



Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Engenharia Elétrica



Trabalho de Conclusão de Curso

Um Estudo sobre Controladores de Estrutura Variável com Ênfase em Modos Deslizantes

Karen Alves da Mata

João Monlevade, MG
2018

Karen Alves da Mata

Um Estudo sobre Controladores de Estrutura Variável com Ênfase em Modos Deslizantes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientador: Prof. Vítor Costa da Silva Campos

Coorientador: Prof. Gabriel Azevedo Fogli

Universidade Federal de Ouro Preto
João Monlevade
2018

M425e Mata, Karen Alves da.
Um estudo sobre controladores de estrutura variável com ênfase em modos deslizantes [manuscrito] / Karen Alves da Mata. - 2018.

76f.: il.: color; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Victor Costa da Silva Campos.
Coorientador: Prof. MSc. Gabriel Azevedo Fogli.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Departamento de Engenharia Elétrica.

1. Engenharia elétrica. 2. Conversores de energia elétrica - Conversor Buck. I. Campos, Victor Costa da Silva. II. Fogli, Gabriel Azevedo. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 621.314

Catálogo: ficha@sisbin.ufop.br



ANEXO II - ATA DE DEFESA

Aos 26 dias do mês de Janeiro de 2018, às 13 horas, no bloco B deste instituto, foi realizada a defesa de monografia pelo (a) formando (a) Karen Alves da Mata, sendo a comissão examinadora constituída pelos professores Renan Fernandes Bastos, Márcio Feliciano Braga, Víctor Costa da Silva Campos e Gabriel Azevedo Fogli.

O (a) candidato (a) apresentou a monografia intitulada: Um Estudo sobre Controladores de Estrutura Variável com Ênfase em Modos Deslizantes. A comissão examinadora deliberou, por unanimidade, pela aprovação do(a) candidato(a), com a nota média 9,5, de acordo com a tabela 1. Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da comissão examinadora e pelo (a) formando(a).

Tabela 1 – Notas de avaliação da banca examinadora

| Banca Examinadora | Nota |
|------------------------------|------------|
| Renan Fernandes Bastos | 9,5 |
| Márcio Feliciano Braga | 9,5 |
| Víctor Costa da Silva Campos | 9,5 |
| Gabriel Azevedo Fogli | 9,5 |
| Média | 9,5 |

João Monlevade, 26 de janeiro de 2018.

Víctor Costa da Silva Campos
Professor(a) Orientador(a)

Karen Alves da Mata
Aluno (a)

Gabriel Azevedo Fogli
Professor(a) Coorientador(a)

Renan Fernandes Bastos
Professor(a) Convidado(a)

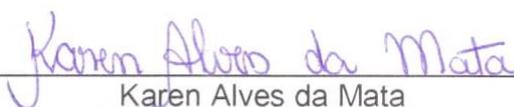
Márcio Feliciano Braga
Professor(a) Convidado(a)



ANEXO X - TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado “Um Estudo sobre Controladores de Estrutura Variável com Ênfase em Modos Deslizantes” é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem a devida citação ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 26 de janeiro de 2018.



Karen Alves da Mata

Dedico este trabalho aos meus pais, Wagner e Zélia, e ao meu irmão, Cássio, por acreditarem em mim, dar-me forças e coragem para nunca desistir, mesmo com toda distância.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado saúde e força suficiente para superar todos os obstáculos que surgiram nesse caminho.

Agradeço aos meus pais e ao meu irmão, por todo amor, incentivo, força, confiança e apoio incondicional enviado em todos esses anos.

Agradeço aos meus familiares e meus amigos de infância, que mesmo com a distância acreditaram em mim e me apoiaram nessa jornada.

Agradeço aos meus amigos que fiz em João Monlevade, companheiros nessa vida universitária e irmãos na amizade, por viverem os melhores anos da minha vida comigo e compartilharem momentos inesquecíveis.

Agradeço à J.K. Rowling, por me fazer lembrar de acender a luz para encontrar a felicidade mesmo nos tempos mais difíceis.

Agradeço de forma especial ao Víctor e ao Gabriel, por toda orientação, paciência e amizade desses anos. Vocês me ajudaram a concluir o meu sonho e nada me fará esquecer isso.

Para todos vocês, não existem palavras suficientes e capazes de expressar a gratidão que sinto, o meu mais sincero obrigada!

“It is our choices, Harry, that show what we truly are, far more than our abilities.”
– Albus Dumbledore

Resumo

Teoria de controle é utilizada na escolha de um controlador que satisfaça o desempenho dinâmico desejado. Normalmente, isto é realizado aplicando uma lei de controle contínua estática ou uma realimentação dinâmica. Existem diversas aplicações na engenharia em que não é possível utilizar leis de controle contínuas, como controle automático de voos, navios ou submarinos, sistemas espaciais e diversos circuitos de eletrônica de potência, como conversores e inversores, que utilizam, muitas vezes, a técnica de sistemas de controle de estrutura variável e modos deslizantes. Essa estratégia introduz descontinuidades nas equações do sistema, de forma que um modo deslizante aconteça na dinâmica. Ou seja, utiliza-se uma lei de controle com chaveamento em alta frequência que force a trajetória do sistema a permanecer em uma determinada superfície. Essa monografia apresenta uma análise de existência e estabilidade de sistemas de controle de estrutura variável e modos deslizantes e apresenta diferentes técnicas para o projeto deste controlador, como Controle de Unidade e Modos Deslizantes de Ordem Superior. Além disso, apresenta a aplicação das técnicas de controle equivalente e controle *Super-Twisting* em três sistemas: Pêndulo Invertido Linear, Suspensão Ativa e Conversor Buck. Os resultados das aplicações são apresentados de maneira que seja possível analisar o funcionamento das técnicas de controle.

Palavras-chave: Controle de Estrutura Variável, Modos Deslizantes, Pêndulo Invertido Linear, Suspensão Ativa, Conversor Buck.

Abstract

Control theory is used in the selection of a controller which satisfies a desirable dynamic performance. Usually, this is accomplished by applying a static continuous control law or a dynamic feedback. There are quite a few engineering problems in which this is not possible, such as automatic control for flights, ships or submarines, aerospace systems and several power electronic circuits, such as converters and inverters, which often apply the variable structure and sliding modes control system technique. This strategy introduces discontinuities into the system equations, so that a sliding mode acts in the dynamics. In other words, a control law with high switching frequency which forces the system trajectory to continue on a surface is used. This monograph presents an analysis of the existence and stability of the variable structure and sliding modes control system and presents different techniques for this controller project, such as Unit Control and Higher Order Sliding Modes Control. Additionally, it presents an application of Equivalent Control Method and Super-Twisting Control in three systems: Linear Inverted Pendulum, Active Suspension and Buck Converter. The application's results are presented in a way that allows one to analyse the functioning of the techniques.

Keywords: Variable Structure Control, Sliding Modes, Linear Inverted Pendulum, Active Suspension, Buck Converter .

Lista de ilustrações

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Plano de fase para o sistema (2.8). | 7 |
| Figura 2 – Plano de fase para o sistema (2.9). | 7 |
| Figura 3 – Plano de fase para o sistema (2.7). | 8 |
| Figura 4 – Trajetórias do sistema (2.10) com diferentes condições de amostragem: (a) período de amostragem igual a 0,1 segundos; (b) período de amostragem igual a 0,05 segundos; (c) período de amostragem igual a 0,01 segundos. Sinal de controle do sistema (2.10) com diferentes condições de amostragem: (d) período de amostragem igual a 0,1 segundos; (e) período de amostragem igual a 0,05 segundos; (f) período de amostragem igual a 0,01 segundos. | 9 |
| Figura 5 – Plano de fase para o sistema (2.10), considerando perturbações. | 10 |
| Figura 6 – Possíveis trajetórias: (a) Trajetória atravessando a superfície de chaveamento; (b) Trajetória permanecendo na superfície de chaveamento. | 15 |
| Figura 7 – Pêndulo Invertido Linear. | 28 |
| Figura 8 – Ângulo da haste do pêndulo invertido linear com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle <i>Super-Twisting</i> | 31 |
| Figura 9 – Velocidade angular da haste do pêndulo invertido linear com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle <i>Super-Twisting</i> | 31 |
| Figura 10 – Posição do carrinho sobre o trilho com período de amostragem de 1 ms, com referência, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle <i>Super-Twisting</i> | 32 |
| Figura 11 – Velocidade do carrinho sobre o trilho com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle <i>Super-Twisting</i> | 33 |
| Figura 12 – Lei de controle no pêndulo invertido linear com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle <i>Super-Twisting</i> | 33 |
| Figura 13 – Lei de controle no pêndulo invertido linear ampliada com período de amostragem de 1 ms, aplicando Controle Equivalente. | 34 |
| Figura 14 – Superfície no pêndulo invertido linear com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle <i>Super-Twisting</i> | 34 |
| Figura 15 – Simulação do pêndulo invertido linear com controle equivalente com período de amostragem de 0,1 ms, em que (a) Ângulo da haste do pêndulo invertido linear, (b) Velocidade angular da haste do pêndulo invertido linear, (c) Posição do carrinho sobre o trilho e (d) Velocidade do carrinho sobre o trilho. | 35 |

| | |
|---|----|
| Figura 16 – Simulação do pêndulo invertido linear com controle equivalente com período de amostragem de 0,1 ms, em que (a) Lei de controle e (b) Superfície. | 36 |
| Figura 17 – Suspensão Ativa. | 37 |
| Figura 18 – Sistema de suspensão em malha aberta em que: (a) Alteração da suspensão, (b) Velocidade vertical do corpo do veículo, (c) Alteração do pneu com relação à entrada e (d) Velocidade vertical da roda. | 40 |
| Figura 19 – Alteração da suspensão ativa com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle <i>Super-Twisting</i> . . . | 41 |
| Figura 20 – Velocidade vertical do corpo do veículo com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle <i>Super-Twisting</i> | 42 |
| Figura 21 – Alteração do pneu com relação à estrada com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle <i>Super-Twisting</i> | 42 |
| Figura 22 – Velocidade vertical da roda com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle <i>Super-Twisting</i> | 43 |
| Figura 23 – Lei de controle na suspensão ativa com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle <i>Super-Twisting</i> . . . | 44 |
| Figura 24 – Superfície na suspensão ativa com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle <i>Super-Twisting</i> . . . | 44 |
| Figura 25 – Simulação da suspensão ativa com controle equivalente com período de amostragem de 0,1 ms, em que (a) Alteração da suspensão, (b) Velocidade vertical do corpo do veículo, (c) Alteração do pneu com relação à estrada e (d) Velocidade vertical da roda. | 45 |
| Figura 26 – Simulação da suspensão ativa com controle equivalente com período de amostragem de 0,1 ms, em que (a) Lei de controle e (b) Superfície. . . | 46 |
| Figura 27 – Conversor Buck. | 47 |
| Figura 28 – Topologia básica do conversor Buck com <i>Sw</i> conduzindo. | 47 |
| Figura 29 – Topologia básica do conversor Buck com <i>Sw</i> não conduzindo. | 48 |
| Figura 30 – Circuito montado no <i>Simulink</i> para o primeiro caso. | 51 |
| Figura 31 – Lei de controle do conversor Buck do primeiro caso. | 52 |
| Figura 32 – Corrente no indutor do conversor Buck do primeiro caso. | 52 |
| Figura 33 – Tensão na saída do conversor Buck do primeiro caso. | 53 |
| Figura 34 – Circuito montado no <i>Simulink</i> para o segundo caso. | 53 |
| Figura 35 – Lei de controle do conversor Buck do segundo caso. | 54 |
| Figura 36 – Corrente no indutor do conversor Buck do segundo caso. | 54 |
| Figura 37 – Tensão na saída do conversor Buck do segundo caso. | 55 |
| Figura 38 – Circuito montado no <i>Simulink</i> para o terceiro caso. | 55 |
| Figura 39 – Lei de controle do conversor Buck do terceiro caso. | 56 |
| Figura 40 – Corrente no indutor do conversor Buck do terceiro caso. | 56 |

| | |
|---|----|
| Figura 41 – Tensão na saída do conversor Buck do terceiro caso. | 57 |
| Figura 42 – Circuito montado no <i>Simulink</i> para o quarto caso. | 57 |
| Figura 43 – Lei de controle do conversor Buck do quarto caso. | 58 |
| Figura 44 – Corrente no indutor do conversor Buck do quarto caso. | 59 |
| Figura 45 – Tensão na saída do conversor Buck do quarto caso. | 59 |

Lista de tabelas

| | |
|---|----|
| Tabela 1 – Dados do Sistema Pêndulo Invertido Linear. | 29 |
| Tabela 2 – Dados de Simulação do Sistema de Pêndulo Invertido Linear. | 30 |
| Tabela 3 – Dados do Sistema de Suspensão Ativa. | 38 |
| Tabela 4 – Dados de Simulação do Sistema de Suspensão Ativa. | 40 |
| Tabela 5 – Dados de Simulação do Sistema Conversor Buck. | 51 |

Lista de abreviaturas e siglas

| | |
|--------------|--|
| CEVMD | Controle de Estrutura Variável e Modos Deslizantes |
| CMD | Controle por Modos Deslizantes |
| CC-CC | Corrente Contínua para Corrente Contínua |

Lista de símbolos

| | |
|---------------------------------|---|
| \in | Pertence |
| $<$ | Menor que |
| $>$ | Maior que |
| \leq | Menor ou igual que |
| \geq | Maior ou igual que |
| $s(x)$ | Superfície de deslizamento |
| S | Matriz de superfície de deslizamento |
| G | Matriz de derivada parcial da superfície com relação ao estado |
| τ | Tempo necessário para o sistema atingir a superfície |
| V | Função de Lyapunov do sistema |
| \dot{V} | Derivada da função de Lyapunov do sistema |
| u_{eq} | Vetor de controle equivalente |
| ∇f | Gradiente de uma função f |
| x^T | Transposta da matriz x |
| x^{-1} | Inversa da matriz x |
| $\frac{\partial x}{\partial t}$ | Derivada parcial de x com relação ao tempo |
| γ | Vetor desconhecido de perturbações |
| γ_0 | Valor máximo de um vetor desconhecido de perturbações |
| ρ | Ganho do vetor de controle equivalente e de unidade |
| $\ x\ $ | Módulo de x |
| M_0 | Constante do vetor de controle do algoritmo <i>Twisting</i> |
| M_1 | Constante do vetor de controle do algoritmo <i>Twisting</i> |
| a | Constante do vetor de controle do algoritmo <i>Super-Twisting</i> |
| M | Constante do vetor de controle do algoritmo <i>Super-Twisting</i> |

| | |
|----------------|---|
| x_d | Estado para rastrear um estado |
| \tilde{x} | Erro de rastreamento do estado |
| λ | Constante de tempo |
| \mathcal{C} | Matriz de controlabilidade |
| T | Matriz de transformação |
| A_{new} | Matriz de estados na forma canônica controlável |
| B_{new} | Matriz de entradas na forma canônica controlável |
| C_{new} | Matriz de saída na forma canônica controlável |
| S_{new} | Matriz de superfícies de deslizamento na forma canônica controlável |
| $A_{reduzida}$ | Matriz de entradas na forma canônica controlável reduzida |
| α | Constante para alocação dos polos da dinâmica do sistema para seleção de superfície por transformação |
| M_c | Massa do carrinho motorizado |
| m | Massa do pêndulo invertido |
| θ | Ângulo da haste do pêndulo invertido |
| l | Comprimento do pêndulo invertido |
| g | Constante gravitacional |
| d | Dado da placa de aquisição do pêndulo invertido |
| b | Dado da placa de aquisição do pêndulo invertido |
| T_s | Período de amostragem |
| M_s | Massa suspensa da suspensão ativa |
| K_s | Constante de rigidez da mola M_s |
| B_s | Constante de amortecimento da mola M_s |
| M_{us} | Massa não suspensa da suspensão ativa |
| K_{us} | Constante de rigidez da mola M_{us} |
| B_{us} | Constante de amortecimento da mola M_{us} |

| | |
|----------|---|
| F_c | Força de atuação do controle da suspensão ativa |
| z_s | Deslocamento do corpo do veículo com relação ao pneu no sistema suspensão ativa |
| z_r | Sinal da superfície da estrada no sistema suspensão ativa |
| z_{us} | Deslocamento do pneu no sistema suspensão ativa |
| V_e | Tensão na entrada do conversor Buck |
| V_o | Tensão na saída do conversor Buck |
| V_C | Tensão no capacitor do conversor Buck |
| v_d | Tensão desejada na saída do conversor Buck |
| L | Indutor do conversor Buck |
| C | Capacitor do conversor Buck |
| R | Resistor do conversor Buck |
| Sw | Chave do conversor Buck |
| Δ | Perturbação do conversor Buck |
| R_p | Resistor em paralelo do conversor Buck |

Sumário

| | | |
|------------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 | Objetivos | 3 |
| 1.2 | Estrutura do Trabalho | 3 |
| 2 | SISTEMAS DE CONTROLE A ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES | 4 |
| 2.1 | Modelo do Sistema | 4 |
| 2.1.1 | Superfície de Deslizamento | 4 |
| 2.2 | Modos Deslizantes | 5 |
| 2.2.1 | Principais Características de um Modo Deslizante | 6 |
| 2.2.2 | Condições de Existência de um Modo Deslizante | 8 |
| 3 | DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DE MODOS DESLIZANTES | 13 |
| 3.1 | Solução de <i>Filippov</i> | 13 |
| 3.2 | Controle Equivalente | 15 |
| 3.3 | Forma Regular e Dinâmica de Redução de Ordem | 16 |
| 3.4 | Controle de Unidade | 16 |
| 3.5 | Modos Deslizantes de Ordem Superior | 19 |
| 3.5.1 | Algoritmo <i>Twisting</i> | 20 |
| 3.5.2 | Algoritmo <i>Super-Twisting</i> | 21 |
| 3.5.3 | Resolução Numérica de Equações Diferenciais | 22 |
| 3.6 | Seleção das Superfícies de Chaveamento | 22 |
| 3.6.1 | Superfície de Chaveamento do Tipo Integral | 23 |
| 3.7 | Seleção da Superfície por Transformação | 24 |
| 4 | ESTUDOS DE CASO | 27 |
| 4.1 | Pêndulo Invertido Linear | 27 |
| 4.1.1 | Modelo do Sistema | 28 |
| 4.1.2 | Projeto da Superfície | 29 |
| 4.1.3 | Projeto dos Controladores | 29 |
| 4.1.4 | Simulações | 30 |
| 4.2 | Suspensão Ativa | 36 |
| 4.2.1 | Modelo do Sistema | 37 |
| 4.2.2 | Projeto da Superfície | 38 |
| 4.2.3 | Projeto dos Controladores | 39 |
| 4.2.4 | Simulações | 40 |

| | | |
|------------|---|-----------|
| 4.3 | Conversor Buck | 46 |
| 4.3.1 | Modelo do Sistema | 46 |
| 4.3.2 | Projeto da Superfície | 48 |
| 4.3.3 | Projeto dos Controladores | 50 |
| 4.3.4 | Simulações | 51 |
| 5 | CONCLUSÃO | 60 |
| | REFERÊNCIAS | 62 |
| A | - SIMULAÇÕES DO PÊNDULO INVERTIDO LINEAR | 63 |
| B | - SIMULAÇÕES DA SUSPENSÃO ATIVA | 68 |
| C | - SIMULAÇÕES DO CONVERSOR BUCK | 74 |

1 Introdução

Habitualmente, o engenheiro realiza a criação de novos projetos e, por isso, é necessário planejar, analisar e modelar sistemas físicos previamente. O projeto de um controlador é importante, pois a partir dele é possível controlar um sistema dinâmico fazendo com que o sistema apresente um comportamento com certas características pré-estabelecidas.

De acordo com Oliveira (2006), ao projetar um controlador tal que o sistema em malha fechada apresente o comportamento desejado é necessário aplicar, em alguns casos, uma lei de controle contínua estática ou uma realimentação dinâmica. Em situações que uma lei de realimentação contínua não resolve o problema, uma possível alternativa é a incorporação de decisões baseadas em lógicas à lei de controle, resultando em um sistema com chaveamento.

Segundo Liberzon e Morse (1999), um sistema chaveado pode ser definido como um sistema híbrido composto por uma família de subsistemas com dinâmica de tempo contínuo e uma lei que organiza o chaveamento entre eles.

Conforme defendido por Scharlau (2013), a estabilidade de sistemas chaveados não depende somente da dinâmica de cada subsistema, mas também das propriedades do sinal de chaveamento. Isto é, mesmo quando os subsistemas do sistema chaveado são exponencialmente estáveis, as trajetórias do sistema podem ser instáveis para determinados sinais de comutação. Além do mais, possuir somente subsistemas instáveis não quer dizer que o sistema não possa ser exponencialmente estável, dependendo do chaveamento utilizado.

Dentre as diversas técnicas disponíveis para o projeto de controladores, pode-se destacar a linearização por realimentação, o controle adaptativo e o controle de estrutura variável.

Souza (1973) afirma que

Os sistemas de controle de estrutura variável são sistemas de controle em malha fechada, nos quais a estrutura e/ou os parâmetros do controlador variam, sendo descontínuas as variações de parâmetros, de acordo com uma lei de controle, em função do estado do sistema, e/ou das perturbações agindo no sistema controlado.

Ainda de acordo com Souza (1973), sistemas de controle de estrutura variável são regidos por equações diferenciais descontínuas. Somente após o trabalho do matemático Fillippov ser publicado em 1960 foi que as pesquisas com aplicação na área de controle foram iniciadas por Yemel'yanov e sua equipe (Utkin, Taran, Kostyleva, Grichenko, etc.), com a assistência de Petrov e Barbashin e sua equipe (Pechorina, Eidinov, Tabueva, Gerchenko, Badkov, etc.).

De acordo com Cunha (2002), nesta técnica, o próprio controle é responsável pela introdução de descontinuidades nas equações do sistema. Sendo assim, alguns fenômenos exclusivos relacionados com as descontinuidades podem ser citados, como modos deslizantes, zona de estagnação, bifurcações de órbitas deslizantes e outros.

Uma estratégia muito utilizada é a de sistemas de Controle de Estrutura Variável e Modos Deslizantes (CEVMD). De acordo com Oliveira (2006), um modo deslizante pode ser interpretado como rápidos chaveamentos que ocorrem infinitas vezes. Na prática, os chaveamentos rápidos podem causar gastos excessivos dos equipamentos, além de poder alterar a estabilidade do sistema. A principal característica do sistema de Controle por Modos Deslizantes (CMD) é a garantia de estabilidade e robustez contra perturbações.

A técnica de CEVMD é muito efetiva para tratar sistemas incertos. Ou seja, sistemas nos quais os valores dos parâmetros do modelo não são conhecidos, mesmo que assumam-se conhecimento de limites para seus valores, mostrando competência em diversos problemas de engenharia, como: controle automático de voos, controle de motores elétricos, processos químicos, sistemas espaciais, robótica e etc. Outra aplicação é em circuitos de eletrônica de potência que empregam chaves eletrônicas, como conversores e inversores.

Segundo Agostinho (2009), a técnica de CMD foi desenvolvida em 1978 por Utkin. Essa técnica leva em consideração as incertezas do modelo em sua estrutura. Porém, a metodologia apresentou alguns problemas, como:

- Elevados ganhos de controle;
- Existência de oscilações de alta frequência na ação de controle;
- Entre outros.

Esses problemas dificultaram a aplicação prática do método. Para viabilizar a implementação, Slotine e Sastry em 1983 desenvolveram adaptações do método de forma a diminuir, ou mesmo eliminar, os problemas encontrados no controlador. Tan, Lai e Tse (2011) afirmam que, comparando com outros métodos de controle de sistemas não lineares, o método de CMD é mais simples de implementar.

De acordo com Ribeiro (2006), a lei de controle de CEVMD é chaveada em alta velocidade e o chaveamento ocorre quando o sistema cruza certas superfícies descontínuas no espaço de estado. A lei é utilizada para conduzir e manter a trajetória dos estados de uma planta em uma superfície específica, denominada superfície de deslizamento, ou sobre a intersecção de todas as superfícies escolhidas no espaço de estados. Usualmente, a estrutura de CEVMD é não linear e pode ser considerada uma combinação de subsistemas.

Diz-se que o sistema está em condição de deslizamento, ou em modo deslizante, quando a trajetória dos estados atinge a superfície de deslizamento e nela permanece. Neste caso, o sistema sofre menor influência caso ocorra alguma perturbação.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é uma síntese dos estudos feitos sobre sistemas de CEVMD. Inicialmente, são apresentadas condições de projeto de CEVMD. Com base nessas condições, será apresentada uma metodologia de projeto, tendo como estudo de caso a aplicação da metodologia em sistemas modelos definidos no decorrer do trabalho.

1.2 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está organizado nos seguintes capítulos:

- Capítulo 2: são apresentados os aspectos mais relevantes de CEVMD. Os métodos desenvolvidos nesse capítulo nos permitem escrever a equação de modos deslizantes caso ocorra algum no sistema.
- Capítulo 3: descreve uma metodologia de projeto que será utilizada para simulação da técnica escolhida, no decorrer do trabalho.
- Capítulo 4: são apresentados os casos e comparados os resultados obtidos com a simulação utilizada nos seguintes modelos:
 - Pêndulo Invertido Linear;
 - Suspensão Ativa;
 - Conversor Buck.
- Capítulo 5: é apresentada uma conclusão sobre todo o trabalho desenvolvido.

2 Sistemas de Controle a Estrutura Variável e Modos Deslizantes

A lei de controle chaveada em alta velocidade ocorre quando o estado do sistema cruza certas superfícies descontínuas no espaço de estados, sendo essa a principal característica de um sistema CEVMD. Essas superfícies são projetadas de forma que a dinâmica dos estados obedeça a um comportamento desejado quando em deslizamento. Assim, utiliza-se uma lei de controle chaveada para conduzir e manter a trajetória dos estados de uma planta em uma superfície específica, chamada de superfície de deslizamento, ou sobre a intersecção de todas as superfícies escolhidas no espaço de estados.

Sendo assim, as duas etapas principais no projeto de um CEVMD são:

- Projeto de uma superfície deslizante, tal que a dinâmica do sistema, quando em deslizamento, tenha uma trajetória desejada;
- Desenvolvimento de uma lei de controle tal que satisfaça as condições de existência e alcançabilidade ao modo deslizante.

Neste capítulo, são apresentadas as principais definições relacionadas ao CEVMD, bem como exemplos para melhor entendê-las. Na Seção 2.1, são apresentadas as principais definições consideradas para este trabalho. Na Seção 2.2, são apresentadas as principais características, sendo que as simulações dos exemplos foram realizadas com a função `ode45` do *Matlab*[®], e as condições de existência necessárias para que o sistema entre em modo deslizante.

2.1 Modelo do Sistema

Neste trabalho considera-se uma classe de sistemas não lineares no vetor de estado $x(t)$ e afim no vetor de controle $u(t)$, da forma

$$\dot{x} = f(t, x) + B(t, x)u(t), \quad (2.1)$$

sendo o vetor de estados $x \in \mathbb{R}^n$, o vetor de controle $u \in \mathbb{R}^m$, $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Além disso, cada elemento de $f(t, x)$ e $B(t, x)$ são supostos contínuos, com derivadas contínuas e limitadas com respeito a x .

2.1.1 Superfície de Deslizamento

A superfície de deslizamento ou superfície de chaveamento, $s(x) = 0$, é um espaço fechado de dimensão $(n - m)$ dimensional em \mathbb{R}^n , determinada pela intersecção de superfícies de deslizamento de dimensão $(n - m)$. São projetadas tal que o sistema tenha

o comportamento desejado, restrito à superfície $s(x) = 0$, com respeito à estabilidade, linearidade ou rastreamento.

Seja a superfície de deslizamento definida por

$$\{x(t) | s(x(t)) = 0\}. \quad (2.2)$$

Cada entrada $u_i(t)$ do controle chaveado $u(t) \in \mathbb{R}^m$ tem a forma

$$u_i(t, x) = \begin{cases} u_i^+(t, x), & \text{com } s_i(x(t)) > 0 \\ u_i^-(t, x), & \text{com } s_i(x(t)) < 0 \end{cases}, i = 1, \dots, m \quad (2.3)$$

em que $\{x(t) | s_i(x(t)) = 0\}$ é a i -ésima superfície de deslizamento associada com a superfície de deslizamento (2.2) de dimensão $(n - m)$.

Neste trabalho, considera-se a superfície de deslizamento linear da forma

$$\{x(t) | s(x(t)) = Sx(t) = 0\}, \quad (2.4)$$

em que S é chamada matriz da superfície de deslizamento, sendo $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Por simplicidade, a notação utilizada para designar a superfície de deslizamento é

$$s(x(t)) = Sx(t) = 0. \quad (2.5)$$

2.2 Modos Deslizantes

Após projetar a superfície de deslizamento desejada, o próximo passo para CEVMD é garantir a existência de um modo deslizante.

Considere um sistema chaveado dependente do estado contendo uma única superfície de chaveamento, simbolizada por S , e dois sub-sistemas,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

um em cada lado de S . Se, na vizinhança de S , ambos os campos vetoriais de $f_1(x)$ e $f_2(x)$ apontarem para a superfície, quando uma trajetória contínua atingir S ela não atravessará para o outro lado.

Por causa da direção dos campos vetoriais, a única solução possível é “deslizar” em S , obtendo assim o modo deslizante. A única combinação convexa de $f_1(x)$ e $f_2(x)$ possível de descrever o movimento de deslizamento é tangente a S no ponto x . Em que o que determina a velocidade instantânea da trajetória começando em x é a combinação convexa.

2.2.1 Principais Características de um Modo Deslizante

Para facilitar o entendimento, os conceitos são explicados por meio de exemplos ilustrativos. Considere o seguinte sistema de CEVMD

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ u = -\text{sign}(s) \\ s = x_1 + x_2 \end{cases} \quad (2.7)$$

Este sistema pode ser descrito como dois subsistemas, com modelos matemáticos distintos, que são definidos para duas regiões diferentes do plano de fase.

- Na região I, em que $s(x) > 0$, o modelo é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

- Na região II, em que $s(x) < 0$, o modelo é dado por:

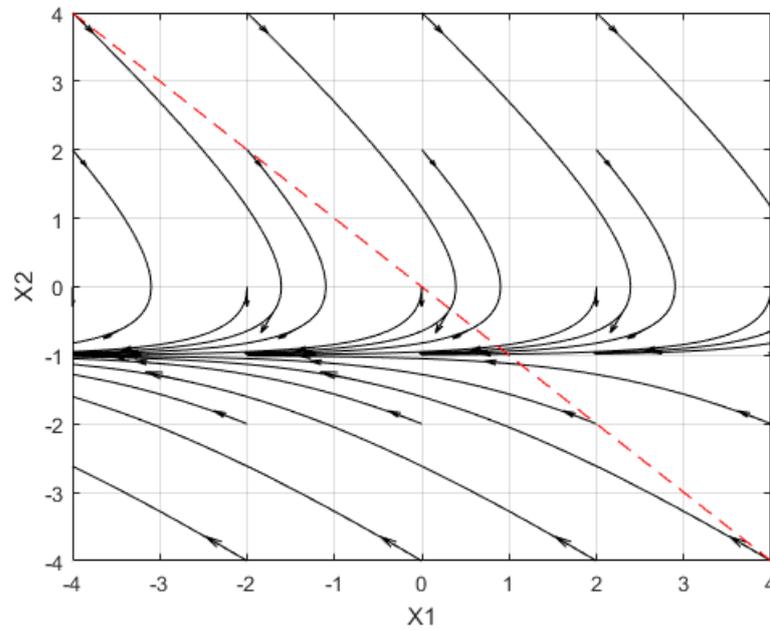
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Os planos de fase para os sistemas representados por (2.8) e (2.9) são apresentados nas Figuras 1 e 2, respectivamente. Foi traçada a reta de chaveamento, $s(x) = 0$, nos dois planos de fase de forma a facilitar a visualização da região de validade de cada modelo. Observando os dois planos de fase, pode-se notar que na região de validade do modelo matemático todas as trajetórias do sistema apontam na direção da reta de chaveamento.

É apresentado na Figura 3 o plano de fase do sistema (2.7), que é formado através dos desenhos de plano de fase dos sistemas (2.8) e (2.9).

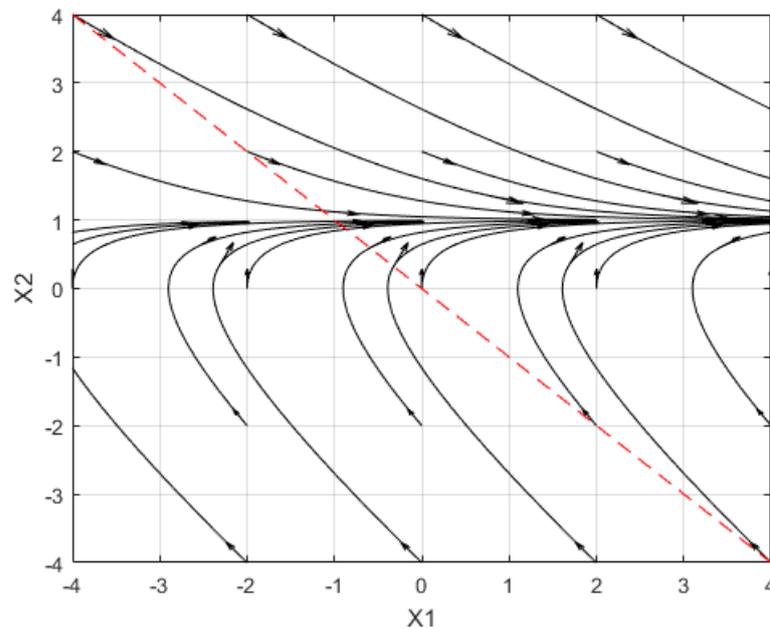
Para obter o plano de fase completo é necessário descrever a trajetória do sistema no conjunto $s(x) = 0$. O comportamento é diretamente afetado pela condição de amostragem utilizada para o chaveamento. Na Figura 4, é ilustrada a trajetória do sistema e o sinal de controle para diferentes condições de amostragem. Na Figura 4 (a), pode ser visto o caso em que o período de amostragem do sistema é igual a 0,1 segundos, a trajetória oscila em torno da superfície de chaveamento. Essa oscilação normalmente recebe o nome de trepidação ou *chattering*. Na Figura 4 (b), pode ser visto o caso em que o período de amostragem do sistema é igual a 0,05 segundos, pode-se notar que a amplitude das oscilações decresce e a trajetória aproxima-se mais da superfície de chaveamento. Na Figura 4 (c), pode ser visto o caso em que o período de amostragem do sistema é igual a 0,01 segundos, pode ser observado que a trajetória fica praticamente sobre a superfície. Na Figura 4 (d), (e) e (f), pode ser visto que à medida que o período de amostragem diminui, a frequência de chaveamento aumenta.

Figura 1 – Plano de fase para o sistema (2.8).



Fonte: Da autora.

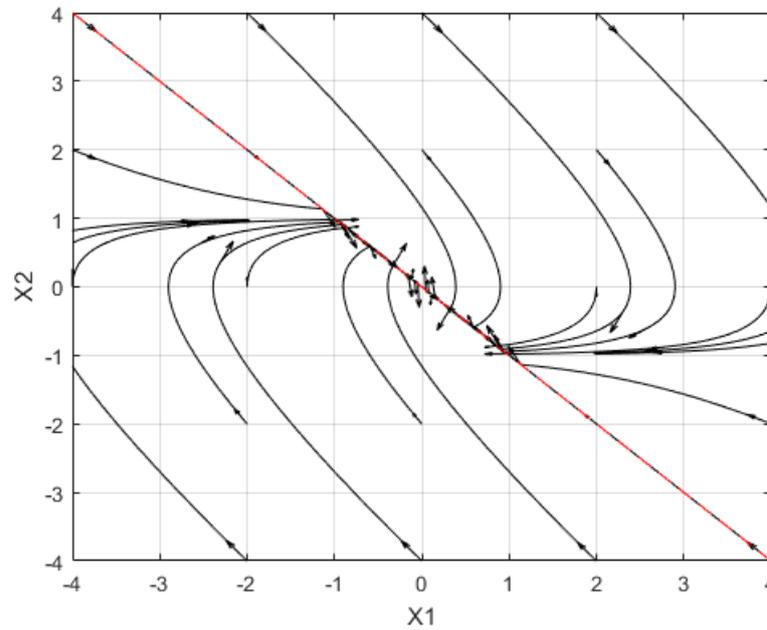
Figura 2 – Plano de fase para o sistema (2.9).



Fonte: Da autora.

Outro fato que deve ser ressaltado é a robustez deste tipo de controlador. Apesar das incertezas e perturbações existentes, as trajetórias do sistema podem continuar apontando em direção à superfície de deslizamento, fazendo com que o sistema continue entrando em

Figura 3 – Plano de fase para o sistema (2.7).



Fonte: Da autora.

modo deslizante, apresentando o mesmo desempenho, governado pela dinâmica referente à equação da superfície deslizante.

Considere o exemplo (2.10) para ilustrar este fato, no qual foi acrescentado o fator $0,5\text{sen}(x_1)$ em \dot{x}_2 para simular possíveis perturbações no sistema.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = & 0.5\text{sen}(x_1) - x_2 + u \\ u = & -\text{sign}(s) \\ s = & x_1 + x_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

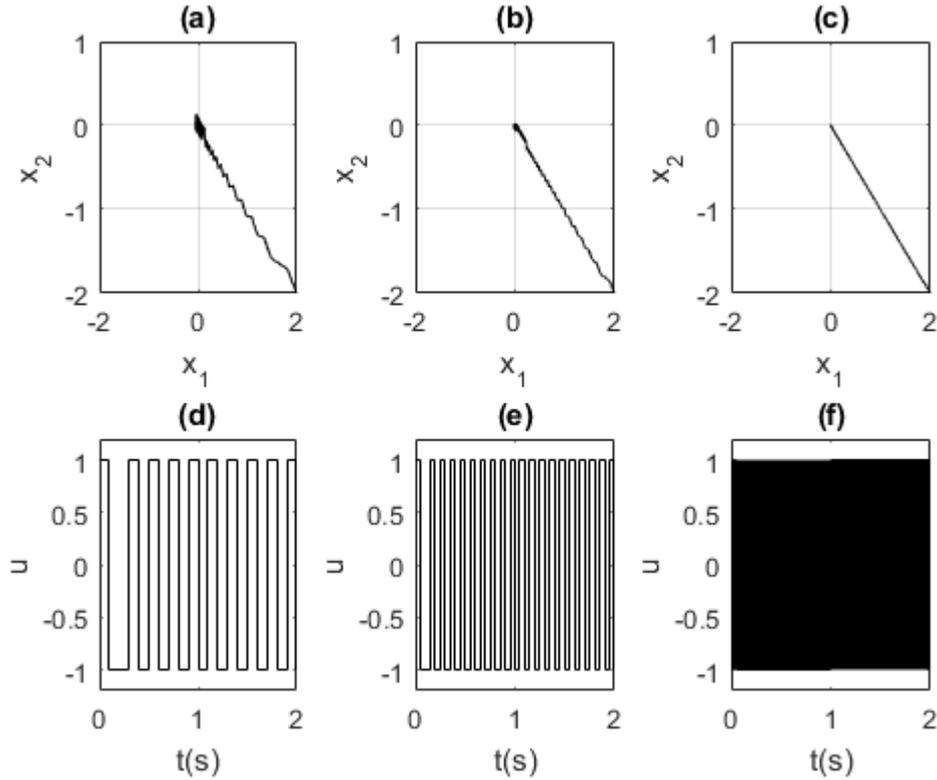
Pode-se notar no plano de fase do sistema (2.10), na Figura 5, que, apesar das perturbações adicionadas, as trajetórias continuam apontando para a superfície de deslizamento, garantindo assim que o sistema entre em modo deslizante, tornando o sistema insensível à perturbação a partir deste momento.

2.2.2 Condições de Existência de um Modo Deslizante

Para que o sistema entre em modo deslizante é necessário, pelo menos, que a superfície de deslizamento seja localmente atrativa. Ou seja, deve existir um domínio envolvendo a superfície no qual as trajetórias do sistema apontem na sua direção. Este fato pode ser matematicamente expresso da seguinte forma

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0 \text{ e } \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0, \quad (2.11)$$

Figura 4 – Trajetórias do sistema (2.10) com diferentes condições de amostragem: (a) período de amostragem igual a 0,1 segundos; (b) período de amostragem igual a 0,05 segundos; (c) período de amostragem igual a 0,01 segundos. Sinal de controle do sistema (2.10) com diferentes condições de amostragem: (d) período de amostragem igual a 0,1 segundos; (e) período de amostragem igual a 0,05 segundos; (f) período de amostragem igual a 0,01 segundos.



Fonte: Da autora.

em algum domínio $\Omega \in \mathbb{R}^n$.

Considere o seguinte exemplo para demonstração

$$\ddot{x} + a_2\dot{x} + a_1x = u + f(t) \quad (2.12)$$

$$u = -M\text{sign}(s) \quad (2.13)$$

$$s = \dot{x} + cx, \quad (2.14)$$

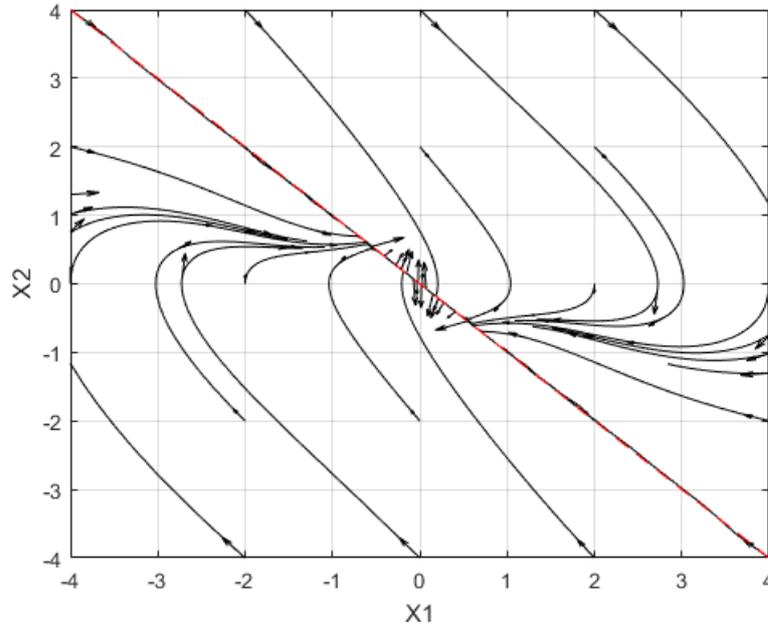
em que M , a_1 , a_2 e c são parâmetros constantes e $f(t)$ é uma perturbação.

O domínio do modo deslizante pode ser encontrado com base em considerações geométricas ou analíticas. A partir de (2.11), pode-se encontrar analiticamente o domínio do modo deslizante da seguinte maneira.

Igualando (2.14) a zero e isolando \dot{x} , tem-se

$$\dot{x} = -cx. \quad (2.15)$$

Figura 5 – Plano de fase para o sistema (2.10), considerando perturbações.



Fonte: Da autora.

Isolando \ddot{x} da (2.12) e substituindo (2.13) em (2.12), tem-se

$$\ddot{x} = -a_1x - a_2\dot{x} - M\text{sign}(s) + f(t). \quad (2.16)$$

Derivando (2.14) e substituindo (2.15) e (2.16) na derivada, obtém-se

$$\dot{s} = \ddot{x} + c\dot{x} \quad (2.17)$$

$$\dot{s} = (-c^2 + a_2c - a_1)x - M\text{sign}(s) + f(t).$$

E o domínio de deslizamento para uma perturbação delimitada, $|f(t)| < f_0$, é dada por

$$|x| < \frac{M - f_0}{|-c^2 + a_2c - a_1|}. \quad (2.18)$$

O exemplo mostra que as trajetórias convergem para a superfície, $s(x) = 0$, e alcança-a em um intervalo de tempo finito similar a sistemas com controle escalar.

A expressão dada em (2.11) é frequentemente substituída por

$$\dot{s}s < 0. \quad (2.19)$$

As expressões (2.11) e (2.19) são denominadas *condições de alcançabilidade*. De acordo com Oliveira (2006), estas expressões não garantem a existência de um modo deslizante ideal, apenas garantem a alcançabilidade da superfície. Para garantia de um modo deslizante ideal a superfície tem que ser alcançada em um tempo finito.

A última condição, tempo finito de convergência, é importante para distinguir sistemas com modos deslizantes de sistemas com trajetórias de estado que convergem para alguma superfície assintótica.

Examinando as condições para existência de modos deslizantes em sistemas afins, tem-se

$$\dot{s} = Gf + GBu, \quad (2.20)$$

que demonstra a estabilidade da projeção da trajetória no subespaço s , deve ser analisada, em que $G = (\partial s / \partial x)$.

O vetor de controle, $u(x)$, é representado por

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x), & \text{com } s(x) > 0 \\ u^-(x), & \text{com } s(x) < 0 \end{cases}, \quad s(x)^T = [s_1(x) \dots s_m(x)],$$

sendo que pode ser representado como

$$u(x) = u_0(x) + U(x)\text{sign}(s), \quad (2.21)$$

em que $u_0(x) = \frac{u^+(x) + u^-(x)}{2}$, $U(s)$ é a matriz diagonal com elementos $U_i(x) = \frac{u_i^+(x) - u_i^-(x)}{2}$ para $i = 1, \dots, m$, e o sinal de controle descontínuo $\text{sign}(s)$ é representado por

$$\text{sign}(s)^T = [\text{sign}(s_1) \dots \text{sign}(s_m)]. \quad (2.22)$$

A projeção da trajetória no subespaço s é definida por

$$\dot{s} = d(x) - D(x)\text{sign}(s), \quad (2.23)$$

com $d = Gf + GBu_0$, $D = -GBU$. A análise da estabilidade na origem $s = 0$ de sistemas não lineares é feita de acordo com uma função de Lyapunov do sistema.

Este problema pode ser ilustrado pelo sistema controlado de terceira ordem com um vetor de controle de duas dimensões.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 & (2.24) \\ \dot{x}_2 &= -x_3 + u_1 - 2u_2 \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + 2u_1 + u_2 \\ u_1 &= -\text{sign}(s_1), \quad s_1 = x_1 + x_2, \\ u_2 &= -\text{sign}(s_2), \quad s_2 = x_1 + x_3. \end{aligned}$$

Com a projeção da trajetória no subespaço (s_1, s_2) dada por

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= -\text{sign}(s_1) + 2\text{sign}(s_2) \\ \dot{s}_2 &= -2\text{sign}(s_1) - \text{sign}(s_2). \end{aligned} \quad (2.25)$$

A função de Lyapunov considerada é dada por

$$V = |s_1| + |s_2|, \quad (2.26)$$

sendo que (2.26) é definida positiva, pois é sempre maior do que zero nos pontos diferentes de zero e é igual a zero em zero.

A derivada temporal da função de Lyapunov (2.26) é

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial s_1} \dot{s}_1 + \frac{\partial V}{\partial s_2} \dot{s}_2 \\ \dot{V} &= \text{sign}(s_1)(-\text{sign}(s_1) + 2\text{sign}(s_2)) + \text{sign}(s_2)(-2\text{sign}(s_1) - \text{sign}(s_2)) = -2, \end{aligned} \quad (2.27)$$

sendo que (2.27) é definida negativa. Então, pode-se concluir que a origem de (s_1, s_2) é assintoticamente estável.

O tempo necessário para alcançar a origem pode ser calculado integrando (2.27) em ambos os lados. Tem-se então que

$$V(\tau) - V(0) = -2\tau, \quad (2.28)$$

em que τ é o tempo que o sistema leva para atingir a superfície. Como o sistema não deixa a superfície, após atingi-lá, sabe-se que nela $s = 0$, logo $V(\tau) = 0$, e

$$\tau = \frac{V(0)}{2}. \quad (2.29)$$

Para poder usar a função de Lyapunov na forma de somatório de valores absolutos sempre que ocorrer um modo deslizante em superfícies descontínuas, a componente correspondente ao controle descontínuo deve ser substituída pelo controle equivalente, (3.9), e somente então a derivada temporal da função de Lyapunov pode ser encontrada.

As definições abaixo apresentam em síntese as informações retratadas anteriormente.

Definição 2.1 - Utkin, Guldner e Shi (2009)

Se a trajetória for definida por

$$\dot{s} = -D\text{sign}(s), \quad (2.30)$$

em que D for uma matriz definida positiva, existe a garantia de que a origem será assintoticamente estável e o conjunto $S(x)$ na superfície $s(x) = 0$ é o domínio do modo deslizante. A origem no subespaço s é assintoticamente estável com um tempo finito de convergência para cada x de $S(x)$. A comprovação desta propriedade pode ser encontrada em Utkin, Guldner e Shi (2009, pág. 37).

Definição 2.2 - Utkin, Guldner e Shi (2009)

A superfície $s(x) = 0$ é definida de superfície de deslizamento se o modo deslizante existe em cada ponto, ou seja, se $S(x) = \{x : s(x) = 0\}$.

3 Descrição Matemática de Modos Deslizantes

Como o sinal de controle descontínuo (2.3) e, conseqüentemente, o sistema (2.1), não são definidos sobre a superfície de deslizamento, a descrição matemática de modos deslizantes não é simples. Os métodos a seguir apresentam soluções para descrever, de maneira formal, o movimento durante o deslizamento.

Na Seção 3.1, é apresentada a solução de *Filippov*, sendo que *Filippov* define quando a trajetória irá permanecer na superfície ou irá atravessá-la.

Na Seção 3.2, é apresentado o método de controle equivalente, o qual é utilizado para determinar o movimento do sistema restrito à superfície de deslizamento, sendo este o método mais básico dentre os apresentados.

Na Seção 3.3, é apresentada a forma regular para resolução de sistemas em uma forma mais geral e o cálculo da dinâmica reduzida.

Na Seção 3.4, é apresentado o método de controle de unidade que aplica um controle descontínuo no sistema em questão, rejeitando uma perturbação.

Na Seção 3.5, são apresentados dois métodos de controle de ordem superior, pois nos casos que a lei de controle descontínua não possa ser aplicada é necessário aumentar a ordem da lei de controle de forma que a derivada da lei de controle seja descontínua e não a lei. Em um método, *Twisting*, a derivada temporal da função s é conhecida e no outro método, *Super-Twisting*, a derivada temporal da função s não é necessária.

Na Seção 3.6, é apresentado um método de seleção das superfícies de chaveamento, sendo utilizado somente se o sistema estiver em uma forma específica.

Na Seção 3.7, é apresentado um outro método de seleção de superfície de chaveamento, por transformação, sendo utilizado quando o sistema não está na forma especificada na Seção 3.6.

3.1 Solução de *Filippov*

Este método trata de forma explícita a solução de equações diferenciais com lado direito descontínuo. Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (3.1)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ e $f(t, x)$ ($f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$) é uma função mensurável, definida para quase todo (t, x) em um domínio E do espaço de fase (t, x) .

A solução da equação diferencial com lado direito descontínuo é dada pela definição devido a *Filippov* a seguir, de acordo com Oliveira (2006).

Definição no sentido *Filippov*

Uma função vetorial $x(\cdot)$ é denominada uma solução de (3.1), definida em $[t_0, t_1]$ se $x(\cdot)$ é absolutamente contínua em $[t_0, t_1]$, e se, para quase todo $t \in [t_0, t_1]$, tem-se:

$$\dot{x} \in \kappa[f(t, x)] \quad (3.2)$$

com

$$\kappa[f(t, x)] = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \text{conv}f[B(\delta, x) - N, t] \quad (3.3)$$

em que “conv” denota o fecho convexo, $B(\delta, x)$ é uma bola de raio δ centrada em x e μ é a medida no sentido de Lebesgue. A notação $\bigcap_{\mu N = 0}$ denota a interseção de todos os conjuntos N de medida nula.

Para o modelo considerado (2.1)-(2.3), como $u(t)$ é uma função do estado, o sistema em malha fechada pode ser representado por

$$\dot{x} = \begin{cases} f^+(t, x), & \text{se } s(x) > 0 \\ f^-(t, x), & \text{se } s(x) < 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

A superfície S separa o espaço de estado em duas regiões mutuamente excludentes, que são denotadas por $F^+ := \{x : s(x) > 0\}$ e $F^- := \{x : s(x) < 0\}$. A normal em um ponto $x \in S$ é denotada por $N_s(x)$ e os escalares $f_N^+(t, x) := N_s(x) \cdot f^+(t, x)$ e $f_N^-(t, x) := N_s(x) \cdot f^-(t, x)$ são as projeções de $f^+(t, x)$ e $f^-(t, x)$, respectivamente em $N_s(x)$.

Se a trajetória do sistema (2.1) iniciada em F^+ ou F^- atingir a superfície S , $x(t^*) = x^* \in S$, ela pode cruzar a superfície, como na Figura 6(a), ou ser forçada a permanecer sobre ela, como na Figura 6(b). Se $f_N^+(t, x) \leq 0$, $f_N^-(t^*, x^*) \geq 0$ e $f_N^-(t^*, x^*) - f_N^+(t^*, x^*) > 0$ os dois vetores $f^+(t^*, x^*)$ e $f^-(t^*, x^*)$ estarão direcionados para S . Neste caso, para $x^* \in S$, o campo vetorial $f_0(t^*, x^*)$, da solução no sentido *Filippov*, pode ser determinado pelos campos vetoriais $f^+(t^*, x^*)$ e $f^-(t^*, x^*)$ que são os valores limites de f obtidos por meio da aproximação da superfície S a partir de F^+ e F^- , respectivamente, da forma

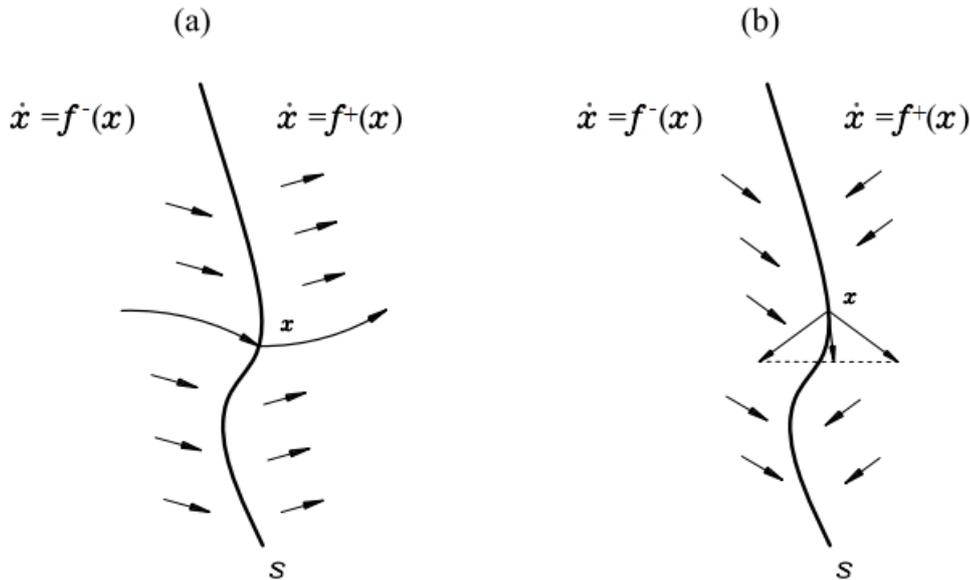
$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(t^*, x^*) \\ f_0(t^*, x^*) &= \zeta f^+(t^*, x^*) + (1 - \zeta) f^-(t^*, x^*), \quad \zeta \in [0, 1], \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que ζ é um escalar que depende das projeções f_N^+ e f_N^- dos campos f^+ e f^- sobre o vetor normal $N_s(x)$, respectivamente, de acordo com

$$\zeta = \frac{f_N^-(t^*, x^*)}{f_N^-(t^*, x^*) - f_N^+(t^*, x^*)}. \quad (3.6)$$

Note que o campo vetorial $f_0(t^*, x^*)$ é ortogonal ao gradiente de S , sendo, portanto, tangente a superfície $s(x) = 0$. Deste modo, as trajetórias do sistema são forçadas a permanecer sobre a superfície de deslizamento.

Figura 6 – Possíveis trajetórias: (a) Trajetória atravessando a superfície de chaveamento; (b) Trajetória permanecendo na superfície de chaveamento.



Fonte: Adaptada de Oliveira (2006, pág. 23).

3.2 Controle Equivalente

O método utilizado para determinar o movimento do sistema restrito à superfície de deslizamento, $s(x(t)) = 0$, é chamado de método do controle equivalente. Supondo que a trajetória de estado da planta intercepta a superfície de deslizamento em t_0 e um modo deslizante existe para $t \geq t_0$. Isto implica que $\dot{s}(x(t)) = 0$ e $s(x(t)) = 0$ para todo $t \geq t_0$.

Diferenciando $s(x(t)) = 0$, em relação a t , tem-se

$$\dot{s} = G\dot{x} = 0, \quad (3.7)$$

em que $G = (\partial s / \partial x)$ é uma matriz $m \times n$. Substituindo \dot{x} por (2.1), tem-se

$$G\dot{x} = G[f(t, x) + B(t, x)u_{eq}] = 0, \quad (3.8)$$

em que u_{eq} é chamado de controle equivalente e é solução de (3.8).

É possível calcular u_{eq} assumindo que o produto matricial $GB(t, x)$ é não singular para todo t e x . Então,

$$u_{eq} = -[GB(t, x)]^{-1} Gf(t, x). \quad (3.9)$$

Após a substituição de u_{eq} em (2.1), a equação resultante descreve o comportamento do sistema restrito à superfície de deslizamento, desde que a condição inicial $x(t_0)$ satisfaça $s(x(t_0)) = 0$.

Assim, dado $s(x(t_0)) = 0$, a dinâmica do sistema sobre a superfície de deslizamento para $t \geq t_0$, é dada por

$$\dot{x} = [I - B(t, x)[GB(t, x)]^{-1}G]f(t, x). \quad (3.10)$$

Pode notar que (3.10), juntamente com a restrição $s(x) = 0$, determina o movimento do sistema sobre a superfície de deslizamento. Como o comportamento da superfície não depende de sinais externos, se o controlador garantir a permanência na superfície então o sistema é robusto.

3.3 Forma Regular e Dinâmica de Redução de Ordem

Suponha que o sistema não linear (2.1) é restrito à superfície de deslizamento (2.4), com o sistema dinâmico dado por (3.10), então, é possível resolver m variáveis de estado, em termos das $(n-m)$ variáveis de estado, se o posto de $[S] = m$, o que implica que $GB(t, x)$ é não singular para todo t e x .

Para obter a solução, resolve-se para as m variáveis de estado em termos das $(n-m)$ variáveis de estado que permanecem. Substituindo estas relações nas $(n-m)$ equações de (3.10) e nas equações correspondendo a m variáveis de estado, o sistema resultante de ordem $(n-m)$ descreve o sistema equivalente com condição inicial satisfazendo $s(x) = 0$. A resolução de sistemas que estão nesta forma frequentemente exige uma transformação para forma mais geral, denominada *forma regular*.

A forma regular da dinâmica de (2.1) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(t, x) + B_2(t, x)u(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

tendo $x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $x_2 \in \mathbb{R}^m$. Um sistema nesta forma tem dinâmica equivalente de ordem reduzida de cálculo simplificado. Então, assume-se que $B_2(t, x)$ é uma função matricial $(m \times m)$ não singular.

Para o cálculo da dinâmica de ordem reduzida, refere-se uma superfície de deslizamento linear da forma

$$s(x) = [S_1 \quad S_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Considera-se que S_2 é não singular. Assim, no modo deslizante

$$x_2 = -S_2^{-1}S_1x_1 \quad (3.13)$$

e

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x) = f_1(t, x_1, -S_2^{-1}S_1x_1) \quad (3.14)$$

que representa a dinâmica de ordem reduzida do sistema.

3.4 Controle de Unidade

Controle de unidade é um método de controle descontínuo aplicando modo deslizante em alguma superfície sem seleção individual de cada componente de controle como uma

função de estado descontínuo. A técnica aplica controle baseado na função de Lyapunov considerada para o sistema nominal.

Utilizando o sistema afim

$$\dot{x} = f(t, x) + B(t, x)u + h(t, x), \quad (3.15)$$

pode-se retratar o método, em que $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $f(t, x)$ e $h(t, x)$ são vetores, sendo que $h(t, x)$ representa as incertezas do sistema e sua influência no processo de controle deve ser rejeitada.

A equação

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (3.16)$$

representa um sistema em malha aberta assintoticamente estável com função de Lyapunov

$$\begin{aligned} V(x) &> 0 \\ V_0 = \frac{dV}{dt} \Big|_{h=0, u=0} &= \nabla V^T f < 0, \quad \nabla V^T = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

O vetor $h(t, x)$ é assumido de forma que exista um vetor $\gamma(t, x) \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$h(t, x) = B(t, x)\gamma(t, x), \quad (3.18)$$

sendo que $\gamma(t, x)$ pode ser um vetor desconhecido com valor máximo $\gamma_0(t, x)$. Ou seja,

$$\|\gamma(t, x)\| < \gamma_0(t, x). \quad (3.19)$$

A derivada temporal da função de Lyapunov, $V(x)$, ao longo da trajetória do sistema considerando a perturbação é dada por

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = V_0 + \nabla V^T B(u + \gamma). \quad (3.20)$$

O vetor de controle é definido dependendo do valor máximo desconhecido da perturbação

$$u = -\rho(t, x) \frac{B^T \nabla V}{\|B^T \nabla V\|}, \quad (3.21)$$

com a função escalar $\rho(t, x) > \gamma_0(t, x)$ e

$$\|B^T \nabla V\|^2 = (\nabla V^T B)(B^T \nabla V), \quad (3.22)$$

então, a derivada temporal da função de Lyapunov será

$$\begin{aligned} \dot{V} &= V_0 - \rho(t, x)\|B^T \nabla V\| + \nabla V^T B\gamma(t, x) \\ &< V_0 - \|B^T \nabla V\|[\rho(t, x) - \gamma_0(t, x)] \\ &< 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ou seja, (3.23) é negativa. Então, mesmo com a perturbação o sistema controlado é assintoticamente estável.

Pode notar que, se o ganho, $\rho(t, x)$, do vetor de controle (3.21) for unitário, a norma de u será igual a 1 para qualquer valor do vetor de estado, por isso o método é chamado de “Controle de Unidade”.

Além de poder ser utilizado para levar o sistema a um comportamento nominal, rejeitando uma perturbação, o controle de unidade também pode ser utilizado com uma superfície de deslizamento projetada.

Seleciona-se uma superfície $s(x) = 0$ de acordo com algum critério de desempenho, e define-se o controle similar ao (3.21), como

$$u = -\rho(t, x) \frac{D^T s(x)}{\|D^T s(x)\|}, \quad (3.24)$$

em que $D = GB$, $G = \partial s / \partial x$ e D é não singular.

Tendo assim, a projeção da trajetória na superfície na forma

$$\dot{s} = G(f + h) + Du. \quad (3.25)$$

A condição para a trajetória convergir para a superfície de deslizamento, $s(x) = 0$, e para o modo deslizante existir nesta superfície pode ser baseada na derivada da função de Lyapunov do sistema

$$V = \frac{1}{2} s^T s > 0. \quad (3.26)$$

A derivada temporal da função de Lyapunov ao longo da trajetória do sistema com controle

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T G(f + h) - \rho(t, x) \|D^T s(x)\| \\ &= [s^T D][D^{-1}G(f + h)] - \rho(t, x) \|D^T s(x)\| \\ &\leq \|D^T s(x)\| [\|D^{-1}G(f + h)\| - \rho(t, x)]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para $\rho(t, x) > \|D^{-1}G(f + h)\|$, a derivada temporal de V é negativa então irá convergir para a superfície de deslizamento. Para averiguar se o modo deslizante irá ocorrer em um tempo finito é necessário analisar se $\rho(t, x) - \|D^{-1}G(f + h)\| \geq \rho_0 > 0$, sendo ρ_0 um valor constante. Primeiramente, deve-se determinar $\|D^T s(x)\|$.

De acordo com

$$\|s\| = \|(D^T)^{-1} D^T s\| \leq \|(D^T)^{-1}\| \|D^T s\|, \quad (3.28)$$

tem-se que

$$\|(D^T)s\| \geq \|(D^T)^{-1}\|^{-1} \|s\|. \quad (3.29)$$

Então,

$$\dot{V} \leq -\|(D^T)^{-1}\|^{-1} \rho_0 \|s\|, \quad (3.30)$$

e, como $V = \frac{1}{2} \|s\|^2$, $\|s\| = \sqrt{2V}$, então

$$\dot{V} < -\eta V^{1/2}, \quad (3.31)$$

em que $\eta = \sqrt{2} \|(D^T)^{-1}\|^{-1} \rho_0$.

A solução para (3.31) é não negativa e é delimitada por

$$V(t) < \left(-\frac{\eta}{2}t + \sqrt{V(0)} \right).$$

Então, o vetor s irá para zero após $t_s < \frac{2}{\eta} \sqrt{V(0)}$ e o modo deslizante começará após um intervalo de tempo finito. A principal diferença deste método para os anteriores é que o controle de unidade é uma função de estado contínua até a superfície de deslizamento ser alcançada. Entretanto, no método convencional, o controle sofre descontinuidades se algum componente do vetor s muda de sinal.

3.5 Modos Deslizantes de Ordem Superior

A principal ideia de controle de modos deslizantes implica em aplicar uma dinâmica de redução de ordem em algumas superfícies, $s(x) = 0$, com as propriedades desejadas. Entretanto, a lei de controle é descontínua e nem sempre pode ser aplicada a todos os tipos de sistemas. Então, é necessário aumentar a ordem da lei de controle de forma que a derivada da lei de controle pode ser descontínua e não a lei. O interessante neste ponto é se, para casos com ordem superior, é possível obter efeito similar ao já visto.

O grau de suavidade dinâmica na vizinhança do modo deslizante é identificado pela ordem do deslizamento. Ou seja, se a necessidade for garantir que a função s seja mantida igual a zero, então a ordem do deslizamento é o número total de derivadas contínuas de s na vizinhança do modo deslizante. Entretanto, Oliveira (2006) afirma que, para um deslizamento de ordem r , a derivada s^r não é uma função contínua das variáveis do espaço de estado ou não existe, talvez devido a não unicidade da solução.

Considere um exemplo em que $s(x) = 0$ e a derivada temporal de $s(x) = 0$ seja contínua mas $\ddot{s}(x)$ é descontínua, gerando uma lei de controle contínua. Se for possível atingir o modo deslizante nessas condições, então pode-se aplicar o controle por modos deslizantes em mais casos.

O sistema (2.1) com vetor de controle (3.32) será considerado para esta seção. Em que u^+ , u^- e s são funções escalares contínuas.

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x), & \text{com } s(x) > 0 \\ u^-(x), & \text{com } s(x) < 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

A derivada temporal de s é descontínua e depende diretamente do sinal de controle $u(x)$. O sinal de controle é designado para controlar a variável de saída, $y(x)$, e a ordem com relação a saída não deve ser igual a um.

3.5.1 Algoritmo *Twisting*

Em casos que a ação de controle devem ser contínuas, por causa das condições tecnológicas, pode ser necessário inserir um bloco dinâmico entre o controle descontínuo e a entrada do sistema, como por exemplo um integrador, de forma a resolver o problema, tem-se

$$\dot{u} = v, \quad (3.33)$$

em que, assumindo que \dot{s} é disponível, v é definido como uma função descontínua de s e \dot{s} .

Para analisar a alcançabilidade do sistema, é considerado o caso em que $\nabla(s)^T b = 1$ e o vetor de controle é dado por

$$v = -M_0 \text{sign}(s) - M_1 \text{sign}(\dot{s}), \quad (3.34)$$

em que M_0 e M_1 são constantes positivas. Então,

$$\ddot{s} = F(t, x, u) - M_0 \text{sign}(s) - M_1 \text{sign}(\dot{s}), \quad (3.35)$$

em que $F(t, x, u)$ é uma função contínua de todos os argumentos, $|F(t, x, u)| \leq F_0$, F_0 é um valor constante, $M_0 > M_1 + F_0$ e $M_1 > F_0$. Embora ocorra descontinuidades no controle, em \dot{s} , o modo deslizante não pode ocorrer nesta linha de comutação, se $s \neq 0$, pois $M_0 > M_1$ e \ddot{s} não muda de sinal.

A função de Lyapunov do sistema é definida por

$$V = 2\sqrt{\frac{1}{2}\dot{s}^2 + M_0|s|}, \quad (3.36)$$

e sua derivada temporal é dada por

$$\dot{V} = \frac{\dot{s}F - M_1|\dot{s}|}{\sqrt{\frac{1}{2}\dot{s}^2 + M_0|s|}} \leq -\frac{M'|\dot{s}|}{\sqrt{\frac{1}{2}\dot{s}^2 + M_0|s|}} < 0, \quad (3.37)$$

em que $M' = M_1 - F_0 > 0$.

Como a condição $\dot{s} = 0$ não pode ser mantida para qualquer intervalo de tempo com $s \neq 0$, o movimento no subespaço (s, \dot{s}) é assintoticamente estável. Então, a partir de um instante de tempo finito, para quaisquer condições iniciais, ambos os componentes do estado serão delimitados.

A convergência para a origem em um tempo finito pode ser analisada por

$$\dot{V} = -\frac{M'}{\sqrt{\frac{1}{2} + M_0\frac{|s|}{\dot{s}^2}}} < 0. \quad (3.38)$$

Para $\frac{|s|}{\dot{s}^2} \leq k$, em que k é uma constante além do domínio D no plano (s, \dot{s}) , tem-se

$$\dot{V} \leq -\frac{M'}{\sqrt{\frac{1}{2} + M_0 k}} = -\alpha < 0, \quad (3.39)$$

então, a função de Lyapunov possui uma taxa de decaimento finita.

Após essas análises, é possível concluir que para qualquer valor do vetor de estados a função de Lyapunov decai em um tempo finito maior do que α , para qualquer condição inicial no limite de D ou na sua parte interna. Significa que, sob a condição

$$M_0 > M_1 + F_0, \quad M_1 > F_0, \quad (3.40)$$

a origem no plano (s, \dot{s}) será alcançada após um intervalo de tempo finito, e então o modo deslizante de segunda ordem começará. Isso decorre da equação de movimento que as funções de tempo $S(t)$, limite da superfície, e $\dot{s}(t)$ não podem manter um sinal constante, pois possuem zeros entrelaçados. Por isso o método é chamado de “twisting”.

3.5.2 Algoritmo *Super-Twisting*

O algoritmo consiste na inserção de um integrador na malha de controle, de modo que o controle se torne uma função contínua, como na Sessão 3.5.1. Entretanto, neste caso, a derivada temporal da função s não é necessária. Com isso, o grau do sistema é aumentado mas permite impor o modo deslizante de segunda ordem após um intervalo de tempo finito e anular perturbações com derivadas temporais limitadas, não tendo necessidade de usar a derivada de uma função de comutação.

Assumindo que $\nabla(s)^T b = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} u &= -a\sqrt{|s|}\text{sign}(s) + v \\ \dot{v} &= -M\text{sign}(s), \quad a > 0, \quad M > 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

em que a e M são constantes. Com a segunda derivada temporal de s definida por

$$\ddot{s} = -a\frac{\dot{s}}{2\sqrt{|s|}} - M\text{sign}(s) + \dot{f}(t), \quad (3.42)$$

em que $f(t)$ é uma função de estados e perturbações, com

$$|\dot{f}| \leq f_0, \quad (3.43)$$

em que f_0 é constante.

Considerando a seguinte função de Lyapunov para o sistema:

$$V = 2\sqrt{\frac{1}{2}\dot{s}^2 + M|s|}, \quad (3.44)$$

tem-se que a derivada temporal é dada por

$$\dot{V} = \frac{-a \frac{\dot{s}^2}{2|s|} + \frac{\dot{s}}{\sqrt{|s|}} \dot{f}}{\sqrt{\frac{\dot{s}^2}{2|s|}} + M}. \quad (3.45)$$

Então, se $\frac{\dot{s}^2}{|s|} > \epsilon^2$, em que ϵ e γ são constantes, $\epsilon > 0$ e $\gamma < 1$, e

$$\dot{f}_0 < \frac{1}{2} a \epsilon \gamma, \quad (3.46)$$

a função de Lyapunov possui uma taxa de decaimento finita além do domínio D no plano (s, \dot{s}) . Então, o modo deslizante de segunda ordem irá ocorrer após um intervalo de tempo no sistema.

3.5.3 Resolução Numérica de Equações Diferenciais

Quando o sistema em questão envolve equações diferenciais, é necessário utilizar um método de resolução numérica para desenvolver a implementação do controlador digitalmente. Um dos inúmeros métodos existentes é o método de Euler, que utiliza passo de integração fixo, e este será utilizado nessa monografia onde seja necessário. Em Atkinson, Han e Stewart (2009, Capítulo 2) é possível obter uma explicação aprofundada sobre o método.

3.6 Seleção das Superfícies de Chaveamento

Como informado no Capítulo 2, é necessário projetar uma superfície de deslizamento de forma que a dinâmica do sistema, quando em deslizamento, tenha a trajetória desejada. Ou seja, de acordo com Slotine e Li (1991), é importante projetar a superfície em termos do desempenho de rastreamento da trajetória do sistema de forma a obter uma dinâmica estável.

Considere o sistema (2.1) na forma

$$\dot{x}^{(n)} = f(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})u, \quad (3.47)$$

em que n é a ordem do sistema, $\mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ \dots \ x^{(n-1)}]^T \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}$ é a entrada de controle e x é a variável de estado que deseja-se controlar.

Um dos problemas do controle é conseguir obter o estado x para rastrear um estado $x_d = [x_d \ \dot{x}_d \ \dots \ x_d^{(n-1)}]^T$, variante no tempo, na presença de imprecisões de modelagem em f e B .

Então, para que o rastreamento seja possível usando um controle finito u , a seguinte condição deve ser satisfeita,

$$x_d(0) = x(0). \quad (3.48)$$

Ou seja, qualquer trajetória desejada factível deve ser iniciada no mesmo ponto que a planta. Isto é, o estado atual não pode “pular” e alcançar o estado desejado para cada grau de liberdade do sistema, pois assim o rastreamento será alcançado somente após um período de tempo transitório. Logo, se for satisfeita a condição (3.48), a partir da função de medição do erro de rastreamento no estado x

$$\tilde{x} = x - x_d, \quad (3.49)$$

é possível definir as superfícies de chaveamento no espaço de estados \mathbb{R}^n por $s(t, x) = 0$, sendo que

$$s(t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x}, \quad (3.50)$$

em que λ é uma constante positiva, cuja escolha será explicada posteriormente. Ainda em (3.50), \tilde{x} tende exponencialmente a zero por meio de uma sequência de $(n - 1)$ filtros passa-baixa de constante de tempo $1/\lambda$.

Assim, o problema de rastrear é equivalente ao problema de manter os estados sobre a superfície S , para todo $t > 0$. Sendo assim, é possível substituir o problema de rastreamento de ordem n por um problema de estabilização em s de grau relativo 1. Isto será possível pois será necessário diferenciar (3.50) apenas uma vez para que a entrada de controle, u , apareça na expressão.

3.6.1 Superfície de Chaveamento do Tipo Integral

Se a condição (3.48) não for satisfeita, as condições de estabilidade, apresentadas na Seção 2.2.2, irão garantir a convergência das trajetórias do sistema para S em um tempo finito menor do que $|s(0, x)|/\mu$, em que μ é uma constante positiva. Nessa fase de convergência, denominada fase de alcance, para as superfícies em tempo finito não há garantia de robustez no sistema.

De acordo com Utkin, Guldner e Shi (2009), de forma a eliminar a fase de alcance e forçar a existência de modos deslizantes durante toda a resposta do sistema é aplicado CEVMD com superfícies de chaveamento do tipo integral.

Então, a partir de (3.50), tem-se que o vetor de funções de medição do erro de rastreamento é dado por

$$s_I(t, x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^n \int \tilde{x} dt, \quad (3.51)$$

e as superfícies de chaveamento no espaço de estados são por $s_I(t, x) = 0$. Ou seja, o termo da integral substitui a variável controlada \tilde{x} , fazendo com que o sistema tenha ordem $n + 1$. Sendo assim, o termo integral garante robustez de rastreamento para qualquer condição inicial $x(0)$.

3.7 Seleção da Superfície por Transformação

Em casos que o sistema não esteja representado no formato (3.47), é necessário projetar a superfície de deslizamento de outra forma. Uma maneira possível é por meio de transformações que simplifiquem o projeto da superfície. Assim, considerando um sistema linear, obtém-se a forma canônica controlável do sistema de forma que o sistema passe a ser representado como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + Du. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Sendo que, a nova matriz de estados, A_{new} , pode ser calculada a partir da matriz de controlabilidade, \mathcal{C} . Já a matriz de saída, C_{new} , pode ser calculada a partir da matriz de transformação, T .

Sendo que A_{new} pode ser calculada por

$$A_{new} = (\mathcal{C}^{-1}AC)^T, \quad (3.53)$$

e T pode ser calculado de acordo com

$$TA = A_{new}T \quad (3.54)$$

e

$$TB = B_{new}. \quad (3.55)$$

A matriz de transformação é necessária para o cálculo do vetor C_{new} e da superfície de deslizamento, sendo que

$$C_{new} = CT^{-1}. \quad (3.56)$$

Para o projeto da superfície de deslizamento, de forma a representar matematicamente, tem-se que

$$A_{new} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \quad B_{new} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{new} = [S_1 \ S_2 \ \dots \ S_{n-1} \ S_n],$$

em que $S_{new} = G$, em (3.10).

Assumindo $S_n = 1$ e calculando a malha fechada do sistema sobre a superfície de deslizamento, de acordo com (3.10), tem-se

$$(I - B_{new}(S_{new}B_{new})^{-1}S_{new}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & -S_1 & -S_2 & & -S_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Para que a superfície de deslizamento seja verídica, $s(x) = 0$, então

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

$$x_n = -S_1x_1 - S_2x_2 - \dots - S_{n-1}x_{n-1}. \quad (3.58)$$

Eliminando x_n com (3.58) de (3.57), tem-se

$$A_{reduzida} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -S_1 & -S_2 & & -S_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Calculando a equação característica de (3.59), obtém-se

$$|\lambda I - A_{reduzida}| = \lambda^{n-1} + S_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + S_2\lambda + S_1. \quad (3.60)$$

De maneira que seja necessário escolher somente um parâmetro de projeto, considera-se que todos os pólos da dinâmica sobre a superfície de deslizamento estejam no mesmo ponto. Então,

$$(\lambda + \alpha)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^{n-1-i} \alpha^i. \quad (3.61)$$

Comparando (3.60) e (3.61) é possível obter os valores de S_1, S_2, \dots, S_{n-1} .

Realizando a transformação de coordenadas, retirando da forma canônica, tem-se que a superfície de deslizamento para o sistema pode ser obtida por

$$S = S_{new}T.$$

4 Estudos de Caso

Neste capítulo, são apresentadas as informações necessárias dos sistemas que serão utilizados para demonstrar o controle por modos deslizantes e a simulação de cada sistema, especificados na Seção 1.2. Inicialmente, nas Subseções 4.1.1, 4.2.1 e 4.3.1, são apresentados os modelos de cada sistema, de acordo com a fonte na qual cada um está sendo baseado.

Nas Subseções 4.1.2, 4.2.2 e 4.3.2, é apresentado o projeto da superfície de chaveamento de cada sistema, respectivamente, seguindo as metodologias apresentadas no Capítulo 3.

Nas Subseções 4.1.3, 4.2.3, 4.3.3, são apresentados os métodos que serão aplicados nos sistemas utilizados para simulação, de forma que a análise do efeito da escolha dos controladores possa ser feita. Serão aplicados dois métodos, apresentados no Capítulo 3. O método de controle equivalente será um dos escolhidos por ser o método mais básico dentre os apresentados. Já o método de controle *Super-Twisting* será o outro escolhido por ser um método de ordem superior que não necessita da derivada temporal da superfície, no qual o *chattering*, devido ao controle, é minimizado, pelo fato de aumentar o grau do modo deslizante. Para o caso do conversor Buck, somente o método de controle equivalente será aplicado, pois como seu funcionamento está ligado a chave *Sw*, não faz sentido aplicar uma lei de controle que apresente valores diferentes de 0 e 1 e, por isso, não é aplicado o método *Super-Twisting* neste caso. Além disso, a frequência de chaveamento do método *Super-Twisting* pode acarretar em problemas que o tornam inutilizável, da forma que é aplicado neste trabalho.

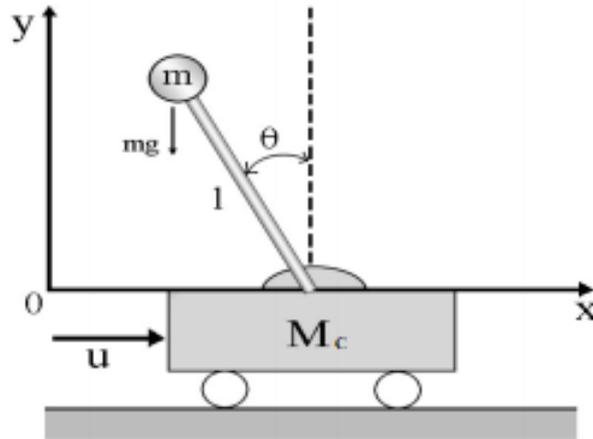
Nas Subseções 4.1.4, 4.2.4 e 4.3.4, são apresentadas as simulações dos sistemas que são realizadas com a função *ode45* do *Matlab*[®] e as comparações e análises dos resultados obtidos. Sendo que no caso do método de controle *Super-Twisting* será necessário utilizar a aproximação de Euler para possibilitar a implementação de forma discreta. Nos apêndices A, B e C, encontram-se os códigos implementados para as simulações do Pêndulo invertido, Suspensão ativa e Conversor buck.

4.1 Pêndulo Invertido Linear

O pêndulo invertido linear da Figura 7 está montado sobre um carrinho com motor, que está sobre um trilho. A base do pêndulo, que é o carrinho motorizado, se move apenas em cima do trilho na qual está posicionada e, por isso, este sistema é considerado linear. Esse problema está em duas dimensões, onde duas posições serão controladas, a posição do carrinho sobre o trilho e com isso o ângulo da haste do pêndulo.

Um sistema de lançamento de foguetes pode ser relacionado com este modelo, tendo como objetivo manter a nave na posição vertical no momento do lançamento.

Figura 7 – Pêndulo Invertido Linear.



Fonte: Damazo (2008).

4.1.1 Modelo do Sistema

Na Figura 7, M_c é a massa do carrinho motorizado, m é a massa do pêndulo, x é a posição do carrinho sobre o trilho, u é o vetor de controle, θ é o ângulo da haste do pêndulo e l é o comprimento do pêndulo.

Como o foco deste trabalho não é o desenvolvimento das equações que governam a dinâmica do sistema, essa etapa pode ser vista com maiores detalhes em Damazo (2008, pág. 65).

Sendo assim, a representação em espaços de estados do sistema linearizado no ponto de equilíbrio

$$[\theta \quad \dot{\theta} \quad x \quad \dot{x}]^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

é

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M_c + m)g}{M_c l} & 0 & 0 & \frac{b}{M_c l} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mg}{M_c} & 0 & 0 & \frac{-b}{M_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-d}{M_c l} \\ 0 \\ \frac{d}{M_c} \end{bmatrix} V, \quad (4.1)$$

em que g é a constante gravitacional e a relação entre o vetor de controle u e a tensão V , em Volts, gerada pelo computador digital é

$$u = dV - b\dot{x} \quad (4.2)$$

sendo que os valores de todos os parâmetros encontram-se na Tabela 1.

| Parâmetros | Símbolos | Valores | Unidades |
|----------------------------|----------|---------|----------|
| Comprimento do pêndulo | l | 0.61 | m |
| Massa do pêndulo | m | 0.21 | Kg |
| Constante gravitacional | g | 9.8 | m/s^2 |
| Massa do carrinho | M_c | 0.4573 | Kg |
| Dado da placa de aquisição | d | 1.7378 | - |
| Dado da placa de aquisição | b | 7.6832 | - |

Tabela 1 – Dados do Sistema Pêndulo Invertido Linear.

4.1.2 Projeto da Superfície

Como o sistema não está na forma (3.47), é necessário projetar a superfície de deslizamento utilizando transformação, Seção 3.7. Para facilitar os cálculos relacionados a este sistema de quarta ordem utiliza-se um *script* no *Matlab*[®], considerando $\alpha = 5$, com o qual obteve-se a seguinte superfície de deslizamento

$$S = [-2.6040 \quad -0.4598 \quad -1.7809 \quad -1.053].$$

De forma a comparar com a dissertação de mestrado de Damazo (2008), uma alteração na superfície é necessária. Em um funcionamento “normal”, todos os estados deveriam ir para zero, como referência. Entretanto, para uma comparação melhor, a referência do terceiro estado, x , foi alterada para 0, 5 e $-0, 5$, ocorrendo a intercalação a cada um segundo e meio.

4.1.3 Projeto dos Controladores

Método de Controle Equivalente

O método de controle equivalente da Seção 3.2 possui o vetor de controle da forma

$$u = -\rho \text{sign}(s), \quad (4.3)$$

sendo que, para este projeto, o valor de $\rho = 100$ foi escolhido de forma empírica a partir da simulação em malha fechada do sistema.

Método de Controle *Super-Twisting*

O método de controle *Super-Twisting* da Subseção 3.5.2 possui o vetor de controle da forma

$$\begin{aligned} u &= -a\sqrt{|s|}\text{sign}(s) + v \\ \dot{v} &= -M\text{sign}(s), \end{aligned} \quad (4.4)$$

sendo que, para este projeto, o valor de $a = 100$ e $M = 5$ foram escolhidos de forma empírica a partir da simulação em malha fechada do sistema.

Como informado na Subseção 3.5.3, é necessário utilizar um método de resolução numérica para desenvolver a implementação de controladores digitalmente que envolvam equações diferenciais, controle *Super-Twisting* é um desses métodos. Então, neste caso, utiliza-se o método de Euler para facilitar a implementação. Sendo assim, é possível representar v_k de (4.4) digitalmente como

$$v_k = v_{k-1} - MT_s \text{sign}(s), \quad (4.5)$$

em que T_s é o período de amostragem do controlador, k representa o estado atual da variável e $k - 1$ o estado anterior.

4.1.4 Simulações

Para verificar a eficiência de cada método de controle, as simulações foram feitas com os parâmetros apresentados na Tabela 2.

| Parâmetros | Controle Equivalente | Controle <i>Super-Twisting</i> |
|---------------------------------|----------------------|--------------------------------|
| Período de amostragem T_s | 1 ms | 1 ms |
| Vetor de condições iniciais | [0,1 0 0 0] | [0,1 0 0 0] |
| Constante do controlador ρ | 100 | não se aplica. |
| Constante do controlador a | não se aplica. | 100 |
| Constante do controlador M | não se aplica. | 5 |

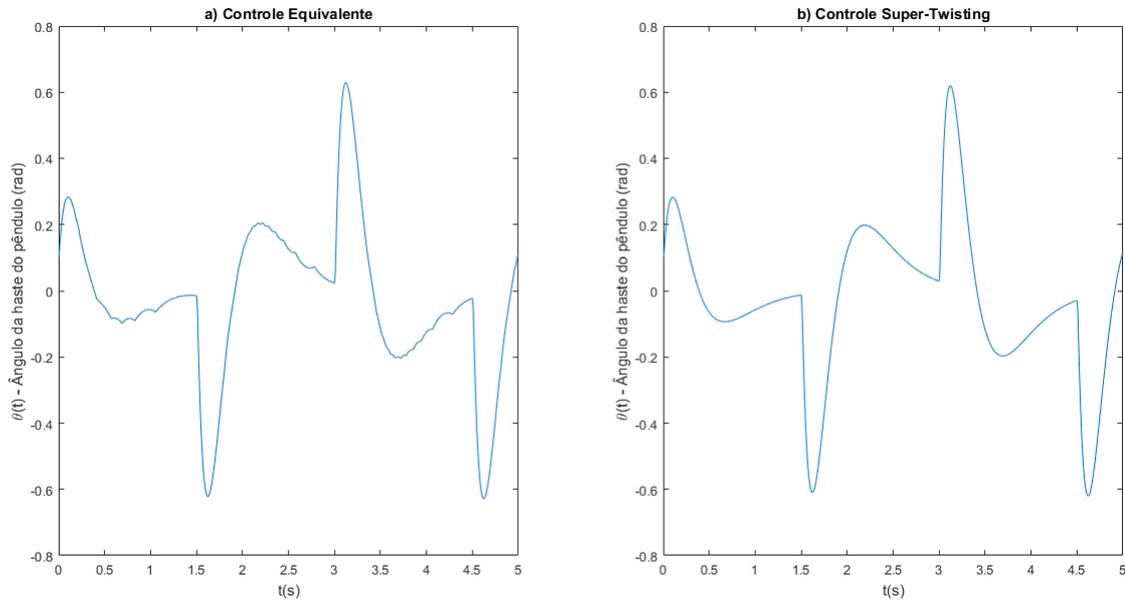
Tabela 2 – Dados de Simulação do Sistema de Pêndulo Invertido Linear.

Na Figura 8, é apresentada a variação da inclinação do pêndulo em radianos. Como informado anteriormente, dois métodos foram aplicados. Na Figura 8 (a), foi utilizado o método de controle equivalente e, na Figura 8 (b), foi utilizado o método de controle *Super-Twisting*. Sendo que o tempo necessário para concluir a simulação no primeiro método foi cerca de 12 segundos e no segundo cerca de 7 segundos.

Como informado anteriormente, no decorrer do tempo, a cada um segundo e meio, a referência da posição do carrinho sobre o trilho é alterada, intercalando entre 0,5 e -0,5 m. Na Figura 8, é notável o que a alteração da referência influencia na inclinação do pêndulo. Em cada alteração, a angulação sofre um pico e após isso, cerca de 1 segundo, é direcionada à zero. Também é perceptível a ocorrência de *chattering* em cada método. Enquanto, na Figura 8 (b), o movimento é suave, na Figura 8 (a), o movimento apresenta uma leve trepidação.

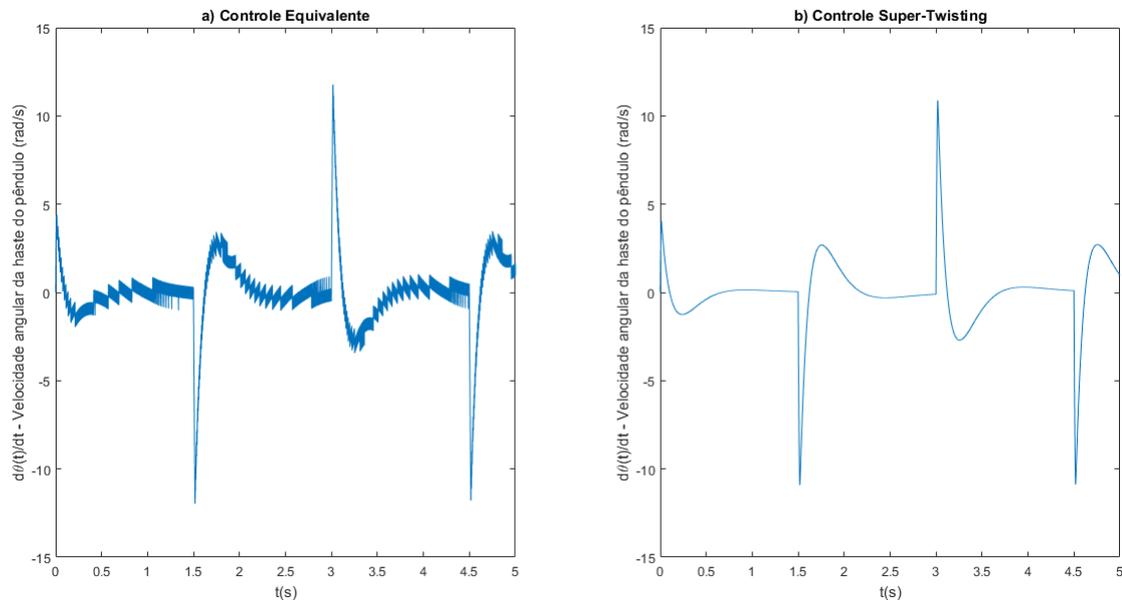
Na Figura 9, é apresentada a velocidade com que a inclinação da haste é alterada. Na Figura 9 (a), foi utilizado o método de controle equivalente e, na Figura 9 (b), foi utilizado o método de controle *Super-Twisting*. Também é perceptível a influência da alteração de referência na velocidade do movimento da haste do pêndulo. Somente após

Figura 8 – Ângulo da haste do pêndulo invertido linear com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle *Super-Twisting*.



Fonte: Da autora.

Figura 9 – Velocidade angular da haste do pêndulo invertido linear com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle *Super-Twisting*.

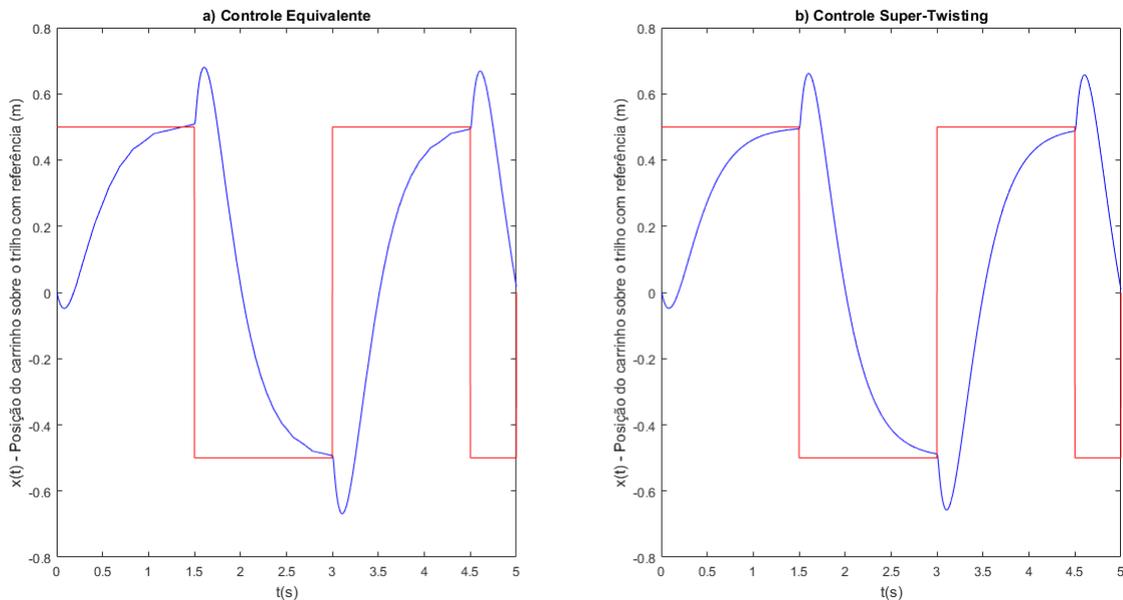


Fonte: Da autora.

um curto tempo, cerca de meio segundo, que a movimentação da haste é direcionada para em torno de zero. Nesse estado, é mais nítida a intensidade do *chattering* utilizando o

método de controle equivalente, Figura 9 (a), comparando com o segundo método, Figura 9 (b).

Figura 10 – Posição do carrinho sobre o trilho com período de amostragem de 1 ms, com referência, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle *Super-Twisting*.



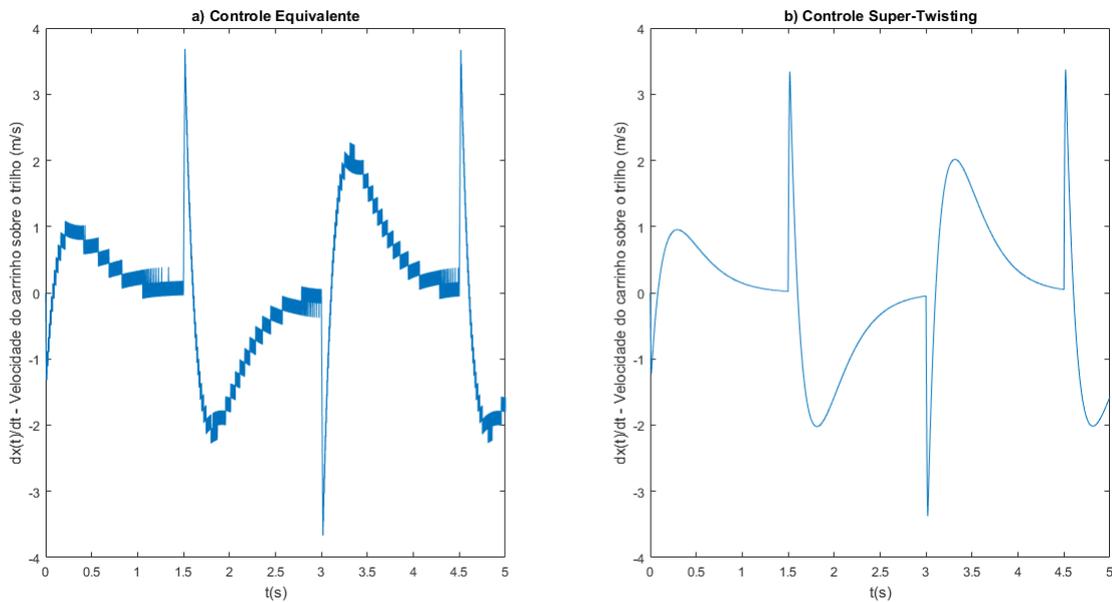
Fonte: Da autora.

Na Figura 10, é apresentada a movimentação da posição do carrinho sobre o trilho, em azul, e a referência seguida, em vermelho. Na Figura 10 (a), foi utilizado o método de controle equivalente e, na Figura 10 (b), foi utilizado o método de controle *Super-Twisting*. Neste estado, o método de controle escolhido não influencia drasticamente na resposta do sistema. É imperceptível a diferença entre os dois métodos. Em ambos os casos, a posição do carrinho sofre um impulso maior no momento de intercalação da referência do sistema e aumenta, ou diminui, rapidamente até atingir a posição considerada “zero”.

Na Figura 11, é apresentada a velocidade com que a posição do carrinho sobre o trilho é alterada. Na Figura 11 (a), foi utilizado o método de controle equivalente e, na Figura 11 (b), foi utilizado o método de controle *Super-Twisting*. Como na Figura 9, a influência da alteração de referência na velocidade do carrinho sobre o trilho é notável. Somente após um curto tempo, cerca de meio segundo, que a movimentação da haste é direcionada para em torno de zero. Nesse estado também, é mais nítida a intensidade do *chattering* utilizando o método de controle equivalente, Figura 11 (a), comparando com o segundo método, Figura 11 (b).

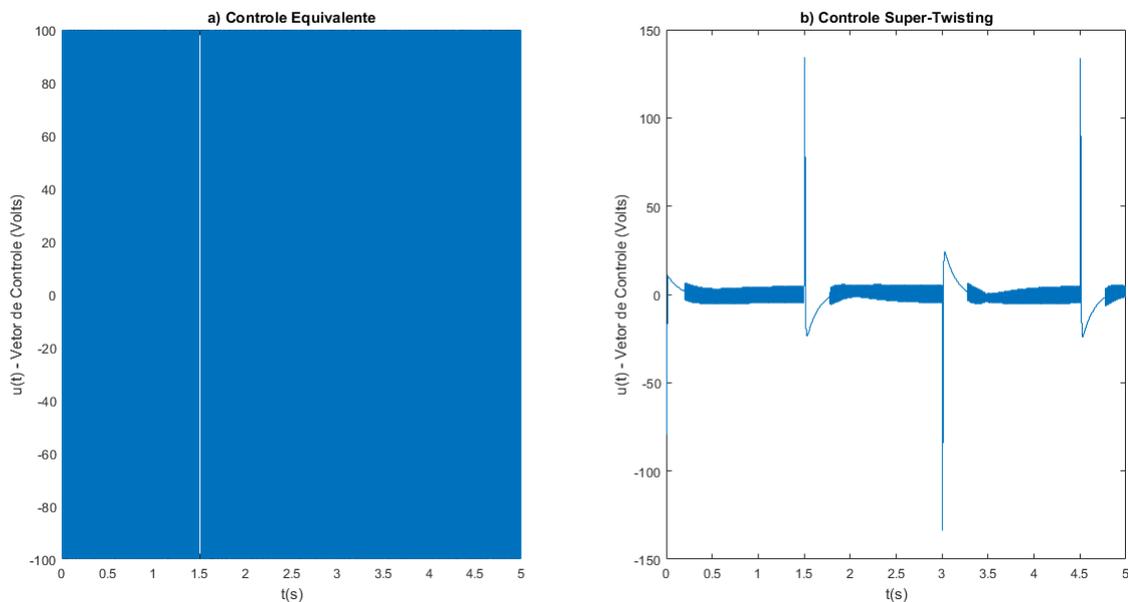
Na Figura 12, são apresentadas as leis de controle utilizadas no sistema. Na Figura 12 (a), foi utilizado o método de controle equivalente e, na Figura 12 (b), foi utilizado o método de controle *Super-Twisting*. Sendo essa uma das principais diferenças entre os

Figura 11 – Velocidade do carrinho sobre o trilho com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle *Super-Twisting*.



Fonte: Da autora.

Figura 12 – Lei de controle no pêndulo invertido linear com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle *Super-Twisting*.

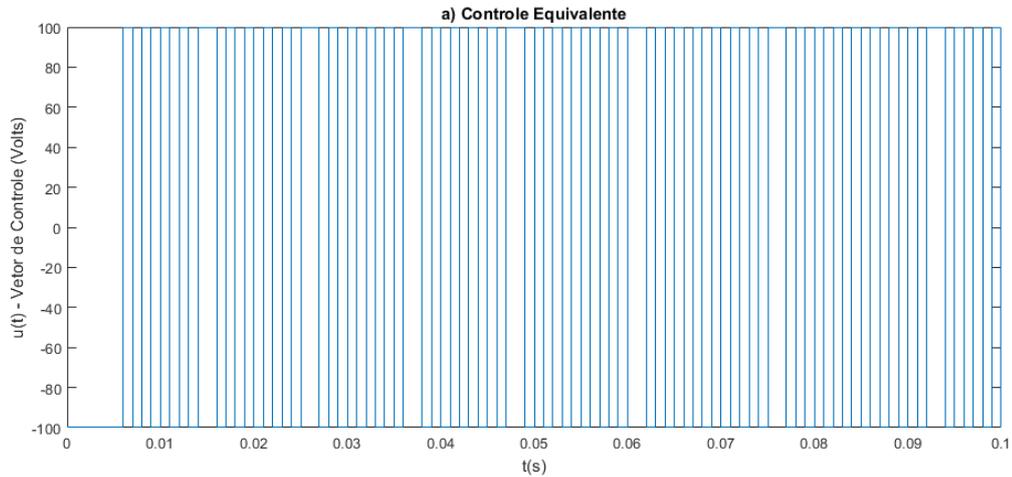


Fonte: Da autora.

dois métodos. Enquanto a lei de controle utilizando o método *Super-Twisting* realiza um chaveamento com intensidade baixa, ocorrendo picos somente no momento de alteração

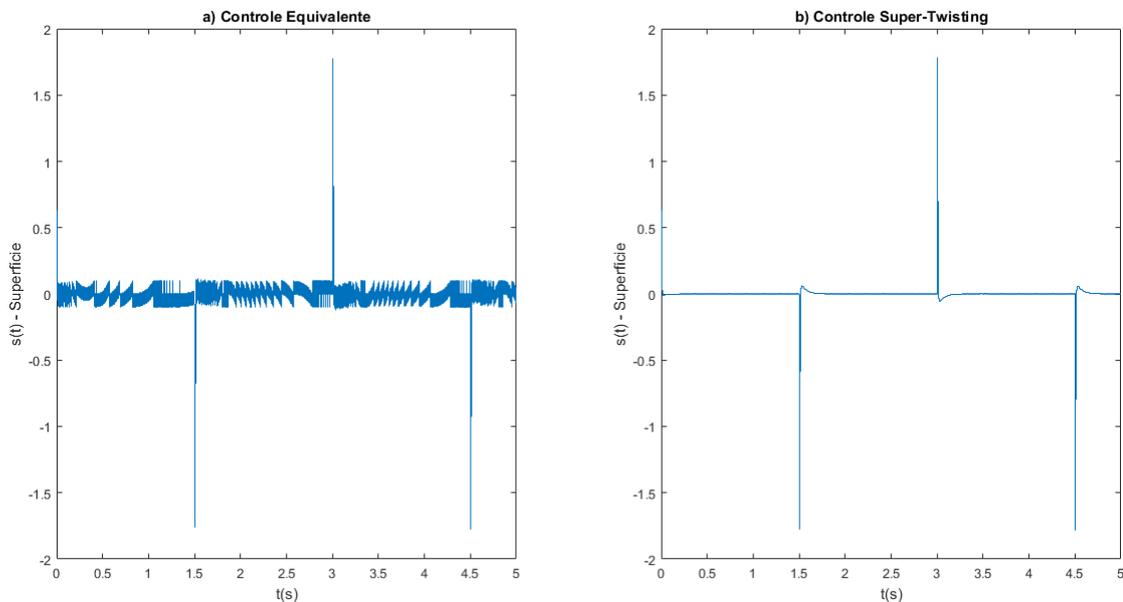
da referência, o método de controle equivalente realiza um chaveamento intenso em toda a sua ocorrência.

Figura 13 – Lei de controle no pêndulo invertido linear ampliada com período de amostragem de 1 ms, aplicando Controle Equivalente.



Fonte: Da autora.

Figura 14 – Superfície no pêndulo invertido linear com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle *Super-Twisting*.



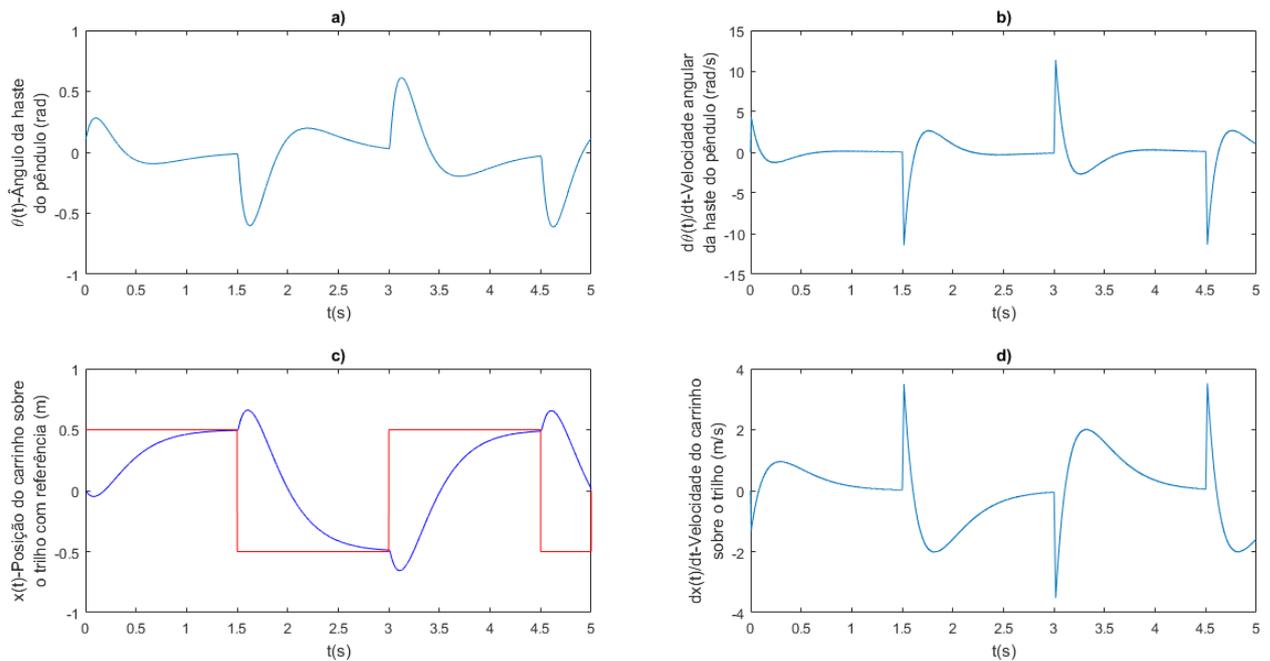
Fonte: Da autora.

Na Figura 13, é apresentada a lei de controle utilizando controle equivalente ampliada, de forma a ser possível observar o chaveamento em si. Nota-se que, com este

método, o chaveamento está ocorrendo tão intensamente que foi necessário coletar somente até 100 ms, da informação que seria de 5 segundos, para ser possível observar essa etapa.

Na Figura 14, são apresentadas as curvas que representam a superfície utilizada no sistema com dois métodos de controle. Na Figura 14 (a), foi utilizado o método de controle equivalente e, na Figura 14 (b), foi utilizado o método de controle *Super-Twisting*. Percebe-se novamente o *chattering* que surge no método de controle equivalente. Enquanto, no segundo método, a curva se encontra praticamente sobre a superfície de deslizamento, no método de controle equivalente, a curva oscila em torno da superfície de deslizamento. Tendo como exceção, em ambos os casos, os instantes de intercalação da referência, nos quais ocorre a saída da superfície, e retorno, praticamente instantâneo.

Figura 15 – Simulação do pêndulo invertido linear com controle equivalente com período de amostragem de 0,1 ms, em que (a) Ângulo da haste do pêndulo invertido linear, (b) Velocidade angular da haste do pêndulo invertido linear, (c) Posição do carrinho sobre o trilho e (d) Velocidade do carrinho sobre o trilho.



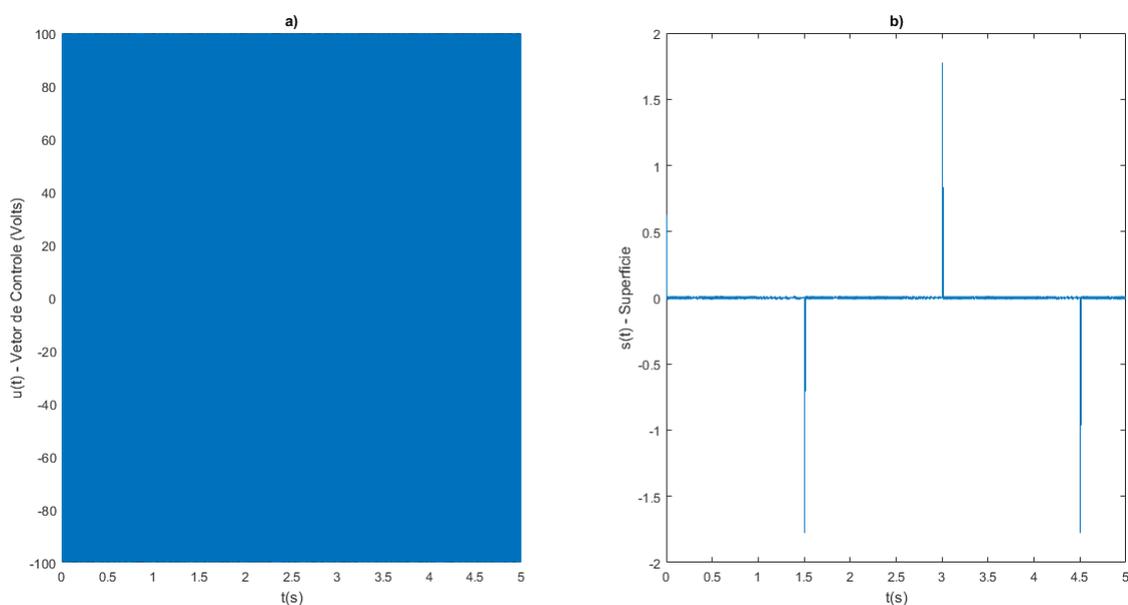
Fonte: Da autora.

Na Figura 15, são apresentadas as formas de onda referentes a todos os estados do pêndulo invertido linear aplicando controle equivalente com período de amostragem de 0,1 ms. Em que é apresentado, na Figura 15 (a), a variação angular da haste do pêndulo, na Figura 15 (b), a velocidade com que ocorre essa variação angular na haste, na Figura 15 (c), a posição do carrinho sobre o trilho e, na Figura 15 (d), a velocidade com que o carrinho sobre o trilho se movimenta.

Como apresentado na simulação anterior, aplicando controle equivalente com o

período de amostragem de 1 ms, o sistema apresenta uma trepidação maior do que aplicando o método de *Super-Twisting* com mesmo período de amostragem e, por isso, de forma a obter uma resposta mais próxima do segundo método, o período de amostragem foi alterado para 0,1 ms, obtendo assim uma resposta com menos *chattering*. Entretanto, devido a alteração do período de amostragem, o tempo necessário para concluir a simulação aumentou, para cerca de um minuto e meio. Os outros parâmetros foram mantidos sem alteração.

Figura 16 – Simulação do pêndulo invertido linear com controle equivalente com período de amostragem de 0,1 ms, em que (a) Lei de controle e (b) Superfície.



Fonte: Da autora.

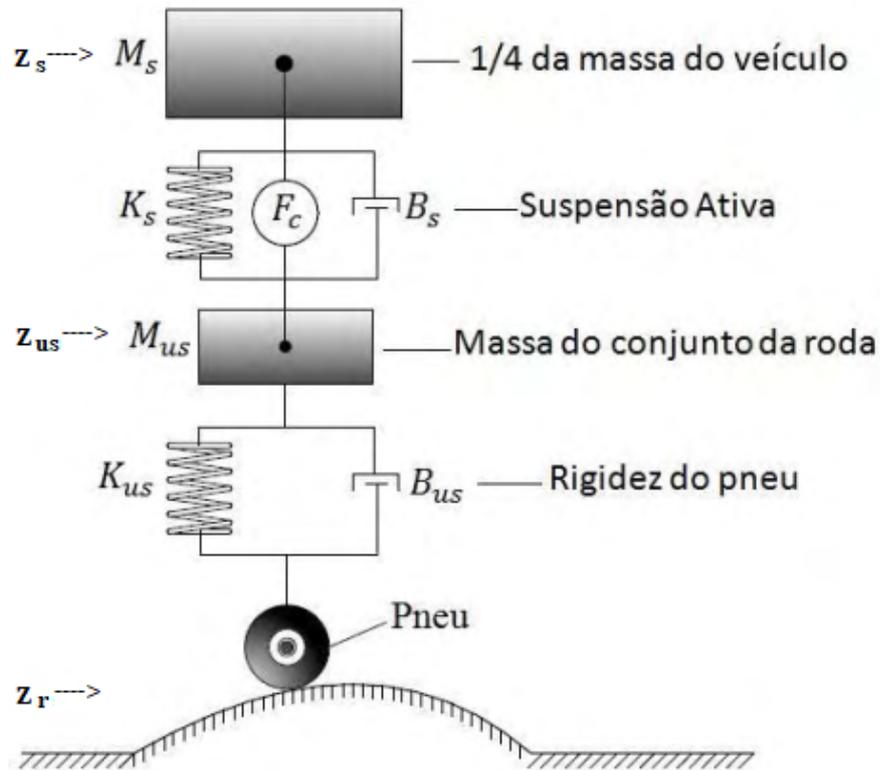
Na Figura 16, são apresentadas a lei de controle e a superfície para o pêndulo aplicando controle equivalente com período de amostragem de 0,1 ms. Em que, na Figura 16 (a), é apresentada a lei de controle e, na Figura 16 (b), a superfície. Comparando com 12 (a) e 14 (a), é possível notar a melhoria da curva da superfície, a amplitude da trepidação diminuiu pois a frequência de chaveamento aumentou, fazendo assim com que a curva esteja praticamente sobre a superfície.

4.2 Suspensão Ativa

A suspensão ativa é um sistema no qual utiliza-se uma tecnologia que controla os movimentos verticais das rodas dos veículos com um sistema de bordo, dando mais estabilidade e desempenho aos movimentos verticais.

O sistema é apresentado na Figura 17 e consiste em duas massas, cada uma suportada por uma mola e um amortecedor.

Figura 17 – Suspensão Ativa.



Fonte: Adaptada de Fernandes (2013).

4.2.1 Modelo do Sistema

O sistema de suspensão ativa é de quarta ordem, pois possui quatro elementos independentes de armazenamento de energia, duas molas e dois amortecedores. Na Figura 17, pode-se notar que a massa M_s representa 1/4 da massa do corpo do veículo e a massa M_{us} representa a massa do conjunto da roda de um quarto do modelo da suspensão ativa. A mola K_s e o amortecedor B_s suportam o peso do carro sobre o pneu, a mola K_{us} e o amortecedor B_{us} representam o modelo de rigidez do pneu em contato com a estrada e F_c é a força de atuação do controle.

Como este sistema possui quatro elementos de armazenamento de energia, pode-se definir os estados, entradas e saídas como

$$x = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{z}_s(t) \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_{us} \end{bmatrix}, \quad u_1 = |\dot{z}_r(t)| \quad u_2 = |F_c|, \quad y = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \ddot{z}_s(t) \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

em que $z_r(t)$ é o sinal da superfície da estrada, $z_{us}(t)$ o deslocamento do pneu e $z_s(t)$ o deslocamento do corpo do veículo com relação ao pneu. Ou seja, o primeiro estado representa alteração da suspensão com relação ao deslocamento do pneu, o segundo estado representa a velocidade vertical do corpo do veículo, o terceiro estado representa alteração do pneu, da roda, com relação à estrada e o quarto estado representa a velocidade do pneu, da roda.

Como o foco deste trabalho não é o desenvolvimento das equações que governam a dinâmica do sistema, essa etapa pode ser vista com maiores detalhes em Fernandes (2013, pág. 43).

Sendo assim, as matrizes de representação em espaços de estados do sistema são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-K_s}{M_s} & \frac{-B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_s}{M_s} & \frac{B_s}{M_s} & \frac{-K_{us}}{M_{us}} & \frac{-B_s + B_{us}}{M_s} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{B_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M_s}{M_{us}} \\ 0 \\ -1 \\ \frac{M_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_s & -B_s & 0 & B_s \\ \frac{M_{us}}{M_{us}} & \frac{M_{us}}{M_{us}} & \frac{M_{us}}{M_{us}} & \frac{M_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \frac{M_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix},$$

em que os valores de todos os parâmetros encontram-se na Tabela 3.

| Parâmetros | Símbolos | Valores | Unidades |
|--|----------|---------|----------|
| Constante de Rigidez da mola (Massa M_s) | K_s | 900 | N/m |
| Constante de Amortecimento (Massa M_s) | B_s | 7.5 | [N/m]s |
| Massa Suspensa | M_s | 2.45 | Kg |
| Constante de Rigidez da mola (Massa M_{us}) | K_{us} | 2500 | N/m |
| Constante de Amortecimento (Massa M_{us}) | B_{us} | 5 | [N/m]s |
| Massa Não Suspensa | M_{us} | 1 | Kg |

Tabela 3 – Dados do Sistema de Suspensão Ativa.

4.2.2 Projeto da Superfície

Como o sistema não está na forma (3.47), é necessário projetar a superfície de deslizamento utilizando transformação, Seção 3.7. Para facilitar os cálculos relacionados a

este sistema de quarta ordem utiliza-se um *script* no *Matlab*[®], considerando $\alpha = 10$, com o qual obteve-se a seguinte superfície de deslizamento

$$S = [-7.1940 \quad 0.0267 \quad -38.3644 \quad -0.9891].$$

Como a entrada u_1 não é controlável, é considerada como uma perturbação, pois depende da estrada na qual o veículo está transitando. Então, nas simulações, é considerado que essa perturbação ocorre somente no intervalo entre 1,5 e 1,7 segundo. Como a primeira entrada não é controlável, somente B_2 é utilizada para o cálculo da superfície, pois u_2 é controlado de acordo com a força aplicada.

4.2.3 Projeto dos Controladores

Método de Controle Equivalente

O método de controle equivalente da Seção 3.2 possui o vetor de controle da forma

$$u = -\rho \text{sign}(s), \quad (4.8)$$

sendo que, para este projeto, o valor de $\rho = 70$ foi escolhido de forma empírica a partir da simulação em malha fechada do sistema.

Método de Controle *Super-Twisting*

O método de controle *Super-Twisting* da Subseção 3.5.2 possui o vetor de controle da forma

$$\begin{aligned} u &= -a\sqrt{|s|}\text{sign}(s) + v \\ \dot{v} &= -M\text{sign}(s), \end{aligned} \quad (4.9)$$

sendo que, para este projeto, o valor de $a = 70$ e $M = 20$ foram escolhidos de forma empírica a partir da simulação em malha fechada do sistema.

Como informado na Subseção 3.5.3, é necessário utilizar um método de resolução numérica para desenvolver a implementação de controladores digitalmente que envolvam equações diferenciais, controle *Super-Twisting* é um desses métodos. Então, neste caso, utiliza-se o método de Euler para facilitar a implementação. Sendo assim, é possível representar v_k de (4.9) digitalmente como

$$v_k = v_{k-1} - MT_s \text{sign}(s), \quad (4.10)$$

em que T_s é o período de amostragem do controlador, k representa o estado atual da variável e $k - 1$ o estado anterior.

4.2.4 Simulações

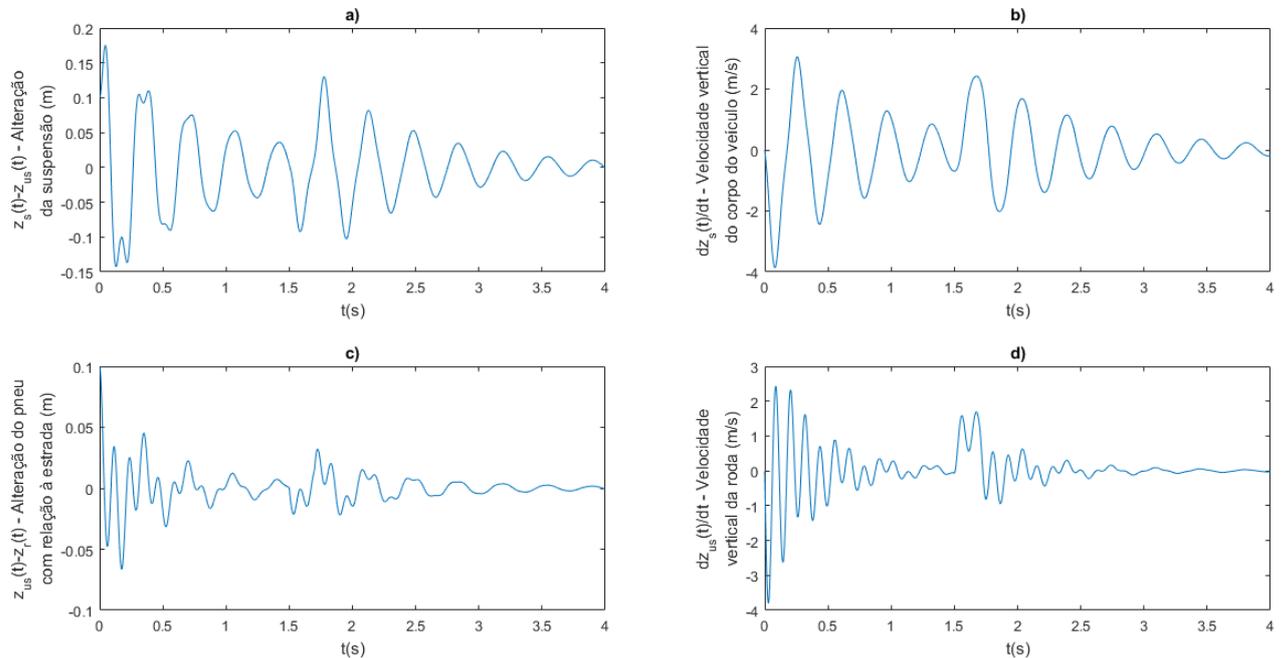
Para verificar a eficiência de cada método de controle, as simulações foram feitas com os parâmetros apresentados na Tabela 4.

| Parâmetros | Malha Aberta | Controle Equivalente | Controle <i>Super-Twisting</i> |
|---------------------------------|----------------|----------------------|--------------------------------|
| Período de amostragem T_s | não se aplica. | 1 ms | 1 ms |
| Vetor de condições iniciais | [0,1 0 0,1 0] | [0,1 0 0,1 0] | [0,1 0 0,1 0] |
| Constante do controlador ρ | não se aplica. | 70 | não se aplica |
| Constante do controlador a | não se aplica. | não se aplica. | 70 |
| Constante do controlador M | não se aplica. | não se aplica. | 20 |

Tabela 4 – Dados de Simulação do Sistema de Suspensão Ativa.

Para o caso da suspensão ativa, uma perturbação, u_1 , foi considerada, ocorrendo no intervalo de 1,5 e 1,7 segundo, representando alguma imperfeição da estrada.

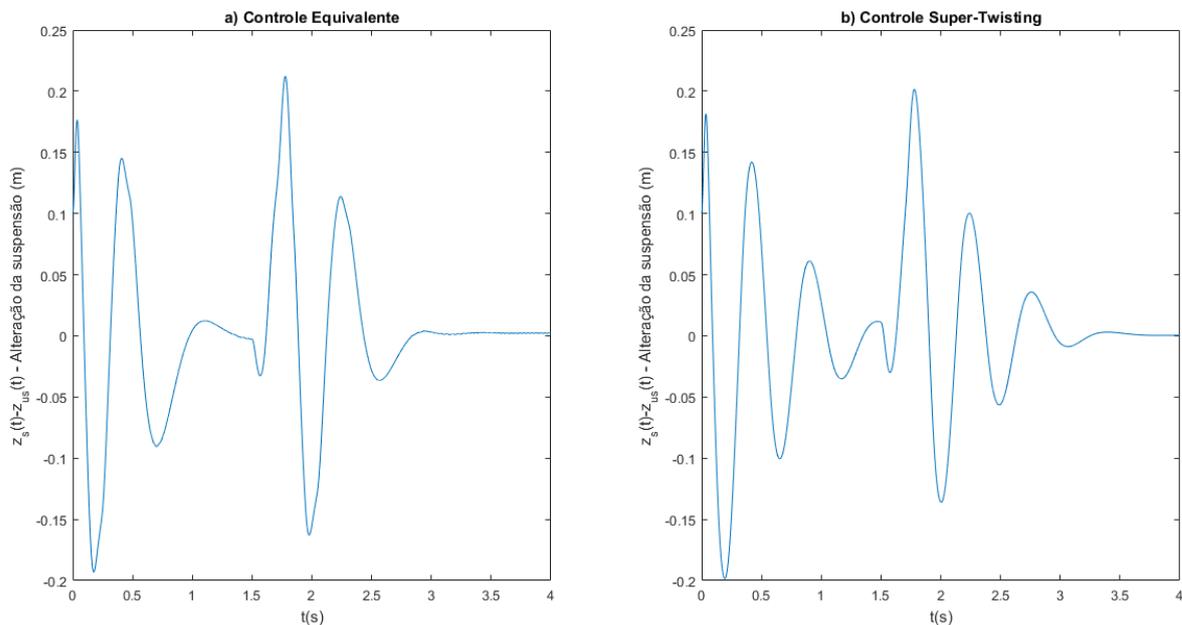
Figura 18 – Sistema de suspensão em malha aberta em que: (a) Alteração da suspensão, (b) Velocidade vertical do corpo do veículo, (c) Alteração do pneu com relação à entrada e (d) Velocidade vertical da roda.



Fonte: Da autora.

Na Figura 18, é apresentada a simulação do sistema de suspensão em malha aberta. Em que, na Figura 18 (a), é apresentada a alteração da suspensão, na Figura 18 (b), a velocidade vertical do corpo do veículo, na Figura 18 (c), a alteração com relação à entrada e, na Figura 18 (d), a velocidade vertical da roda. Sendo que o tempo necessário para concluir a simulação em malha aberta foi cerca de 4 segundos.

Figura 19 – Alteração da suspensão ativa com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle *Super-Twisting*.



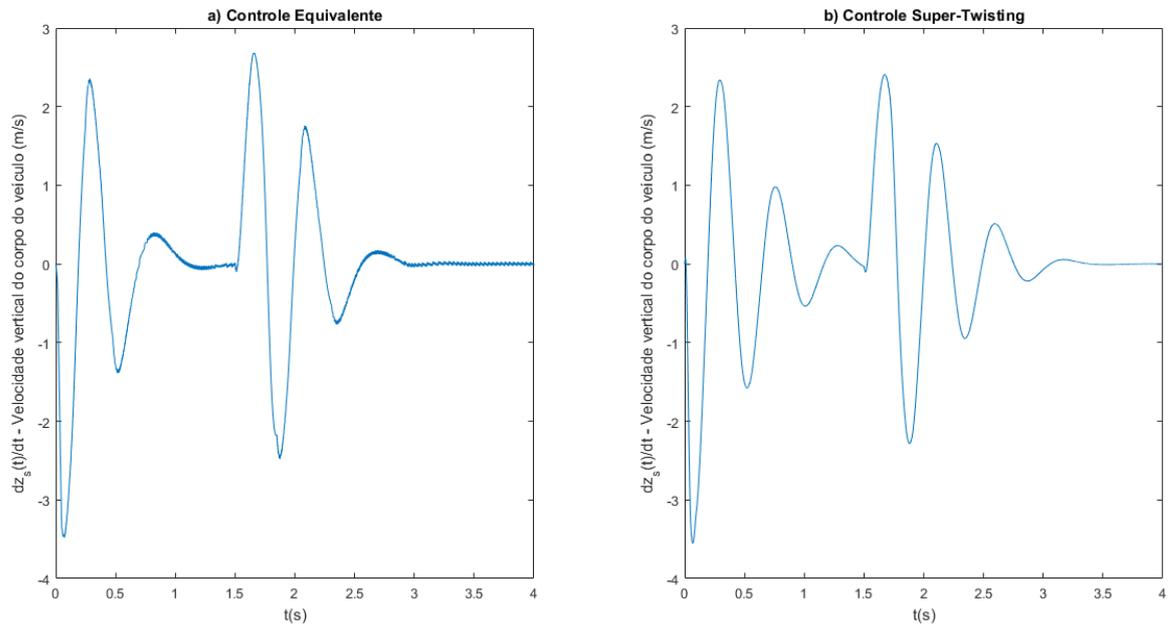
Fonte: Da autora.

Na Figura 19, é apresentada a variação da suspensão ativa, em que, na Figura 19 (a), foi utilizado o método de controle equivalente e, na Figura 19 (b), foi utilizado o método de controle *Super-Twisting*. Sendo que o tempo necessário para concluir a simulação no primeiro método foi cerca de 16 segundos e, no segundo caso, cerca de 14 segundos. Nota-se, entre 1 e 1,5 segundo, utilizando controle equivalente, o sistema é guiado para zero com menos oscilações do que utilizando o controle *Super-Twisting*. Quando o sistema está próximo de obter uma variação nula, a perturbação u_1 acontece e é necessário cerca de 1,3 segundo para o sistema atingir a estabilidade novamente.

Na Figura 20, é apresentada a velocidade vertical do corpo do veículo utilizando os dois métodos. Na Figura 20 (a), foi utilizado o método de controle equivalente e, na Figura 20 (b), utilizando o método de controle *Super-Twisting*. Por mais que, utilizando o controle equivalente, o sistema atinja a estabilidade antes da perturbação ocorrer, é possível notar a ocorrência da trepidação. Utilizando o controle *Super-Twisting*, o sistema não atinge a estabilidade antes da perturbação. Entretanto, o fenômeno *chattering* não ocorre. Cerca de 1,3 segundo, após a perturbação, em ambos os casos, o sistema atinge a estabilidade.

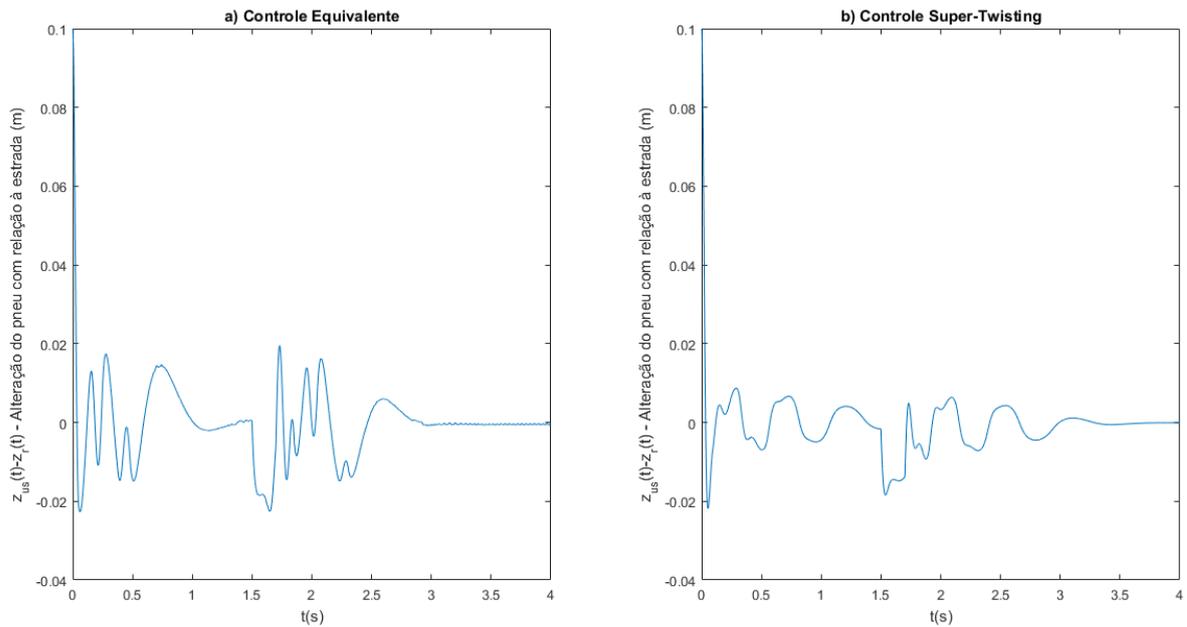
Na Figura 21, é apresentada a variação do pneu, com relação à estrada, utilizando os dois métodos. Na Figura 21 (a), foi utilizando o método de controle equivalente e, na Figura 21 (b), utilizando o método de controle *Super-Twisting*. Em ambos os métodos, somente após cerca de 3 segundos, o sistema atinge a estabilidade. Entretanto, utilizando

Figura 20 – Velocidade vertical do corpo do veículo com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle *Super-Twisting*.



Fonte: Da autora.

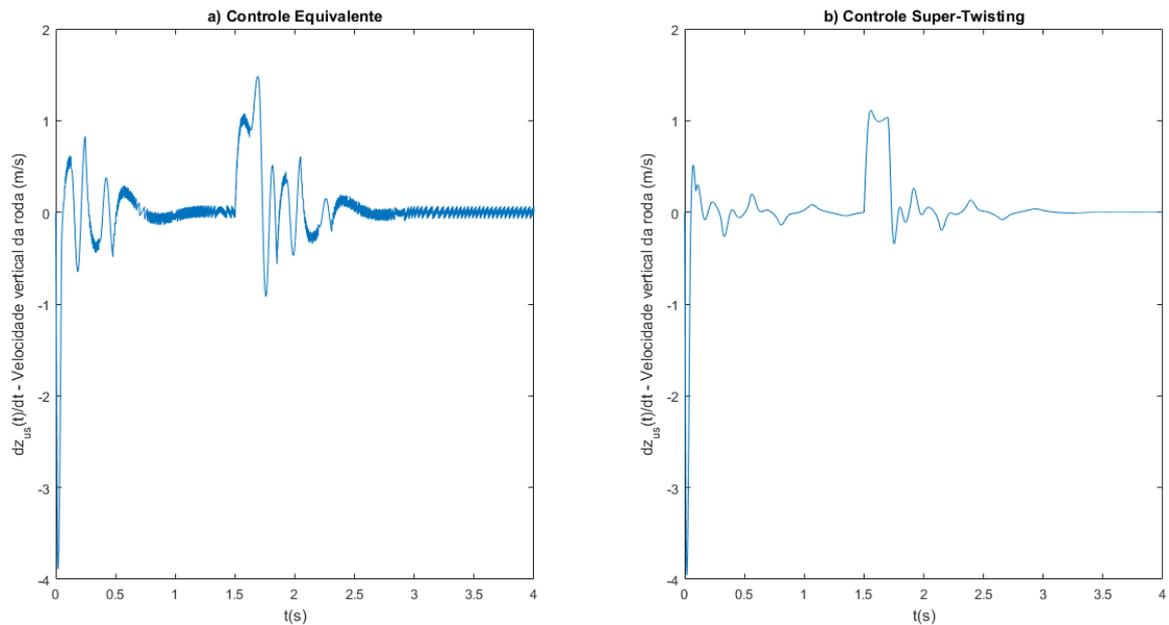
Figura 21 – Alteração do pneu com relação à estrada com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle *Super-Twisting*.



Fonte: Da autora.

o método *Super-Twisting*, a amplitude da variação é menor do que no primeiro caso.

Figura 22 – Velocidade vertical da roda com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle *Super-Twisting*.



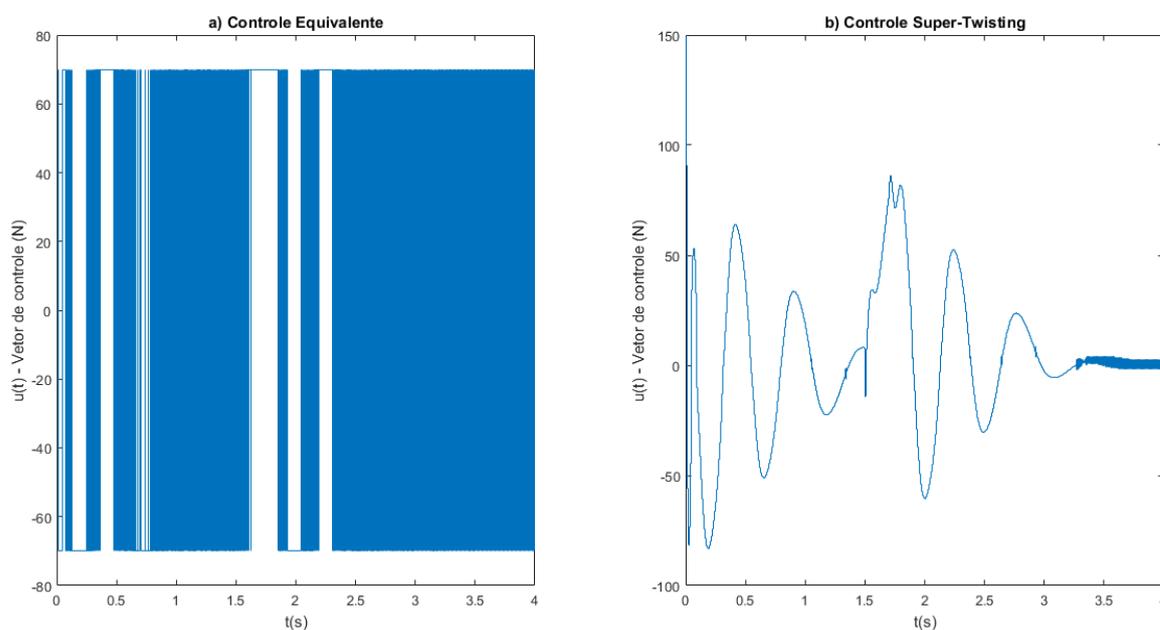
Fonte: Da autora.

Na Figura 22, é apresentada a velocidade que ocorre a variação na roda utilizando os dois métodos. Na Figura 22 (a), foi utilizando o método de controle equivalente e, na Figura 22 (b), utilizando o método de controle *Super-Twisting*. Utilizando o controle *Super-Twisting*, além da amplitude da velocidade ser menor, é possível notar que o *chattering* não ocorre. No primeiro caso, o sistema atinge estabilidade após cerca de um segundo. Entretanto, é nítida a trepidação que a trajetória sofre. Em ambos os casos, no intervalo entre 1,5 e 1,7 segundo, ocorre a perturbação u_1 . Somente após cerca de 1,3 segundo, o sistema atinge a estabilidade novamente.

Na Figura 23, são apresentadas as leis de controle de cada método. Na Figura 23 (a), foi utilizando o método de controle equivalente e, na Figura 23 (b), utilizando o método de controle *Super-Twisting*. Nota-se como a intensidade de chaveamento é muito maior no controle equivalente. No segundo caso, somente depois de cerca de dois segundos após a perturbação, o sistema não necessita de uma lei de controle de alta intensidade.

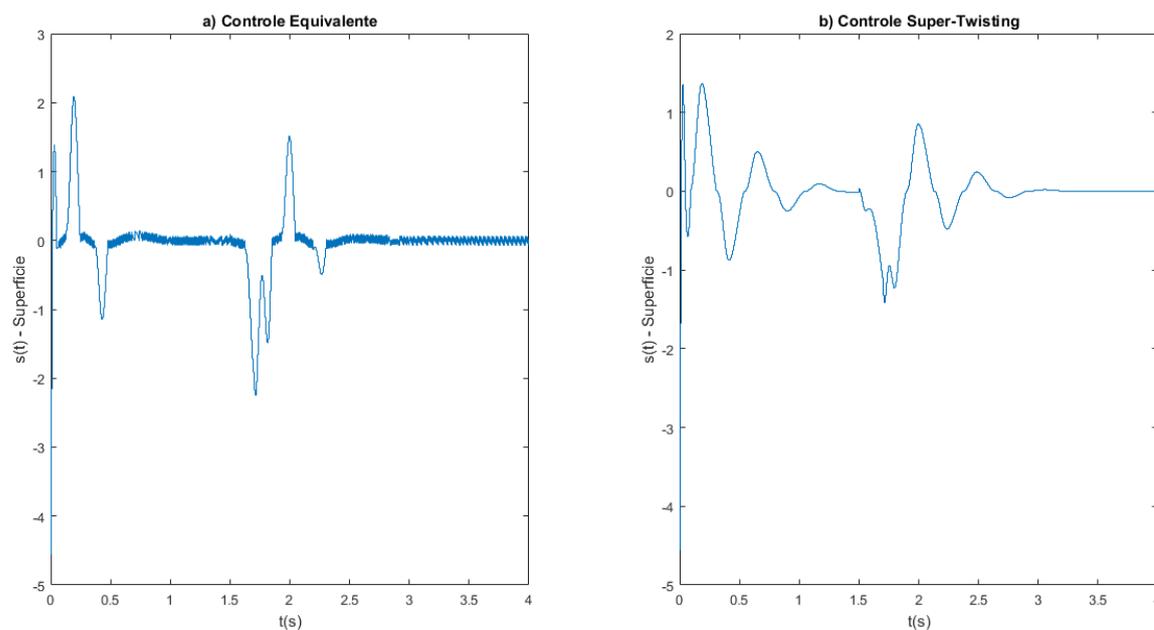
Na Figura 24, são apresentadas as curvas que representam a superfície utilizada no sistema com dois métodos de controle. Na Figura 24 (a), foi utilizado o método de controle equivalente e, na Figura 24 (b), foi utilizado o método de controle *Super-Twisting*. Enquanto no segundo método, após atingir a estabilidade, a curva praticamente permanece sobre a superfície. No primeiro caso, a curva trepida em torno da superfície.

Figura 23 – Lei de controle na suspensão ativa com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle *Super-Twisting*.



Fonte: Da autora.

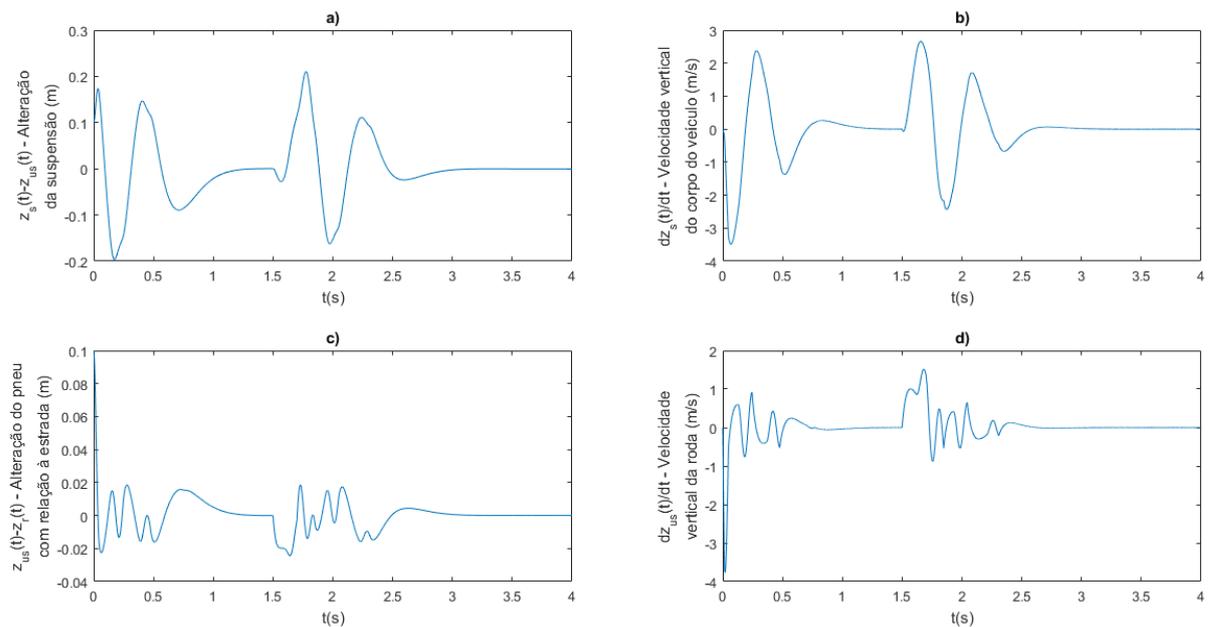
Figura 24 – Superfície na suspensão ativa com período de amostragem de 1 ms, aplicando: (a) Controle Equivalente e (b) Controle *Super-Twisting*.



Fonte: Da autora.

Na Figura 25, são apresentadas as formas de onda referentes a todos os estados da suspensão ativa aplicando controle equivalente com período de amostragem de 0,1 ms. Em que é apresentado, na Figura 25 (a), a variação da suspensão, na Figura 25 (b), a velocidade vertical do corpo do veículo, na Figura 25 (c), a alteração do pneu com relação à estrada e, na Figura 25 (d), a velocidade vertical da roda.

Figura 25 – Simulação da suspensão ativa com controle equivalente com período de amostragem de 0,1 ms, em que (a) Alteração da suspensão, (b) Velocidade vertical do corpo do veículo, (c) Alteração do pneu com relação à estrada e (d) Velocidade vertical da roda.

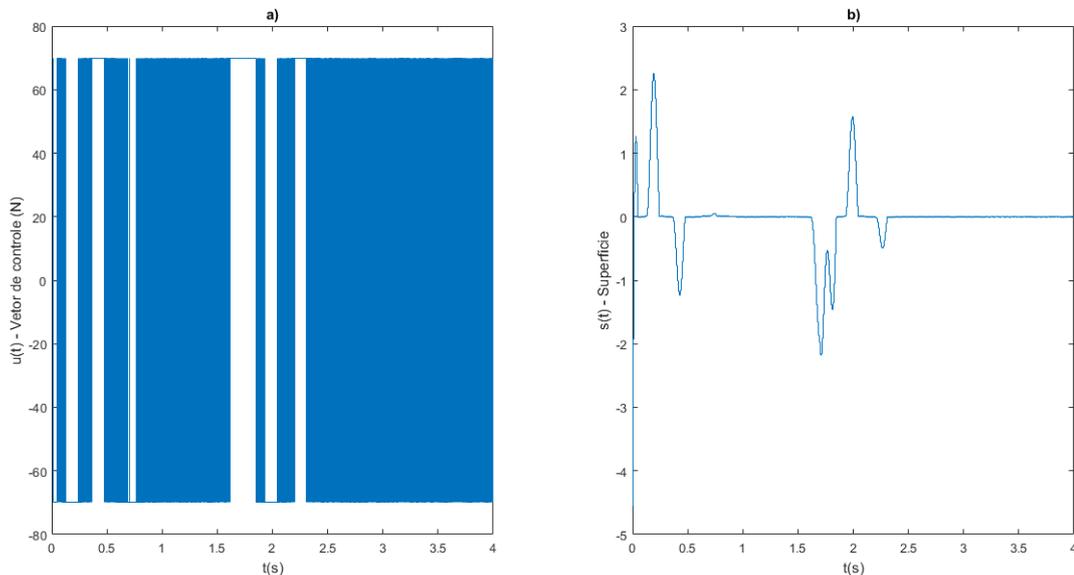


Fonte: Da autora.

De maneira a obter uma resposta mais próxima do método *Super-Twisting* com período de amostragem de 1 ms, foi necessário alterar esse tempo para 0,1 ms, obtendo assim uma resposta com menos *chattering*. Entretanto, devido a alteração do período de amostragem, o tempo necessário para concluir a simulação aumentou para cerca de quinze minutos. Os outros parâmetros foram mantidos sem alteração.

Na Figura 26, são apresentadas a lei de controle e a curva que representa a superfície do sistema aplicando controle equivalente com período de amostragem de 0,1 ms. Em que, na Figura 26 (a), é apresentada a lei de controle e, na Figura 26 (b), a curva que representa a superfície. Comparando com 23 (a) e 24 (a), é possível notar que a amplitude da trepidação diminuiu pois a frequência de chaveamento aumentou, fazendo assim com que a curva esteja praticamente sobre a superfície.

Figura 26 – Simulação da suspensão ativa com controle equivalente com período de amostragem de 0,1 ms, em que (a) Lei de controle e (b) Superfície.



Fonte: Da autora.

4.3 Conversor Buck

Os conversores de Corrente Contínua para Corrente Contínua (CC-CC) são dispositivos eletrônicos cuja função principal é controlar o fluxo de energia elétrica da fonte de entrada para a fonte de saída. No caso do conversor Buck, a tensão média de saída, $V_o(t)$, é menor do que o valor médio da tensão de entrada, $V_e(t)$. Os conversores CC-CC operam em três modos: o modo de condução contínua, se a corrente do indutor nunca vai a zero durante o período de chaveamento, o modo de condução descontínua, se a corrente do indutor vai a zero durante alguns instantes no período de chaveamento, e o modo de condução crítica, limiar entre o modo de condução contínua e descontínua. Neste caso, o controle será aplicado ao modo de condução contínua.

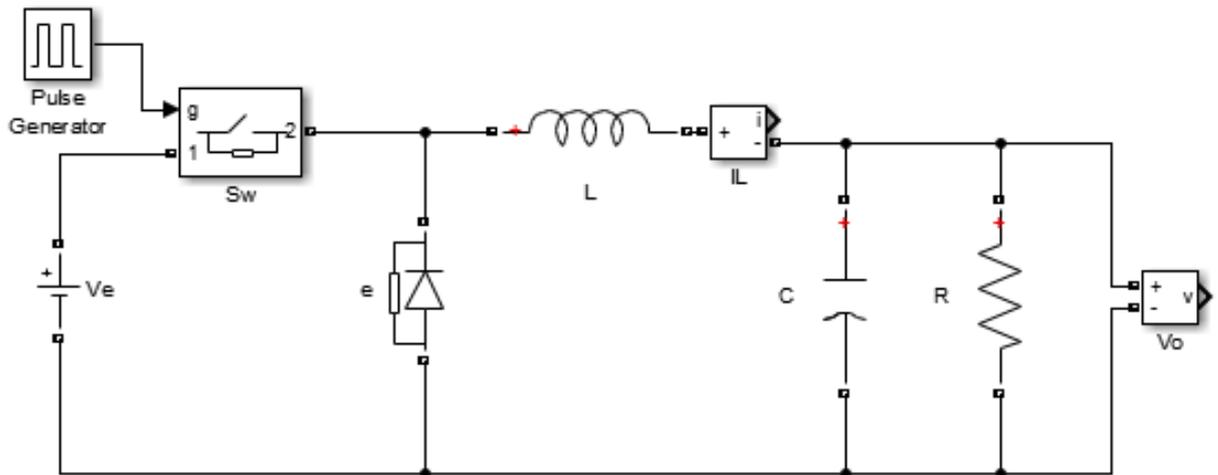
A representação da topologia básica do conversor Buck é apresentada na Figura 27, em que V_e é a tensão de entrada, I_s é a corrente que passa pela chave Sw , I_d é corrente que passa pelo diodo, I_L é a corrente que passa pelo indutor, I_C é a corrente que passa pelo capacitor, I_{out} é a corrente de saída que passa pelo resistor e V_O é a tensão na saída.

4.3.1 Modelo do Sistema

Para obter as equações que representam a dinâmica da corrente no indutor, I_L , e da tensão na saída, $V_O = V_C$, em função do tempo é necessário analisar o circuito da Figura 27 em dois casos: Sw conduzindo e Sw não conduzindo.

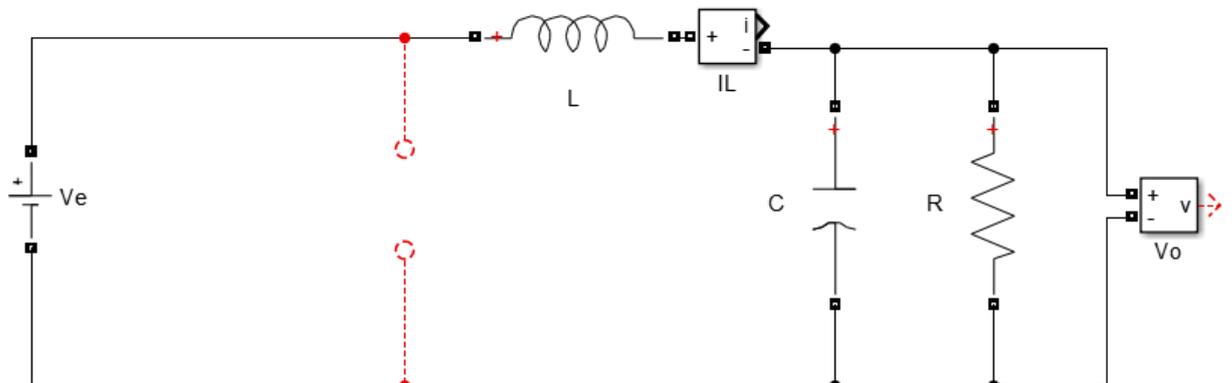
Sw conduzindo:

Figura 27 – Conversor Buck.



Fonte: Da autora.

Figura 28 – Topologia básica do conversor Buck com Sw conduzindo.



Fonte: Da autora.

No caso da Figura 28, usando as Leis de Kirchhoff, tem-se que

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{-v_C(t)}{L} + \frac{v_e(t)}{L}$$

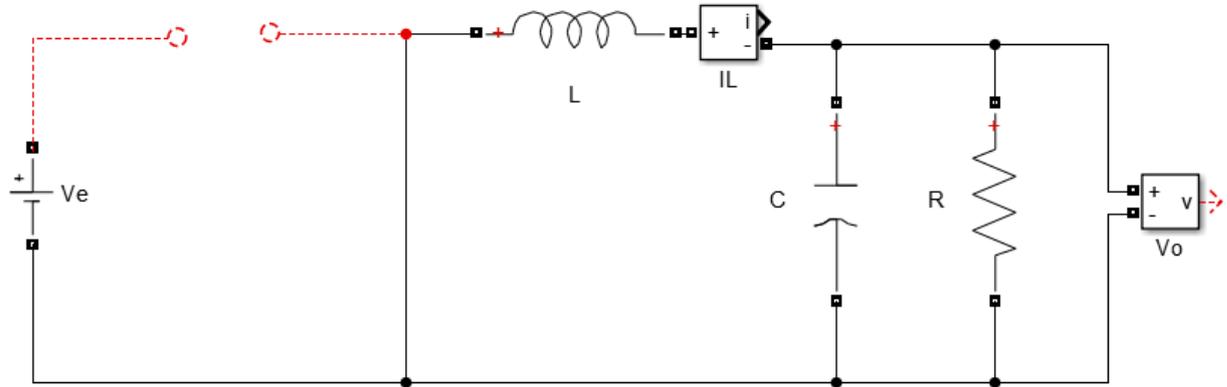
$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i_L(t)}{C} - \frac{v_C(t)}{RC}.$$

Sw não conduzindo:

No caso da Figura 29, usando as Leis de Kirchhoff, tem-se que

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{-v_C(t)}{L}$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i_L(t)}{C} - \frac{v_C(t)}{RC}.$$

Figura 29 – Topologia básica do conversor Buck com Sw não conduzindo.

Fonte: Da autora.

De forma a unir os dois casos, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{di_L(t)}{dt} &= \frac{-v_C(t)}{L} + \frac{v_e(t)}{L}u(t) \\ \frac{dv_C(t)}{dt} &= \frac{i_L(t)}{C} - \frac{v_C(t)}{RC},\end{aligned}$$

em que o vetor de controle, $u(t)$, pode assumir apenas dois valores, 0 ou 1, de acordo com Sw .

De forma matricial, tem-se então

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ \dot{v}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v_e}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (4.11)$$

4.3.2 Projeto da Superfície

Como o sistema não está na forma (3.47), é necessário projetar a superfície de deslizamento utilizando transformação, Seção 3.7. Para facilitar os cálculos relacionados a este sistema de segunda ordem utiliza-se um *script* no *Matlab*[®], considerando $\alpha = 10000$, com o qual obteve-se a seguinte superfície de deslizamento

$$S = [8.3333 \times 10^{-5} \quad 7.5 \times 10^{-5}].$$

Como no conversor Buck a intenção não é levar a tensão na saída para zero e sim o erro de tensão, é necessário realizar uma alteração nos estados do sistema de forma que modifique a superfície de deslizamento.

Inicialmente, considera-se

$$x_1(t) = i_L(t) - \Delta \quad (4.12)$$

$$x_2(t) = v_C(t) - v_d(t), \quad (4.13)$$

em que Δ é considerado uma perturbação e $v_d(t)$ é a tensão desejada na saída.

As derivadas temporais de (4.12) e (4.13) são

$$\dot{x}_1(t) = \dot{i}_L(t) - \dot{\Delta} \quad (4.14)$$

$$\dot{x}_2(t) = \dot{v}_C(t) - \dot{v}_d(t). \quad (4.15)$$

Isolando $v_C(t)$ de (4.13) e $\dot{v}_C(t)$ de (4.15) e substituindo na segunda linha de (4.11), tem-se

$$\dot{x}_2(t) = \frac{\dot{i}_L(t)}{C} - \frac{x_2(t) + v_d(t)}{RC} - \dot{v}_d(t). \quad (4.16)$$

Isolando $i_L(t)$ de (4.12) e substituindo em (4.16), tem-se

$$\dot{x}_2(t) = \frac{x_1(t)}{C} - \frac{x_2(t)}{RC} + \underbrace{\frac{\Delta}{C} - \frac{v_d(t)}{RC}}_K - \dot{v}_d(t). \quad (4.17)$$

A relação de Δ é obtida fazendo com que K seja igual a zero, sendo que assim não existirá perturbação afetando “diretamente” x_2 , de forma que não afete a tensão no capacitor. Então

$$\Delta = \frac{v_d(t)}{R} + C\dot{v}_d(t). \quad (4.18)$$

Sendo assim, tem-se que

$$\dot{x}_2(t) = \frac{x_1(t)}{C} - \frac{x_2}{RC}. \quad (4.19)$$

Para obter $\dot{x}_1(t)$ é necessário obter a derivada temporal de Δ , então aplicando a regra da cadeia em (4.18), tem-se

$$\dot{\Delta} = \frac{\dot{v}_d(t)}{R} - \frac{v_d(t)\dot{R}}{R^2} + C\ddot{v}_d(t). \quad (4.20)$$

Substituindo a primeira linha de (4.11) e (4.20) em (4.14), tem-se

$$\dot{x}_1(t) = \frac{-v_c(t)}{L} + \frac{v_e}{L}u(t) - \left(\frac{\dot{v}_d(t)}{R} - \frac{v_d(t)\dot{R}}{R^2} + C\ddot{v}_d(t) \right). \quad (4.21)$$

Isolando $v_C(t)$ de (4.13) e substituindo em (4.21), tem-se

$$\dot{x}_1(t) = \frac{-x_2(t)}{L} + \frac{v_e}{L}u(t) - \underbrace{\left(\frac{\dot{v}_d(t)}{R} - \frac{v_d(t)\dot{R}}{R^2} + C\ddot{v}_d(t) + \frac{v_d(t)}{L} \right)}_{\phi}. \quad (4.22)$$

Considerando ϕ uma perturbação, tem-se então

$$\dot{x}_1(t) = \frac{-x_2(t)}{L} + \frac{v_e}{L}u(t) - \phi. \quad (4.23)$$

Desta forma, analisando (4.19) e (4.23), tem-se que a escolha das novas variáveis de estado é válida, pois levando x_1 e x_2 para zero, a saída do sistema segue a referência desejada. Sendo assim, a nova superfície de deslizamento será com $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

Utilizando a aproximação de Euler para representar Δ de (4.18) digitalmente, tem-se que

$$\Delta = \frac{V_{d_k}}{R} + C \frac{V_{d_k} - V_{d_{k-1}}}{T_s}, \quad (4.24)$$

em que T_s é o período de amostragem do controlador, k representa o estado atual da variável e $k - 1$ o estado anterior.

4.3.3 Projeto dos Controladores

Método de Controle Equivalente

O método de controle equivalente da Seção 3.2 possui o vetor de controle da forma

$$u = -\rho \text{sign}(s), \quad (4.25)$$

entretanto, como o conversor Buck tem seu funcionamento ligado a chave Sw é necessário alterar o vetor de controle, de forma que apresente somente o valor 0 ou 1. Sendo assim, o vetor de controle utilizado será

$$u = \frac{1}{2}(1 - \text{sign}(s)). \quad (4.26)$$

Método de Controle *Super-Twisting*

No caso do conversor Buck, o método de controle *Super-Twisting* não foi aplicado. Como a lei de controle obtida pelo método *Super-Twisting* faria o uso de uma faixa contínua de valores entre zero e um, seria necessário utilizar uma técnica de modulação, o que removeria as vantagens de um controle em modos deslizantes de ordem superior.

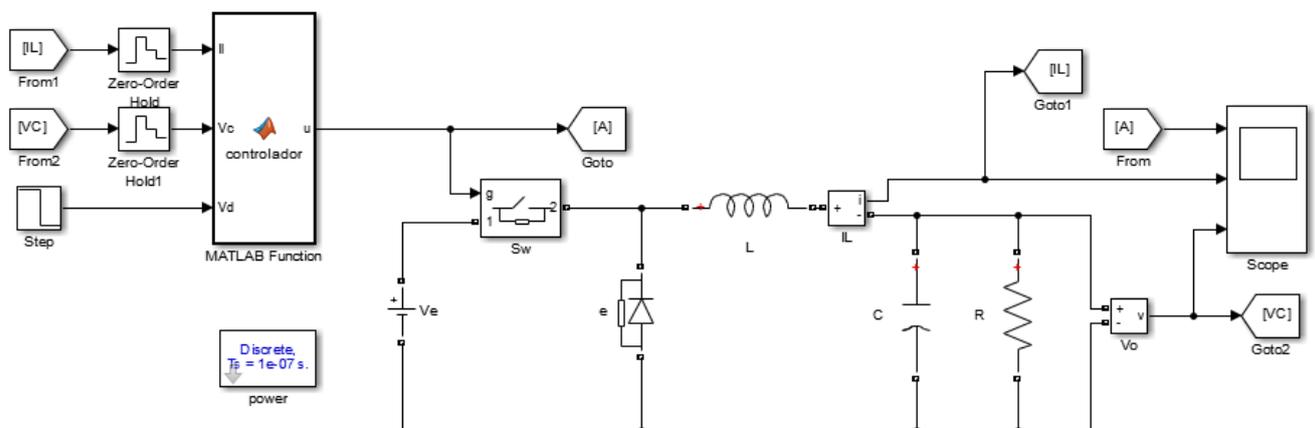
| Parâmetros | Controle Equivalente |
|-----------------------------------|----------------------|
| Período de amostragem T_s | 0,01 ms |
| Constante do controlador α | 10000 |
| Resistor R | 10 Ω |
| Indutor L | 1 mH |
| Capacitor C | 100 μF |
| Tensão de entrada V_e | 12 V |

Tabela 5 – Dados de Simulação do Sistema Conversor Buck.

4.3.4 Simulações

Para verificar a eficiência do método, quatro simulações foram realizadas, utilizando o *Simulink*, com os parâmetros apresentados na Tabela 5.

O circuito do primeiro caso simulado é apresentado na Figura 30. Em que somente a tensão desejada é variada. Nos primeiros 2,5 ms a tensão desejada é de 8 V, após isso, a tensão de saída é alterada para 5 V.

Figura 30 – Circuito montado no *Simulink* para o primeiro caso.

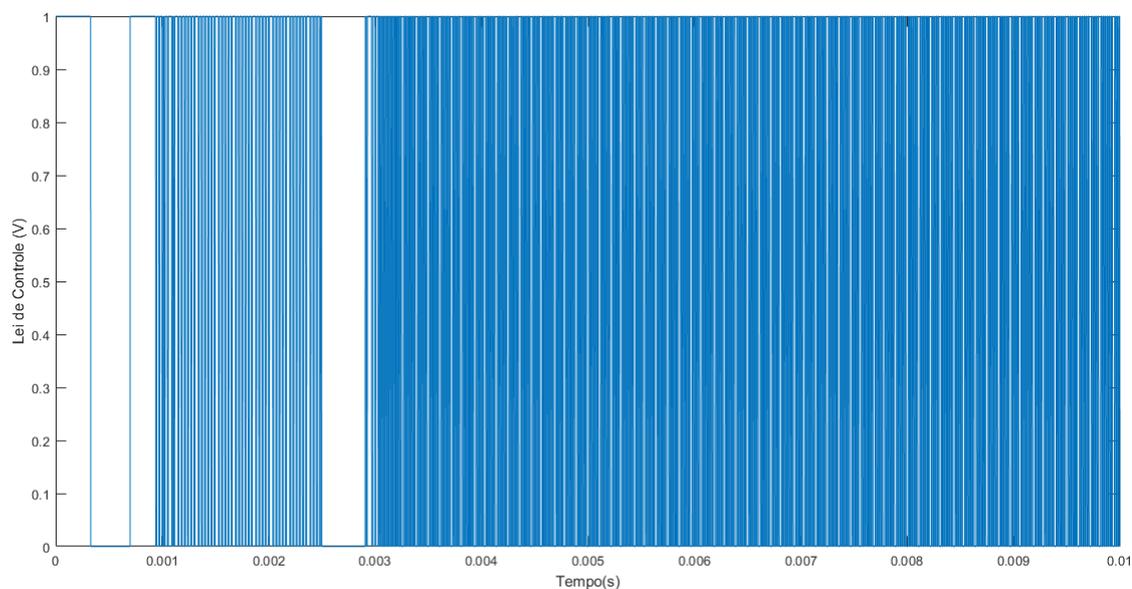
Fonte: Da autora.

Nas Figuras 31, 32 e 33, são apresentados os resultados da simulação do primeiro caso do conversor Buck. Em que, na Figura 31, é apresentada a lei de controle, na Figura 32, a corrente no indutor e, na Figura 33, a tensão na saída. Nota-se que o controlador atua da maneira esperada.

Na Figura 31, é possível observar a alteração da ação de controle do conversor após a alteração da tensão desejada. Como a tensão desejada é reduzida e a tensão de entrada é mantida em 12 V, a frequência de chaveamento aumentou.

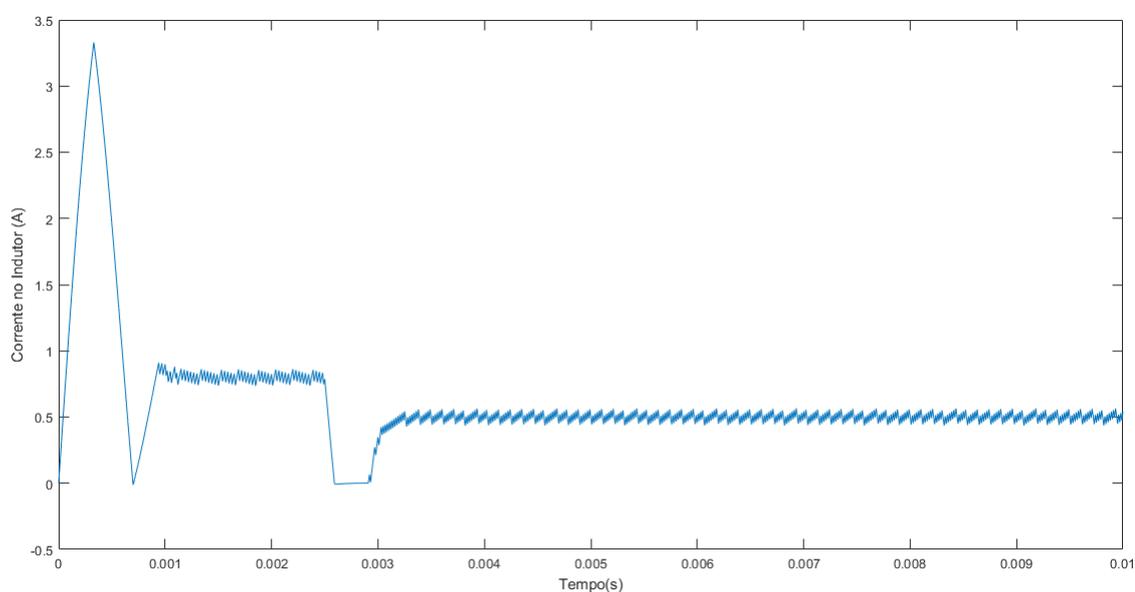
Na Figura 32, é possível observar a alteração da corrente no indutor. Após cerca de 1 ms, a corrente atinge o regime permanente e é levada para 0,8 A. Quando ocorre a alteração da tensão desejada, em 2,5 ms, a corrente atinge o valor de 0,5 A.

Figura 31 – Lei de controle do conversor Buck do primeiro caso.



Fonte: Da autora.

Figura 32 – Corrente no indutor do conversor Buck do primeiro caso.

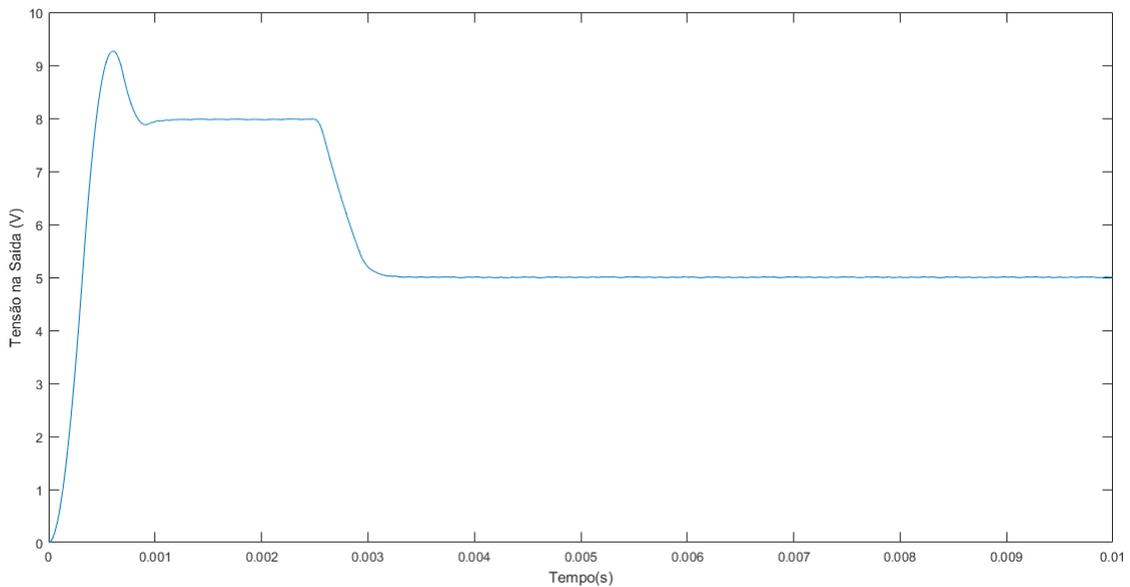


Fonte: Da autora.

Na Figura 33, é capaz de observar a tensão na carga. A primeira tensão desejada é obtida após um curto tempo, cerca de 1 ms. Pouco tempo após 2,5 ms, ocorre a alteração da tensão desejada para 5 V.

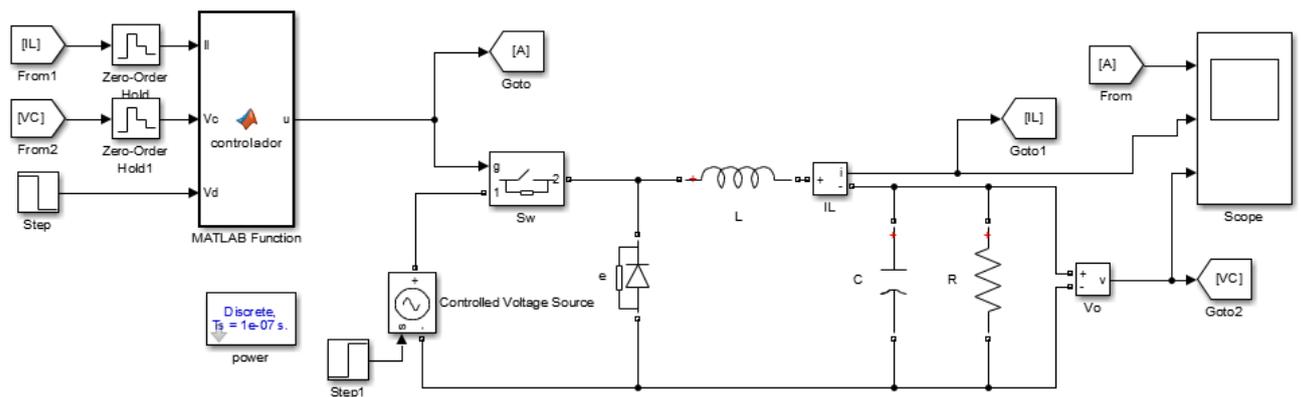
O circuito do segundo caso simulado é apresentado na Figura 34. Em que, além

Figura 33 – Tensão na saída do conversor Buck do primeiro caso.



Fonte: Da autora.

da alteração na tensão desejada, ocorre também uma alteração na tensão de entrada do conversor. Nos primeiros 5 ms, a tensão de entrada é 12 V e, após isso, é alterada para 20 V.

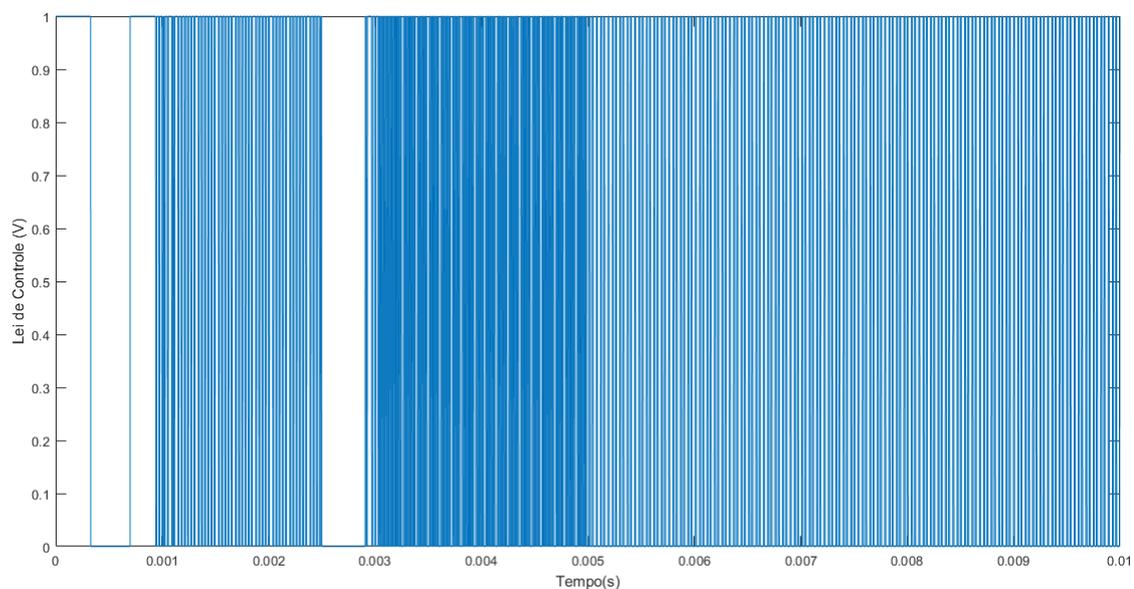
Figura 34 – Circuito montado no *Simulink* para o segundo caso.

Fonte: Da autora.

Nas Figuras 35, 36 e 37, são apresentados os resultados da simulação do segundo caso do conversor Buck. Em que, na Figura 35, é apresentada a lei de controle, na Figura 36, a corrente no indutor e, na Figura 37, a tensão na saída.

Na Figura 35, é visível a alteração da ação de controle do conversor. Como a tensão de entrada é aumentada, a frequência de chaveamento diminui.

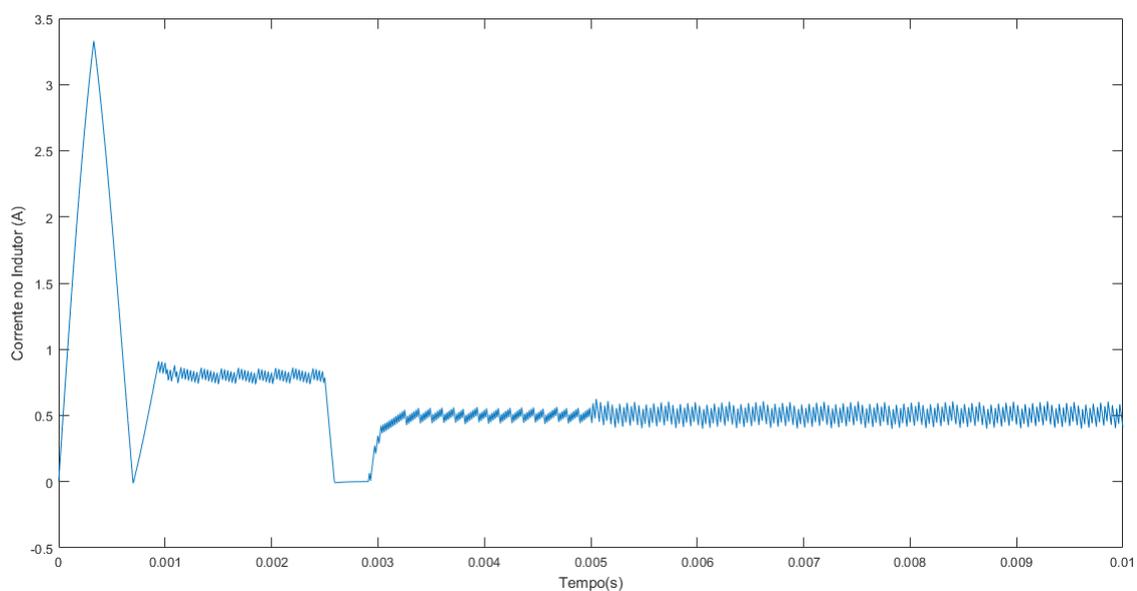
Figura 35 – Lei de controle do conversor Buck do segundo caso.



Fonte: Da autora.

Na Figura 36, é apresentada a corrente no indutor do conversor no segundo caso. Após a alteração da tensão de entrada para 20 V, como a frequência de chaveamento diminuiu, a amplitude da trepidação da corrente aumenta, comparando com a Figura 32.

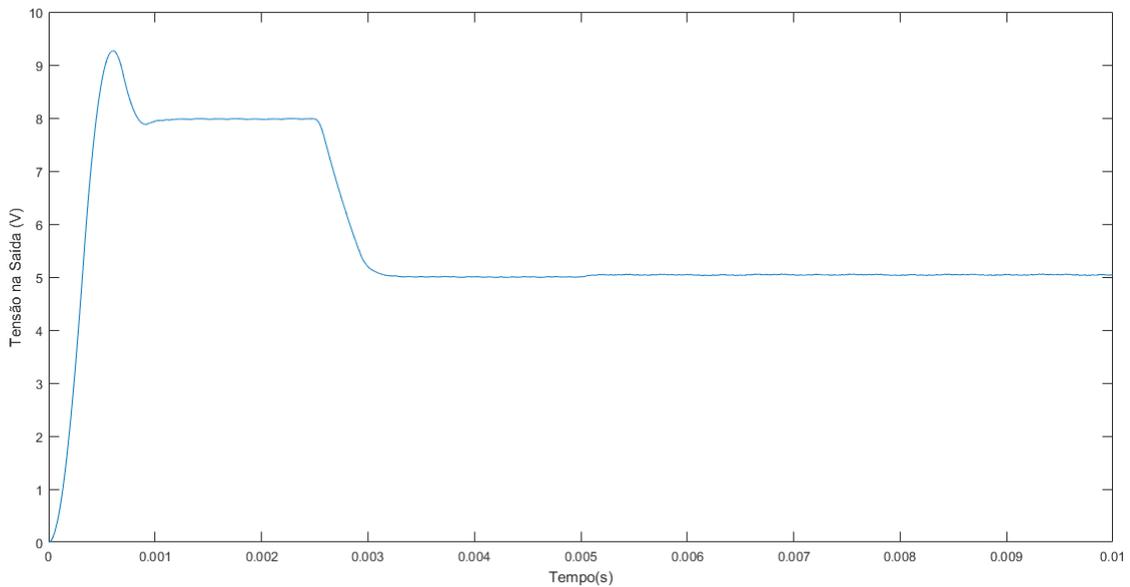
Figura 36 – Corrente no indutor do conversor Buck do segundo caso.



Fonte: Da autora.

Na Figura 37, é apresentada a tensão na carga no segundo caso. É notório que a tensão na saída não sofre alteração, com relação ao caso anterior.

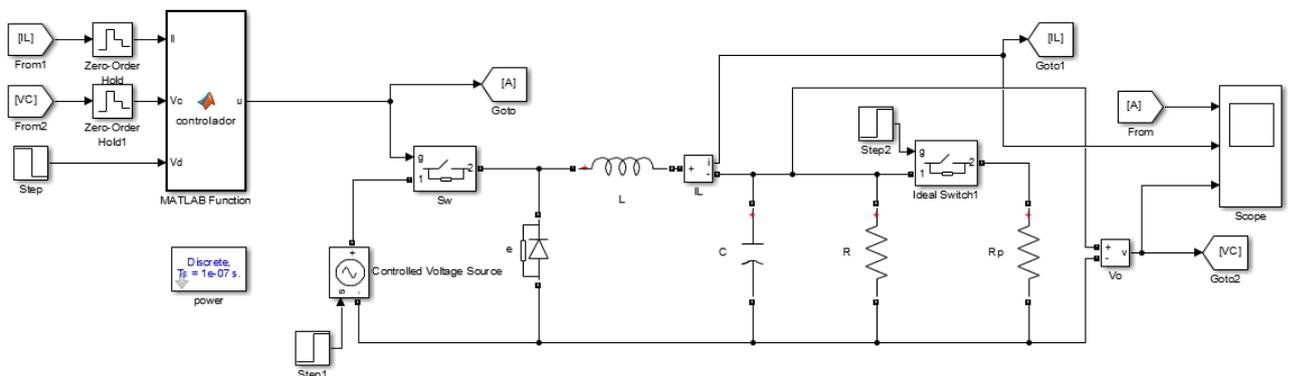
Figura 37 – Tensão na saída do conversor Buck do segundo caso.



Fonte: Da autora.

O terceiro caso simulado é apresentado na Figura 38. Em que, além das variações na tensão desejada e tensão de referência informadas anteriormente, um aumento de 50% da carga é considerado após 7,5 ms. Sendo que esse aumento ocorre com a inclusão de uma resistência em paralelo, R_p , de 10Ω .

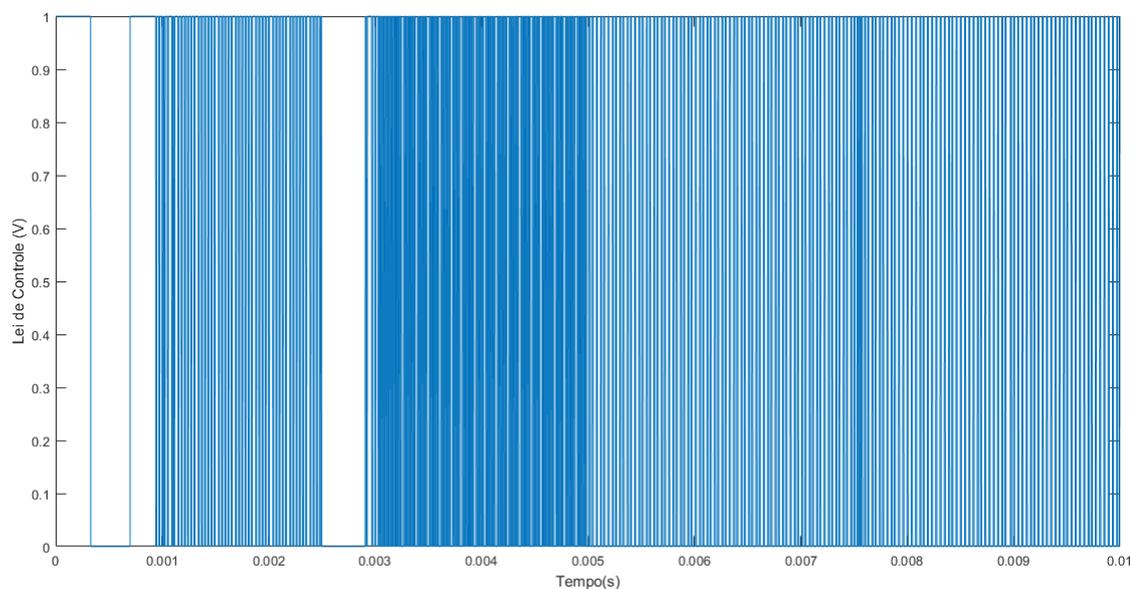
Figura 38 – Circuito montado no *Simulink* para o terceiro caso.



Fonte: Da autora.

Nas Figuras 39, 40 e 41, são apresentados os resultados da simulação do terceiro caso do conversor Buck. Em que, na Figura 39, é apresentada a lei de controle, na Figura 40, a corrente no indutor e, na Figura 41, a tensão na saída.

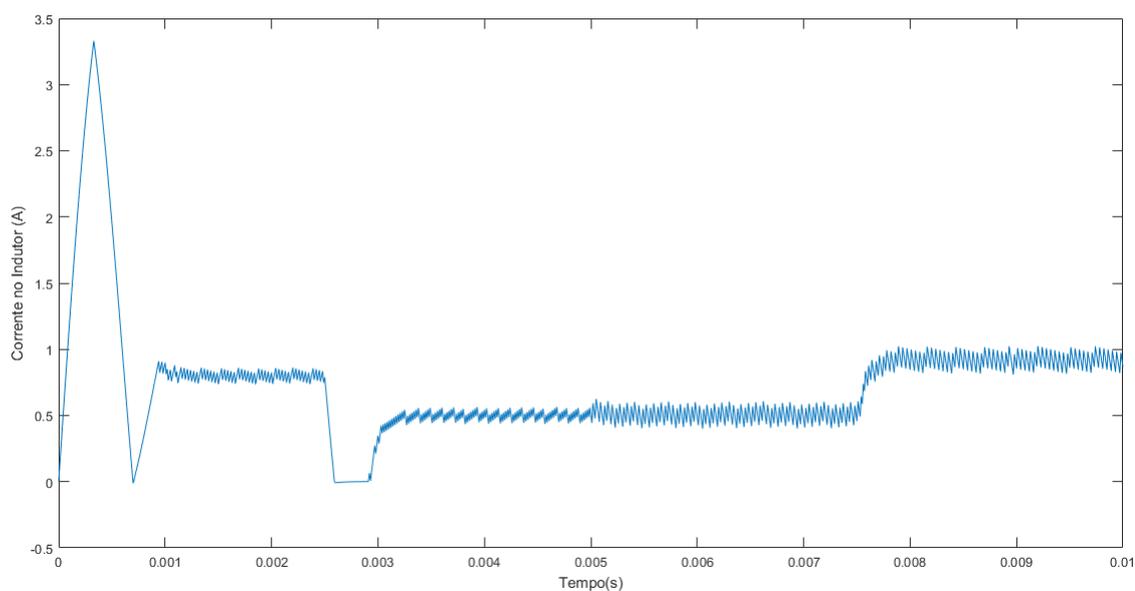
Figura 39 – Lei de controle do conversor Buck do terceiro caso.



Fonte: Da autora.

Na Figura 39, é notório a variação da ação de controle do conversor no terceiro caso. Além das variações informadas anteriormente, após a adição da resistência em paralelo, a frequência de chaveamento reduz, devido a alteração da tensão na saída.

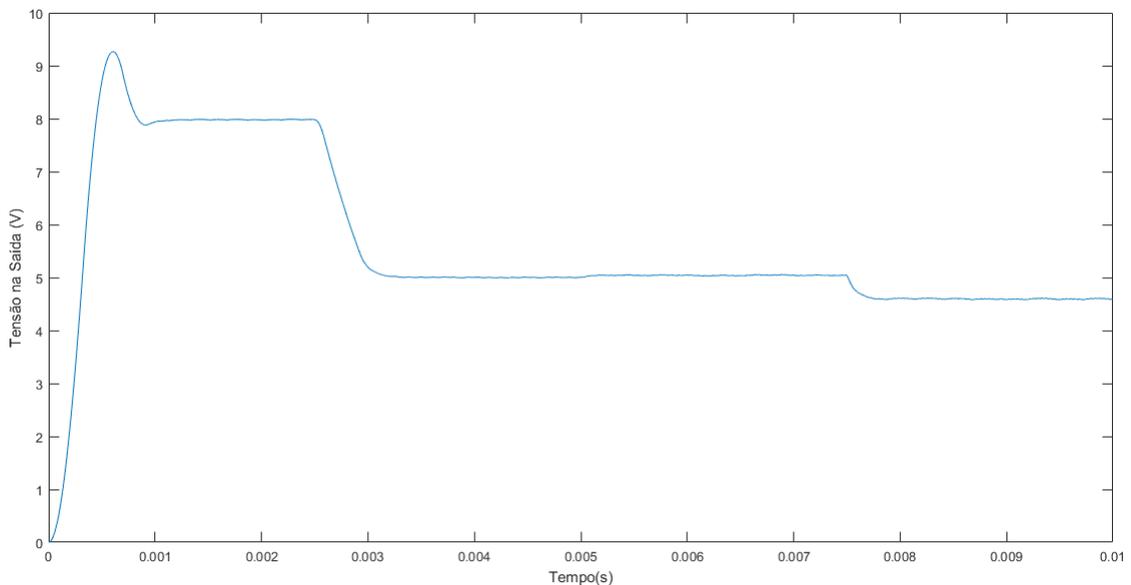
Figura 40 – Corrente no indutor do conversor Buck do terceiro caso.



Fonte: Da autora.

Na Figura 40, é apresentada a corrente no indutor do conversor no terceiro caso. Após 7,5 ms, a corrente aumenta, atingindo cerca de 1 A.

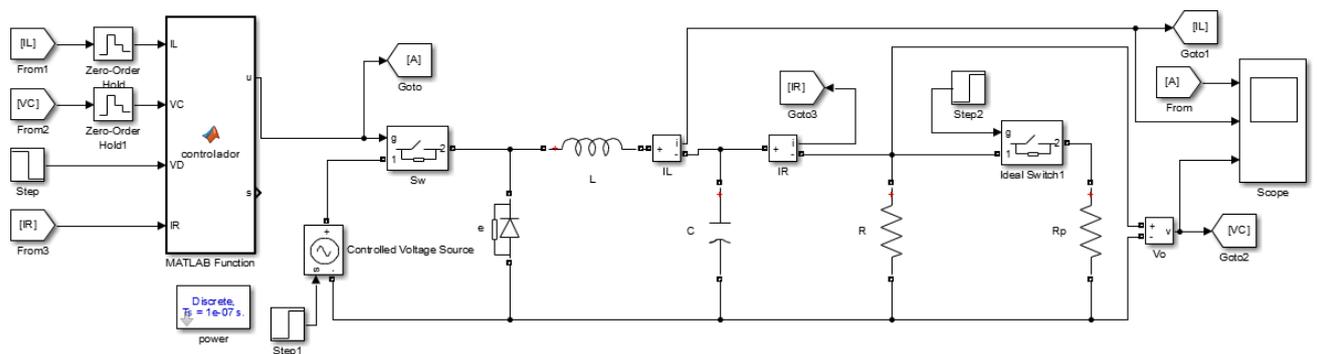
Figura 41 – Tensão na saída do conversor Buck do terceiro caso.



Fonte: Da autora.

Na Figura 41, é possível observar que o sistema apresenta erro em regime permanente da tensão na carga. Ou seja, a tensão na saída é diferente da tensão desejada, 5 V.

Figura 42 – Circuito montado no *Simulink* para o quarto caso.



Fonte: Da autora.

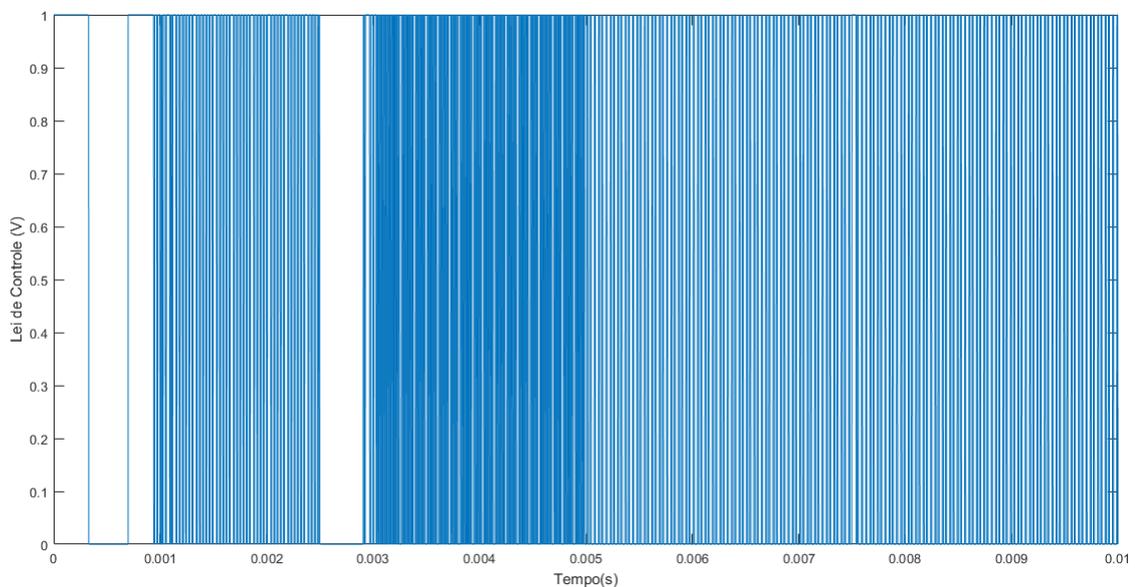
Como o controlador foi projetado para os valores informados anteriormente, a alteração da carga na saída, para 5Ω , faz com que o sistema não apresente o resultado desejado na saída. Sendo assim, de forma a obter um resultado satisfatório, foi necessário alterar meu sistema. Inicialmente, foi utilizada a corrente que passa no indutor como parâmetro para o controlador, pois em regime permanente a corrente média no indutor

é igual a corrente na carga. Entretanto, devido ao transitório, o sistema não consegue atingir a superfície. Sendo assim, a corrente no indutor não atinge o regime permanente e, com isso, não é apresentado o resultado desejado na saída. Então, uma alternativa foi acrescentar mais um parâmetro de entrada ao controlador: a corrente que vai para a carga, I_R . Na Figura 42, é apresentado o circuito do quarto caso, considerando essa alteração.

Nas Figuras 43, 44 e 45, são apresentados os resultados da simulação do quarto caso do conversor Buck. Em que, na Figura 43, é apresentada a lei de controle, na Figura 44, a corrente no indutor e, na Figura 45, a tensão na saída.

Na Figura 43, é possível notar a alteração da ação de controle do conversor no quarto caso. Mesmo após ao aumento da carga, a frequência de chaveamento se manteve.

Figura 43 – Lei de controle do conversor Buck do quarto caso.



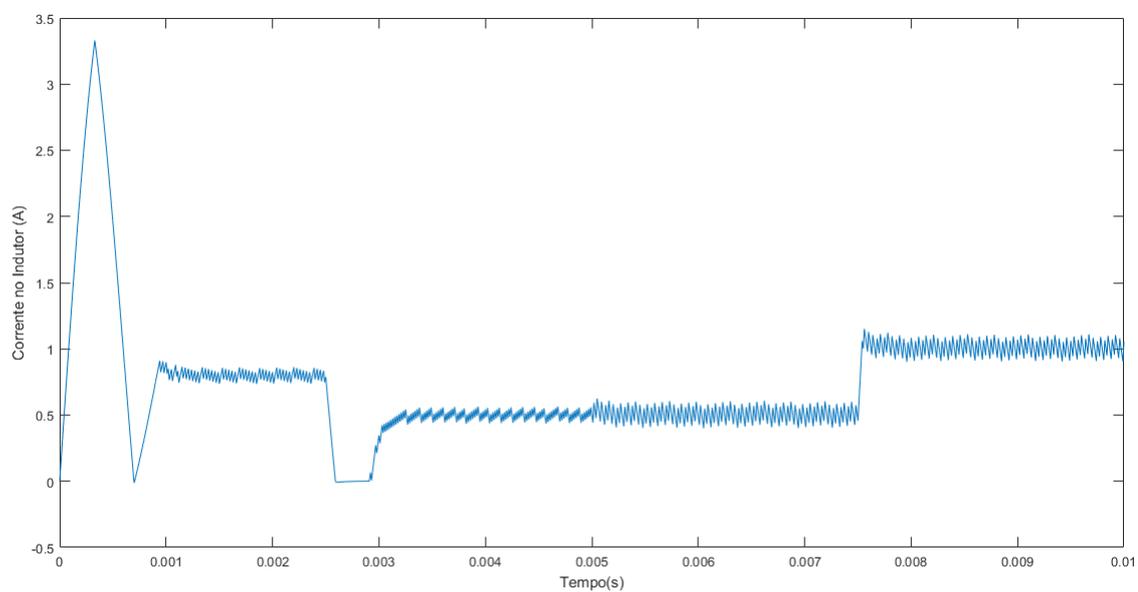
Fonte: Da autora.

Na Figura 44, é apresentada a corrente no indutor. Após 7,5 ms, ocorre um aumento na corrente, de forma a fornecer a tensão desejada para a carga.

Na Figura 45, é observado que a tensão na carga é a tensão desejada. Sendo assim, o aumento da carga não interferiu na tensão na saída, em regime permanente.

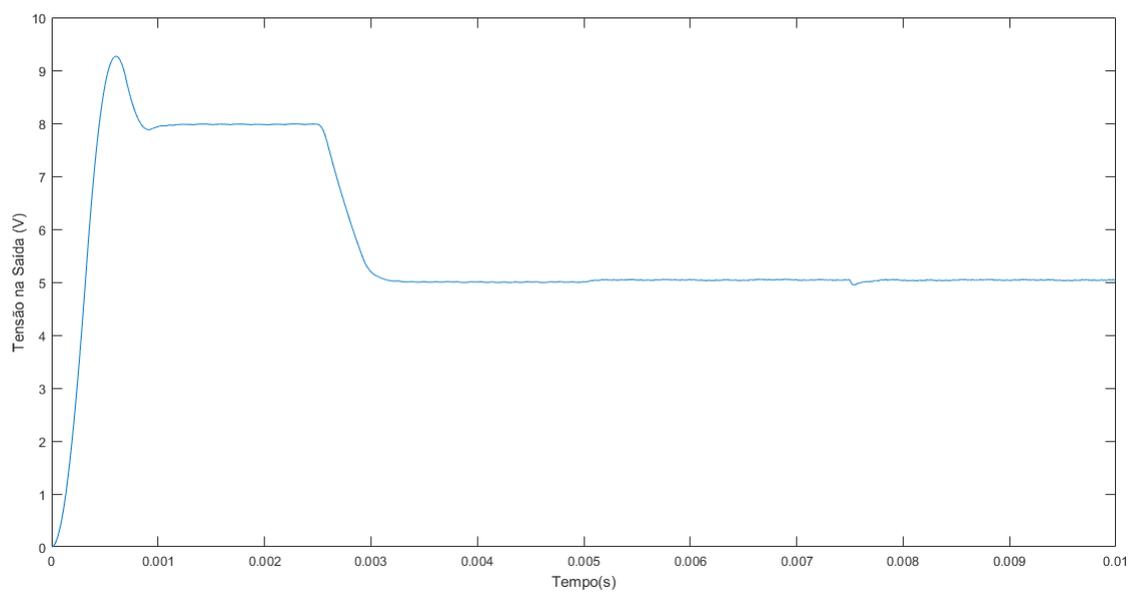
Com o novo parâmetro no controlador, é possível calcular o novo valor de R , caso haja uma alteração na carga de saída do conversor, e então atuar o controlador com o valor atual de carga. O circuito foi testado para modificações diferentes da carga e mesmo assim o controlador operou de maneira correta.

Figura 44 – Corrente no indutor do conversor Buck do quarto caso.



Fonte: Da autora.

Figura 45 – Tensão na saída do conversor Buck do quarto caso.



Fonte: Da autora.

5 Conclusão

Este trabalho baseia-se na estratégia de sistemas de controle de estrutura variável e modos deslizantes. Este estudo permitiu construir um panorama da análise de existência e estabilidade de sistemas CEVMD, além de possibilitar o projeto do controlador.

No Capítulo 1, introduziu-se a noção de sistemas chaveados a partir de definições e aplicações, onde também foi apresentado o desenvolvimento histórico da técnica.

No Capítulo 2, objetivou-se a apresentar as principais definições de CEVMD e utilizaram-se exemplos simulados de forma a apresentar as principais características do sistema. Nas Figuras 1, 2 e 3, é possível ver como as trajetórias são influenciadas de acordo com o vetor de controle utilizado. Na Figura 4, é possível notar como a frequência de chaveamento interfere na dinâmica da trajetória. Na Figura 5, é possível ver a influência que possíveis perturbações causam no sistema, após atingir a superfície de deslizamento. Por fim, a superfície de deslizamento precisa ser atrativa e é necessário que seja alcançada em um tempo finito, então a análise da função de Lyapunov do sistema é utilizada para verificar as condições para existência de um modo deslizante.

De forma a estudar os métodos de controle, no Capítulo 3, apresentou-se a descrição matemática de modos deslizantes e, com isso, métodos que descrevem o movimento durante o deslizamento. Finalmente, uma breve teoria sobre modos deslizantes de ordem superior e métodos de controle são denotadas, em que os métodos apresentados possibilitam a escolha de acordo com a necessidade e/ou informações disponíveis. Além disso, apresentaram-se técnicas para a seleção das superfícies de deslizamento, que possibilitam o projeto do controlador.

No Capítulo 4, apresentou-se a aplicação da técnica de CEVMD em três casos. No primeiro e segundo caso, Pêndulo invertido linear e Suspensão ativa, foram aplicados dois métodos, o controle equivalente e o controle *Super-Twisting*. Analisando as simulações, nota-se que utilizando o controle equivalente foi necessário menor período de amostragem do controlador para a simulação. Sendo assim, na prática, seria necessário um microcontrolador capaz de processar um número maior de bits em menos tempo. Ao contrário disso, o controle *Super-Twisting* atendeu perfeitamente com um período de amostragem maior do que o primeiro método, além de não apresentar trepidação no resultado.

Por fim no Capítulo 4, no terceiro caso, conversor Buck, apenas o método de controle equivalente foi aplicado, devido a frequência de chaveamento do método de controle *Super-Twisting*. Observando as simulações, o controlador estava atuando de maneira esperada, até a carga da saída sofrer uma alteração de 50%. Como o controlador foi projetado considerando $R = 10\Omega$, o antigo controle não foi suficiente para fornecer a corrente necessária para obter a tensão desejada na saída com o aumento da carga. E, por isso, foi necessário alterar o controlador para calcular o valor da carga em cada instante e,

com isso, obter a tensão desejada na saída. Sendo que, essa alteração, na prática, implicaria em acrescentar mais um sensor de corrente.

Sendo assim, o objetivo deste trabalho de conclusão de curso foi atingido, pois os métodos de CEVMD apresentaram excelentes resultados, mantendo sua resposta mesmo na presença de incertezas. Nessa monografia, é possível obter conhecimento necessário para aplicação da técnica de CEVMD. Além das definições de diversos métodos existentes, é possível verificar o uso de dois métodos em aplicações distintas. Sendo que o método de controle *Super-Twisting* foi superior ao método de controle equivalente, com exceção ao caso do conversor Buck no qual o método não foi aplicado. Tem-se para trabalhos futuros a aplicação prática dos métodos, de forma a analisar a eficiência dos métodos de acordo com a capacidade de processamento do microcontrolador utilizado.

Referências

- AGOSTINHO, A. C. *Controle por Modos Deslizantes Aplicado a Sistema de Posicionamento Dinâmico*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2009. 2
- ATKINSON, K.; HAN, W.; STEWART, D. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. [S.l.]: Wiley, 1 edition, 2009. ISBN 978-0-470-04294-6. 22
- CUNHA, F. B. *Análise e Controle de Sistemas de Estrutura Variável*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2002. 2
- DAMAZO, G. A. *Controle com Modos Deslizantes Aplicado em Sistemas com Atraso e Acesso Somente à Saída*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2008. 28, 29
- FERNANDES, U. B. *Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes Aplicado em Sistema de Suspensão Ativa*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2013. 37, 38
- LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems*, v. 19, n. 5, p. 59–70, Oct 1999. ISSN 1066-033X. 1
- OLIVEIRA, T. R. de. *Controle por Modos Deslizantes de Sistemas Incertos com direção de controle desconhecida*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006. 1, 2, 10, 13, 15, 19
- RIBEIRO, J. M. de S. *Controle Discreto com Modos Deslizantes em Sistema Incertos com Atraso no Sinal de Controle*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, 2006. 2
- SCHARLAU, C. C. *Controle de Sistemas Chaveados e Aplicações*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2013. 1
- SLOTINE, J.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991. ISBN 9780130408907. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=cwpRAAAAMAAJ>>. 22
- SOUZA, F. M. C. de. *Estudo de Sistemas de Controle a Estrutura Variável*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1973. 1
- TAN, S.; LAI, Y.; TSE, C. *Sliding Mode Control of Switching Power Converters: Techniques and Implementation*. CRC Press, 2011. ISBN 9781439830260. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5lvRBQAAQBAJ>>. 2
- UTKIN, V.; GULDNER, J.; SHI, J. *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems, Second Edition*. CRC Press, 2009. (Automation and Control Engineering). ISBN 9781420065619. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=8lrLBQAAQBAJ>>. 12, 23

A - Simulações do Pêndulo Invertido Linear

Cálculo da Superfície de Deslizamento

```

1 clear all;
2 clc;
3
4 A=[0 1 0 0;46.9 0 0 -0.1653;0 0 0 1;-4.5 0 0 0.00064];
5 B=[0;-7.193;0;2.1867];
6 %%%% Transformando para forma canonica controlavel %%%%
7 Ctb=ctrb(A,B);
8 A_2=(inv(Ctb)*A*Ctb)';
9 B_2=[0;0;0;1];
10 %%%% Encontrando a transformacao que leva para a forma canonica %%%%
11 %%%% T*A=A_2*T
12 %%%% T*B=B_2
13 Q=[kron(eye(4),A_2)-kron(A',eye(4));kron(B',eye(4))];
14 Y=[zeros(16,1);B_2];
15 vecT=linsolve(Q,Y);
16 T=reshape(vecT,4,4);
17
18 alpha=5;
19 s_4=1;
20 s_3=3*alpha;
21 s_2=3*alpha^2;
22 s_1=alpha^3;
23
24 S_aux=[s_1 s_2 s_3 s_4];
25 S=S_aux*T

```

Função do Modelo Pêndulo Invertido Linear

```

1 function xdot=pendulo_u(t,x,rho)
2 xdot=zeros(4,1);
3
4 xdot(1)=0*x(1)+x(2)+0*x(3)+0*x(4);
5 xdot(2)=46.9*x(1)+0*x(2)+0*x(3)-0.1653*x(4)-7.193*rho;
6 xdot(3)=0*x(1)+0*x(2)+0*x(3)+x(4);

```

```

7 xdot(4)=-4.5*x(1)+0*x(2)+0*x(3)+0.00064*x(4)+2.1867*rho;
8 end

```

Função do Método de Controle Equivalente para o Pêndulo Invertido Linear

```

1 clear all;
2 close all;
3 clc;
4
5 t=(0:0.001:5);
6 t_aux=0;
7 x10=[0.1 0 0 0];
8 rho=100;
9 S=[-2.6040    -0.4598    -1.7809    -1.0553];
10
11 figure(1);
12 xr=[0.5*ones(1,1.5/t(2)) -0.5*ones(1,1.5/t(2))];
13 u=zeros(1,length(t));
14 s=zeros(1,length(t));
15 xb=[x10];
16 r=zeros(1,length(t));
17 for i=1:length(t)-1
18 ta=t(i:i+1);
19 s(i)=S(end,1)*xb(end,1)+S(end,2)*xb(end,2)+S(end,3)*(xb(end,3)-xr(mod
      (i,length(xr))+1))+S(end,4)*xb(end,4);
20 r(i)=xr(mod(i,length(xr))+1);
21 u(i)=-rho*sign(s(i));
22 [T,Xa]=ode45(@(t,x)pendulo_u(t,x,u(i)),ta,xb(end,:));
23 t_aux=[t_aux;T(end)];
24 xb=[xb;Xa(end,:)];
25 end
26
27 subplot(1,2,1)
28 plot(t_aux,xb(:,1));
29 title('a) Controle Equivalente');
30 xlabel('t(s)');
31 ylabel('Angulo da haste do pendulo (rad)');
32 figure(2);
33 subplot(1,2,1)

```

```
34 plot(t_aux,xb(:,2));
35 title('a) Controle Equivalente');
36 xlabel('t(s)');
37 ylabel('Velocidade vertical da haste do pendulo (rad/s)');
38 figure(3)
39 subplot(1,2,1)
40 plot(t_aux,xb(:,3),'b',t,r,'r');
41 title('a) Controle Equivalente');
42 xlabel('t(s)');
43 ylabel('Posicao do carrinho sobre o trilho com referencia (m)');
44 figure(4);
45 subplot(1,2,1)
46 plot(t_aux,xb(:,4));
47 title('a) Controle Equivalente');
48 xlabel('t(s)');
49 ylabel('Velocidade do carrinho sobre o trilho (m/s)');
50
51 figure(5);
52 subplot(1,2,1)
53 stairs(t,u);
54 title('a) Controle Equivalente');
55 xlabel('t(s)');
56 ylabel('Vetor de Controle (Volts)');
57
58 figure(6);
59 subplot(1,2,1)
60 stairs(t,s);
61 title('a) Controle Equivalente');
62 xlabel('t(s)');
63 ylabel('Superficie');
64
65 figure(7);
66 stairs(t,u);
67 title('a) Controle Equivalente');
68 xlabel('t(s)');
69 ylabel('Vetor de Controle (Volts)');
```

Função do Método de Controle *Super-Twisting* para o Pêndulo Invertido Linear

```

1  t=(0:0.001:5);
2  t_aux=0;
3  x10=[0.1 0 0 0];
4  rho=100;
5  S=[-2.6040    -0.4598    -1.7809    -1.0553];
6  M=5;
7  a=rho;
8
9  figure(1);
10 xr=[0.5*ones(1,1.5/t(2)) -0.5*ones(1,1.5/t(2))];
11 u=zeros(1,length(t));
12 s=zeros(1,length(t));
13 xb=[x10];
14 v=0;
15 r=zeros(1,length(t));
16 for i=1:length(t)-1
17 ta=t(i:i+1);
18 s(i)=S(end,1)*xb(end,1)+S(end,2)*xb(end,2)+S(end,3)*(xb(end,3)-xr(mod
    (i,length(xr))+1))+S(end,4)*xb(end,4);
19 r(i)=xr(mod(i,length(xr))+1);
20 v=v-M*t(2)*sign(s(i));
21 u(i)=-a*sqrt(abs(s(i)))*sign(s(i))+v;
22 [T,Xa]=ode45(@(t,x)pendulo_u(t,x,u(i)),ta,xb(end,:));
23 t_aux=[t_aux;T(end)];
24 xb=[xb;Xa(end,:)];
25 end
26 subplot(1,2,2)
27 plot(t_aux,xb(:,1));
28 title('b) Controle Super-Twisting');
29 xlabel('t(s)');
30 ylabel('Angulo da haste do pendulo (rad)');
31 figure(2);
32 subplot(1,2,2)
33 plot(t_aux,xb(:,2));
34 title('b) Controle Super-Twisting');
35 xlabel('t(s)');
36 ylabel('Velocidade vertical da haste do pendulo (rad/s)');
37 figure(3);
38 subplot(1,2,2)
39 plot(t_aux,xb(:,3),'b',t,r,'r');
40 title('b) Controle Super-Twisting');
41 xlabel('t(s)');

```

```
42 ylabel('Posicao do carrinho sobre o trilho com referencia (m)');
43 figure(4);
44 subplot(1,2,2)
45 plot(t_aux,xb(:,4));
46 title('b) Controle Super-Twisting');
47 xlabel('t(s)');
48 ylabel('Velocidade do carrinho sobre o trilho (m/s)');
49
50 figure(5);
51 subplot(1,2,2)
52 stairs(t,u);
53 title('b) Controle Super-Twisting');
54 xlabel('t(s)');
55 ylabel('Vetor de Controle (Volts)');
56
57 figure(6);
58 subplot(1,2,2)
59 stairs(t,s);
60 title('b) Controle Super-Twisting');
61 xlabel('t(s)');
62 ylabel('Superficie');
```

B - Simulações da Suspensão Ativa

Cálculo da Superfície de Deslizamento

```

1 clear all;
2 clc;
3 K_s=900;
4 M_s=2.45;
5 B_s=7.5;
6 K_us=2500;
7 M_us=1;
8 B_us=5;
9
10 A=[0 1 0 -1;-K_s/M_s -B_s/M_s 0 B_s/M_s;0 0 0 1;K_s/M_s B_s/M_s -K_us
    /M_us -(B_s+B_us)/M_s];
11 B=[0;1/M_s;0;-1/M_us];
12 %%%% Transformando para forma canonica controlavel %%%%
13 Ctb=ctrb(A,B);
14 A_2=(inv(Ctb)*A*Ctb)';
15 B_2=[0;0;0;1];
16 %%%% Encontrando a transformacao que leva para a forma canonica %%%%
17 %%%% T*A=A_2*T
18 %%%% T*B=B_2
19 Q=[kron(eye(4),A_2)-kron(A',eye(4));kron(B',eye(4))];
20 Y=[zeros(16,1);B_2];
21 vecT=linsolve(Q,Y);
22 T=reshape(vecT,4,4);
23
24 alpha=10;
25 s_4=1;
26 s_3=3*alpha;
27 s_2=3*alpha^2;
28 s_1=alpha^3;
29
30 S_aux=[s_1 s_2 s_3 s_4];
31 S=S_aux*T

```

Função do Modelo da Suspensão Ativa

```

1 function xdot=suspensao_u(t,x,u)
2 K_s=900;
3 M_s=2.45;
4 B_s=7.5;
5 K_us=2500;
6 M_us=1;
7 B_us=5;
8
9 A=[0 1 0 -1;-K_s/M_s -B_s/M_s 0 B_s/M_s;0 0 0 1;K_s/M_s B_s/M_s -K_us
    /M_us -(B_s+B_us)/M_s];
10 B_1=[0;0;-1;B_us/M_us];
11 B_2=[0;1/M_s;0;-1/M_us];
12 if t < 1.5
13 u_1=0;
14 elseif (t >= 1.5) && (t < 1.7)
15 u_1=1;
16 else
17 u_1=0;
18 end
19 xdot=A*x+B_1*u_1+B_2*u;

```

Função do Método em Malha Aberta para a Suspensão Ativa

```

1 clear all;
2 close all;
3 clc;
4
5 t=[0 4];
6 t_aux=0;
7 x10=[0.1 0 0.1 0];
8 figure(1);
9 xb=[x10];
10
11 [T,Xa]=ode45(@(t,x)suspensao_u(t,x,0),t,xb(end,:));
12 t_aux=[t_aux;T];
13 xb=[xb;Xa];
14 subplot(2,2,1)
15 plot(t_aux,xb(:,1));
16 title('a');

```

```

17 xlabel('t(s)');
18 ylabel('Alteracao da suspensao (m)');
19 subplot(2,2,2)
20 plot(t_aux,xb(:,2));
21 title('b');
22 xlabel('t(s)');
23 ylabel('Velocidade vertical do corpo do veiculo (m/s)');
24 subplot(2,2,3)
25 plot(t_aux,xb(:,3));
26 title('c');
27 xlabel('t(s)');
28 ylabel('Alteracao do pneu com relacao a estrada (m)');
29 subplot(2,2,4)
30 plot(t_aux,xb(:,4));
31 title('d');
32 xlabel('t(s)');
33 ylabel('Velocidade da roda (m/s)');

```

Função do Método de Controle Equivalente para a Suspensão Ativa

```

1 clear all;
2 close all;
3 clc;
4
5 t=(0:0.001:4);
6 t_aux=0;
7 x10=[0.1 0 0.1 0];
8 rho=70;
9 S=[-7.1940    0.0267   -38.3644   -0.9891];
10
11 figure(1);
12 u=zeros(1,length(t));
13 s=zeros(1,length(t));
14 xb=[x10];
15
16 for i=1:length(t)-1
17 ta=t(i:i+1);
18 s(i)=S(end,1)*xb(end,1)+S(end,2)*xb(end,2)+S(end,3)*xb(end,3)+S(end
    ,4)*xb(end,4);
19 u(i)=-rho*sign(s(i));
20 [T,Xa]=ode45(@(t,x)suspensao_u(t,x,u(i)),ta,xb(end,:));

```

```
21 t_aux=[t_aux;T];
22 xb=[xb;Xa];
23 end
24
25 subplot(1,2,1)
26 plot(t_aux,xb(:,1));
27 title('a) Controle Equivalente');
28 xlabel('t(s)');
29 ylabel('Alteracao da suspensao (m)');
30 figure(2);
31 subplot(1,2,1)
32 plot(t_aux,xb(:,2));
33 title('a) Controle Equivalente');
34 xlabel('t(s)');
35 ylabel('Velocidade vertical do corpo do veiculo (m/s)');
36 figure(3);
37 subplot(1,2,1)
38 plot(t_aux,xb(:,3));
39 title('a) Controle Equivalente');
40 xlabel('t(s)');
41 ylabel('Alteracao do pneu com relacao a estrada (m)');
42 figure(4);
43 subplot(1,2,1)
44 plot(t_aux,xb(:,4));
45 title('a) Controle Equivalente');
46 xlabel('t(s)');
47 ylabel('Velocidade da roda (m/s)');
48
49 figure(5);
50 subplot(1,2,1)
51 stairs(t,u);
52 title('a) Controle Equivalente');
53 xlabel('t(s)');
54 ylabel('Vetor de controle (N)');
55
56 figure(6);
57 subplot(1,2,1)
58 stairs(t,s);
59 title('a) Controle Equivalente');
60 xlabel('t(s)');
61 ylabel('Superficie');
```

Função do Método de Controle *Super-Twisting* para a Suspensão Ativa

```

1  t=(0:0.001:4);
2  t_aux=0;
3  x10=[0.1 0 0.1 0];
4  a=70;
5  M=20;
6  S=[-7.1940    0.0267   -38.3644   -0.9891];
7
8  figure(1);
9  u=zeros(1,length(t));
10 s=zeros(1,length(t));
11 xb=[x10];
12 v=0;
13 for i=1:length(t)-1
14 ta=t(i:i+1);
15 s(i)=S(end,1)*xb(end,1)+S(end,2)*xb(end,2)+S(end,3)*xb(end,3)+S(end
    ,4)*xb(end,4);
16 v=v-M*t(2)*sign(s(i));
17 u(i)=-a*sqrt(abs(s(i)))*sign(s(i))+v;
18 [T,Xa]=ode45(@(t,x)suspensao_u(t,x,u(i)),ta,xb(end,:));
19 t_aux=[t_aux;T];
20 xb=[xb;Xa];
21 end
22
23 subplot(1,2,2)
24 plot(t_aux,xb(:,1));
25 title('b) Controle Super-Twisting');
26 xlabel('t(s)');
27 ylabel('Alteracao da suspensao (m)');
28 figure(2);
29 subplot(1,2,2)
30 plot(t_aux,xb(:,2));
31 title('b) Controle Super-Twisting');
32 xlabel('t(s)');
33 ylabel('Velocidade vertical do corpo do veiculo (m/s)');
34 figure(3);
35 subplot(1,2,2)
36 plot(t_aux,xb(:,3));
37 title('b) Controle Super-Twisting');

```

```
38 xlabel('t(s)');
39 ylabel('Alteracao do pneu com relacao a estrada (m)');
40 figure(4);
41 subplot(1,2,2)
42 plot(t_aux,xb(:,4));
43 title('b) Controle Super-Twisting');
44 xlabel('t(s)');
45 ylabel('Velocidade da roda (m/s)');
46
47 figure(5);
48 subplot(1,2,2)
49 stairs(t,u);
50 title('b) Controle Super-Twisting');
51 xlabel('t(s)');
52 ylabel('Vetor de controle (N)');
53
54 figure(6);
55 subplot(1,2,2)
56 stairs(t,s);
57 title('b) Controle Super-Twisting');
58 xlabel('t(s)');
59 ylabel('Superficie');
```

C - Simulações do Conversor Buck

Cálculo da Superfície de Deslizamento

```

1  close all;
2  clear all;
3  clc;
4
5  R=10;
6  L=1e-3;
7  C=100e-6;
8  v_e=12;
9
10 A=[0 -1/L;1/C -1/(R*C)];
11 B=[v_e/L;0];
12 %%% Transformando para forma canonica controlavel %%%
13 Ctb=ctrb(A,B);
14 A_2=(Ctb\A*Ctb)';
15 B_2=[0;1];
16 %% Encontrando a transformacao que leva para a forma canonica %%
17 %%% T*A=A_2*T
18 %%% T*B=B_2
19 Q=[kron(eye(2),A_2)-kron(A',eye(2));kron(B',eye(2))];
20 Y=[zeros(4,1);B_2];
21 vecT=linsolve(Q,Y);
22 T=reshape(vecT,2,2);
23
24 alpha=10000;
25 s_2=1;
26 s_1=alpha;
27
28 S_aux=[s_1 s_2];
29 S=S_aux*T

```

Função do Modelo do Conversor Buck

```

1  function xdot=buck_u(t,x,u)
2  R=10;

```

```

3 L=1e-3;
4 C=100e-6;
5 v_e=12;
6
7 A=[0 -1/L;1/C -1/(R*C)];
8 B=[v_e/L;0];
9 xdot=A*x+B*u;
10 end

```

Função do *Function Block* para o Conversor Buck no *Simulink*, utilizado nos primeiros casos

```

1 function u = controlador(I1,Vc,Vd)
2 R=10;
3 C=100e-6;
4 t=0.000001;
5 S=[8.3333e-05 7.5e-05];
6
7 persistent vd_ultimo;
8
9 if isempty(vd_ultimo)
10 vd_ultimo=0;
11 end
12
13
14 delta=Vd/R+C*(Vd-vd_ultimo)/t;
15 s=S(end,1)*(I1-delta)+S(end,2)*(Vc-Vd);
16 u=round(1/2-sign(s)/2);
17
18 vd_ultimo=Vd;
19 end

```

Função do *Function Block* para o Conversor Buck no *Simulink*, utilizado no último caso

```

1 function u = controlador(IL,VC,VD,IR)
2 R=10;
3 C=100e-6;

```

```
4 t=0.000001;
5 S=[8.3333e-05 7.5e-05];
6
7 if IR>0
8 R=VC/IR;
9 end
10
11 persistent vd_ultimo;
12
13 if isempty(vd_ultimo)
14 vd_ultimo=0;
15 end
16
17
18 delta=VD/R+C*(VD-vd_ultimo)/t;
19 s=S(end,1)*(IL-delta)+S(end,2)*(VC-VD);
20 u=round(1/2-sign(s)/2);
21
22 vd_ultimo=VD;
23 end
```