



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



AMANDA FIGUEIREDO GOMIDES
Orientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira
Coorientador: Prof. Dr. Eder Marinho Martins

UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Ouro Preto, MG
2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



AMANDA FIGUEIREDO GOMIDES

UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira

Coorientador: Prof. Dr. Eder Marinho Martins

Ouro Preto, MG
2025



FOLHA DE APROVAÇÃO

Amanda Figueiredo Gomides

Um estudo sobre o teorema de existência e unicidade

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de bacharela em Matemática

Aprovada em 10 de abril de 2025

Membros da banca

Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Eder Marinho Martins (coorientador) - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr. Rodrigo Geraldo Do Couto - Universidade Federal de Ouro Preto

Geraldo César Gonçalves Ferreira, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 14/05/2025



Documento assinado eletronicamente por **Geraldo Cesar Goncalves Ferreira, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 14/05/2025, às 10:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0887507** e o código CRC **D183550A**.

Agradecimentos

É muito difícil expressar em palavras o que o coração sente, mas aqui vai uma tentativa.

Agradeço a Deus por me permitir chegar até aqui. A caminhada não foi fácil, mas Ele me deu forças para continuar andando, mesmo quando nada parecia fazer sentido.

À minha família, entre tias(os), primas(os) e avós, que sempre torceram e acreditaram em mim e no meu potencial. O apoio de vocês foi essencial para chegar até aqui.

À minha mãe, Graça, por ser minha melhor amiga ao longo de todo esse percurso, sempre me incentivando a correr atrás dos meus sonhos, me apoiando nos momentos mais difíceis e vibrando comigo nas vitórias. Amo você de uma forma que jamais saberei expressar.

Ao meu pai, Washington, que mesmo de longe nunca deixou de se fazer presente. Obrigada por confiar em mim, te amo!

À Nazaré, ao Fidel, à Jade e à Judite, meus amores, que por meio de suas quatro patinhas, sempre me proporcionam alguns arranhões, mas também muito carinho. Prometo que lerei esta monografia em linguagem felina, para que entendam tudinho.

Aos amigos que trouxe de Senhora do Porto em meu coração, e aos que conheci em Ouro Preto: vocês são incríveis e são responsáveis por quem eu sou. Agradeço por todas as risadas e momentos felizes que vivemos juntos. Um agradecimento especial ao MateRanço, por deixar minha caminhada mais leve, intercalando aulas de matemática, partidas de Uno e conversa fiada.

À Sabrina, por todo o seu companheirismo e apoio nesta jornada. Obrigada por todos os abraços gostosos. Te amo!

À Universidade Federal de Ouro Preto, que por meio de cada professor e cada funcionário, me propôs um ensino de qualidade. Em especial, agradeço ao Geraldo, meu orientador, que me acompanha desde o início do curso com paciência, e que nunca desistiu de mim nos meus momentos nebulosos. Ao Eder, que além de um bom coorientador, é também um tutor brilhante e um exemplo de professor. Ao Rodrigo, que para minha felicidade, topou participar desta banca e trouxe boas contribuições. Ao Vinícius, pela ajuda no dia da banca e por ser uma inspiração como profissional. E ao Edney, que sempre teve uma palavra e um ombro amigos em momentos de dificuldade e desânimo.

Ao PETMAT, programa de excelência do qual tive a honra de participar como voluntária e como bolsista, e adquirir vários conhecimentos que ultrapassam as quatro paredes da sala de aula. Uma vez petiana, sempre petiana!

À República Bombocado, que mais do que uma casa, se tornou um Lar, para mim e para tantas outras mulheres incríveis, algumas das quais com quem tive a oportunidade de conviver

diariamente. Sempre continuarei querendo e adorando essa nossa amizade rara. Que seja doce!

Enfim, a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para essa realização, meu sincero Obrigada!

"Um passo à frente e você não está mais no mesmo lugar."
(Chico Science & Nação Zumbi)

Resumo

Nesta monografia estudamos as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) reais de ordem d , fornecendo uma visão geral que engloba definições, exemplos práticos, redução de ordem e os principais resultados sobre existência e unicidade de soluções. São apresentados exemplos como a Lei de Resfriamento de Newton e o Sistema Massa-Mola, que evidenciam a relevância das EDOs para modelar fenômenos reais. Em seguida, aprofunda-se o estudo do Teorema de Existência e Unicidade, evidenciando os requisitos necessários para a solução de uma EDO existir e ser única. O Teorema do Ponto Fixo de Banach e o Operador de Picard são ferramentas-chave nesse processo, permitindo garantir, de maneira rigorosa, a fundamentação teórica do resultado. Na parte final, a monografia traz um refinamento ao Teorema de Existência e Unicidade, removendo uma das condições inicialmente impostas no intervalo de existência, mas mantendo duas restrições essenciais para assegurar a unicidade e a existência da solução.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Teorema de Existência e Unicidade. Teorema do Ponto Fixo de Banach. Operador de Picard.

Abstract

This monograph studies Ordinary Differential Equations (ODEs) of order d , providing a comprehensive overview that includes definitions, practical examples, order reduction, and the main results on the existence and uniqueness of solutions. Examples such as Newton's Law of Cooling and the Mass-Spring System are presented, highlighting the relevance of ODEs in modeling real-world phenomena. Next, the study delves deeper into the Existence and Uniqueness Theorem, emphasizing the necessary conditions for an ODE to have a unique solution. Banach's Fixed Point Theorem and the Picard Operator are key tools in this process, ensuring a rigorous theoretical foundation for the result. In the final part, the monograph refines the Existence and Uniqueness Theorem by removing one of the initially imposed conditions on the existence interval while maintaining two essential restrictions to guarantee the uniqueness and existence of the solution.

Keywords: Ordinary Differential Equations. Existence and Uniqueness Theorem. Banach's Fixed Point Theorem. Picard Operator.

Sumário

1	Introdução	1
2	A EDO em \mathbb{R}^d	2
2.1	Definindo uma EDO	2
2.2	Alguns Exemplos de EDO	3
2.2.1	Lei de Resfriamento de Newton	3
2.2.2	Sistema Massa-mola	5
2.2.3	Um Exemplo Puro	7
2.3	Redução de Ordem	9
3	O Teorema de Existência e Unicidade	11
3.1	Teorema do Ponto Fixo de Banach	12
3.2	Lema da Constante Universal	14
3.3	Operador de Picard	15
3.4	Teorema de Existência e Unicidade	18
4	Teorema de Existência e Unicidade: Refinamento de Intervalo	24
5	Conclusão	29
	Referências	30
	Apêndices	31
	APÊNDICE A Resultados Adicionais	32

1 Introdução

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) representam uma importante ferramenta matemática para descrever fenômenos que variam no tempo, contemplando aplicações em Física, Engenharia, Biologia, Economia e muitas outras áreas. Em \mathbb{R}^d , o estudo das EDOs possibilita modelar sistemas dinâmicos de múltiplas variáveis, cuja evolução simultânea pode ser capturada por meio de derivadas que relacionam o estado atual de cada variável à sua taxa de variação.

O objetivo deste trabalho é apresentar os conceitos fundamentais das EDOs e analisar, de forma detalhada, os resultados clássicos sobre a existência e unicidade de soluções em \mathbb{R}^n sob uma perspectiva local.

O primeiro capítulo fornece inicialmente as definições de conceitos básicos sobre as EDOs. Como uma motivação para o estudo, trazemos três exemplos, sendo que dois desses apresentam uma interseção com objetos de estudo da Física: a Lei de Resfriamento de Newton, que ilustra a mudança de temperatura de um corpo ao longo do tempo, e o sistema massa-mola, que exemplifica o movimento de um corpo sujeito a forças elásticas e amortecimento. Em seguida, exploramos a técnica de redução de ordem, bastante utilizada para converter EDOs de ordem superior em sistemas de primeira ordem, facilitando sua análise teórica e resolução prática.

O segundo capítulo, parte central do trabalho, é dedicado ao Teorema de Existência e Unicidade, que estabelece sob quais condições há uma solução para determinada EDO e quando essa solução é única. Na demonstração, recorreremos ao Teorema do Ponto Fixo de Banach e ao Operador de Picard, que fornecem embasamento rigoroso para a garantia de existência e unicidade das soluções.

No terceiro capítulo, apresentamos um refinamento desse teorema, no qual se retira uma condição costumeiramente empregada no intervalo de existência, mantendo-se apenas duas restrições para assegurar unicidade e existência. Essa modificação mostra como a formulação original pode ser adaptada, trazendo um novo custo ao problema, mas sem comprometer a validade dos resultados, desde que respeitadas as novas hipóteses impostas.

Como principal base teórica e referencial, foi usado o livro "Equações Diferenciais: Uma abordagem de Sistemas Dinâmicos", de autoria de Marcelo Viana e José Espinar. Esta monografia tenta explorar, de maneira minuciosa sob um olhar da autora enquanto estudante de graduação, as seções 1.1 e 1.2 do capítulo 1, e a seção 2.1 do capítulo 2. Este livro está referenciado em (VIANA; ESPINAR, 2021). Outras obras fundamentais para a produção deste trabalho estão citadas ao longo do texto.

2 A EDO em \mathbb{R}^d

Alguns fenômenos existentes na natureza são observados em função do tempo: árvores começam como sementes e, dentro de anos, produzem seus frutos; um prato de sopa quente se torna um prato de sopa frio em minutos. Seja em questão de séculos ou de milésimos de segundo, os eventos podem sofrer alterações consideráveis ao longo do tempo.

Compreender como certos fenômenos evoluem ao longo do tempo é um dos grandes interesses da matemática. Para isso, pesquisadores desenvolvem diversos métodos e ferramentas que permitem descrever e antecipar o comportamento de processos naturais ou artificiais. Um dos principais instrumentos utilizados nesse contexto são as Equações Diferenciais Ordinárias, amplamente empregadas na modelagem de fenômenos que envolvem variações contínuas no tempo.

2.1 Definindo uma EDO

Consideremos $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{(1+kd)}$ um aberto, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua e $t \in \mathbb{R}$.

Definição 2.1.1. *Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação que relaciona determinada função com suas derivadas. Podemos expressar da seguinte forma:*

$$x^{(k)}(t) = F(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(k-1)}(t)), \quad (2.1)$$

em que $x, x^{(1)}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^d$.

O inteiro $k \geq 1$ é chamado *ordem* da EDO e é o maior expoente das derivadas, enquanto o inteiro $d \geq 1$ é chamado *dimensão* da EDO. Em questão de notações, neste trabalho usaremos frequentemente $x^{(1)} = x'$ e $x^{(2)} = x''$. De modo geral a n -ésima derivada será denotada por $x^{(n)}$.

Definição 2.1.2. *Dizemos que a aplicação de classe C^k dada por $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma **solução** da EDO quando obedece às seguintes regras:*

(1) I é um intervalo aberto;

(2) $v(t) = \left(t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1}\gamma}{dt^{k-1}} \right) \in \mathcal{U}$ para todo $t \in I$;

(3) $\frac{d^k\gamma}{dt^k} = F(v(t))$ para todo $t \in I$.

É comum que em certas situações, hajam algumas informações das EDOs sobre pontos específicos. Por exemplo, ao analisar EDOs que modelam fenômenos ao longo de determinado

tempo, a situação inicial do sistema observado possuirá grande influência em como o sistema se encontrará depois de um tempo. Isso nos leva às seguintes definições:

Definição 2.1.3. *O problema*

$$\begin{cases} x^{(k)}(t) = F(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(k-1)}(t)) \\ x(t_0) = \xi_0, x'(t_0) = \xi_1, \dots, x^{(k-1)}(t_0) = \xi_{k-1} \end{cases} \quad (2.2)$$

é denominado **Problema de Valor Inicial (PVI) com condições iniciais sobre t_0** , em que $t_0 \in I$ e $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Definição 2.1.4. Dizemos que a aplicação de classe C^k dada por $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma **solução do PVI** quando é uma solução da EDO e atende às condições iniciais impostas em (2.2)

2.2 Alguns Exemplos de EDO

2.2.1 Lei de Resfriamento de Newton

Este exemplo foi inspirado no Exemplo 1.24 do livro (SANTOS, 2022). Vamos explorar melhor o exemplo do prato de sopa.

Imagine um prato de sopa quente. Sua temperatura inicialmente foi medida em 95°C e, passado 1 minuto, ela se encontra em 90°C . Se a temperatura ambiente da cozinha é de 24°C , em quanto tempo essa sopa registrará uma temperatura de 50°C ?

Para responder a essa pergunta, utilizamos a Lei de Resfriamento de Newton. Esta diz que a taxa de variação de temperatura de um corpo com relação ao tempo é proporcional à diferença entre a temperatura atual do corpo e a temperatura constante do ambiente. Matematicamente, isso é descrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \\ T(0) = T_0 \end{cases}, \quad (2.3)$$

em que $T = T(t)$ é a temperatura do prato no instante t , T_a é a temperatura ambiente, T_0 é a temperatura inicial e k é uma constante, chamada *constante de resfriamento*.

Vamos substituir os dados da pergunta no PVI (2.3). Tem-se

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T - 24) \\ T(0) = 95, T(1) = 90 \end{cases}$$

Assuma $T \neq 24$. Dividindo a primeira equação por $T - 24$, obtemos

$$\frac{1}{T - 24} \frac{dT}{dt} = k.$$

Integrando ambos os lados com relação a t , temos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{T-24} \frac{dT}{dt} dt &= \int k dt \\ \int \frac{1}{T-24} dT &= \int k dt \\ \ln |T-24| &= kt + c_1 \\ e^{\ln |T-24|} &= e^{kt+c_1} \\ |T-24| &= e^{kt+c_1} \\ T-24 &= \pm e^{kt} e^{c_1}.\end{aligned}$$

Se chamamos $\pm e^{c_1} = c$, em que $c \in \mathbb{R}$, temos

$$T(t) = ce^{kt} + 24 \quad (2.4)$$

como solução. Então, voltando em (2.2.1):

- $T(0) = 95$
Se $t = 0$, temos $ce^{k \cdot 0} + 24 = 95 \Rightarrow c + 24 = 95$. Logo, $c = 71$.
- $T(1) = 90$
Se $t = 1$, temos $ce^{k \cdot 1} + 24 = 90$. Como $c = 71$, temos $71e^k + 24 = 90 \Rightarrow e^k = \frac{66}{71}$.
Portanto, $k = \ln\left(\frac{66}{71}\right)$.

Reescrevendo a equação (2.4), temos:

$$\begin{aligned}T(t) &= 71e^{\ln\left(\frac{66}{71}\right)t} + 24 \\ &= 71 \cdot \left(\frac{66}{71}\right)^t + 24.\end{aligned} \quad (2.5)$$

A equação (2.5) nos dá a relação entre a temperatura da sopa e o tempo decorrido. Como queremos encontrar o tempo que leva para que a sopa alcance a temperatura de 50°C , basta substituir:

$$\begin{aligned}50 &= 71 \cdot \left(\frac{66}{71}\right)^t + 24 \\ \frac{26}{71} &= \left(\frac{66}{71}\right)^t \\ \ln\left(\frac{26}{71}\right) &= t \cdot \ln\left(\frac{66}{71}\right) \\ t &= \frac{\ln\left(\frac{26}{71}\right)}{\ln\left(\frac{66}{71}\right)} \approx 13,76.\end{aligned}$$

Portanto, encontramos $t = 13,76$. Convertendo para o sistema de segundos, podemos dizer que leva cerca de 13 minutos e 46 segundos para que o prato de sopa alcance a temperatura de 50°C .

Como chegamos na solução geral do problema em (2.5), é possível encontrar a temperatura $T(t)$ em qualquer período t . O gráfico apresentado na Figura 2.2.1 mostra o resfriamento da sopa com relação ao tempo t em minutos.

Figura 2.2.1 – Resfriamento da sopa ao longo do tempo. Quando $t = 13,76$, $T(t) = 50^\circ\text{C}$.

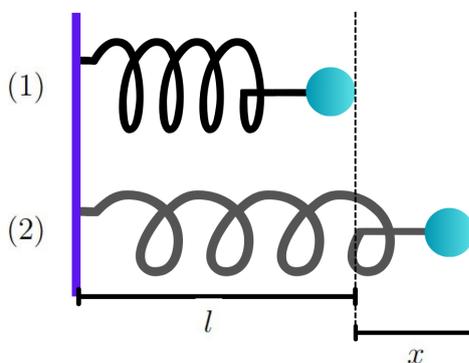


Fonte: a autora, 2025.

2.2.2 Sistema Massa-mola

Considere um sistema no qual uma esfera de massa m está presa em uma mola fixa em uma parede. Quando em repouso, essa mola possui comprimento l , mas ela pode ser contraída ou alongada na direção de seu eixo. À deformação em um dado momento t , chamemos $x(t)$.

Figura 2.2.2 – Na situação (1), a mola encontra-se em repouso. Na situação (2), ela possui uma deformação x .



Fonte: a autora, 2025.

Existe uma lei da física que diz respeito a esse tipo de situação. Enunciada por Robert Hooke, ela diz que a força da tensão exercida pela mola sobre a partícula é proporcional à deformação relativamente à posição de equilíbrio da mola.

Para escrever essa lei matematicamente, consideremos f a força de tensão e c a constante de elasticidade da mola - essa, que é definida pela geometria e pela composição da mola -, que é uma constante positiva. Então, a lei de Hooke diz que

$$f = -cx.$$

Por outro lado, existe outra importante lei que diz respeito a forças. A 2ª lei de Newton diz que a força é igual ao produto da massa e da aceleração. Como $x(t)$ representa um tipo de deslocamento com relação ao tempo nesse problema, $x''(t)$ é a aceleração, o que, na 2ª lei de Newton, nos dará a relação

$$f = mx''.$$

Associando essas duas igualdades, obtemos $mx'' = -cx$, ou

$$x'' = -\frac{c}{m}x.$$

Vamos mostrar que essa equação é tal que a combinação linear de duas soluções quaisquer é uma solução. Para isso, suponha γ_1 e γ_2 soluções, e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

- Se γ_1 é solução, então $\gamma_1''(t) = -\frac{c}{m}\gamma_1(t)$;
- Se γ_2 é solução, então $\gamma_2''(t) = -\frac{c}{m}\gamma_2(t)$.

Daí, segue:

$$\begin{aligned} (a_1\gamma_1(t) + a_2\gamma_2(t))'' &= (a_1\gamma_1(t))'' + (a_2\gamma_2(t))'' \\ &= a_1\gamma_1''(t) + a_2\gamma_2''(t) \\ &= -a_1\frac{c}{m}\gamma_1(t) - a_2\frac{c}{m}\gamma_2(t) \\ &= -\frac{c}{m}(a_1\gamma_1(t) + a_2\gamma_2(t)). \end{aligned}$$

Então, basta encontrar duas soluções quaisquer, para encontrarmos uma boa gama de outras soluções. Observe que

$$\gamma_1(t) = \text{sen}\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right)$$

é solução do problema. De fato,

$$\gamma_1''(t) = -\frac{c}{m}\text{sen}\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) = -\frac{c}{m}\gamma_1(t).$$

De forma análoga,

$$\gamma_2(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right)$$

também é solução, pois

$$\gamma_2''(t) = -\frac{c}{m} \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) = -\frac{c}{m} \gamma_2(t).$$

Então, um bom tipo de solução para o sistema massa-mola é a função $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\gamma(t) = a \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) + b \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right)$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Com essa solução, é possível saber a deformação a cada tempo t .

2.2.3 Um Exemplo Puro

Até agora tratamos de situações cuja motivação é alguma lei já conhecida da física, de forma que os exemplos são ilustrados por alguma situação da vida real. Embora muitos desses exemplos realmente façam referência ao mundo real, trata-se de uma área pertencente à Matemática Pura, o que implica que alguns exemplos possam não ter aplicação prática direta.

Exemplo 2.2.1. *Resolva a equação*

$$x' = F(t, x),$$

onde $F(t, x) = x(x - 1)$.

Antes de tudo, como $x = x(t)$, podemos utilizar a notação $\frac{dx}{dt}$ para nos referir a x' . Assim, resolver essa equação, podemos utilizar o método da separação de variáveis. Procedendo desta forma e considerando $x \neq 0$ e $x \neq 1$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(x - 1) \\ \frac{1}{x(x - 1)} dx &= 1 dt \\ \int \frac{1}{x(x - 1)} dx &= \int 1 dt \\ \int \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x} dx &= \int 1 dt \\ \ln|x - 1| - \ln|x| + c_1 &= t + c_2 \\ \ln\left|\frac{x - 1}{x}\right| &= t + c_2 - c_1. \end{aligned}$$

Como c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias, podemos definir $c_2 - c_1 = c$, e então chegamos em

$$\left|\frac{x - 1}{x}\right| = e^{t+c}.$$

Vamos analisar o que ocorre nos valores possíveis para $x(t)$:

- Se $x(t) < 0$, temos $\left| \frac{x-1}{x} \right| = \frac{x-1}{x} \mathbf{e}$, então:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x} &= e^{t+c} \\ x-1 &= xe^{t+c} \\ x-1-xe^{t+c} &= 0 \\ x-xe^{t+c} &= 1 \\ x(1-e^{t+c}) &= 1 \\ x &= \frac{1}{1-e^{t+c}}. \end{aligned}$$

Daí, para $x(t) < 0$, devemos ter $\frac{1}{1-e^{t+c}} < 0$, o que implica $1-e^{t+c} < 0$ e consequentemente $e^{t+c} > 1$, que ocorre se e somente se $t > -c$.

- Se $0 < x(t) < 1$, temos $\left| \frac{x-1}{x} \right| = -\frac{x-1}{x} \mathbf{e}$, então:

$$\begin{aligned} -\frac{x-1}{x} &= e^{t+c} \\ x-1 &= -xe^{t+c} \\ x-1+xe^{t+c} &= 0 \\ x+xe^{t+c} &= 1 \\ x(1+e^{t+c}) &= 1 \\ x &= \frac{1}{1+e^{t+c}}. \end{aligned}$$

Daí, para $0 < x(t) < 1$, devemos ter $0 < \frac{1}{1+e^{t+c}} < 1$. Observe que $e^{t+c} > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que implica que $1+e^{t+c} > 1$ também para todo $t \in \mathbb{R}$. Isso garante que $0 < \frac{1}{1+e^{t+c}} < 1$ é verdadeiro para todo $t \in \mathbb{R}$.

- Se $x(t) > 1$, temos $\left| \frac{x-1}{x} \right| = \frac{x-1}{x} \mathbf{e}$, então:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x} &= e^{t+c} \\ x-1 &= xe^{t+c} \\ x-1-xe^{t+c} &= 0 \\ x-xe^{t+c} &= 1 \\ x(1-e^{t+c}) &= 1 \\ x &= \frac{1}{1-e^{t+c}}. \end{aligned}$$

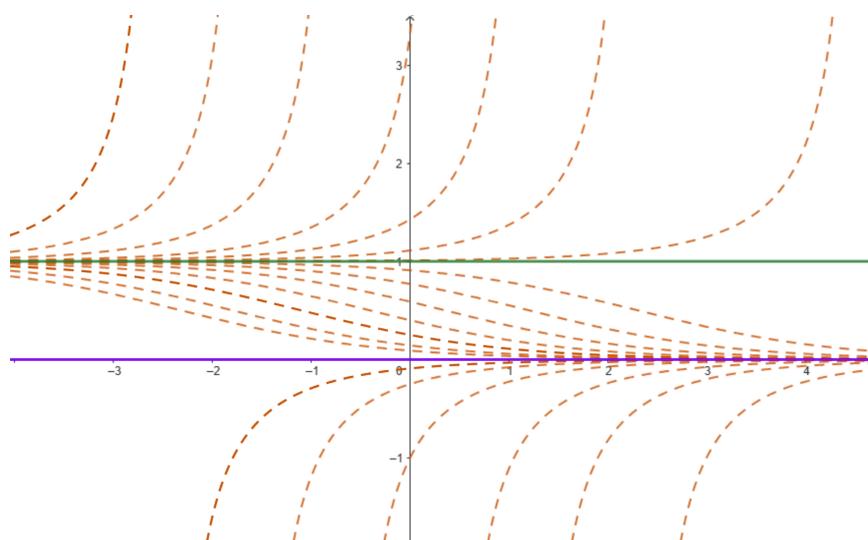
Daí, para $x(t) > 1$, devemos ter $\frac{1}{1-e^{t+c}} > 1$, o que implica $1-e^{t+c} < 1$ e consequentemente $e^{t+c} > 0$, que ocorre se e somente se $t \neq -c$.

Assim, resumidamente, temos as seguintes soluções

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{1 - e^{t+c}} & \text{se } t \in (-\infty, -c) \cup (-c, \infty); \\ \frac{1}{1 + e^{t+c}} & \text{se } t \in \mathbb{R} \end{cases}. \quad (2.6)$$

É importante lembrar que para resolver esse problema usando o método da separação de variáveis, precisamos considerar $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Porém, ambas satisfazem o problema quando substituídas nele, o que as torna soluções. A Figura 2.2.3 mostra o gráfico formado por algumas das soluções, inclusive as funções $x \equiv 0$ e $x \equiv 1$.

Figura 2.2.3 – Algumas soluções do Exemplo 2.2.1.



Fonte: a autora, 2025.

2.3 Redução de Ordem

Em geral, equações diferenciais ordinárias (EDOs) de ordem superior ($k > 1$) definidas em espaços multidimensionais como \mathbb{R}^d apresentam desafios adicionais para análise direta, devido à complexidade das soluções e à dificuldade de aplicação imediata dos principais resultados teóricos, tais como existência, unicidade de soluções.

Para contornar essas dificuldades, utiliza-se frequentemente a técnica denominada *redução de ordem*, que consiste em transformar uma EDO de ordem k definida em \mathbb{R}^d em um sistema equivalente de k equações diferenciais ordinárias de primeira ordem definidas em um espaço vetorial ampliado. Mais precisamente, uma equação diferencial de ordem k em \mathbb{R}^d pode ser reescrita como um sistema de primeira ordem no espaço \mathbb{R}^{kd} . Essa transformação permite explorar diretamente toda a teoria já consolidada para sistemas de primeira ordem, simplificando significativamente o estudo qualitativo e quantitativo das soluções.

Formalmente, dada uma EDO de ordem k em \mathbb{R}^d :

$$y^{(k)}(t) = F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(k-1)}(t)),$$

com $y(t) \in \mathbb{R}^d$, pode-se definir novas variáveis intermediárias para transformar o problema em um sistema equivalente de primeira ordem. Por exemplo, considere as seguintes variáveis intermediárias:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), \\ x_2(t) &= y'(t), \\ x_3(t) &= y''(t), \\ &\vdots \\ x_k(t) &= y^{(k-1)}(t). \end{aligned}$$

Desse modo, obtém-se o seguinte sistema de primeira ordem em \mathbb{R}^{kd} :

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t), \\ x_2'(t) &= x_3(t), \\ &\vdots \\ x_{k-1}'(t) &= x_k(t), \\ x_k'(t) &= F(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)). \end{aligned}$$

Trazemos aqui um exemplo da redução de ordem. Considere a seguinte equação diferencial ordinária vetorial de segunda ordem em \mathbb{R}^3 :

$$y''(t) + Ay'(t) + By(t) = 0,$$

em que A e B são matrizes constantes 3×3 , e $y(t) \in \mathbb{R}^3$.

Ao introduzir as variáveis intermediárias

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t),$$

obtém-se o sistema equivalente de primeira ordem no espaço ampliado \mathbb{R}^6 :

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = -Ax_2(t) - Bx_1(t). \end{cases}$$

Dessa maneira, toda a teoria desenvolvida para sistemas de primeira ordem torna-se aplicável, facilitando a análise qualitativa, como estudos de estabilidade e comportamento assintótico das soluções, além de permitir o uso direto de ferramentas analíticas e numéricas já consolidadas para esses sistemas.

3 O Teorema de Existência e Unicidade

No estudo das Equações Diferenciais Ordinárias e dos Problemas de Valor Inicial, é comum nos depararmos com o seguinte questionamento: todo PVI tem solução? Se sim, quantas soluções existem? Para introduzir esse assunto, vamos analisar o seguinte exemplo:

Exemplo 3.0.1. Resolva a equação $x' = F(t, x)$, em que $F(t, x) = \sqrt{|x|}$, $t \in \mathbb{R}$.

A equação acima é separável, logo usando a notação $x' = \frac{dx}{dt}$ e como $\sqrt{|x|} = |x|^{\frac{1}{2}}$ podemos resolvê-la assim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}} dx &= 1 dt \\ |x|^{-\frac{1}{2}} dx &= 1 dt \\ \int |x|^{-\frac{1}{2}} dx &= \int 1 dt \\ 2|x|^{\frac{1}{2}} + c_1 &= t + c_2 \\ 2\sqrt{|x|} &= t + c_2 - c_1 \end{aligned}$$

Tomando $c = c_2 - c_1$, temos

$$\begin{aligned} 2\sqrt{|x|} &= t + c \\ \sqrt{|x|} &= \frac{t + c}{2} \\ |x| &= \left(\frac{t + c}{2}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Obtemos, então, $x = \pm \left(\frac{t+c}{2}\right)^2$ como solução da equação. Note que isso vale apenas se considerarmos $x \neq 0$ para todo t no domínio da solução.

Mas nesse exemplo, precisamos nos ater a um pequeno detalhe: $x \equiv 0$ também é solução da equação! Para verificar isto, basta substituir na equação: de fato,

$$\frac{d0}{dt} = 0 = \sqrt{|0|}.$$

Podemos concluir então que as funções

$$x(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^2, \quad \text{e} \quad x(t) \equiv 0$$

são soluções da equação diferencial

$$x'(t) = \sqrt{|x(t)|}$$

com condição inicial $x(0) = 0$.

Similarmente

$$x(t) = -\left(\frac{t}{2}\right)^2, \quad \text{e} \quad x(t) \equiv 0$$

Essas soluções evidenciam que o problema de valor inicial não possui solução única, mesmo com a função $F(t, x) = \sqrt{|x|}$ sendo contínua.

Quais condições devemos ter para que não tenhamos duas ou mais soluções passando pelo mesmo ponto? Neste capítulo, veremos um importante resultado na área das Equações Diferenciais que responde, em parte, a essa pergunta - o Teorema de Existência e Unicidade. Para enunciar e demonstrar esse resultado, primeiro traremos algumas definições e resultados auxiliares, dispostos nas três primeiras seções deste capítulo.

3.1 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Nesta sessão, demonstraremos o Teorema do Ponto fixo de Banach. Começaremos trazendo algumas definições que nos permitirão chegar ao teorema.

Para as seguintes definições, consideramos $X \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto não vazio.

Definição 3.1.1. *Seja $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que d é uma **métrica em X** se, para $x, y, z \in X$ quaisquer, d satisfaz as seguintes condições:*

- $d(x, y) \geq 0$, e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = x$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 3.1.2. *Uma sequência $(x_n) \in X$ é dita **sequência de Cauchy** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, dados $x_j, x_k \in (x_n)$, vale*

$$d(x_j, x_k) < \varepsilon$$

para todo $j, k > N$.

Definição 3.1.3. *Um espaço métrico (X, d) é dito **completo** quando toda sequência de Cauchy em X converge para algum elemento $x_0 \in X$.*

Definição 3.1.4. *Dizemos que $T : X \rightarrow X$ é uma **contração** se existe $\lambda < 1$ tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$. A λ , damos o nome de **taxa de contração**.

Essas definições nos permitem enunciar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, conforme se segue:

Teorema 3.1.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Se (X, d) é um espaço métrico completo e $T : X \rightarrow X$ uma contração cuja taxa de contração é λ , então existe um único $x_0 \in X$ tal que $T(x_0) = x_0$. Além disso, para todo $x \in X$ e para todo $n \geq 0$,*

$$d(x_0, T^n(x)) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(T(x), x). \quad (3.2)$$

O ponto x_0 é chamado **ponto fixo** e em particular, para todo $x \in X$, $(T^n(x))_n$ converge para x_0 quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. A primeira parte desta demonstração está focada em mostrar que existe x_0 tal que $T(x_0) = x_0$. Começamos definindo $m > n \geq 0$ inteiros. Para $x \in X$ qualquer, temos:

$$\begin{aligned} d(T^m(x), T^n(x)) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} d(T^{i+1}(x), T^i(x)) \leq \sum_{i=n}^{m-1} \lambda d(T^i(x), T^{i-1}(x)) \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \lambda^2 d(T^{i-1}(x), T^{i-2}(x)) \leq \dots \leq \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \lambda^n d(T^{i-n+1}(x), T^{i-n}(x)) \leq \\ &\leq \sum_{i=n}^m \lambda^i d(T(x), x) = \frac{\lambda^n(\lambda^n - 1)}{\lambda - 1} d(T(x), x) = \\ &= \frac{\lambda^n(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda} d(T(x), x) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(T(x), x). \end{aligned}$$

Quando $n \rightarrow \infty$, $\frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \rightarrow 0$. Portanto, $(T^n(x))_n$ é uma sequência de Cauchy, e como (X, d) é completo, $(T^n(x))_n$ é convergente.

Tomemos

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x).$$

Como T é contínua, temos

$$T(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1}(x) = x_0.$$

Assim, mostramos a existência de x_0 tal que $T(x_0) = x_0$.

Agora, mostraremos que x_0 é único. Para isso, tome $y_0 \in X$ tal que $T(y_0) = y_0$. Temos:

$$d(x_0, y_0) = d(T(x_0), T(y_0)) \leq \lambda d(x_0, y_0).$$

Como $\lambda < 1$, temos $d(x_0, y_0) = \lambda d(x_0, y_0) = 0$. Como d é uma métrica, isso ocorre se, e somente se, $y_0 = x_0$. Portanto, x_0 é único.

Por fim, precisamos provar (3.2). Para isso, note que se $m \rightarrow \infty$, então $T^m(x_0) \rightarrow x_0$. Portanto,

$$d(x_0, T^m(x_0)) = d(T^m(x_0), T^m(x_0)) \leq \frac{\lambda^m}{1 - \lambda^m} d(T(x), x).$$

□

3.2 Lema da Constante Universal

Nesta sessão, demonstramos o lema, que aqui chamamos de "Lema da constante universal". Esse lema será essencial para a demonstração de que o Operador de Picard está bem definido, que veremos na Sessão 3.3.

Começaremos com a seguinte definição:

Definição 3.2.1. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. A aplicação contínua $F : X \rightarrow Y$ é dita **lipschitziana** se existe $C > 0$ tal que, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$, tem-se*

$$d_Y(F(x_1), F(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2).$$

Definição 3.2.2. *Dizemos que a aplicação contínua $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ é **localmente lipschitziana em x** se para todo $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ existem $\delta = \delta(t_0, x_0) > 0$ e $C = C(t_0, x_0) > 0$ tais que $B[t_0, \delta] \times B[x_0, \delta] \subset \mathcal{U}$ e*

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq C \|x_1 - x_2\|$$

para todo $t \in B[t_0, \delta]$ e quaisquer $x_1, x_2 \in B[x_0, \delta]$.

Apenas a título de compreender essa definição, trazemos a Figura 3.2.1. Nela, $(t, x_1), (t, x_2) \in B[t_0, \delta] \times B[x_0, \delta]$. O que a Definição 3.2.2 nos diz é que se a distância entre as imagens da função F aplicada nos pontos (t, x_1) e (t, x_2) é menor do que o valor de uma constante $C > 0$ multiplicado pela distância desses mesmos pontos, então F é localmente lipschitziana.

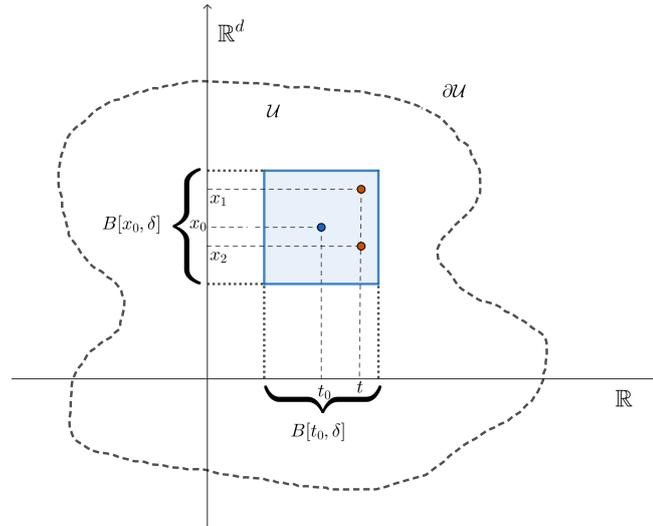
Definição 3.2.3. *Um conjunto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ é compacto se toda sequência $(x_n) \subset \mathcal{U}$ possui uma subsequência convergente cujo limite também pertence a \mathcal{U} . Essa é a chamada **caracterização sequencial da compacidade** em espaços métricos.*

Observe que, pela Definição 3.2.2 a constante de Lipschitz depende do ponto x_0 fixado. A depender das condições, é possível garantir que essa constante seja universal em todo o espaço no qual a função está definida. Isso nos leva, então, ao resultado do Lema 3.2.1.

Lema 3.2.1 (Lema da Constante Universal). *Seja $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínua e localmente lipschitziana em x . Então, para todo compacto $K \subset \mathcal{U}$ existe $C = C(K) > 0$ tal que*

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq C \|x - y\|$$

Figura 3.2.1 – Domínio de F .



Fonte: a autora, 2025.

sempre que $(t, x), (t, y) \in K$.

O número $C = C(K)$ é chamado **constante universal de Lipschitz de F em K** .

Demonstração. Para demonstrar esse lema, recorreremos à demonstração por absurdo.

Suponha por absurdo que para cada $n \in \mathbb{N}$, existem (t_n, x_n) e (t_n, y_n) em K tais que

$$\|F(t_n, x_n) - F(t_n, y_n)\| > n\|x_n - y_n\|. \quad (3.3)$$

F é uma função contínua num compacto, portanto é limitada. Mas como $n \rightarrow \infty$, a única forma de (3.3) ser verdadeira sempre é se $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.

Como K é compacto, (t_n, x_n) admite uma subsequência convergente para um ponto $(t_k, x_k) \in K$ e (t_n, y_n) admite uma subsequência convergente para um ponto $(t_k, y_k) \in K$. Mas como $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, temos $x_k = y_k$.

Pela continuidade de F , temos que $F(t_n, x_n) \rightarrow F(t_k, x_k)$ e $F(t_n, y_n) \rightarrow F(t_k, y_k)$. Mas como $x_k = y_k$, temos $F(t_k, x_k) = F(t_k, y_k)$, o que implica $\|F(t_n, x_n) - F(t_n, y_n)\| \rightarrow 0$. Isso é absurdo, pois impossibilita que ocorra a equação (3.3). \square

3.3 Operador de Picard

O operador de Picard é uma parte importante do Teorema de Existência e Unicidade. Antes de estudá-lo, trazemos um resultado auxiliar:

Lema 3.3.1. *Considere o conjunto $\mathcal{Y} = \{\gamma : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow B[x_0, \delta]; \gamma(t_0) = x_0\}$ e a função $d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)} \{\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|\}$. O espaço (\mathcal{Y}, d) é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Tome $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em (\mathcal{Y}, d) . Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $n_1, n_2 > N$, vale

$$d(\gamma_{n_1}, \gamma_{n_2}) = \sup_{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)} \{ \|\gamma_{n_1}(t) - \gamma_{n_2}(t)\| \} < \varepsilon. \quad (3.4)$$

O conjunto $B[x_0, \delta]$ é um espaço métrico completo em \mathbb{R}^n pela métrica usual de \mathbb{R}^n (ver (LIMA, 2020)). Então, toda sequência de Cauchy em $B[x_0, \delta]$ é convergente para algum elemento em $B[x_0, \delta]$. Isto é, fixado $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, podemos definir

$$\gamma(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(t). \quad (3.5)$$

A relação acima vale para qualquer que seja $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, logo $\gamma(t) \in B[x_0, \delta]$. Além disso, em t_0 vale $\gamma(t_0) = x_0$, pois $\gamma_n \in \mathcal{Y}$. Logo,

$$\gamma(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(t_0) = x_0. \quad (3.6)$$

Logo, $\gamma \in \mathcal{Y}$. Agora, precisamos mostrar que $d(\gamma_n, \gamma) \rightarrow 0$.

Pela desigualdade triangular, vale

$$\|\gamma_{n_1}(t) - \gamma(t)\| \leq \|\gamma_{n_1}(t) - \gamma_{n_2}(t)\| + \|\gamma_{n_2}(t) - \gamma(t)\|.$$

Quando $n \rightarrow \infty$, de (3.5) obtemos $\|\gamma_{n_2}(t) - \gamma(t)\| \rightarrow 0$. Então, por (3.4), teremos

$$\|\gamma_{n_1}(t) - \gamma(t)\| < \varepsilon.$$

Concluimos, então, que toda sequência de Cauchy em \mathcal{Y} converge para um elemento em \mathcal{Y} sob a métrica d . Logo, (\mathcal{Y}, d) é completo. \square

Lema 3.3.2 (Operador de Picard). *Considere $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua e localmente lipschitziana, $M(\delta) = \sup_{(t,x) \in B[t_0, \delta] \times B[x_0, \delta]} \{\|F(t, x)\|\}$, $C = C(\delta)$ a constante universal de lipschitz de F em $B[t_0, \delta] \times B[x_0, \delta]$ e $\mathcal{Y} = \{\gamma : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow B[x_0, \delta]; \gamma(t_0) = x_0\}$, a distância $d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)} \{\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|\}$. O operador de Picard, $\mathcal{L} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$, definido por*

$$\mathcal{L}(\gamma)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \gamma(s)) ds$$

está bem definido e é uma contração, para

$$\varepsilon < \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M(\delta)}, \frac{1}{C(\delta)} \right\}. \quad (3.7)$$

Demonstração. Para mostrar que \mathcal{L} está bem definido, devemos avaliá-lo em todo o domínio e imagem.

- Em $t = t_0$, temos:

$$\mathcal{L}(\gamma)(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} F(s, \gamma(s)) ds = x_0.$$

- Para qualquer $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, temos:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(\gamma)(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t F(s, \gamma(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|F(s, \gamma(s))\| ds \\ &\leq M(\delta) |t - t_0| < M(\delta) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, pela condição (3.7), temos $\|\mathcal{L}(\gamma)(t) - x_0\| < \frac{M(\delta) \cdot \delta}{M(\delta)} = \delta$, ou seja, $\mathcal{L}(\gamma)(t) \in B[x_0, \delta]$ para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

Portanto, \mathcal{L} está bem definido.

Agora, precisamos mostrar que \mathcal{L} é uma contração. Primeiramente, lembremos que como F é localmente lipschitziana, pelo Lema (3.2.1), existe $C(\delta)$ que satisfaz

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq C(\delta) \|x_1 - x_2\|.$$

Tomemos $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{Y}$ quaisquer. Para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ temos:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(\gamma_1)(t) - \mathcal{L}(\gamma_2)(t)\| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \gamma_1(s)) ds - x_0 - \int_{t_0}^t F(s, \gamma_2(s)) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t [F(s, \gamma_1(s)) - F(s, \gamma_2(s))] ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|F(s, \gamma_1(s)) - F(s, \gamma_2(s))\| ds \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|F(s, \gamma_1(s)) - F(s, \gamma_2(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t C(\delta) \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\| ds \right| \\ &\leq C(\delta) \cdot \left| \int_{t_0}^t \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\| ds \right| \\ &\leq C(\delta) \cdot (t - t_0) \cdot \sup_{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)} \{\|(\gamma_1)(t) - (\gamma_2)(t)\|\} \\ &< C(\delta) \cdot \varepsilon \cdot \sup_{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)} \{\|(\gamma_1)(t) - (\gamma_2)(t)\|\} \\ &= C(\delta) \cdot \varepsilon \cdot d(\gamma_1, \gamma_2). \end{aligned}$$

Como vale para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, vale inclusive para o $\sup_{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)} \{\|\mathcal{L}(\gamma_1)(t) - \mathcal{L}(\gamma_2)(t)\|\}$, isto é, $d(\mathcal{L}(\gamma_1), \mathcal{L}(\gamma_2))$. Portanto, se tomarmos $\lambda = C(\delta) \cdot \varepsilon$ concluimos que

$$d(\mathcal{L}(\gamma_1), \mathcal{L}(\gamma_2)) < \lambda \cdot d(\gamma_1, \gamma_2).$$

Como ε satisfaz a dentro da condição (3.7), isso terá como consequência $\gamma < 1$ e da desigualdade anterior, temos que \mathcal{L} é uma contração.

Assim, está provado o Lema 3.3.2. \square

3.4 Teorema de Existência e Unicidade

Chegamos, finalmente, ao teorema central deste capítulo, conhecido por Teorema de Existência e Unicidade ou, ainda, Teorema de Picard. As definições e resultados obtidos anteriormente nos permitem a demonstração desse resultado. No Apêndice A encontram-se dois resultados adicionais usados na prova.

Teorema 3.4.1 (Teorema de Existência e Unicidade). *Seja $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínua e localmente lipschitziana em x . Então,*

(1) *para todo $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ existem algum intervalo I e alguma solução $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ de*

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

tal que $t_0 \in I$ (existência);

(2) *se $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ são soluções de (3.8) e existe $t_0 \in I_1 \cap I_2$ tal que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = x_0$, então $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$ (unicidade).*

Os resultados que vimos até o momento nos permitem transformar o problema de existência e unicidade em um problema de ponto fixo, ajustando-se corretamente os intervalos e as condições. A ideia da prova, tanto na parte da existência quanto da unicidade, se baseia nesse princípio. O item (1) garante a existência e unicidade de soluções para um pequeno intervalo local, e o item (2) garante que a coexistência de soluções definidas em intervalos diferentes mas que possuem alguma interseção entre si, implicará na unicidade de soluções dentro da interseção.

Demonstração. Para demonstrar o item (1), começaremos por trabalhar com um par $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ qualquer e fixamos $\delta > 0$ tal que $B[t_0, \delta] \times B[x_0, \delta] \subset \mathcal{U}$, como já ilustrado anteriormente na Figura 3.2.1.

Pelo Teorema A.0.2, como $B[t_0, \delta] \times B[x_0, \delta] \subset \mathcal{U}$ é um conjunto fechado e limitado, então também é um compacto. E como por hipótese F é localmente lipschitziana, então pelo Lema 3.2.1, existe $C(\delta)$ tal que

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq C(\delta)\|x_1 - x_2\| \quad (3.9)$$

para quaisquer $(t, x_1), (t, x_2) \in B[t_0, \delta] \times B[x_0, \delta]$.

Agora, considere $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(t_0, x_0, \delta, \varepsilon) = \{\gamma : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow B[x_0, \delta]; \gamma(t_0) = x_0\}$ e $d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)} \{\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|\}$. Relembrando os resultados anteriores:

- Conforme o Lema 3.3.1, (\mathcal{Y}, d) é um espaço métrico completo;
- Conforme o Lema 3.3.2, o operador de Picard, dado por $\mathcal{L}(\gamma)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \gamma(s))ds$, é uma contração;
- Conforme o Teorema 3.1.1, toda contração em um espaço métrico completo possui um e apenas um ponto fixo.

Associando esses três resultados, chegamos à conclusão de que existe uma única curva $\gamma_0 \in \mathcal{Y}$ tal que $\mathcal{L}(\gamma_0) = \gamma_0$ para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Mas por definição, $\mathcal{L}(\gamma_0)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \gamma_0(s))ds$ e, portanto,

$$\gamma_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \gamma_0(s))ds$$

para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

Como $\gamma_0 \in \mathcal{Y}$, temos $\gamma_0(t_0) = x_0$. Então,

$$\gamma_0(t) - \gamma_0(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \gamma_0(s))ds - x_0 = \int_{t_0}^t F(s, \gamma_0(s))ds.$$

Pelo Corolário (A.0.1), a relação acima implica que γ_0 é diferenciável, sendo

$$\gamma_0'(t) = F(t, \gamma_0(t))$$

para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

Isso implica, então, que $\gamma_0(t)$ é solução da equação (3.8). Assim, está provada a parte (1) do teorema.

Agora, para provar a parte (2) do teorema, vamos primeiro tomar duas soluções $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$. Defina $I = \{t \in I_1 \cap I_2; \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$. Temos:

- $t_0 \in I$.

Isso ocorre, pois por serem soluções de (3.8), vale $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = x_0$.

- **I é fechado em $I_1 \cap I_2$.**

De fato, defina $A(t) = \gamma_1(t) - \gamma_2(t)$. Por ser uma composição de contínuas, A é contínua. Observe que $I = A^{-1}(0)$, o conjunto $C = \{0\}$ é fechado e a pré-imagem de um conjunto fechado também é fechado.

• **I é aberto em $I_1 \cap I_2$.**

Para mostrar isso, tome $s_0 \in I$. Então, existe y_0 tal que $\gamma_1(s_0) = \gamma_2(s_0) = y_0$.

Fixe $\tilde{\delta} > 0$ tal que $B[s_0, \tilde{\delta}] \times B[x_0, \tilde{\delta}] \subset \mathcal{U}$. Defina $\mathcal{Y} = \{\gamma : (s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon}) \rightarrow B[x_0, \tilde{\delta}]; \gamma(t_0) = y_0\}$, em que $\tilde{\varepsilon}$ satisfaz (3.7) Novamente, como uma consequência dos Lemas (3.3.1) e (3.3.2), sob o ponto (s_0, y_0) \mathcal{L} está bem definido e é uma contração em \mathcal{Y} . Assim, existe uma única curva $\tilde{\gamma}_0 \in \mathcal{Y}$ tal que $\mathcal{L}(\tilde{\gamma}_0)(s) = \tilde{\gamma}_0(s)$ para todo $s \in (s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon})$.

Por γ_1 ser solução de (3.8), sabemos que $\gamma_1'(t) = F(t, \gamma_1(t))$ para todo $t \in I_1$. A restrição $\gamma_1|_{(s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon})}$ está contida em $\mathcal{Y}(s_0, y_0, \tilde{\delta}, \tilde{\varepsilon})$ e também é solução do problema, isto é, vale $\gamma_1'(t) = F(t, \gamma_1(t))$ para todo $t \in (s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon})$ e $\gamma_1(s_0) = y_0$ (por hipótese). Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, isso implica que

$$\gamma_1(t) = y_0 + \int_{s_0}^t F(s, \gamma_1(s)) ds$$

para todo $t \in (s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon})$. Portanto, $\gamma_1|_{(s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon})}$ é ponto fixo de $\mathcal{L} : \mathcal{Y}(s_0, y_0, \tilde{\delta}, \tilde{\varepsilon}) \rightarrow \mathcal{Y}(s_0, y_0, \tilde{\delta}, \tilde{\varepsilon})$.

O argumento construído acima vale também para γ_2 , de forma que ao final, também chegamos que $\gamma_2|_{(s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon})}$ é ponto fixo de $\mathcal{L} : \mathcal{Y}(s_0, y_0, \tilde{\delta}, \tilde{\varepsilon}) \rightarrow \mathcal{Y}(s_0, y_0, \tilde{\delta}, \tilde{\varepsilon})$.

Mas pelo Teorema (3.1.1), o ponto fixo é único. Logo, $\gamma_1 = \gamma_2$ para todo $t \in (s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon})$, o que implica que para todo $s_0 \in I$, existe um $\tilde{\varepsilon}$ tal que $(s_0 - \tilde{\varepsilon}, s_0 + \tilde{\varepsilon}) \subset I$. Logo, I é aberto em $I_1 \cap I_2$.

Assim, provamos que I é fechado e aberto em $I_1 \cap I_2$. E como I é não-vazio e é conexo pois é um intervalo, temos $I = I_1 \cap I_2$, o que conclui nossa prova. \square

Então, voltando ao Exemplo 3.0.1, por que encontramos duas soluções distintas que passam pelo mesmo ponto $t = 0, x = 0$? A resposta é simples: para que um teorema seja válido, todas as hipóteses devem ser verificadas; no caso desse exemplo, a função F não é localmente lipschitziana em $x = 0$.

Se $F(t, x)$ fosse localmente lipschitziana em $t = 0$, então para todo $\delta > 0$ deveria existir algum $t_1 \in (-\delta, \delta)$ tal que

$$|\sqrt{|t_1|} - \sqrt{|0|}| \leq \lambda ||t_1| - 0|,$$

isto é,

$$|\sqrt{|t_1|}| \leq \lambda |t_1|.$$

Como $t_1 \neq 0$, podemos dividir os dois lados da igualdade por t_1 , então

$$\frac{1}{|\sqrt{|t_1|}|} \leq \lambda.$$

Note que quando $t_1 \rightarrow 0$, $\frac{1}{|\sqrt{|t_1|}|} \rightarrow \infty$. Então, não existe λ que garanta a propriedade lipschitziana de F em t no pertencente ao intervalo $(-\delta, \delta)$. Isso significa que F não é localmente lipschitziana em $t = 0$. Por isso, o teorema não se aplica nesse exemplo.

Construímos o Operador de Picard como uma ferramenta auxiliar para a demonstração do Teorema de Existência e Unicidade. No entanto, conseguimos usá-lo também como uma maneira de encontrar a solução γ_0 a partir de alguma curva contínua $\gamma \in \mathcal{Y}$ que não precisa ser solução da equação, basta que passe pelo valor inicial. Vejamos o seguinte exemplo.

Considere o PVI

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

em que $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $F(t, x) = 2tx$ e $x' = F(t, x)$.

O Operador de Picard aplicado a esse problema nos dá

$$\mathcal{L}(\gamma)(t) = 1 + \int_0^t 2s \gamma(s) ds.$$

A curva $\gamma_0 \equiv 1$ satisfaz $\gamma(0) = 1$. Substituindo ela no Operador de Picard, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma)(t) &= 1 + \int_0^t 2s \cdot 1 ds \\ &= 1 + \int_0^t 2s ds \\ &= 1 + s^2 \Big|_0^t \\ &= 1 + t^2. \end{aligned}$$

Afirmamos:

$$\mathcal{L}^n(1)(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k}}{k!}. \quad (3.11)$$

De fato, para $n = 1$,

$$\mathcal{L}(1)(t) = \sum_{k=0}^1 \frac{t^{2k}}{k!} = \frac{t^0}{0!} + \frac{t^2}{1!} = 1 + t^2,$$

conforme havíamos calculado. Suponha $\mathcal{L}^{m-1}(1)(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{2k}}{k!}$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Para m , temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^m(1)(t) &= \mathcal{L}(\mathcal{L}^{m-1}) \\ &= \mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{2k}}{k!}\right). \end{aligned}$$

Pela definição de \mathcal{L} , teremos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{2k}}{k!}\right) &= 1 + \int_0^t 2s \sum_{k=0}^{m-1} \frac{s^{2k}}{k!} ds \\ &= 1 + \int_0^t 2 \frac{1}{k!} \sum_{k=0}^{m-1} s \cdot s^{2k} ds \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2}{k!} \int_0^t s^{2k+1} ds.\end{aligned}$$

Calculando a integral,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{2k}}{k!}\right) &= 1 + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2}{k!} \int_0^t s^{2k+1} ds \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2}{k!} \frac{s^{2k+2}}{2k+2} \Big|_0^t \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2}{k!} \frac{t^{2k+2}}{2k+2} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2}{k!} \frac{t^{2(k+1)}}{2(k+1)} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{2(k+1)}}{k!(k+1)} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{2(k+1)}}{(k+1)!}.\end{aligned}$$

Observe que $\frac{t^0}{0!} = \frac{1}{1} = 1$. Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{2k}}{k!}\right) &= \frac{t^0}{0!} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{2(k+1)}}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{t^{2k}}{k!}.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

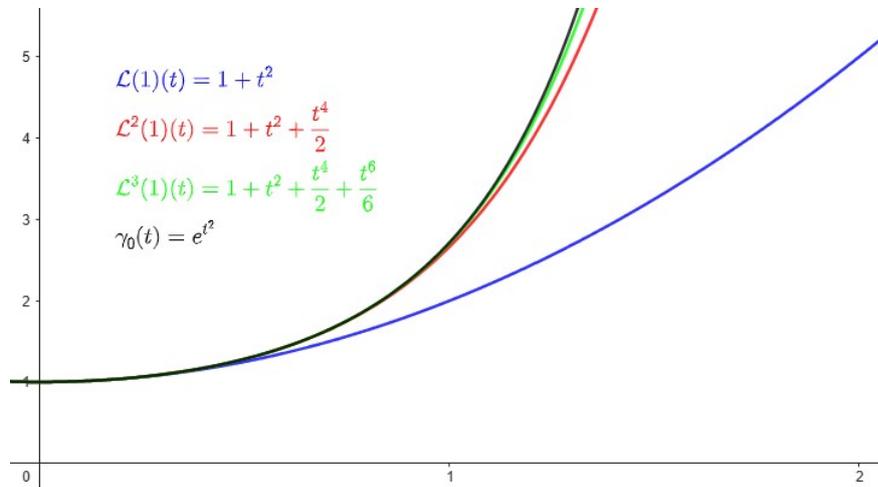
$$\mathcal{L}^m(1)(t) = \mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{2k}}{k!}\right) = \sum_{k=0}^m \frac{t^{2k}}{k!}.$$

Portanto, se vale a igualdade para $m - 1$ qualquer, também vale para m . Isso implica que a igualdade (3.11) vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observe que quando $n \rightarrow \infty$, $\mathcal{L}^n(1)$ converge exatamente para a série de Taylor da função $\gamma_0(t) = e^{t^2}$. Essa função, de fato, é solução para o PVI, pois $\gamma_0'(t) = 2te^{t^2}$ e $\gamma_0(0) = e^0 = 1$.

A Figura 3.4.1 mostra o operador para $n = 1, 2$ e 3 . É possível notar que quanto mais n aumenta, mais a curva correspondente se aproxima de $\gamma_0(t)$.

Figura 3.4.1 – Curvas correspondentes a $\mathcal{L}^n(1)$ para $n \in \{1, 2, 3\}$ e sua comparação com $\gamma_0(t)$.



Fonte: a autora, 2025.

De forma geral, sempre é possível definir a solução $\gamma_0(t)$ do problema calculando-se as iteradas do operador \mathcal{L} sob alguma curva $\gamma \in \mathcal{Y}$ e passando ao limite:

$$\gamma_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(\gamma).$$

Vale lembrar que esse algoritmo possui uma convergência rápida: pelo Teorema (3.1.1),

$$d(\mathcal{L}^n(\gamma), \gamma_0) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(\mathcal{L}(\gamma), \gamma).$$

4 Teorema de Existência e Unicidade: Refinamento de Intervalo

No capítulo anterior, enunciamos e demonstramos o Teorema de Existência e Unicidade das soluções de uma EDO. É importante observar que ele possui uma série de hipóteses e restrições. Aqui, vamos tratar de uma em específico, que com certos ajustes, poderá ser melhorada.

Observe que no processo construtivo da demonstração, precisamos restringir o valor de ε algumas vezes:

- para garantir que $\mathcal{L} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ esteja bem definido, é necessário $\varepsilon \leq \frac{\delta}{M(\delta)}$;
- também para garantir a boa definição de \mathcal{L} , é necessário $\varepsilon < \delta$;
- para garantir que $\mathcal{L}(\gamma)$ seja uma contração, é necessário $\varepsilon < \frac{1}{C(\delta)}$.

Neste capítulo, mostraremos que é possível retirar esta última hipótese, pois conseguimos garantir que \mathcal{L} seja uma contração sem precisar que necessariamente $\varepsilon < \frac{1}{C(\delta)}$. Antes de mostrar isso, precisamos de dois lemas auxiliares, conforme se segue.

Lema 4.0.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \dots \int_{t_0}^{s_{n-1}} ds_n ds_{n-1} \dots ds_1 = \frac{(t - t_0)^n}{n!}.$$

Demonstração. Essa prova se dá por indução. Para $n = 1$, temos:

$$\int_{t_0}^t ds_1 = s_1 \Big|_{t_0}^t = t - t_0.$$

Agora, suponha que vale para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é, suponha que vale

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \dots \int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_k ds_{k-1} \dots ds_1 = \frac{(t - t_0)^k}{k!}.$$

Então, para $k + 1$:

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \dots \int_{t_0}^{s_{k-1}} \int_{t_0}^{s_k} ds_{k+1} ds_k ds_{k-1} \dots ds_1 = \int_{t_0}^t \frac{(s_1 - t_0)^k}{k!} ds_1 = \frac{(s_1 - t_0)^{k+1}}{(k+1)!} \Big|_{t_0}^t = \frac{(t - t_0)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Então, se vale para algum $k \in \mathbb{N}$, também vale para $k + 1$. Portanto, vale para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Lema 4.0.2. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathcal{L}^n(\gamma_1)(t) - \mathcal{L}^n(\gamma_2)(t)\| \leq C(\delta)^n d(\gamma_1, \gamma_2) \left| \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \dots \int_{t_0}^{s_{n-2}} \int_{t_0}^{s_{n-1}} ds_n ds_{n-1} \dots ds_2 ds_1 \right|.$$

Demonstração. Novamente recorreremos à indução. Para $n = 1$, a conta se segue exatamente como no Lema 3.3.2.

Agora, suponha válido para qualquer $k \in \mathbb{N}$, isto é, suponha que vale

$$\|\mathcal{L}^k(\gamma_1)(t) - \mathcal{L}^k(\gamma_2)(t)\| \leq C(\delta)^k d(\gamma_1, \gamma_2) \left| \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \dots \int_{t_0}^{s_{k-2}} \int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_k ds_{k-1} \dots ds_2 ds_1 \right|.$$

Então, para $k + 1$, temos:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}^{k+1}(\gamma_1)(t) - \mathcal{L}^{k+1}(\gamma_2)(t)\| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^t F(s_1, \mathcal{L}^k(\gamma_1)(s_1)) ds_1 - x_0 + \int_{t_0}^t F(s_1, \mathcal{L}^k(\gamma_2)(s_1)) ds_1 \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t F(s_1, \mathcal{L}^k(\gamma_1)(s_1)) - F(s_1, \mathcal{L}^k(\gamma_2)(s_1)) ds_1 \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|F(s_1, \mathcal{L}^k(\gamma_1)(s_1)) - F(s_1, \mathcal{L}^k(\gamma_2)(s_1))\| ds_1 \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|F(s_1, \mathcal{L}^k(\gamma_1)(s_1)) - F(s_1, \mathcal{L}^k(\gamma_2)(s_1))\| ds_1 \right| \\ &\leq C(\delta) \left| \int_{t_0}^t \|\mathcal{L}^k(\gamma_1)(s_1) - \mathcal{L}^k(\gamma_2)(s_1)\| ds_1 \right| \\ &\leq C(\delta) C(\delta)^k d(\gamma_1, \gamma_2) \left| \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \dots \int_{t_0}^{s_{k-1}} \int_{t_0}^{s_k} ds_{k+1} ds_k \dots ds_2 ds_1 \right| \\ &= C(\delta)^{k+1} d(\gamma_1, \gamma_2) \left| \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \dots \int_{t_0}^{s_{k-1}} \int_{t_0}^{s_k} ds_{k+1} ds_k \dots ds_2 ds_1 \right|. \end{aligned}$$

Portanto, se vale para algum $k \in \mathbb{N}$, também vale para $k + 1$, o que implica que vale para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

O Teorema de Existência e Unicidade enunciado no capítulo anterior nos diz que é possível assegurar que a EDO de ordem 1 possua solução única, respeitadas as hipóteses sobre as funções envolvidas e desde que

$$\varepsilon \leq \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M(\delta)}, \frac{1}{C(\delta)} \right\}. \quad (4.1)$$

A seguinte proposição nos permite fazer uma alteração nessas restrições.

Proposição 4.0.1. Sejam $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua e localmente lipschitziana, $\mathcal{Y} = \{\gamma : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow B[x_0, \delta]; \gamma(t_0) = x_0\}$, a distância $d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup\{\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|; t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\}$ e o operador de Picard, $\mathcal{L} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$, definido por

$$\mathcal{L}(\gamma)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \gamma(s)) ds.$$

Então, existe $k \geq 1$ tal que $\mathcal{L}^k : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ está bem definido e é uma contração, para

$$\varepsilon < \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M(\delta)} \right\}, \quad (4.2)$$

em que $M(\delta) = \sup\{\|F(t, x)\|; (t, x) \in B[t_0, \delta] \times B[x_0, \delta]\}$.

Demonstração. No Lema 3.3.2, vimos que a hipótese (4.2) garante que $\mathcal{L} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ está definido. Como $\mathcal{L}^k = \mathcal{L}(\mathcal{L}(\dots))$, isto é, uma iteração do operador, essa hipótese também garante que $\mathcal{L}^k : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ está bem definido.

Para mostrar que é uma contração, tomamos $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{Y}$. Do Lema 4.0.2, temos

$$\|\mathcal{L}^n(\gamma_1)(t) - \mathcal{L}^n(\gamma_2)(t)\| \leq C(\delta)^n d(\gamma_1, \gamma_2) \left| \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \dots \int_{t_0}^{s_{n-2}} \int_{t_0}^{s_{n-1}} ds_n ds_{n-1} \dots ds_2 ds_1 \right|. \quad (4.3)$$

Do Lema 4.0.1, temos

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \dots \int_{t_0}^{s_{n-1}} ds_n ds_{n-1} \dots ds_1 = \frac{(t - t_0)^n}{n!}. \quad (4.4)$$

Substituindo (4.4) em (4.3), temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}^n(\gamma_1)(t) - \mathcal{L}^n(\gamma_2)(t)\| &\leq C(\delta)^n d(\gamma_1, \gamma_2) \left| \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \dots \int_{t_0}^{s_{n-2}} \int_{t_0}^{s_{n-1}} ds_n ds_{n-1} \dots ds_2 ds_1 \right| \\ &= C(\delta)^n d(\gamma_1, \gamma_2) \frac{(t - t_0)^n}{n!} \\ &= C(\delta)^n d(\gamma_1, \gamma_2) \frac{\varepsilon^n}{n!} \\ &= d(\gamma_1, \gamma_2) \frac{(C(\delta)\varepsilon)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Quando $n \rightarrow \infty$, $n!$ cresce mais rápido do que a potência de n , o que faz com que $\frac{(C(\delta)\varepsilon)^n}{n!} < 1$. Portanto, basta tomar k suficientemente grande para que \mathcal{L}^k seja uma contração. \square

A partir dessa proposição, vemos que \mathcal{L}^k ser uma contração não depende do valor que $C(\delta)$ assume; a relação de contração depende apenas do valor de k , que é livre para ser escolhido tão grande quanto se queira e se faça necessário. Esse resultado é extremamente importante, pois aliado ao seguinte teorema, será possível, de fato, eliminar uma das restrições de valor majorante para ε .

Teorema 4.0.1 (Teorema do Ponto Fixo Forte). *Seja (X, d) é um espaço métrico completo, $T : X \rightarrow X$ contínua tal que T^k uma contração para algum $k \geq 1$ cuja taxa de contração é λ , então existe um único $x_0 \in X$ tal que $T(x_0) = x_0$. Além disso, para todo $x \in X$ e para todo $n \geq 0$, existe $C_k(x) > 0$ tal que*

$$d(x_0, T^n(x)) \leq C_k(x) \lambda^{\frac{n}{k}}. \quad (4.5)$$

O ponto x_0 é chamado **ponto fixo** e em particular, para todo $x \in X$, $T^n(x)$ converge para x_0 quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Como T_k é contração, pelo Teorema (3.1.1) existe um único ponto $x_0 \in X$ tal que $T^k(x_0) = x_0$. Note que $T^{k+1}(x_0) = T(T^k(x_0)) = T(x_0)$. Por outro lado, $T^{k+1}(x_0) = T^k(T(x_0))$ e como o ponto fixo é único, temos $T(x_0) = x_0$.

Observe que como $T^k(x_0) = x_0$, então qualquer quantidade de iterações de T^k também resultará em x_0 . Por exemplo, $T^{km}(x_0) = T^k(T^k(\dots(T^k(x_0))\dots)) = x_0$, em que T^k foi aplicada m vezes. E como λ é taxa de contração de \mathcal{L}^k ,

$$d(x_0, T^{km}(x)) = d(T(x_0), T^{km}(x)) = d(T^k(x_0), T^{km}(x)) = d(T^{km}(x_0), T^{km}(x)) \leq \lambda^m d(x_0, x).$$

Seja $n \geq 1$. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, temos $n = qk + r$, onde $q, k \in \mathbb{Z}$ e $r \leq k - 1$. Então, pela desigualdade acima, temos

$$d(x_0, T^n(x)) = d(x_0, T^{qk+r}(x)) = d(x_0, T^{kq}(T^r(x))) \leq \lambda^q d(x_0, T^r(x)).$$

Defina $C^k(x) := \max_{0 \leq r \leq k-1} d(x_0, T^r(x))$. Então, pela desigualdade anterior,

$$d(x_0, T^n(x)) \leq \lambda^q d(x_0, T^r(x)) \leq \lambda^q C_k(x) = \lambda^{\frac{n-r}{k}} C_k(x).$$

Como $\lambda < 1$, $\lambda^{-\frac{r}{k}} \geq 1$. Logo,

$$d(x_0, T^n(x)) \leq \lambda^{\frac{n-r}{k}} C_k(x) = \lambda^{\frac{n}{k}} \cdot \lambda^{-\frac{r}{k}} C_k(x) \leq \lambda^{\frac{n}{k}} C_k(x).$$

Como k , x e C_k são fixados e $\lambda < 1$, quando $n \rightarrow \infty$, $\lambda^{\frac{n}{k}} C_k(x) \rightarrow 0$, isto é, $T^n(x) \rightarrow x_0$. \square

Provamos, assim, essa versão mais forte do Teorema do Ponto Fixo.

Finalmente, esses dois resultados nos levam a essa nova versão do Teorema de Existência e Unicidade:

Teorema 4.0.2 (Teorema de Existência e Unicidade com intervalo otimizado). *Seja $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínua e localmente lipschitziana em x . Fixe δ tal que $B[t_0, \delta] \times B[x_0, \delta] \subset \mathcal{U}$ e considere $M(\delta) = \sup\{\|F(t, x)\|; (t, x) \in B[t_0, \delta] \times B[x_0, \delta]\}$. Então, para todo ε satisfazendo (4.2), existe solução única γ do PVI*

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

definida no intervalo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

Novamente, essa versão do teorema pode ser demonstrada sob uma roupagem de um problema de ponto fixo.

Demonstração. Considere $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(t_0, x_0, \delta, \varepsilon) = \{\gamma : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow B[x_0, \delta]; \gamma(t_0) = x_0\}$ e $d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup\{\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|; t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\}$. Relembrando os resultados anteriores:

- Conforme o Lema 3.3.1, (\mathcal{Y}, d) é um espaço métrico completo;
- Conforme a Proposição 4.0.1, a iteração de k vezes do operador de Picard, dado por $\mathcal{L}(\gamma)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \gamma(s)) ds$, é uma contração;
- Conforme o Teorema 4.0.1, toda contração em um espaço métrico completo possui um e apenas um ponto fixo.

Associando esses três resultados, chegamos à conclusão de que se ε satisfaz (4.2), então existe uma única curva $\gamma_0 \in \mathcal{Y}$ tal que $\mathcal{L}(\gamma_0) = \gamma_0$ e $\mathcal{L}^n(\gamma) \rightarrow \gamma_0$ para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

A partir dessas adaptações, o teorema é demonstrado exatamente da mesma forma que a primeira parte do Teorema 3.4.1. \square

Em resumo, como já foi dito anteriormente, o teorema garante que uma das restrições sobre o valor de ε seja retirado. Em uma hipótese onde a condição $\frac{1}{C(\delta)} < \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M(\delta)} \right\}$ aconteça, isso significa que o intervalo de validade foi otimizado.

Apesar do aumento de intervalo ser um ganho, ele carrega consigo uma consequência: garantimos \mathcal{L}^k contração para k suficientemente grande. Isso acaba fazendo com que as convergências, apesar de ocorrerem, sejam mais lentas: basta comparar (3.2) com (4.5). Assim, não é possível estabelecer entre essas duas versões do teorema, qual seria "melhor", porque essa comparação é relativa, a depender do que se procura.

5 Conclusão

O estudo das Equações Diferenciais Ordinárias em \mathbb{R}^n é indispensável para a compreensão de sistemas nos quais diversas variáveis interagem e evoluem ao longo do tempo. Nesta monografia, foram apresentados conceitos fundamentais de EDOs e exemplos clássicos, evidenciando como se estabelece a conexão entre modelos físicos e formulações diferenciais. A técnica de redução de ordem mostrou-se valiosa para traduzir EDOs de maior ordem em sistemas de primeira ordem, algo que simplifica análises teóricas e procedimentos de solução.

O Teorema de Existência e Unicidade, amparado pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach e pelo Operador de Picard, constitui um dos pilares principais da teoria de EDOs. Ele oferece critérios rigorosos para determinar se uma dada EDO tem solução e se esta solução é única, com base em propriedades de continuidade e na condição de Lipschitz, entre outras hipóteses. Dessa forma, garante-se segurança ao modelar fenômenos naturais ou industriais por meio de EDOs.

Na parte final, foi discutido um refinamento do Teorema de Existência e Unicidade, no qual se remove uma das condições geralmente requeridas no intervalo de existência, mantendo apenas duas restrições necessárias para garantir a unicidade e a existência da solução. Essa modificação evidencia que, sob condições adequadas, a formulação clássica pode ser ajustada sem comprometer a robustez do resultado. Assim, a redução no número de hipóteses é compensada por uma modificação na velocidade de convergência de funções, mas de modo a preservar a garantia de existência e unicidade.

Referências

LIMA, E. L. *Análise Real*, v.2. [S.l.]: IMPA, 2006. ISBN 8524402210.

LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. [S.l.]: IMPA, 2020. ISBN 9786599052873.

LUZ, S. M. da. *Conjuntos Compactos*. [S.l.]: UFSC, 2000. <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97155/Simone_Milioli_da_Luz.PDF?sequence=1>. Acesso em 24 de Março de 2025.

SANTOS, R. J. *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. [S.l.]: Imprensa Universitária da UFMG, 2022. ISBN 9788574700212.

SCIENCE, C.; ZUMBI, N. *Um passeio no mundo livre*. [S.l.]: CD Afrociberdelia, 1994. Sony Music.

VIANA, M.; ESPINAR, J. *Equações Diferenciais: Uma abordagem de Sistemas Dinâmicos*. [S.l.]: IMPA, 2021. <<https://edoimpa.br/Livro>>. Acesso em 30 de Junho de 2024.

Apêndices

APÊNDICE A – Resultados Adicionais

Neste apêndice, trazemos dois resultados importantes para a construção da demonstração do Teorema de Existência e Unicidade. O Corolário A.0.1, é um resultado imediato do Teorema Fundamental do Cálculo. Então, trazemos também o enunciado e a demonstração desse importante teorema da Análise. O Teorema A.0.2 será apenas enunciado, mas sua demonstração pode ser vista dentro da demonstração do Teorema 19, presente em (LUZ, 2000), p. 21 e 22.

Teorema A.0.1 (Teorema Fundamental do Cálculo em \mathbb{R}). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo I . Então, as seguintes afirmações sobre uma função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes:*

1) Existe $k \in [a, b]$ tal que

$$F(x) = F(k) + \int_k^x f(t) dt$$

para todo $x \in [a, b]$.

2) $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$

Demonstração. Para mostrar que 1) implica 2), tome $x_0, x_0 + h \in [a, b]$. Temos

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &= F(k) - \int_k^{x_0+h} f(t) dt - F(k) - \int_k^{x_0} f(t) dt \\ &= \int_k^{x_0+h} f(t) dt + \int_{x_0}^k f(t) dt \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt. \end{aligned}$$

Dividindo por h , temos

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt. \quad (\text{A.1})$$

Como f é contínua em x_0 , para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $t \in [a, b]$ e $|t - x_0| < \delta$, então $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Essa desigualdade implica que

$$f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon$$

para todo $t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Suponha $|h| < \delta$. A desigualdade anterior valerá para todo $t \in [x_0, x_0 + h]$. Então, temos

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) - \varepsilon dt < \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt < \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) + \varepsilon dt. \quad (\text{A.2})$$

Observe que $f(x_0)$ e ε são valores que independem de t . Logo,

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) \pm \varepsilon dt = (f(x_0) \pm \varepsilon)t \Big|_{x_0}^{x_0+h},$$

e substituindo em (A.2), temos:

$$\begin{aligned} (f(x_0) - \varepsilon)t \Big|_{x_0}^{x_0+h} &< \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt < (f(x_0) + \varepsilon)t \Big|_{x_0}^{x_0+h} \\ (f(x_0) - \varepsilon)(x_0 + h - x_0) &< \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt < (f(x_0) + \varepsilon)(x_0 + h - x_0) \\ (f(x_0) - \varepsilon)h &< \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt < (f(x_0) + \varepsilon)h. \end{aligned}$$

Dividindo todos os termos por h ,

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt < f(x_0) + \varepsilon.$$

Podemos subtrair $f(x_0)$ de todos os termos da desigualdade. Assim,

$$-\varepsilon < \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - f(x_0) < \varepsilon.$$

Então, substituindo (A.1) na desigualdade acima, obtemos

$$-\varepsilon < \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) < \varepsilon.$$

Como, por definição, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = F'(x_0)$, a desigualdade anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Como vale para todo ε , basta tomar ε suficientemente pequeno. Assim, se garante $F'(x_0) = f(x_0)$ provando que 1) implica 2).

Para provar que 2) implica 1), tome $k \in [a, b]$ e defina, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \int_k^x f(t) dt. \tag{A.3}$$

Então,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_k^{x+h} f(t) dt - \int_k^x f(t) dt}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_k^{x+h} f(t) dt + \int_x^k f(t) dt}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}. \end{aligned}$$

Como f é contínua, quando $h \rightarrow 0$ temos $f(x+h) \rightarrow f(x)$ e, portanto, $\int_x^{x+h} f(t) dt \rightarrow f(x) \cdot h$. Assim,

$$\varphi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} = \frac{f(x) \cdot h}{h} = f(x).$$

Por hipótese, $F'(x) = f(x)$. Então, F e φ possuem a mesma derivada, o que significa que elas se diferem apenas por uma constante, isto é, podemos expressar

$$F(x) = \varphi(x) + C,$$

em que $C \in \mathbb{R}$. Note que tomando $x = k$, substituindo na expressão (A.3) temos $\varphi(k) = 0$. Portanto, pela igualdade anterior, temos $C = F(k)$ e portanto,

$$F(x) = \varphi(x) + F(k).$$

E finalmente, pela definição de $\varphi(x)$,

$$F(x) = F(k) + \int_k^x f(t) dt$$

para todo $x \in [a, b]$, conforme queríamos demonstrar. \square

Comumente, em Análise, define-se por *caminho* uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ que é contínua. Esse é o motivo do nome do seguinte corolário, enunciado em (LIMA, 2006). Ele nos é útil na demonstração do Teorema de Existência e Unicidade para garantir que γ , da forma como é definida no enunciado, é derivável. Isto porque γ é, por definição, um caminho.

Corolário A.0.1 (Teorema Fundamental do Cálculo para caminhos). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ um caminho no intervalo I . Então, as seguintes afirmações sobre uma função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ são equivalentes:*

1) *Existe $k \in [a, b]$ tal que*

$$F(x) = F(k) + \int_k^x f(t) dt$$

para todo $x \in [a, b]$.

2) *$F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.*

Demonstração. Basta aplicar o Teorema A.0.1 para cada coordenada do caminho f . \square

Teorema A.0.2. *Um conjunto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ é compacto se, e somente se, ele for fechado e limitado.*