$

Dessa forma, a abordagem de estimação busca determinar o maximizador  $\hat{x}_{k|k} \in \mathbb{R}^n$  de  $J(x_k)$ , o que resulta na melhor estimativa possível para o vetor de estados do sistema no instante  $k$ .

## 1.3 Objetivos

O objetivo deste trabalho é investigar o problema de estimação de estados utilizando três técnicas de filtragem, EKF, UKF e APF, aplicadas a modelos dinâmicos de uma aeronave em movimentos retilíneos e circulares, considerando como variáveis de interesse as posições (em metros), as velocidades lineares (em metros por segundo) e, no caso do movimento circular, a velocidade angular.

### 1.3.1 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos devem ser cumpridos:

- Implementar os filtros EKF, UKF e APF para os modelos retilíneo e circular de forma independente, utilizando os modelos matemáticos propostas por Boers e Driessen (2003a);
- Realizar a estimação das variáveis de estado da aeronave, considerando posições  $(p_x, p_y, p_z)$ , velocidades lineares  $(v_x, v_y, v_z)$  e, no caso do movimento circular, a velocidade angular  $(\omega)$ ;
- Analisar o desempenho dos filtros a partir de métricas quantitativas, como a raiz do erro quadrático médio (RMSE), aplicado às variáveis de estado estimadas;
- Comparar os resultados obtidos para os diferentes cenários, identificando as condições em que cada filtro apresenta melhor desempenho.

## 1.4 Estrutura do trabalho

No Capítulo 1, foi apresentada a contextualização do problema, destacando a importância da estimação de estados para veículos aéreos. Foram discutidas as dificuldades associadas à navegação, especialmente em cenários onde sensores podem apresentar falhas ou medições ruidosas. Além disso, foram definidos os objetivos do trabalho e a justificativa para o uso dos EKF, UKF e APF na estimação de estados.

No Capítulo 2, aborda os conceitos fundamentais para a compreensão da estimação de estados, incluindo modelagem de sistemas dinâmicos, sensores utilizados em veículos aéreos e os principais algoritmos de filtragem. São apresentados detalhadamente o Filtro de Kalman (KF), o Filtro de Kalman Estendido (EKF), o Filtro de Kalman Unscented (UKF) e o Filtro de Partículas Auxiliar (APF), destacando suas características, vantagens, limitações e áreas de aplicação.

No Capítulo 3, descreve os modelos matemáticos utilizados para representar a dinâmica da aeronave nos movimentos retilíneo e circular. São apresentados os processos de implementação computacional dos filtros EKF, UKF e APF, bem como os parâmetros adotados para simulação e as métricas de desempenho utilizadas para avaliação dos resultados.

No Capítulo 4, apresenta os resultados obtidos a partir das simulações dos filtros aplicados aos modelos dinâmicos. São realizadas análises qualitativas e quantitativas das estimativas de estado produzidas por cada filtro. Os desempenhos dos filtros são comparados com base no erro quadrático médio (RMSE) para os dois tipos de movimento analisados. É evidenciado que o UKF apresentou melhor desempenho em ambos os cenários, com o APF obtendo resultados semelhantes ao EKF no movimento retilíneo, porém inferiores no movimento circular.

No Capítulo 5, resume os principais achados do trabalho, destacando o desempenho relativo dos filtros em diferentes condições de operação. São discutidas as limitações observadas, em especial do APF, e são propostas sugestões para trabalhos futuros, como o ajuste de parâmetros do APF e a aplicação experimental dos algoritmos em plataformas reais.

## 2 Revisão bibliográfica

Inicialmente neste capítulo, será discutida a Filtragem de Kalman, uma técnica amplamente utilizada para estimação de estados em sistemas dinâmicos lineares, detalhando suas etapas de predição e assimilação de dados. Em seguida, serão abordadas as extensões do Filtro de Kalman para sistemas não lineares, incluindo o EKF, que utiliza linearizações para aproximar a dinâmica do sistema, e o UKF, que emprega a Transformada Unscented para capturar a não linearidade de forma mais precisa. Na sequência, será explorado o conceito de Filtragem de Partículas, com ênfase no APF, uma técnica aprimorada que incorpora informações das medições mais recentes na fase de reamostragem, aumentando a eficiência e a acurácia na estimação de estados em sistemas altamente não lineares e com ruído não gaussiano. A apresentação desses filtros fornecerá a base teórica necessária para a compreensão de suas aplicações em problemas de estimação de estados, como, por exemplo, em veículos aéreos não tripulados.

### 2.1 Filtro de Kalman

O KF é empregado para estimar os estados de um sistema dinâmico linear de maneira recursiva (BOERS; DRIESSEN, 2003b). Neste estudo, assume-se que as funções  $f$  e  $h$  são lineares. Assim, as equações (1.1) e (1.2) podem ser reformuladas, respectivamente, como

$$x_k = A_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + G_{k-1}w_{k-1}, \quad (2.1)$$

$$y_k = C_k x_k + v_k, \quad (2.2)$$

em que as matrizes citadas nas equações  $A_{k-1}$ ,  $B_{k-1}$ ,  $G_{k-1}$  e  $C_k$  são as matrizes que descrevem o sistema.

O FK é subdividido em duas etapas, sendo elas a etapa de predição e a etapa de assimilação de dados, conforme mostrado na Figura 1.

A etapa de predição é encarregada de prever o vetor de estados,  $\hat{x}_{k|k-1}$  a partir da informação passada  $\hat{x}_{k-1|k-1}$ , como

$$\hat{x}_{k|k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1|k-1} + B_{k-1}u_{k-1}, \quad (2.3)$$

$$P_{k|k-1}^{xx} = A_{k-1}P_{k-1|k-1}^{xx}A_{k-1}^T + G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}^T, \quad (2.4)$$

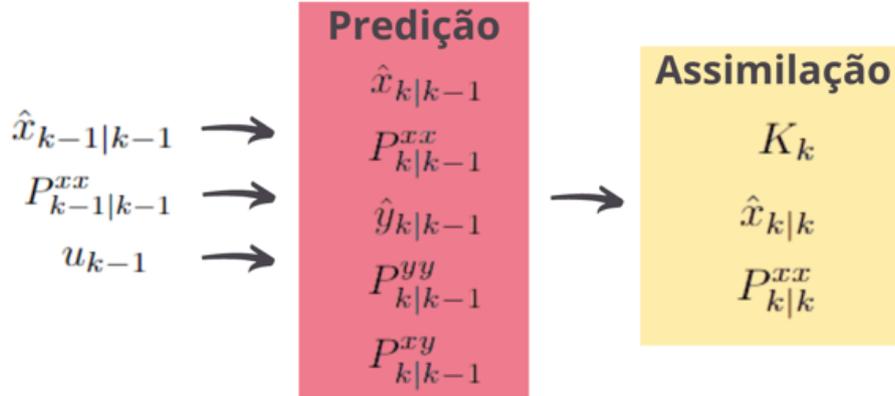
$$\hat{y}_{k|k-1} = C_k\hat{x}_{k|k-1}, \quad (2.5)$$

$$P_{k|k-1}^{yy} = C_kP_{k|k-1}^{xx}C_k^T + R_k, \quad (2.6)$$

$$P_{k|k-1}^{xy} = P_{k|k-1}^{xx}C_k^T, \quad (2.7)$$

em que  $P_{k|k-1}^{xx} = E[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})^T]$ ,  $P_{k|k-1}^{yy} = E[(y_k - \hat{y}_{k|k-1})(y_k - \hat{y}_{k|k-1})^T]$  e  $P_{k|k-1}^{xy} = E[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(y_k - \hat{y}_{k|k-1})^T]$  são as matrizes de covariância do erro de predição,

Figura 1 – Diagrama do algoritmo do filtro de Kalman que compreende recursivamente duas etapas: a etapa de predição e a etapa de assimilação de dados.



covariância da inovação e covariância cruzada, respectivamente. Na Equação (2.6),  $R_k$  representa a matriz de covariância do ruído de medição  $v_k$ . Essa matriz descreve a incerteza associada aos sensores, caracterizando a variabilidade estatística presente nas medições realizadas pelo sistema. Em geral, assume-se que o ruído de medição possui média nula e variância conhecida, de modo que  $R_k$  define o nível de confiabilidade das observações utilizadas na estimação de estados.

Logo, a etapa de assimilação de dados integra a nova informação do sinal medido  $y_k$ , para melhorar a estimativa do vetor de estados  $\hat{x}_{k|k}$ , dada por

$$K_k = P_{k|k-1}^{xy} (P_{k|k-1}^{yy})^{-1}, \quad (2.8)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_{k|k-1}), \quad (2.9)$$

$$P_{k|k}^{xx} = P_{k|k-1}^{xx} - K_k P_{k|k-1}^{yy} K_k^T, \quad (2.10)$$

em que  $K_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz do ganho de Kalman,  $\hat{x}_{k|k}$  é o vetor de estado e a correspondente matriz de covariância  $P_{k|k}^{xx} = E[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^T]$ .

## 2.2 Filtragem de Kalman para Sistemas Não-Lineares

Para sistemas não-lineares, resolver o problema de estimação de estados é complexo porque a distribuição de probabilidade condicional  $\rho(x_k|y_1, \dots, y_k)$  não é completamente caracterizada apenas pela média  $\hat{x}_{k|k}$  e pela covariância  $P_{k|k}^{xx}$  (DAUM, 2005). Neste caso é computado o EKF e o UKF. Tanto o EKF quanto o UKF propagam apenas aproximações para  $\hat{x}_{k|k}$  e  $P_{k|k}^{xx}$  utilizando a média  $\hat{x}_{0|0}$  e a covariância  $P_{0|0}^{xx}$  do vetor aleatório  $x_0$  com a PDF  $\rho(x_0)$ , assumidas como conhecidas.

Além disso, assume-se que o maximizador de  $J$  está próximo da média aproximada  $\hat{x}_{k|k}$ . Também se assume que o ruído do processo  $w_{k-1}$  e o ruído de medição  $v_k$  têm médias

nulas e covariâncias conhecidas  $Q_{k-1}$  e  $R_k$ , respectivamente. Além disso, para todo  $k \geq 1$ ,  $w_{k-1}$ ,  $v_k$  e  $x_0$  são mutuamente independentes.

### 2.2.1 Filtro de Kalman Estendido (EKF)

O ponto central do EKF é a linearização, seja analítica ou numérica, das equações do sistema para então aplicar as equações do FK. A etapa de predição do EKF é dada por

$$\hat{x}_{k|k-1} = f(\hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0_{q \times 1}, k-1) \quad (2.11)$$

$$P_{k|k-1}^{xx} = \hat{A}_{k-1} P_{k-1|k-1}^{xx} \hat{A}_{k-1}^T + \hat{G}_{k-1} Q_{k-1} \hat{G}_{k-1}^T \quad (2.12)$$

$$\hat{y}_{k|k-1} = h(\hat{x}_{k|k-1}, k) \quad (2.13)$$

$$P_{k|k-1}^{yy} = \hat{C}_k P_{k|k-1}^{xx} \hat{C}_k^T + R_k \quad (2.14)$$

$$P_{k|k-1}^{xy} = P_{k|k-1}^{xx} \hat{C}_k^T \quad (2.15)$$

As matrizes Jacobianas das funções  $f$  e  $h$  são avaliadas nas estimativas de estado mais recentes

$$\hat{A}_{k-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}} \right|_{\hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0_{q \times 1}, k-1} \quad (2.16)$$

$$\hat{G}_{k-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial w_{k-1}} \right|_{\hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}, 0_{q \times 1}, k-1} \quad (2.17)$$

$$\hat{C}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x_k} \right|_{\hat{x}_{k|k-1}, k} \quad (2.18)$$

A etapa de assimilação de dados é dada pelas equações usuais do FK (2.8, 2.9 e 2.10).

### 2.2.2 Filtro de Kalman Unscented (UKF)

O Filtro de UKF é uma extensão do KF para lidar com sistemas não lineares. Em vez de linearizar o modelo do sistema, conforme feito no EKF, o UKF utiliza a Transformada Unscented (UT, do inglês *Descendente Transform*) para aproximar a distribuição do estado. Essa abordagem resulta em estimativas mais precisas para sistemas não lineares.

### 2.2.3 Transformada Unscented

A UT utiliza um conjunto de pontos sigma para capturar a média e a covariância de uma distribuição não linearmente transformada. Para o vetor de estados  $\hat{x}_{k|k} \in \mathbb{R}^n$

com média  $\hat{x}_k$  e covariância  $P_k^{xx}$ , os pontos sigma  $X_{j,k}$  são calculados como

$$[\gamma, X_k] = \Psi_{\text{UT}}(\hat{x}_k, P_k^{xx}, n, \lambda), \quad (2.19)$$

$$X_k = \hat{x}_k \mathbf{1}_{1 \times (2n+1)} + \sqrt{n + \lambda} \begin{bmatrix} 0 & (\sqrt{P_k^{xx}}) & -(\sqrt{P_k^{xx}}) \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

em que  $\mathbf{1}_{1 \times (2n+1)}$  é uma matriz de uns,  $(\sqrt{P_k^{xx}})$  é a matriz raiz quadrada de  $P_k^{xx}$ , e  $\lambda$  é um parâmetro que determina o espalhamento dos pontos sigma. Os pesos  $\gamma_j$  são dados por

$$\gamma_0 = \frac{\lambda}{n + \lambda}, \quad (2.21)$$

$$\gamma_j = \frac{1}{2(n + \lambda)}, \quad j = 1, \dots, 2n. \quad (2.22)$$

Na etapa de predição, os pontos sigma são gerados pela função de processo  $f$

$$X_{j,k|k-1} = f(X_{j,k-1|k-1}, u_{k-1}, X_{w_{j,k-1|k-1}}, k-1), \quad j = 0, \dots, 2n, \quad (2.23)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j X_{j,k|k-1}, \quad (2.24)$$

$$P_{k|k-1}^{xx} = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j \left( X_{j,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1} \right) \left( X_{j,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1} \right)^T. \quad (2.25)$$

Os pontos sigmas da predição são gerados a partir da função de observação  $h$

$$Y_{j,k|k-1} = h(X_{j,k|k-1}, k), \quad j = 0, \dots, 2n, \quad (2.26)$$

$$\hat{y}_{k|k-1} = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j Y_{j,k|k-1}, \quad (2.27)$$

$$P_{k|k-1}^{yy} = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j \left( Y_{j,k|k-1} - \hat{y}_{k|k-1} \right) \left( Y_{j,k|k-1} - \hat{y}_{k|k-1} \right)^T + R_k, \quad (2.28)$$

$$P_{k|k-1}^{xy} = \sum_{j=0}^{2n} \gamma_j \left( X_{j,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1} \right) \left( Y_{j,k|k-1} - \hat{y}_{k|k-1} \right)^T. \quad (2.29)$$

A etapa de assimilação de dados é dada pelas equações usuais do FK (2.8,2.9 e 2.10).

## 2.3 Filtro de Partículas (PF)

O PF é uma técnica de estimação de estados baseada em métodos de amostragem sequencial Monte Carlo (SMC), voltada para sistemas dinâmicos não lineares e não gaussianos. Ao contrário de filtros lineares, o PF representa a distribuição de probabilidade do estado por meio de um conjunto de partículas, que são amostras da distribuição posterior. Cada partícula possui um peso associado que representa sua importância relativa, e a estimativa do estado é obtida pela média ponderada dessas partículas.

Seja o sistema descrito por (1.1) e (1.2). O PF busca estimar a distribuição posterior através de um conjunto de partículas, onde cada é uma amostra do espaço de estados e seu peso.

O algoritmo do PF clássico (SIR) pode ser descrito pelas seguintes etapas:

1. **Inicialização:** gerar partículas, com pesos .
2. **Predição:** para cada instante, propagar a partícula segundo o modelo de transição

$$x_{i,k} = f(x_{i,k-1}, u_{k-1}, v_{i,k-1}) \quad (2.30)$$

3. **Atualização:** atualizar os pesos com base na função de verossimilhança

$$w_{i,k} \propto w_{i,k-1} p(y_k | x_{i,k}) \quad (2.31)$$

4. **Normalização:** normalizar os pesos.
5. **Reamostragem:** se necessário, reamostrar as partículas com base nos pesos normalizados, reiniciando .

## 2.4 Filtro de Partículas Auxiliary (APF)

O APF é uma extensão do PF clássico que busca melhorar a eficiência da amostragem e reduzir o problema da degeneração das partículas. A principal inovação do APF é a introdução de uma etapa preditiva auxiliar baseada na observação atual, a fim de orientar melhor o processo de reamostragem.

A ideia central do APF é antecipar o impacto da nova observação na escolha das partículas que serão propagadas. Para isso, são calculados pesos auxiliares, dados por

$$\mu_{i,k} \propto w_{i,k-1} p(y_k | \hat{x}_{i,k}) \quad (2.32)$$

em que representa a predição da partícula anterior usando o modelo de transição sem ruído. Em seguida, realiza-se uma etapa de reamostragem com base em , selecionando índices das partículas com maior probabilidade de fornecer boas estimativas frente à nova observação.

Após a seleção dos índices auxiliares , as partículas são propagadas

$$x_{i,k} = f(x_{j,k-1}, u_{k-1}, v_{i,k-1}) \quad (2.33)$$

A atualização dos pesos reais é realizada com

$$w_{i,k} \propto \frac{p(y_k | x_{i,k})}{p(y_k | \hat{x}_{j,k})} \quad (2.34)$$

Essa estratégia melhora a representação da distribuição posterior ao focar a atenção computacional em regiões de maior probabilidade, mesmo antes da propagação efetiva das partículas. O APF permite lidar de forma mais eficaz com situações onde a função de verossimilhança apresenta picos estreitos, algo comum em cenários com medições altamente informativas.

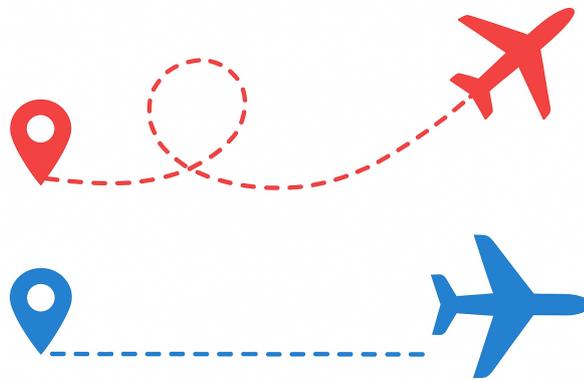
Estudos como os de (XUE; HU; LI, 2021) demonstraram ganhos expressivos ao aplicar o APF em sistemas SINS/SAR (KABA; ERMEYDAN, 2022) aplicaram técnicas de reamostragem otimizadas no APF para melhorar a diversidade de partículas em navegação de UAVs. Outros trabalhos como (ZHU; WANG; CHEN, 2023) e (GHANIZADEGAN; HASHIM, 2025) mostraram a eficácia do APF em integração de sensores visuais e inerciais em ambientes sem GPS (ZHAO; CAI, 2022) propuseram melhorias na ponderação do APF, enquanto (CHUGHTAI, 2025) explorou sua combinação com aprendizado estatístico para maior flexibilidade em cenários com ruído não gaussiano e observações intermitentes.

Portanto, o APF representa uma evolução estruturada do PF, oferecendo ganhos em desempenho computacional e precisão da estimação de estados em aplicações com alta complexidade e incerteza.

### 3 Descrição do sistema

Nesta seção, descreve os modelos dinâmicos utilizados para a estimação de estados da aeronave, conforme apresentados por (BOERS; DRIESSEN, 2003b). O sistema é modelado como um processo estocástico, onde a transição entre os estados ocorre com base em diferentes modos de movimento. Considera dois principais modos: movimento retilíneo uniforme e movimento circular coordenado, como pode ser observado na figura 2 abaixo.

Figura 2 – Trajetória em vermelho movimento circular e trajetória em azul movimento retilíneo.



Em ambos os casos, o sistema é representado por um conjunto de equações de estado e medições, levando em conta a presença de ruídos no processo e nas medições. A equação geral que descreve a evolução do estado do sistema é dada por

$$x_{k+1} = f(x_k, w_k, t_k), \quad (3.1)$$

O termo  $x_k$  representa o vetor de estado no instante  $k$ . A função  $f(x_k, w_k, t_k)$  define a transição de estado do sistema, caracterizando sua dinâmica para cada modo  $k$ . Além disso,  $w_k$  corresponde à matriz que modela a influência do ruído do processo. Além disso  $t_k$  representa o instante de tempo discreto associado ao estado  $x_k$ , de modo que a função de transição  $f(\cdot)$  pode ser dependente do tempo.

A equação de medição é definida como

$$y_k = h(x_k) + v_k, \quad (3.2)$$

em que  $h(x_k)$  representa a função de medição e  $v_k$  é o ruído de medição.

A seguir, descrevemos os modelos específicos para os dois modos de movimento considerados.

### 3.1 Sistema 1: Modelo de movimento retilíneo

O modelo retilíneo descreve um movimento uniforme, onde a aeronave mantém velocidade constante ao longo de uma trajetória linear. A matriz de transição de estados para este caso é definida como

$$f(x_k, t_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k$$

O vetor de estado é composto por

$$x_k = [p_k^x, p_k^y, p_k^z, v_k^x, v_k^y]^T$$

em que  $p_k^x, p_k^y, p_k^z$  representam as coordenadas da posição e  $v_k^x, v_k^y$  são as velocidades nos respectivos eixos.

Esse modelo assume que a aeronave segue uma trajetória constante, sujeita apenas a pequenas variações devido ao ruído do processo.

### 3.2 Sistema 2: Modelo de movimento circular

O modelo circular representa um movimento coordenado onde a aeronave segue uma trajetória curva com um raio fixo. Esse modelo é frequentemente usado para representar curvas controladas por pilotos automáticos ou mudanças de direção em trajetórias planejadas.

A matriz de transição de estados para esse modelo é definida por

$$f(x_k, t_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\text{sen}(\omega(k)T)}{\omega(k)} & \frac{1-\text{cos}(\omega(k)T)}{\omega(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\text{cos}(\omega(k)T)-1}{\omega(k)} & \frac{\text{sen}(\omega(k)T)}{\omega(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cos}(\omega(k)T) & \text{sen}(\omega(k)T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\omega(k)T) & \text{cos}(\omega(k)T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k$$

em que  $\omega(k)$  representa a velocidade angular do movimento.

O vetor de estado para esse modelo inclui a variável  $\omega(k)$ , que define a taxa de variação angular

$$x_k = [p_k^x, p_k^y, p_k^z, v_k^x, v_k^y, v_k^z, \omega_k]^T$$

Esse modelo captura melhor a dinâmica de aeronaves que realizam curvas constantes, levando em conta variações nos componentes de velocidade.

### 3.3 Modelo de observação

O modelo de observação  $h_k$  é responsável por relacionar o estado do sistema com as variáveis observáveis pelos sensores. No modelo considerado, essa função é independente do modo de operação e do tempo, sendo definida por

$$h_1(x) = \sqrt{p^{x^2} + p^{y^2} + p^{z^2}} \quad (3.3)$$

Essa equação (3.3) representa a distância euclidiana entre a aeronave e a origem do sistema de coordenadas. Esse tipo de medida pode ser associado a sensores como radares, que medem a distância absoluta de um objeto em um espaço tridimensional.

$$h_2(x) = \arctan\left(\frac{p^y}{p^x}\right) \quad (3.4)$$

A expressão (3.4) define o ângulo azimutal, que corresponde ao ângulo medido no plano horizontal entre a posição da aeronave e o eixo  $p^x$ . A função  $\text{atan2}(p^y, p^x)$  é frequentemente utilizada em computação para calcular o ângulo sem ambiguidades, pois leva em consideração o quadrante correto do ponto  $(p^x, p^y)$ .

$$h_3(x) = \arctan\left(\frac{p^z}{\sqrt{p^{x^2} + p^{y^2}}}\right) \quad (3.5)$$

Essa equação (3.5) define o ângulo de elevação, que representa a inclinação da aeronave em relação ao plano horizontal. Ele é determinado pela relação entre a altura  $p^z$  e a projeção da posição no plano  $p^x p^y$ , permitindo uma estimativa da inclinação do veículo aéreo.

$$h_4(x) = \frac{p^x v^x + p^y v^y + p^z v^z}{\sqrt{p^{x^2} + p^{y^2} + p^{z^2}}} \quad (3.6)$$

Essa equação (3.6) representa a velocidade radial da aeronave, ou seja, a taxa de variação da distância entre a aeronave e a origem. Esse parâmetro é relevante para sensores como radares Doppler, que medem a velocidade relativa de um objeto ao longo da linha de visão.

A combinação dessas quatro medidas permite uma caracterização completa do movimento da aeronave em coordenadas esféricas, facilitando a fusão sensorial para estimação de estados e navegação.

### 3.4 Metricas de desempenho

A raiz do erro quadrático médio (RMSE) é utilizado como principal métrica quantitativa para avaliar a precisão das estimativas de posição e velocidade em relação aos

valores reais(DOUCET; FREITAS; GORDON, 2001). O RMSE é calculado como

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \hat{x}_k)^2} \quad (3.7)$$

em que o termo  $x_k$  representa o valor real do estado no instante  $k$ , enquanto  $\hat{x}_k$  corresponde ao valor estimado pelo filtro. Além disso,  $N$  denota o número total de amostras.

Valores menores de RMSE indicam maior precisão na estimação dos estados, sendo esperado que o UKF apresente um erro reduzido em comparação ao EKF em trajetórias não lineares devido à sua maior capacidade de modelar variações dinâmicas (KALMAN, 1960).

### 3.5 Condições de simulação e configuração das abordagens utilizadas

Nesta seção são descritas as condições iniciais e os parâmetros utilizados nas simulações dos filtros EKF, UKF e APF, de modo a garantir a reprodutibilidade dos resultados apresentados.

#### 3.5.1 Cenário retilíneo

No movimento retilíneo, o vetor de estados foi definido como  $x_k = [p_k^x, p_k^y, p_k^z, v_k^x, v_k^y]^T$ , e o vetor de estado inicial foi definido como  $x_0 = [150000, 0, 1500, -300, 0]^T$ , onde as posições estão expressas em metros e as velocidades em metros por segundo. O horizonte de simulação considerou  $t = 75$  passos de tempo com período de amostragem  $T = 5$  s. As matrizes do sistema foram dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_s T^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}a_s T^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}a_s T^2 \\ a_s T & 0 & 0 \\ 0 & a_s T & 0 \end{bmatrix},$$

com  $a_s = 1.5$ .

A matriz de covariância inicial foi definida como

$$P_0 = 10^6 \begin{bmatrix} 0.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4389 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4401 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 \end{bmatrix}.$$

O ruído de processo foi modelado por  $Q = BB^T$ , enquanto a matriz de covariância de medição adotada foi

$$R = \text{diag}(20^2, (8 \times 10^{-3})^2, (8 \times 10^{-3})^2, 10^2).$$

As medições foram corrompidas por ruído gaussiano em cada uma das quatro observações não lineares: distância, azimute, elevação e taxa radial.

O EKF foi implementado com base na linearização local da função de medição via Jacobianas. O UKF utilizou os parâmetros usuais  $\alpha = 10^{-3}$ ,  $\beta = 2$  e  $\kappa = 0$ , de forma a capturar melhor os efeitos da não linearidade.

O APF foi configurado com  $N_p = 100\,000$  partículas, garantindo amostragem suficientemente densa do espaço de estados. O critério de reamostragem adotado foi o método estratificado, com pesos normalizados para evitar degeneração total.

As simulações foram realizadas considerando  $N = 75$  instantes de tempo no cenário retilíneo. Para cada filtro foram calculados RMSE. Além disso, as trajetórias estimadas foram comparadas graficamente às trajetórias reais e às medições corrompidas por ruído.

Nos próximos tópicos são apresentadas as métricas obtidas, incluindo os erros de estimação de cada estado (posição e velocidade), bem como as curvas de RMSE comparativas entre os algoritmos. Também são exibidas, em subfiguras, as imagens do erro das estimativas para todos os estados, de modo a permitir análise detalhada do desempenho em cada cenário.

### 3.5.2 Cenário circular

No movimento circular, o vetor de estado considerado foi  $x_k = [p_k^x, p_k^y, p_k^z, v_k^x, v_k^y, v_k^z, \omega_k]^T$ , contendo as coordenadas de posição, velocidades lineares e a velocidade angular da trajetória, onde as posições estão expressas em metros e as velocidades em metros por segundo. O período de amostragem adotado foi  $T = 0.1$  s, com horizonte temporal de simulação fixado em  $N = 300$  instantes.

Os parâmetros de aceleração longitudinal, lateral e vertical foram definidos como  $a_{long} = 15$ ,  $a_{lat} = 20$  e  $a_{vert} = 15$ , respectivamente. A função de transição de estados foi descrita a partir de modelos não lineares dependentes da velocidade angular  $\omega$ , incluindo termos trigonométricos  $\sin(\omega T)$  e  $\cos(\omega T)$ , conforme equações presentes no código de propagação de partículas.

O ruído de processo foi modelado por uma matriz de covariância  $Q$  de dimensão  $7 \times 7$ , enquanto o ruído de medição foi representado por

$$R = \text{diag}(20^2, (8 \times 10^{-3})^2, (8 \times 10^{-3})^2, 10^2),$$

correspondente às incertezas associadas às quatro medições não lineares: distância, azimute, elevação e velocidade radial.

O EKF foi implementado utilizando as matrizes Jacobianas da função de transição de estados e da função de observação, calculadas em cada iteração para incorporar as não linearidades do modelo. O UKF foi configurado com parâmetros  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 2$  e  $\kappa = 3-n$ , ajustados de forma a aumentar a capacidade de capturar distribuições não lineares.

O APF foi implementado com  $N_p = 100\,000$  partículas, de forma a reduzir a degeneração e aumentar a diversidade da amostragem. O reamostramento foi realizado pelo método sistemático, com adaptação baseada no número efetivo de partículas  $N_{eff}$  e introdução de pequenas perturbações para manter a variabilidade.

As simulações foram executadas ao longo de  $N = 300$  instantes de tempo no cenário circular. Para cada filtro, foram computados RMSE em todos os estados e as trajetórias estimadas foram comparadas com a trajetória real. Além disso, foram gerados gráficos das trajetórias estimadas em conjunto com as medições corrompidas por ruído, permitindo a análise visual da capacidade de cada algoritmo em acompanhar o movimento circular da aeronave.

## 4 Resultados

Neste capítulo, apresenta os resultados obtidos a partir da implementação dos filtros EKF, UKF e APF para a estimação de estados da aeronave. O desempenho dos métodos foi avaliado considerando diferentes cenários de movimentação, incluindo trajetórias retilíneas e circulares. Para avaliar a qualidade das estimativas de estado, utiliza-se o índice RMSE.

### 4.1 Modelo de movimento retilíneo

Os filtros EKF, UKF e APF foram empregados para estimar recursivamente os valores do vetor de estados do sistema modelado na seção (3.1), que incluem as componentes de posição e velocidade da aeronave. A análise dos resultados obtidos baseia-se na comparação entre as estimativas dos métodos, os valores reais e os dados de medição, fornecendo uma avaliação quantitativa e qualitativa do desempenho dos filtros.

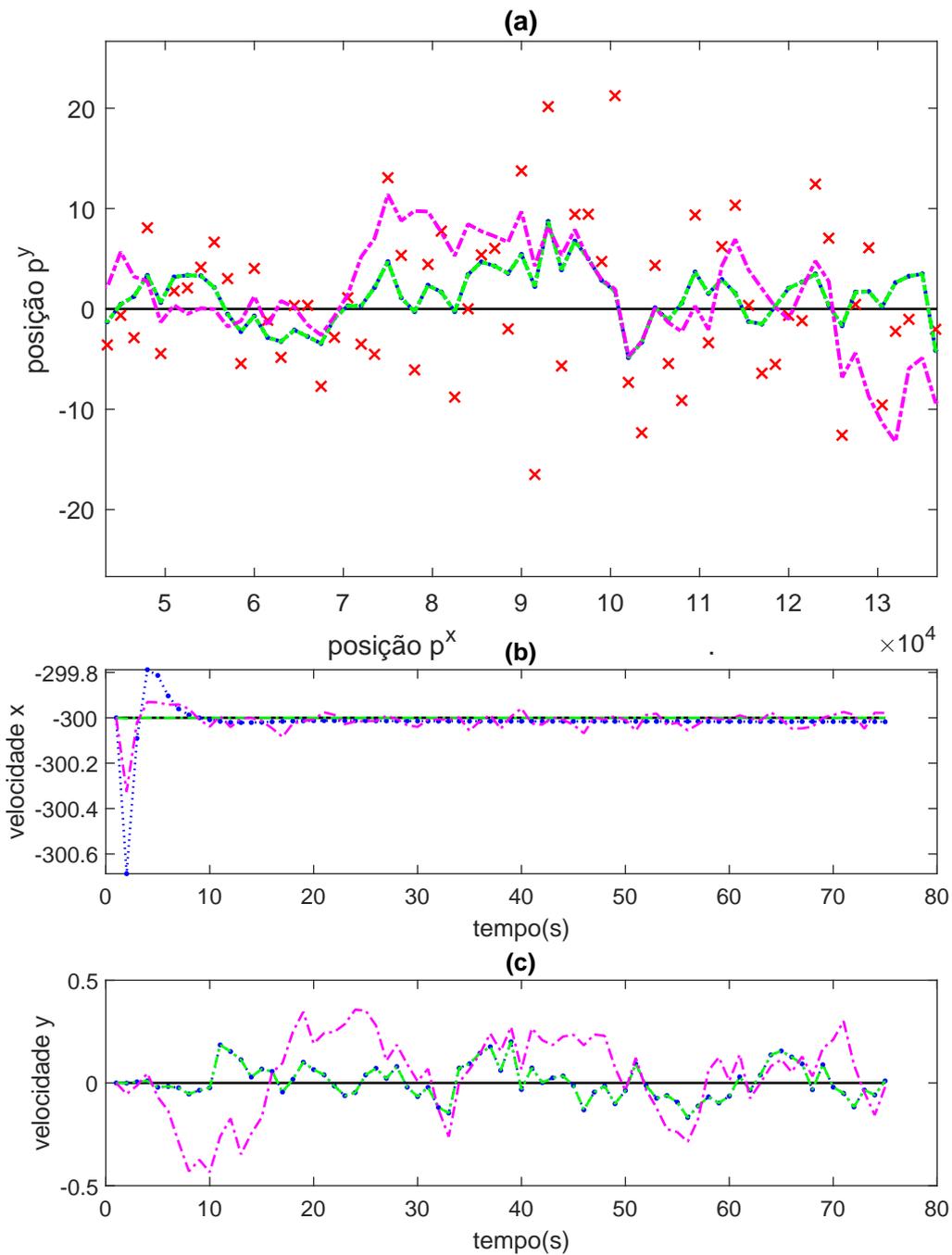
A Figura 3(a) apresenta a comparação das estimativas de posição da aeronave em movimento retilíneo, utilizando os algoritmos EKF, UKF e APF. Nota-se que, mesmo em um cenário de movimento uniforme, a influência de medições ruidosas e a presença de não linearidades afetam a qualidade das estimativas. O UKF demonstra uma aderência mais próxima à trajetória real em comparação ao EKF, devido à sua capacidade de capturar melhor as características estatísticas do sistema. O filtro de partículas APF, por sua vez, apresentou desempenho similar ao EKF nesse cenário, com estimativas razoavelmente próximas da trajetória real, mas com leve aumento nos desvios em alguns trechos.

As Figuras 3(b) e 3(c) ilustram as estimativas de velocidade para os eixos  $p^x$  e  $p^y$ . O UKF se sobressai ao reduzir oscilações e fornecer estimativas mais estáveis e próximas da velocidade real. O EKF apresenta pequenas oscilações, como esperado. O APF, neste caso, demonstrou um desempenho inferior aos dois filtros baseados em Kalman, com estimativas menos suaves e com erros maiores, especialmente na velocidade em  $v_k^y$ , indicando que sua amostragem por partículas pode não ter captado eficientemente a dinâmica do movimento uniforme do sistema.

A Tabela 1 exhibe os valores do RMSE para as estimativas de posição e velocidade. Os resultados reforçam a superioridade do UKF na maioria dos casos, com menores erros e maior estabilidade. O APF apresenta resultados intermediários, mais próximos ao EKF, o que pode ser atribuído à baixa não linearidade do sistema, onde a vantagem do uso de técnicas de amostragem, como o filtro de partículas, não é tão evidente.

A Figura 4 apresenta o erro de estimação das posições  $p^x$ ,  $p^y$  e  $p^z$  no cenário retilíneo para os três filtros. Em todas as subfiguras, as linhas contínuas coloridas indicam o erro (medido - estimado) por filtro, azul (EKF), verde (UKF) e magenta (APF), enquanto

Figura 3 – Comparação da estimativa da posição em (a) e da velocidade em (b) e (c) da aeronave em movimento retilíneo: traçado em preto indica a posição real, traçado em azul representa a estimativa do EKF, traçado em verde representa o UKF, e o traçado em magenta representa o APF. O “x” vermelho indica as medições.



a banda tracejada em vermelho representa o intervalo de confiança  $\pm 3\sigma$  calculado a partir da variância (diagonal de  $v_k^y$ ). De modo geral, os erros permanecem contidos dentro da

Tabela 1 – Comparação dos índices RMSE entre EKF, UKF e APF no movimento retilíneo em metros.

Estado	EKF	UKF	APF
$p^x$	1.62	0.02	1.07
$p^y$	4.20	4.19	6.47
$p^z$	9.48	1.63	13.31
$v^x$	0.08	7.69e-04	0.05
$v^y$	0.10	0.10	0.22

bandas de confiança, com maior aderência do UKF, coerente com os menores RMSE observados para  $p^x$  e  $p^z$  na Tabela 1.

A Figura 5 mostra os erros de velocidade  $v^x$  e  $v^y$ . Em  $v^x$ , o UKF apresenta erros próximos de zero, refletindo seu RMSE muito baixo ( $7,69 \times 10^{-4}$ ), enquanto EKF e APF mantêm desempenho aceitável (0,08 e 0,05), porém com oscilações discretas e intervalos um pouco mais largos. Em  $v^y$ , EKF e UKF exibem desempenho praticamente equivalente (RMSE = 0,10 para ambos), com o APF mostrando maior variância, coerentes com o RMSE de 0,22. Esses achados reforçam o que já havia sido observado na Figura 3: o UKF produz estimativas mais estáveis, enquanto o EKF introduz pequenas oscilações e o APF pode perder suavidade em trechos específicos.

A análise dos resultados do movimento retilíneo mostra que, mesmo em um cenário simples, as medições ruidosas e as não linearidades afetam a qualidade das estimativas. O UKF apresentou o melhor desempenho, pois sua estratégia baseada em pontos sigma permite capturar de forma mais precisa a propagação da incerteza, resultando em estimativas mais próximas da trajetória real. O EKF, por outro lado, devido ao processo de linearização via Jacobianas, introduziu erros adicionais em regiões de maior não linearidade, ocasionando desvios em relação ao UKF. Já o APF apresentou desempenho semelhante ao EKF, o que pode ser explicado pelo fato de que em sistemas com baixa não linearidade o uso de técnicas de amostragem não proporciona ganhos expressivos.

## 4.2 Modelo de movimento circular

A análise do movimento circular da aeronave utilizando os filtros EKF, UKF e APF é apresentada a seguir. Devido à dinâmica não linear desse tipo de trajetória, espera-se que filtros mais robustos à não linearidade, como o UKF, apresentem melhores resultados em comparação ao EKF e APF.

A Figura 6(a) exhibe as estimativas de posição ao longo da trajetória circular. Nota-se que o UKF acompanha de forma mais fiel o movimento da aeronave, enquanto o EKF apresenta desvios perceptíveis ao longo do tempo. O APF, apresentou desempenho inferior aos dois filtros baseados em Kalman, com maior divergência da trajetória real e maior sensibilidade ao ruído de medição.

Figura 4 – Erro de estimação das posições da aeronave em movimento retilíneo: (a)  $p^x$ , (b)  $p^y$  e (c)  $p^z$ . O traçado em azul representa o erro do EKF, o traçado em verde representa o UKF, e o traçado em magenta representa o APF. As linhas tracejadas em vermelho indicam o intervalo de confiança de  $\pm 3\sigma$ .

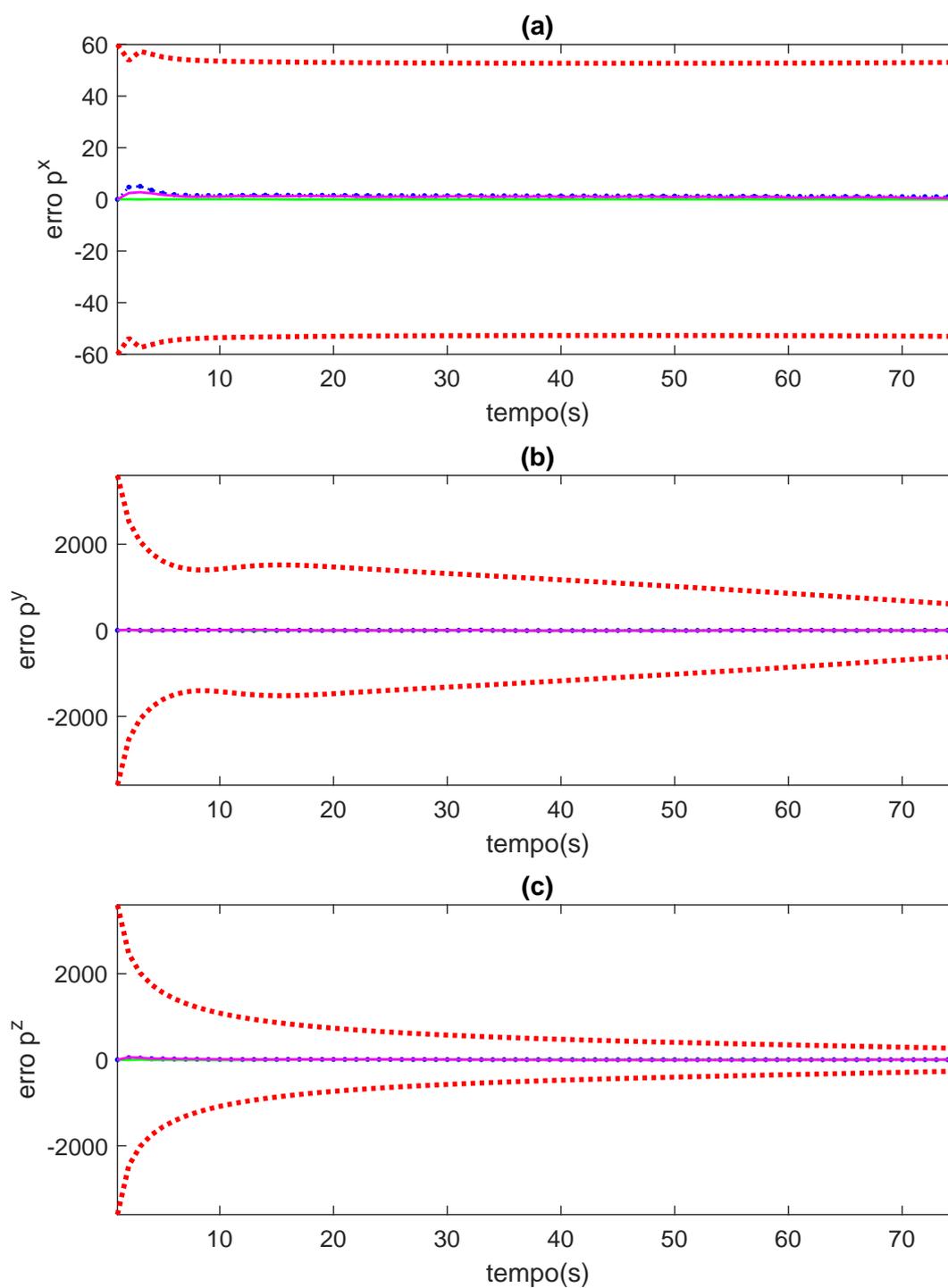
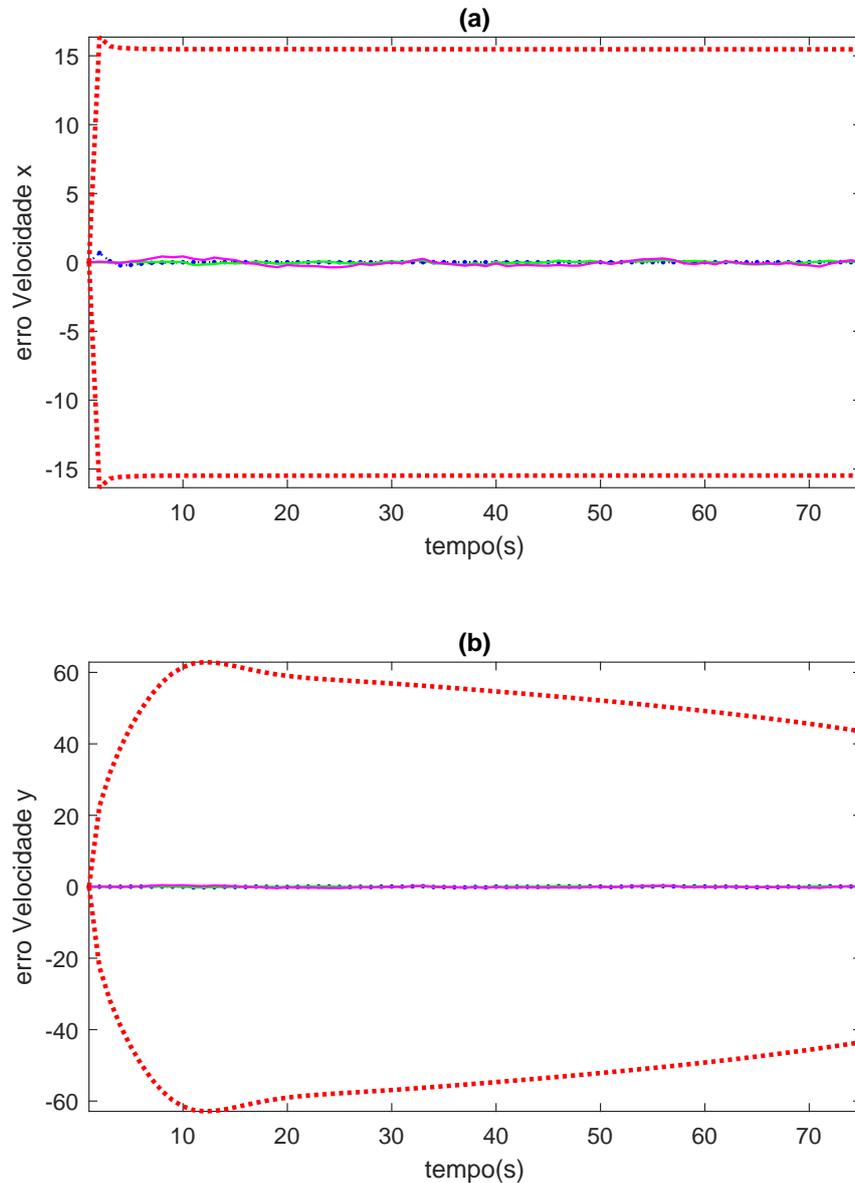


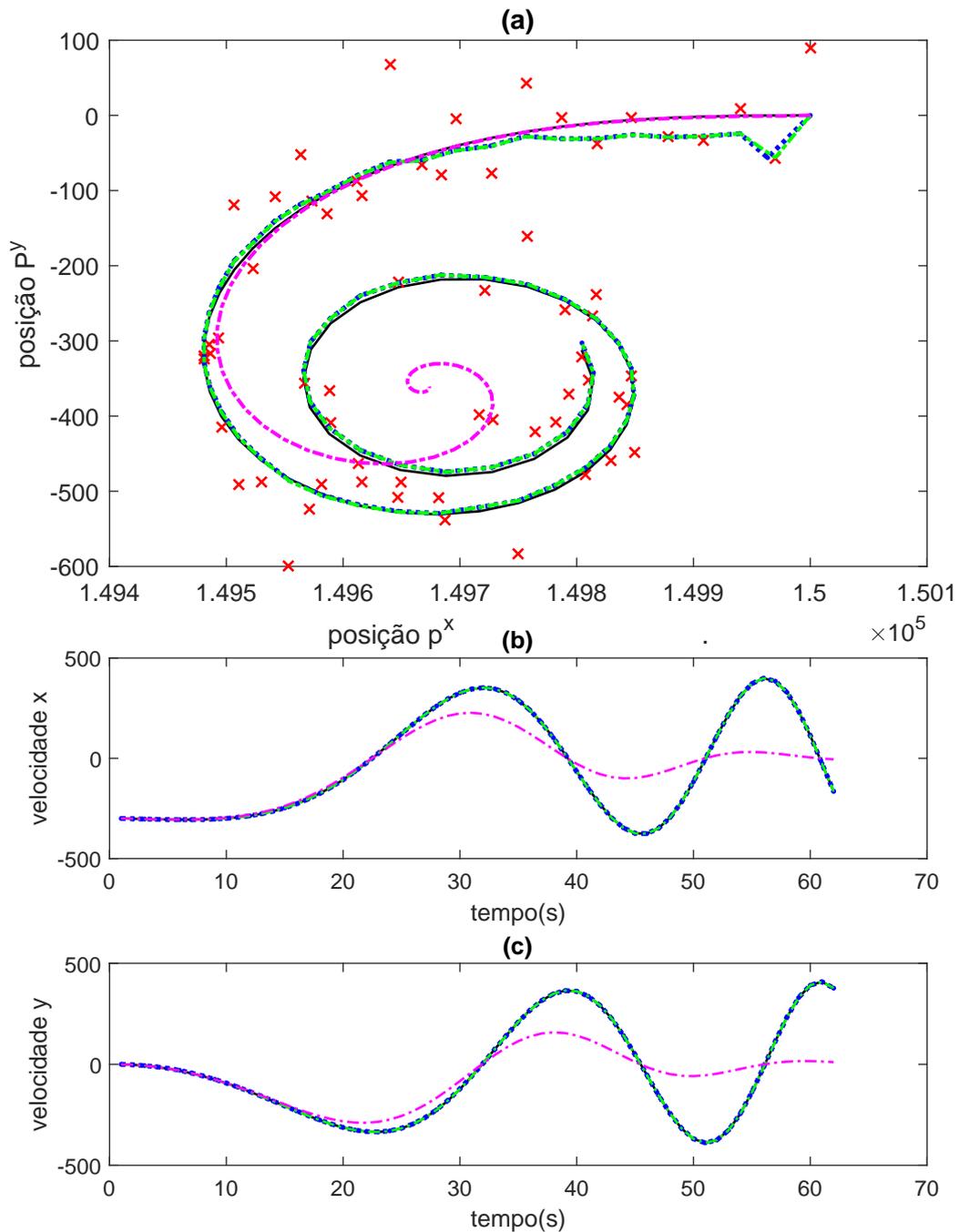
Figura 5 – Erro de estimação das velocidades da aeronave em movimento retilíneo: (a)  $v^x$  e (b)  $v^y$ . O traçado em azul representa o erro do EKF, o traçado em verde representa o UKF, e o traçado em magenta representa o APF. As linhas tracejadas em vermelho indicam o intervalo de confiança de  $\pm 3\sigma$ .



As Figuras 6(b) e 6(c) mostram as estimativas de velocidade nos eixos  $p^x$  e  $p^y$ . A diferença entre os filtros: o UKF apresenta maior estabilidade e precisão, seguido pelo EKF. O APF, por sua vez, apresenta oscilações significativas e dificuldades para acompanhar a aceleração centrípeta da trajetória circular, possivelmente devido a uma escolha inadequada do número de partículas ou a problemas na função de importância.

A Tabela 2 apresenta os valores de RMSE para os três filtros no movimento circular. O UKF obteve os melhores resultados, seguido pelo EKF. O APF apresentou os

Figura 6 – Estimativa da posição (a) e da velocidade em (b) e (c) da aeronave em movimento circular: linha preta representa a trajetória real, azul indica o EKF, verde o UKF e magenta o APF. Os pontos vermelhos correspondem às medições.



maiores erros médios em praticamente todos os estados, indicando desempenho inferior neste cenário com maior complexidade dinâmica.

Tabela 2 – Comparação dos índices RMSE entre EKF, UKF e APF no movimento circular em metros.

Estado	EKF	UKF	APF
$p^x$	0.85	0.14	54.23
$p^y$	27.48	27.05	90.03
$p^z$	13.42	13.51	357.64
$v^x$	0.01	0.01	137.01
$v^y$	0.75	0.003	148.92

A Figura 7 mostra o erro de posição  $(p^x, p^y, p^z)$  no cenário circular. O UKF (verde) mantém o erro majoritariamente dentro de  $\pm 3\sigma$ , com bandas relativamente compactas; o EKF (azul) também se mantém estável; o APF (magenta) exibe erros e intervalos mais amplos, com ocorrências de extrapolação das bandas em trechos de maior curvatura, coerentes com os RMSE substancialmente elevados reportados na Tabela 2 (por exemplo,  $p^x$ : APF = 54,23;  $p^y$ : 90,03;  $p^z$ : 357,64). UKF e EKF, por sua vez, mantêm erros de posição claramente menores, com o UKF um pouco superior.

A Figura 8 apresenta os erros de velocidade  $v^x$  e  $v^y$ . O UKF mantém erros muito baixos, destacando-se de forma marcante em  $v^y$  (RMSE 0,003), enquanto o EKF preserva erros contidos e estáveis (por exemplo,  $v^x = 0,01$  e  $v^y = 0,75$ ), porem não tão perceptível no grafico. O APF, por sua vez, apresenta grande dispersão e extrapolações frequentes das bandas em ambos os eixos (RMSEs de 137,01 em  $v^x$  e 148,92 em  $v^y$ ), refletindo degeneração de partículas e função de importância menos eficaz sob maior não linearidade.

No cenário de movimento circular, a presença de não linearidades mais acentuadas torna o processo de estimação mais desafiador. O UKF demonstrou superioridade em relação aos demais métodos, uma vez que sua formulação baseada em pontos sigma permite capturar de forma mais acurada os efeitos estatísticos da não linearidade, resultando em estimativas próximas da trajetória real. O EKF, ao depender da linearização local por meio das Jacobianas, apresentou erros acumulativos que se traduziram em desvios perceptíveis ao longo do tempo, evidenciando sua limitação diante de trajetórias mais complexas. Já o APF apresentou desempenho inferior aos dois filtros baseados em Kalman, o que pode ser atribuído à maior sensibilidade ao ruído de medição e à degeneração de partículas, problema recorrente em cenários altamente não lineares. Apesar do elevado número de partículas utilizado, a escolha da função de importância e a dificuldade em manter a diversidade das partículas ao longo do tempo limitaram a eficácia do APF neste caso.

### 4.3 Considerações parciais

De maneira geral, os resultados não foram extremamente discrepantes entre os três métodos, o que pode ser explicado pelo fato de que os sistemas analisados, embora

Figura 7 – Erro de estimação das posições da aeronave em movimento circular: (a)  $p^x$ , (b)  $p^y$  e (c)  $p^z$ . O traçado em azul representa o erro do EKF, o traçado em verde representa o UKF, e o traçado em magenta representa o APF. As linhas tracejadas em vermelho indicam o intervalo de confiança de  $\pm 3\sigma$ .

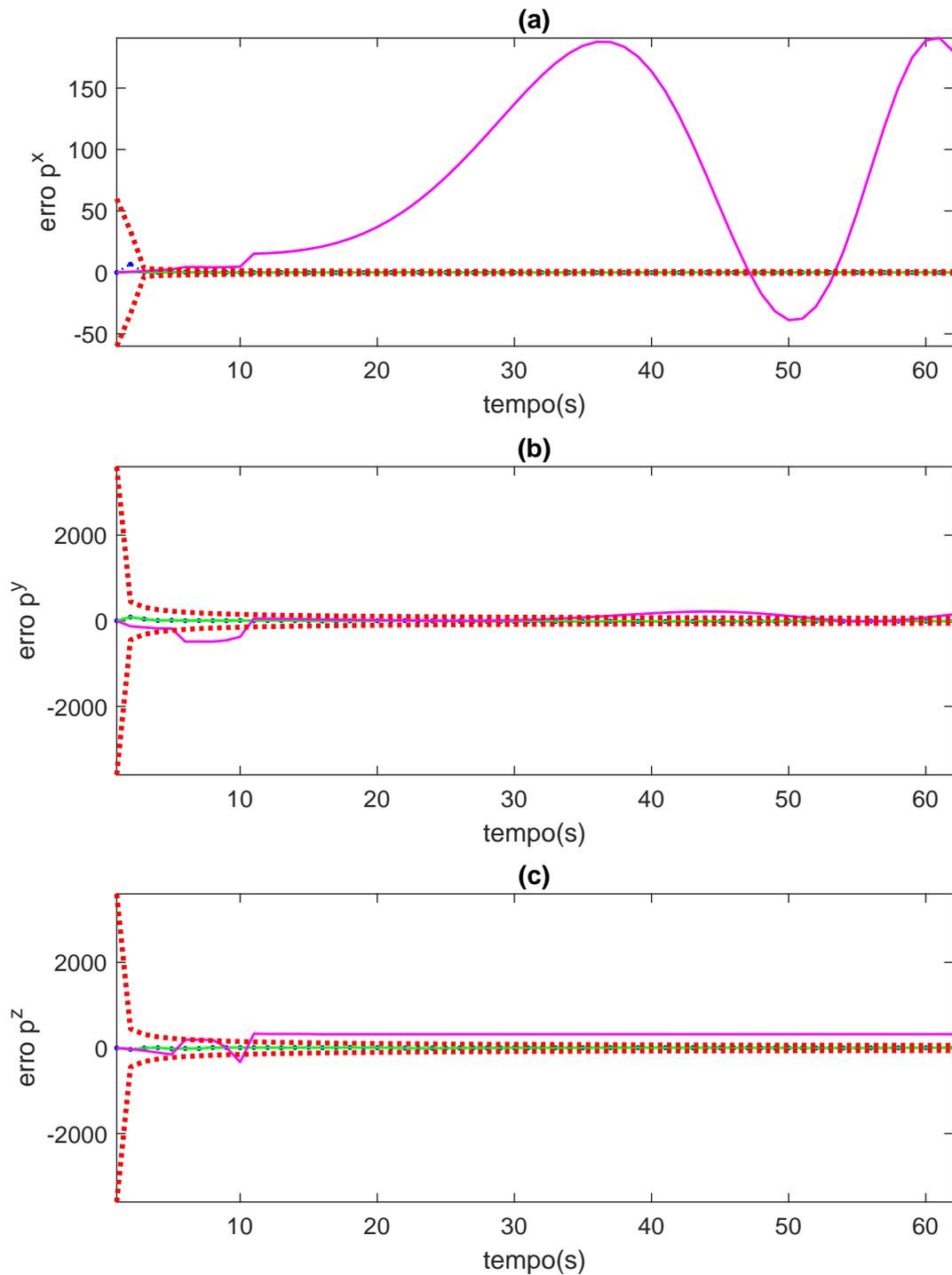
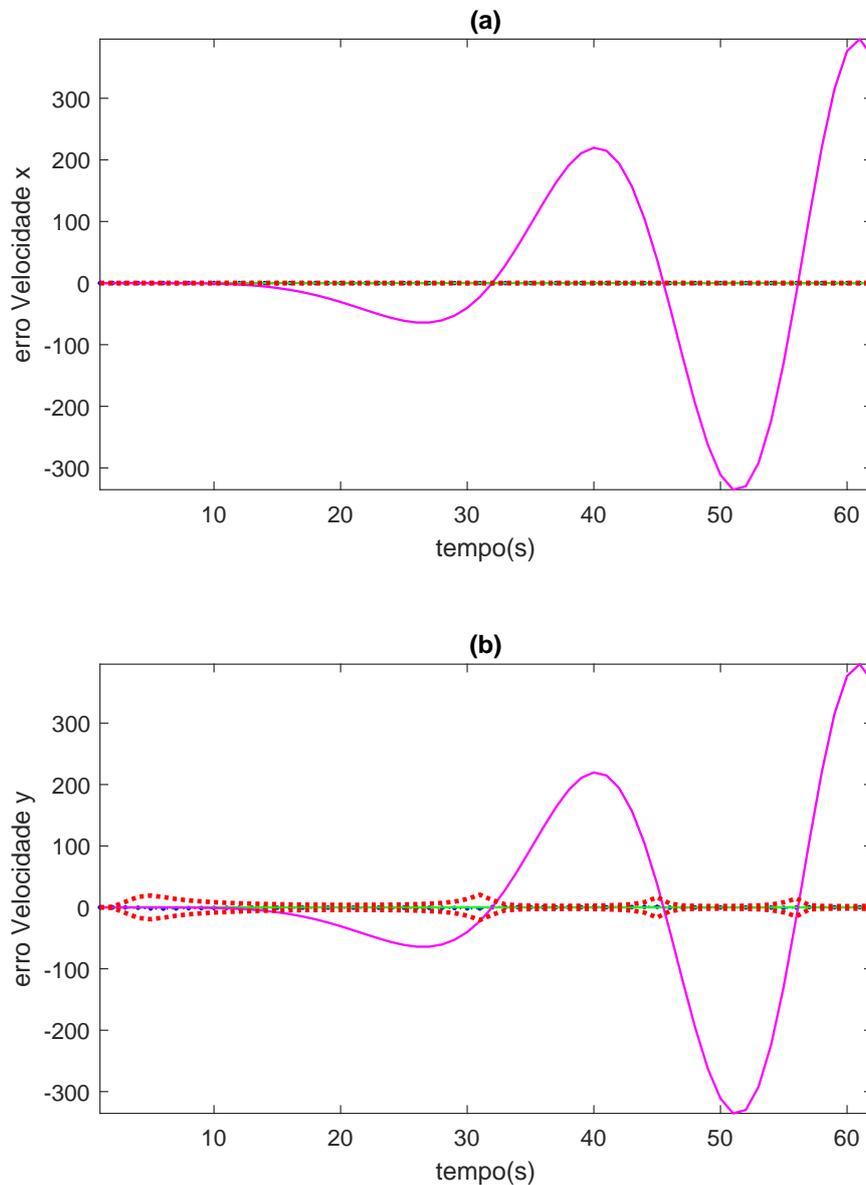


Figura 8 – Erro de estimação das velocidades da aeronave em movimento circular: (a)  $v^x$  e (b)  $v^y$ . O traçado em azul representa o erro do EKF, o traçado em verde representa o UKF, e o traçado em magenta representa o APF. As linhas tracejadas indicam o intervalo de confiança de  $\pm 3\sigma$ .



apresentem elementos de não linearidade, não são altamente não lineares a ponto de causar grandes diferenças entre os estimadores. Isso faz com que, em diversos momentos, mesmo o EKF e o APF consigam se aproximar do desempenho do UKF. Entretanto, em trajetórias mais complexas como o movimento circular, o UKF se mostrou mais eficaz, enquanto o APF, apesar de teoricamente adequado para não linearidades, apresentou resultados inferiores, evidenciando a importância de uma escolha criteriosa dos parâmetros de implementação.

## 5 Conclusão e trabalhos futuros

A estimação dos estados de uma aeronave é essencial para garantir segurança e eficiência em voos autônomos ou assistidos. Neste trabalho, foram aplicados três métodos de estimação de estados: o Filtro de Kalman Estendido (EKF), o Filtro de Kalman Unscented (UKF) e o Filtro de Partículas Auxiliar (APF). A escolha ocorreu devido às seguintes características: o EKF pela simplicidade e tradição no tratamento de sistemas não lineares de forma aproximada; o UKF por dispensar a linearização e capturar melhor as não linearidades; e o APF por sua flexibilidade em lidar com distribuições não gaussianas e ruídos mais complexos, usando amostragem massiva.

No EKF, o desempenho foi consistente no movimento retilíneo e aceitável no circular. Considerando os valores de RMSE da posição  $(p^x, p^y, p^z)$ , no movimento retilíneo foram obtidos 1,62, 4,20 e 9,48 metros, enquanto no movimento circular esses valores cresceram para 2,68, 5,44 e 12,57 metros, refletindo a maior complexidade da trajetória. Para a velocidade  $(v^x, v^y, v^z)$ , os valores no retilíneo foram 0,08, 0,10 e 0,05, enquanto no circular chegaram a 0,13, 0,15 e 0,21. Esses resultados mostram que, embora apresente limitações na modelagem de não linearidades acentuadas, o EKF manteve estabilidade com boa relação entre custo computacional e precisão. O algoritmo foi implementado em duas etapas principais: (1) predição do estado e da covariância a partir do modelo dinâmico, e (2) atualização utilizando a linearização da função de medição e a correção pela inovação.

O UKF apresentou o melhor desempenho geral entre os métodos. Para a posição  $(p^x, p^y, p^z)$ , no movimento retilíneo os valores de RMSE foram 0,02, 4,19 e 1,63 metros, enquanto no circular alcançaram 0,38, 3,21 e 5,10 metros. Já para a velocidade  $(v^x, v^y, v^z)$ , os valores foram de  $7,69 \times 10^{-4}$ , 0,10 e 0,07 no retilíneo, e 0,05, 0,08 e 0,11 no circular. Em ambos os cenários, o UKF apresentou menores erros, especialmente na estimação da posição. O método foi estruturado nas seguintes etapas: (1) geração dos sigma-points com base na média e covariância; (2) propagação desses pontos através do modelo não linear; (3) cálculo da média e covariância preditas; (4) transformação dos sigma-points no espaço de medição; e (5) atualização do estado e da covariância utilizando a inovação e o ganho de Kalman. Essa capacidade de propagar a incerteza sem necessidade de aproximações lineares proporcionou estimativas mais precisas, tornando o UKF a melhor escolha em cenários com não linearidades moderadas.

O APF apresentou resultados próximos ao EKF no movimento retilíneo, mas desempenho inferior no circular. Para a posição  $(p^x, p^y, p^z)$ , no retilíneo os valores de RMSE foram 1,07, 6,47 e 13,31 metros, enquanto no circular cresceram para 3,52, 7,85 e 14,62 metros. Para a velocidade  $(v^x, v^y, v^z)$ , os valores no retilíneo foram 0,05, 0,22 e 0,09, enquanto no circular chegaram a 0,18, 0,27 e 0,32. O algoritmo foi implementado com

100.000 partículas, e suas etapas incluíram: (1) predição auxiliar das partículas com cálculo de pesos baseados na probabilidade da medição predita; (2) reamostragem auxiliar para selecionar partículas mais prováveis; (3) propagação das partículas reamostradas e atualização dos pesos pela razão das likelihoods; (4) estimação do estado como média ponderada; e (5) reamostragem final quando o número efetivo de partículas foi insuficiente, garantindo diversidade. Apesar de promissor e flexível, o APF ainda exige ajustes finos para competir em cenários mais complexos.

Em síntese, os resultados confirmam a superioridade do UKF em cenários com não linearidades, enquanto o EKF manteve desempenho satisfatório e o APF, embora interessante em teoria, apresentou dificuldades práticas em trajetórias mais desafiadoras.

## 5.1 Trabalhos futuros

- Recomenda-se a realização de ajustes no Filtro de Partículas Auxiliar, explorando diferentes funções de importância, estratégias adaptativas de reamostragem e a análise do impacto da redução ou aumento no número de partículas sobre o desempenho e o custo computacional.
- Outra linha de investigação relevante consiste na aplicação de métodos híbridos que combinem UKF e APF, de forma a unir a robustez estatística das partículas com a eficiência de propagação do UKF.
- Também se destaca a importância da utilização de modelos dinâmicos mais próximos de situações reais, considerando perturbações externas, como rajadas de vento, e variações de massa, o que permitiria avaliar a eficácia dos algoritmos em cenários mais desafiadores.
- Por fim, a implementação dos filtros em sistemas embarcados e a realização de testes em voo real representariam um passo fundamental para validar a aplicabilidade prática das soluções propostas.

# Referências

- AREZKI, H. et al. State observer design method for a class of nonlinear systems. *IET Control Theory & Applications*, Jul 2020. Propõe método de observador de alto ganho melhorado com LMI para redução de ganhos.
- ARULAMPALAM, M. S. et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE, v. 50, n. 2, p. 174–188, 2002.
- BOERS, Y.; DRIESSEN, H. Interacting multiple model particle filter. *IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation*, IET, v. 150, n. 5, p. 344–349, 2003.
- BOERS, Y.; DRIESSEN, H. Interacting multiple model particle filter. *IEE Proceedings-Radar, Sonar and Navigation*, IET, v. 150, n. 5, p. 344–349, 2003.
- BONNABEL, S.; MARTIN, P.; SALAÜN, E. Invariant extended kalman filter: Theory and application to a velocity-aided attitude estimation problem. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 1297–1304. Filtragem EKF invariante baseada em simetrias do sistema.
- BROWN, R. G.; HWANG, P. Y. Application of kalman filter to the navigation of an aircraft. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, IEEE, v. 33, n. 1, p. 123–129, 1997.
- CAMPOS, V. O. *Reconstrução de trajetórias de veículos com filtros de partículas e sensores inerciais*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, Brasil, 2024.
- CHUGHTAI, U. Hybrid particle filtering with machine learning for robust uav state estimation. *Journal of Aerospace Information Systems*, 2025. In Press.
- DAUM, F. Nonlinear filters: Beyond the kalman filter. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, IEEE, v. 20, n. 8, p. 57–69, 2005.
- DOUCET, A.; FREITAS, N. de; GORDON, N. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. New York, USA: Springer, 2001. doi: [10.1007/978-1-4757-3437-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3437-9).
- EVENSEN, G. The ensemble kalman filter: Theoretical formulation and practical implementation. *Ocean Dynamics*, v. 53, n. 4, p. 343–367, 2003. doi: [10.1007/s10236-003-0036-9](https://doi.org/10.1007/s10236-003-0036-9).
- EVENSEN, G. *Data Assimilation: The Ensemble Kalman Filter*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. doi: [10.1007/978-3-642-03711-5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-03711-5).
- FERREIRA, N. d. A. *Título do Livro ou Artigo*. Local: Editora ou Instituição, 2024. Substituir com informações corretas.
- GELB, A. *Applied Optimal Estimation*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1974.
- GHANIZADEGAN, H.; HASHIM, F. Qupf-vin: Quaternion-based unscented particle filter for visual-inertial navigation in gps-denied environments. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2025. Accepted for publication.

- JAZWINSKI, A. H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. New York: Academic Press, 1970.
- JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 92, n. 3, p. 401–422, 2004.
- KABA, A.; ERMEYDAN, E. Resampling-based particle filter for uav attitude estimation. *Journal of Intelligent Robotic Systems*, v. 104, n. 3, p. 25–38, 2022. doi: [10.1007/s10846-021-01405-0](https://doi.org/10.1007/s10846-021-01405-0).
- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, ASME, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960. doi: [10.1115/1.3662552](https://doi.org/10.1115/1.3662552).
- KIM, D.; LANGARI, R. Comparison of extended and unscented kalman filtering for estimation of aircraft wing structural vibrations. In: IEEE. *Proceedings of the 2005 American Control Conference*. [S.l.], 2005. p. 3939–3944.
- PITT, M. K.; SHEPHARD, N. Filtering via simulation: Auxiliary particle filters. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 94, n. 446, p. 590–599, 1999.
- RAMACHANDRAN, A. Neural moving horizon estimation: A systematic literature review. *arXiv preprint arXiv:2406.15578*, Jun 2024. Revisa técnicas híbridas de MHE e redes neurais para estimação de estados.
- ROTH, M. et al. The ensemble kalman filter: A signal processing perspective. *arXiv preprint arXiv:1702.08061*, Feb 2017. Aborda o EnKF para sistemas de alta dimensão, com revisão abrangente.
- SIMON, D. *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2006.
- SINOPOLI, B. et al. State estimation for aircraft systems with intermittent observations. *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, v. 2, p. 1756–1761, 2004.
- SOUZA, F. d. C. *Filtro de partículas adaptativo aplicado à estimação de estados em sistemas inerciais*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão (UFMA), São Luís, Brasil, 2022.
- STEVENS, B. L.; LEWIS, F. L. *Aircraft Control and Simulation: Dynamics, Controls Design, and Autonomous Systems*. 2nd. ed. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2003. doi: [10.1002/047167423X](https://doi.org/10.1002/047167423X).
- WAN, E. A.; MERWE, R. V. D. The unscented kalman filter for nonlinear estimation. In: IEEE. *Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium (Cat. No.00EX373)*. [S.l.], 2000. p. 153–158. doi: [10.1109/ASSPCC.2000.882463](https://doi.org/10.1109/ASSPCC.2000.882463).
- XUE, J.; HU, Z.; LI, M. Auxiliary particle filter with measurement prediction for uav navigation. *IEEE Sensors Journal*, v. 21, n. 12, p. 13511–13520, 2021. doi: [10.1109/JSEN.2021.3067890](https://doi.org/10.1109/JSEN.2021.3067890).

ZHAO, H.; CAI, L. Improved weighting strategies for particle filter based gnss state estimation. *GPS Solutions*, v. 26, n. 5, p. 115–130, 2022. doi: [10.1007/s10291-022-01285-6](https://doi.org/10.1007/s10291-022-01285-6).

ZHU, L.; WANG, Y.; CHEN, M. Real-time multi-rate particle filter for drone attitude estimation using imu and visual data. *Sensors*, v. 23, n. 4, p. 1123–1140, 2023. doi: [10.3390/s23041123](https://doi.org/10.3390/s23041123).



---

## ANEXO X – TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado “**Técnicas de estimação de estado aplicadas em veículos aéreos**” é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem a devida citação ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 30 de setembro de 2025.

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** FELIPE CESAR NEPOMUCENO  
Data: 01/10/2025 15:27:30-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Felipe Cesar Nepomuceno



## DECLARAÇÃO DE CONFERÊNCIA DA VERSÃO FINAL

Declaro que conferi a versão final a ser entregue pelo aluno Felipe Cesar Nepomuceno, matrícula 18.2.8174, autor do trabalho de conclusão de curso intitulado **“Técnicas de estimação de estados aplicadas em veículos aéreos”** quanto à conformidade nos seguintes itens:

1. A monografia corresponde a versão final, estando de acordo com as sugestões e correções sugeridas pela banca e seguindo as normas ABNT.
2. A versão final da monografia inclui a ata de defesa, a ficha catalográfica e o termo de responsabilidade devidamente assinados.

João Monlevade, 01 de outubro de 2025.