



Universidade Federal de Ouro Preto  
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas  
Departamento de Engenharia Elétrica



## **Trabalho de Conclusão de Curso**

# **Modelagem e Controle de Nível de um Tanque de Área Variável**

**Flávio Vidigal Mendes**

João Monlevade, MG  
2017

**Flávio Vidigal Mendes**

# **Modelagem e Controle de Nível de um Tanque de Área Variável**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Anny Verly

Coorientador: Prof. Víctor Costa da Silva Campos

**Universidade Federal de Ouro Preto**  
**João Monlevade**  
**2017**

M538m Mendes, Flávio Vidigal.  
Modelagem e Controle de Nível de um Tanque de Área Variável  
[manuscrito] / Flávio Vidigal Mendes. - 2017.

73f.: il.: color; tabs.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. MSc<sup>a</sup>. Anny Verly.  
Coorientador: Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Departamento de Engenharia Elétrica.

1. Controle de Nível. 2. Linearização. 3. Tanque Cônico. 4. Sistema Não Linear. 5. Controle PI. I. Verly, Anny. II. Campos, Víctor Costa da Silva. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 621.3

Catálogo: [ficha@sisbin.ufop.br](mailto:ficha@sisbin.ufop.br)



#### ANEXO IV - ATA DE DEFESA

Aos 05 dias do mês de setembro de 2017, às 12 horas, no bloco C deste instituto, foi realizada a defesa de monografia pelo (a) formando (a) Flávio Vidigal Mendes, sendo a comissão examinadora constituída pelos professores: Márcio Feliciano Braga, Rodrigo Augusto Ricco, Víctor Costa da Silva Campos e Anny Verly.

O (a) candidato (a) apresentou a monografia intitulada: Modelagem e controle de nível de um tanque de área variável. A comissão examinadora deliberou, por unanimidade, pela aprovação do(a) candidato(a), com a nota média 9,5, de acordo com a tabela 1. Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da comissão examinadora e pelo (a) formando(a).

Tabela 1 – Notas de avaliação da banca examinadora

Banca Examinadora	Nota
Márcio Feliciano Braga	9,5
Rodrigo Augusto Ricco	9,5
Víctor Costa da Silva Campos	9,5
Anny Verly	9,5
<b>Média</b>	<b>9,5</b>

João Monlevade, 05 de setembro de 2017.

Anny Verly

Professor(a) Orientador(a)

Víctor Costa da Silva Campos

Professor(a) Co-Orientador(a)

Márcio Feliciano Braga

Professor(a) Convidado(a)

Rodrigo Augusto Ricco

Professor(a) Convidado(a)

Flávio Vidigal Mendes

Aluno (a)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP  
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas  
Colegiado do Curso de Engenharia de Elétrica

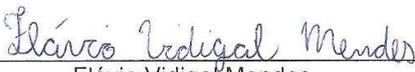


---

### TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado “Modelagem e Controle de Nível de um Tanque de Área Variável” é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem a devida citação ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 5 de Setembro de 2017.

  
Flávio Vidigal Mendes

# Agradecimentos

A Deus, por tudo, em todos os momentos da minha vida.

Aos meus pais e minhas irmãs, por sempre me apoiarem e estarem ao meu lado em todos os momentos da minha vida.

A Isabella, a República Sparta JM e aos amigos do bairro Jardim pelo companheirismo, amizade e apoio durante esta etapa tão importante da minha vida.

A todos que, de alguma maneira, colaboraram para que fosse possível a conclusão desta graduação em Engenharia Elétrica na Universidade Federal de Ouro Preto, um sonho que neste momento se torna realidade.

Faço um agradecimento especial aos meus orientadores, a prof.<sup>a</sup> MSc. Anny Verly e o prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos, que sempre estiveram disponíveis para me ajudarem na resolução e conclusão de dúvidas que surgiram ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

*"Só se pode alcançar um grande êxito quando nos mantemos fiéis a nós mesmos."*

*– Friedrich Nietzsche*

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Alguns Trabalhos Precursores</b>	<b>2</b>
<b>1.2</b>	<b>Motivação</b>	<b>3</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos</b>	<b>4</b>
<b>1.4</b>	<b>Estrutura do Trabalho</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>6</b>
<b>2.1</b>	<b>Formas de Representação</b>	<b>6</b>
2.1.1	Função de Transferência no Tempo Contínuo	6
2.1.2	Função de Transferência no Tempo Discreto	7
2.1.3	Variáveis de Estado de Sistemas Dinâmicos	7
<b>2.2</b>	<b>Sistemas de Controle Digital</b>	<b>8</b>
2.2.1	Amostragem e Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo	9
2.2.1.1	Transformada Z de um Sinal Amostrado	9
2.2.1.2	Transformada Z Inversa	10
2.2.1.3	Equações a Diferenças	11
2.2.2	Projeto do Controlador Discreto	11
2.2.3	Projeto do Controlador Discreto a partir do Projeto de Controlador Contínuo	12
<b>2.3</b>	<b>Linearização de Modelos</b>	<b>13</b>
2.3.1	Estabilidade pela Linearização	13
2.3.1.1	Sistema Linearizado	14
2.3.2	Método de Lyapunov da Linearização	15
<b>2.4</b>	<b>Linearização Exata por Realimentação de Sistemas Não Lineares</b>	<b>16</b>
<b>2.5</b>	<b>Controlador PID</b>	<b>19</b>
<b>2.6</b>	<b>Modelagem do Tanque de Área Variável</b>	<b>20</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>23</b>
<b>3.1</b>	<b>Descrição do sistema</b>	<b>23</b>
<b>3.2</b>	<b>Instrumentação</b>	<b>23</b>
3.2.1	Sensor de Nível	23
3.2.2	Atuador do Sistema	25
3.2.3	Microcontrolador	25
3.2.3.1	Plataforma Arduino	26
<b>3.3</b>	<b>Calibração</b>	<b>26</b>
3.3.1	Calibração da Bomba	26
3.3.2	Calibração do Sensor	28

3.3.3	Parâmetros do Modelo . . . . .	28
<b>3.4</b>	<b>Projeto do Controlador PI . . . . .</b>	<b>30</b>
3.4.1	Método Síntese Direta . . . . .	30
3.4.2	Projeto do Controlador . . . . .	31
<b>3.5</b>	<b>Projeto do Controle por Linearização Exata por Realimentação . . .</b>	<b>31</b>
3.5.1	Lei de Controle com Controlador PI . . . . .	32
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DE RESULTADOS . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>4.1</b>	<b>Sistema em Malha Aberta . . . . .</b>	<b>35</b>
4.1.1	Resultado Simulado . . . . .	35
4.1.2	Resultado Experimental . . . . .	36
<b>4.2</b>	<b>Controle PI do Modelo Linearizado . . . . .</b>	<b>37</b>
4.2.1	Resultado Simulado . . . . .	37
4.2.2	Resultado Experimental . . . . .	38
4.2.2.1	Função de Transferência do Controlador no Tempo Contínuo . . . . .	39
4.2.2.2	Função de Transferência do Controlador no Tempo Discreto . . . . .	40
<b>4.3</b>	<b>Controle por Linearização Exata por Realimentação . . . . .</b>	<b>42</b>
4.3.1	Resultado Simulado . . . . .	42
4.3.2	Resultado Experimental . . . . .	43
<b>4.4</b>	<b>Comparação Entre os Controladores PI e LER . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>47</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>A</b>	<b>EQUAÇÃO DE BERNOULLI . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>B</b>	<b>DIAGRAMAS DE BLOCOS . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>C</b>	<b>PLANTA PARA MODELAGEM E CONTROLE DE NÍVEL . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>D</b>	<b>PROGRAMAÇÃO DO ARDUINO . . . . .</b>	<b>55</b>
D.1	Controle PI (Síntese Direta no Tempo Contínuo) . . . . .	55
D.2	Controle PI (Síntese Direta no Tempo Discreto) . . . . .	56
D.3	Controle por LER . . . . .	57
D.4	Controle por LER com controle PI na Lei de Controle . . . . .	58

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Função de transferência no tempo contínuo. . . . .	6
Figura 2 – Função de transferência no tempo discreto. . . . .	7
Figura 3 – Diagrama de blocos de um sistema. . . . .	7
Figura 4 – Sistema dinâmico. . . . .	8
Figura 5 – Diagrama de blocos de um sistema de controle digital. . . . .	9
Figura 6 – Conjunto amostrador-segurador. . . . .	10
Figura 7 – Operações de amostragem e reconstrução aplicadas ao sinal contínuo $x(t)$ . . . . .	10
Figura 8 – Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada com controle discreto. . . . .	12
Figura 9 – Diagrama de blocos equivalente do sistema discreto em malha fechada. . . . .	12
Figura 10 – Sistema de controle contínuo com segurador. . . . .	13
Figura 11 – Estrutura do controle por linearização exata. . . . .	17
Figura 12 – Controle de nível de uma esfera. . . . .	18
Figura 13 – Diagrama esquemático do sistema de tanque cônico. . . . .	20
Figura 14 – Desenho da planta. . . . .	24
Figura 15 – Exemplo de funcionamento do sensor ultrassônico. . . . .	24
Figura 16 – Sensor HC-SR04. . . . .	25
Figura 17 – Bomba d’água 12 V. . . . .	25
Figura 18 – Placa Arduino Nano. . . . .	26
Figura 19 – Circuito de acionamento da bomba. . . . .	27
Figura 20 – Curva de calibração da bomba. Os dados obtidos no ensaio estão representados por (o). A linha representa a curva ajustada. . . . .	27
Figura 21 – Curva de calibração do sensor. Os dados obtidos no ensaio estão representados por (o). A linha representa a curva ajustada. . . . .	28
Figura 22 – Vazão de saída do processo. Os dados obtidos no ensaio estão representados por (o). A linha representa a curva ajustada. . . . .	29
Figura 23 – Modelo clássico de controle em malha fechada. . . . .	30
Figura 24 – Lugar geométrico das raízes para um ganho $K = 0,04072$ . . . . .	33
Figura 25 – Lugar geométrico das raízes para um ganho $K = 0,004$ . . . . .	33
Figura 26 – Resposta ao degrau para $K = 0,04072$ . . . . .	34
Figura 27 – Resposta ao degrau para $K = 0,004$ . . . . .	34
Figura 28 – Diagrama de blocos do sistema em malha aberta para o modelo não linear (2.48). Desenvolvido no Toolbox SIMULINK do MATLAB. . . . .	36
Figura 29 – Diagrama de blocos para o sistema em malha aberta para o modelo linear (4.1). Desenvolvido no Toolbox SIMULINK do MATLAB. . . . .	36
Figura 30 – Resposta ao degrau em malha aberta para os modelos linear e não linear. . . . .	36

Figura 31 – Resposta ao degrau em malha aberta para $Setpoint = 25$ cm. Em vermelho está representado o valor de $Setpoint$ e em azul o valor medido pelo sensor de nível. . . . .	37
Figura 32 – Diagrama de blocos do sistema com o controlador PI. . . . .	38
Figura 33 – Resposta ao degrau em malha fechada para o sistema controlado. Valor inicial igual a 25 cm e $Setpoints$ de 15, 20, 30 e 35 representados pelas cores verde, vermelho, roxo e azul, respectivamente. . . . .	38
Figura 34 – Controle PI simulado para $Setpoint = 25$ cm. . . . .	39
Figura 35 – Controle PI realizado para $Setpoint = 25$ cm. Em vermelho está representado o valor de $Setpoint$ e em azul o valor medido pelo sensor de nível. . . . .	40
Figura 36 – Controle PI realizado para $Setpoint = 25$ cm. Em vermelho está representado o valor de $Setpoint$ e em azul o valor medido pelo sensor de nível. . . . .	41
Figura 37 – Resposta ao degrau em malha fechada para o sistema controlado. Valor inicial igual a 25 cm e $Setpoints$ de 15, 20, 30 e 35 representados pelas cores verde, vermelho, roxo e azul, respectivamente. . . . .	42
Figura 38 – Controle por LER simulado para $Setpoint = 25$ cm. . . . .	43
Figura 39 – Controle por LER simulado para $Setpoint = 18$ cm. . . . .	43
Figura 40 – Controle LER realizado para $Setpoint = 25$ cm. Em vermelho está representado o valor de $Setpoint$ e em azul o valor medido pelo sensor de nível. . . . .	44
Figura 41 – Controle LER realizado para $Setpoint = 25$ cm. Em vermelho está representado o valor de $Setpoint$ e em azul o valor medido pelo sensor de nível. . . . .	45
Figura 42 – Controle LER realizado para $Setpoint = 18$ cm. Em vermelho está representado o valor de $Setpoint$ e em azul o valor medido pelo sensor de nível. . . . .	45
Figura 43 – Equação de Bernoulli aplicada à um tanque. . . . .	50
Figura 44 – Diagrama de blocos do sistema controlado por linearização exata por realimentação. . . . .	52
Figura 45 – Diagrama de bloco do filtro. . . . .	52
Figura 46 – Diagrama de bloco para a lei de controle representada por (3.11). . . . .	53
Figura 47 – Diagrama de bloco do tanque de área variável representado por (2.48). . . . .	53
Figura 48 – Planta didática. . . . .	54
Figura 49 – Instrumentação da planta. . . . .	54

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Modelos para o sistema monotanque: EENL (2.48), EEL (2.55) e função de transferência (2.57). . . . .	22
Tabela 2 – Resultado do teste estático. . . . .	29
Tabela 3 – Comparação entre os controladores. . . . .	46

# Lista de abreviaturas e siglas

CPU	<i>Central Processing Unit</i>
EE	Espaço de Estados
EEL	Espaço de Estados Linear
EENL	Espaço de Estados Não Linear
GND	<i>Ground</i>
LER	Linearização Exata por Realimentação
LER <sub>PI</sub>	Linearização Exata por Realimentação com o Controlador PI na Lei de Controle
LER <sub>S</sub>	Linearização Exata por Realimentação sem o Controlador PI na Lei de Controle
LGR	Lugar das Raízes
MRAC	<i>Model Reference Adaptive Controller</i>
PI	Proporcional e Integral
PI <sub>C</sub>	Controle PI com a Função de Transferência no Tempo Contínuo
PI <sub>D</sub>	Controle PI com a Função de Transferência no Tempo Discreto
PID	Proporcional, Integral e Derivativo
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i>
SISO	<i>Single Input, Single Output</i>
USB	<i>Universal Serial Bus</i>

# Lista de símbolos

$A$	Área da seção transversal
$C$	Constante real
$e(t)$	Erro atuante
$G(s)$	Função de transferência no tempo contínuo
$G_c(s)$	Função de transferência do controlador
$G_t(s)$	Função de transferência do distúrbio
$G_p(s)$	Função de transferência do processo
$G(z)$	Função de transferência no tempo discreto
$H$	Altura total do tanque
$h$	Altura do líquido no tanque
$h_s$	Ponto de operação para o nível
$K$	Coefficiente da válvula
$K_c$	Ganho proporcional
$K_I$	Ganho integral
$k_d$	Ganho do distúrbio
$m(t)$	Variável manipulada
$M_p$	Sobressinal máximo
$q_i$	Vazão de entrada
$q_o$	Vazão de saída
$q_s$	Ponto de operação para a vazão
$r$	Raio da superfície do líquido no tanque
$r(t)$	Referência variável no tempo
$R$	Raio no topo do tanque
$t_s$	Tempo de assentamento

$T$	Período
$T_D$	Constante de tempo derivativa do controlador PID
$T_I$	Constante de tempo integrativa do controlador PID
$\tau$	Constante de tempo do modelo de 1ª ordem
$\tau_d$	Constante de tempo da função de transferência em malha fechada desejada
$\theta$	Ângulo entre a geratriz e o centro do tanque
□	Fim de exemplo

# Resumo

A área de Sistemas de Controle tem fundamental importância nas indústrias, pois com a sua aplicação é possível aumentar a produtividade, rentabilidade e otimizar processos industriais. Na maioria dos processos existem variáveis críticas a serem controladas, como a temperatura, o nível, a pressão e a vazão. O controle de tais variáveis é de grande importância no funcionamento dos processos. Sendo assim, neste trabalho é desenvolvido um sistema monotanque com área variável, a fim de controlar o nível de líquido. Para isso, construiu-se uma planta composta por um tanque em formato cônico e um tanque reservatório. Tal tipo de processo é muito comum nas indústrias petroquímicas, alimentícias e muitas outras. O modelo matemático do tanque é obtido por meio das equações físicas do processo e validado experimentalmente. O objetivo é controlar o nível de líquido no tanque utilizando-se uma técnica linear, controle PI (Proporcional Integral) projetado pelo método de Síntese Direta e, também, uma técnica não linear, controle por LER (Linearização Exata por Realimentação). O controle PI é implementado no tempo contínuo e no tempo discreto. Ambos apresentam bom desempenho, eliminando o erro em regime permanente. No entanto, seu desempenho é bastante prejudicado quando o processo opera fora do ponto de operação no qual foi feito o projeto. Para o controlador por LER, não existe este problema, o controle é feito em toda a faixa de operação do tanque. Porém, foi necessário adicionar um controlador PI em sua lei de controle para eliminar o erro em regime permanente. Foi possível constatar que a técnica da LER, em conjunto com uma técnica linear, pode apresentar excelentes resultados para o controle de nível em sistemas não lineares.

**Palavras-chave:** Controle de Nível, Linearização, Tanque Cônico, Sistema Não Linear, Controle PI.

# Abstract

The area of Control Systems has fundamental importance in the industries, because with its application is possible to increase productivity, profitability, and optimize industrial processes. In this processes, there are critical variables that need be controlled, such as temperature, level, pressure, and flow. The control of this variables is of great importance in the operation of these processes. Therefore, the work present a monotank system with variable area to control the liquid level. The plant constructed is consisting of a conical tank and a reservoir tank. The control in conical tank is very common in the petrochemical, food and other industries. The mathematical model of the tank is obtained from the physical equations of the process and validated experimentally. The objective is to control the liquid level in the tank using a linear technique, PI (Proportional Integral) control designed by the Direct Synthesis method and, also, a non-linear technique, EFL (Exact Feedback Linearization) control. The PI control is implemented in continuous time and in discrete time. Both present good performance, eliminating the steady-state error. However, their performance is impaired when the process operates outside the point of operation in which the project was done. For the controller by EFL, there is no such problem, the control is done throughout the entire range of operation of the tank. However, it was necessary to add a PI controller in its control law to eliminate the steady-state error. It was possible to verify that the EFL technique, together with a linear technique can present excellent results for level control in nonlinear systems.

**Keywords:** Level Control, Linearization, Conical Tank, Nonlinear System, PI Control.

# 1 Introdução

A engenharia trata de aplicar conhecimento científico para o benefício da humanidade. E nesse sentido, tem-se o engenheiro de sistemas de controle que visa aplicar seus conhecimentos para realizar o controle dos sistemas à sua volta, objetivando contribuir com a sociedade fornecendo produtos úteis e econômicos (DORF; BISHOP, 2009).

A aplicação das tecnologias de controle e automação em processos industriais é vantajosa, pois pode aumentar o nível de qualidade dos produtos, minimizar o tempo de reprocessamento e aumentar a confiabilidade dos sistemas. Dessa forma, o projeto adequado dos controladores automáticos é essencial no sentido de evitar que os equipamentos operem em regiões indesejadas onde ocorre, por exemplo, a deterioração mais rápida dos mesmos, aparecimento de não linearidades naturais ao processo ou não linearidades duras, como saturação, etc. Por isso, cada vez mais intensifica-se as pesquisas sobre tal assunto, de maneira que a melhora contínua no desempenho dos processos automáticos seja efetiva (CAMPOS; TEIXEIRA, 2006).

Na maioria dos processos industriais existem variáveis críticas a serem controladas. O controle de temperatura, pressão, vazão e nível, por exemplo, é uma tarefa de grande importância no funcionamento de tais processos. Uma das principais dificuldades que o controle dessas variáveis apresenta é o tipo de dinâmica que governa tais sistemas, que podem ser lineares ou não lineares (JAUREGUI et al., 2016).

Dessa maneira, controlar processos industriais é uma tarefa desafiadora por várias razões, como o aparecimento de comportamentos com dinâmica não linear, a presença de parâmetros incertos e variantes no tempo, restrições na variável manipulada, interação entre variáveis manipuladas e controladas, distúrbios não medidos e frequentes, tempo morto nos sinais de saída, entre outros (JOSEPH; ISAAC, 2013).

O controle de nível de líquido nos tanques e o controle de vazão entre os tanques é um problema básico nas indústrias. Em muitos processos tais como, colunas de destilação, evaporadores, rebolisadores e tanques de mistura, o nível de líquido no recipiente é de grande importância na operação do mesmo. Um nível muito elevado pode, por exemplo, perturbar o equilíbrio da reação, causar danos nos equipamentos ou resultar em derramamento de material. Além do mais, se o nível for muito baixo, pode ter consequências ruins para as operações sequenciais. Assim percebe-se que o controle do nível de líquido é uma tarefa importante e comum nas indústrias de processos (JOSEPH; ISAAC, 2013).

Na literatura clássica, muitas técnicas de projetos de controladores lineares são utilizadas para controlar sistemas não lineares, o que não proporciona bons resultados quando o sistema se afasta do ponto de operação utilizado no projeto do controlador. Nesse caso, a aplicação de técnicas de controle que levem em consideração a presença de não linearidades pode ser uma boa alternativa (DORF; BISHOP, 2009). Dada as considerações

anteriores, no presente trabalho é descrito o desenvolvimento de um sistema monotanque, cuja não linearidade é fortemente evidenciada por sua variação na área de seção transversal. Além do mais, é apresentado um estudo de técnicas de controle aplicadas sobre esse sistema de controle experimental não linear, visando compreender e explicitar melhor as relações que as não linearidades exercem em uma malha de controle.

## 1.1 Alguns Trabalhos Precursores

Diversos processos envolvendo tanques são apresentados na literatura, todos eles com construções e aplicações bastante particulares. A seguir, em ordem cronológica, alguns desses trabalhos são brevemente discutidos. Tais trabalhos, constituíram um aspecto motivador para a realização do presente projeto.

Oliveira, Resende e Maia (1997) apresentam uma aplicação experimental da técnica de *Gain Scheduling* (Escalonamento de Ganho) para o controle de altura de nível de tanques interativos descritos por um modelo dinâmico não linear. A técnica consiste na obtenção de modelos linearizados em torno de diversos pontos de operação da planta, para os quais são projetados controladores lineares utilizando técnicas convencionais de controle linear. A planta foi construída no Laboratório de Controle de Processos da Universidade Federal de Minas Gerais.

Gosmann (2002) faz um estudo do controle de sistemas multivariáveis não lineares utilizando três tanques de água interconectados, em que o objetivo é controlar o nível de água. No trabalho, são testadas e comparadas três técnicas diferentes de controle. Primeiramente é utilizado um controlador PID (Proporcional, Integral e Derivativo) isoladamente em cada sub-sistema, outra técnica utilizada é a de controle no espaço de estados, pelo fato do sistema ser multivariável. Como as duas últimas técnicas não consideram as não linearidades do processo, exige-se que os controladores sejam parametrizados para cada ponto de operação. Para contornar tal problema, é utilizada a técnica da linearização exata. Nesse caso, inicialmente é realizada uma compensação não linear que cancela as não linearidades da planta e desacopla o sistema, e só então é projetado um controlador linear para o sistema pré-compensado. Isso permite que técnicas de controle linear possam ser utilizadas sem a necessidade de linearização em cada ponto de operação.

Fonseca (2012) realiza experimentos em uma planta didática de nível T5552 (fabricante Amatrol (2011)) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, abordando modelagem matemática de seus componentes, simulações, identificação e controle do sistema. A planta consiste em um equipamento cuja estrutura possui uma instrumentação industrial associada. A modelagem foi feita utilizando ajuste de curvas para traduzir matematicamente o comportamento dos componentes do sistema. Devido às não linearidades associadas à planta e a mudanças em sua dinâmica, optou-se usar um controlador adaptativo auto-sintonizável direto (*Direct Self-Tuning Regulator –DSTR*) com ação integral e

também um controlador com *Gain Scheduling*. O controlador DSTR foi projetado com base no método de posicionamento de polos e teve seus parâmetros calculados por meio da técnica dos mínimos quadrados recursivos.

No trabalho de Joseph e Isaac (2013), é apresentado um sistema formado por um tanque cônico não linear. Foi utilizado um Controlador Adaptativo por Modelo de Referência (MRAC) para controlar o nível de água. O método proposto ajusta os parâmetros do controlador em resposta a alterações e distúrbios na planta, consultando o modelo de referência que especifica as propriedades do sistema de controle desejado. No trabalho, o modelo de processo é determinado experimentalmente pela técnica de modelagem caixa preta, encontrando-se um modelo de primeira ordem. Um controlador convencional PI (Proporcional e Integral) baseado no método de Ziegler-Nichols foi projetado e os resultados comparados com o MRAC. Os resultados mostraram melhor performance do controlador MRAC em relação ao controlador PI, onde seu erro foi minimizado.

Em Brito e Silva (2015), é avaliado o desempenho do controle de nível de um tanque cônico utilizando um controlador PID modificado além de fazer uso da técnica de Linearização Exata por Realimentação para que o sistema atue em toda a faixa de operação. O trabalho resultou em um modelo robusto com parâmetros que podem ser substituídos por suas constantes. A simulação computacional revelou que a metodologia da linearização aplicada é adequada para o projeto de controladores lineares em sistemas complexos.

Jauregui et al. (2016) aplicam estratégias de controle PID de ordem fracional para controlar o nível de um tanque cônico por meio de simulações. Para isso, deriva-se um modelo fenomenológico não linear melhorado que caracteriza o volume do tanque de forma mais apropriada do que a obtida usando a fórmula clássica do volume de um cone. Utilizando uma técnica de otimização heurística por enxame de partículas são determinados os parâmetros ideais dos controladores que minimizam o índice de erro absoluto. Utiliza-se um modelo não linear, sem simplificações ou aproximações em torno dos pontos de operação, de forma que os controladores são capazes de controlar de maneira eficiente o nível de líquido do tanque cônico.

## 1.2 Motivação

Controlar o nível em tanques é um fator importante a considerar em sistemas de controle. Tanques de base reta ou cilíndrica são mais utilizados na indústria, mas eles não garantem uma drenagem completa dos líquidos. Assim, é introduzido o uso de tanques cônicos que permitem uma melhor drenagem (JAUREGUI et al., 2016). Nas indústrias, o controle de nível de líquido em um tanque cônico é um requisito fundamental, pois a forma do tanque varia continuamente (JOSEPH; ISAAC, 2013).

Dessa forma, a principal motivação do presente trabalho é a implementação de um

sistema monotanque para controle de nível com uma geometria que foge das comumente apresentadas nos processos industriais. Além do mais, este trabalho tem importância didática, pois o sistema desenvolvido poderá ser utilizado nas aulas das disciplinas da área de sistemas de controle. Assim, o aluno terá mais uma oportunidade de realizar experimentos práticos, interagindo em tempo real com o sistema físico, com aplicações em sistemas de controle no tempo contínuo e discreto, controle não linear, modelagem, instrumentação entre outras.

### 1.3 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal desenvolver um sistema monotanque automatizado para aplicação de técnicas de modelagem e controle. A planta utilizada para a realização dos experimentos práticos se encontra no Laboratório de Controle e Automação do Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da UFOP. Dessa forma, é necessário cumprir alguns objetivos específicos, como:

1. Obter, por meio das equações físicas do processo, um modelo não linear e, posteriormente, aplicar técnicas de linearização ao mesmo;
2. Realizar técnicas de calibração, utilizando o método dos mínimos quadrados, na calibração dos instrumentos para obtenção de parâmetros do modelo;
3. Projetar controladores PI (Proporcional e Integral) e LER (Linearização Exata por Realimentação), a fim de eliminar o erro em regime permanente e o sobressinal;
4. Realizar simulações com o auxílio do *software* MATLAB, do sistema em malha aberta e em malha fechada com o controlador projetado;
5. Aplicar as técnicas de controle projetadas ao sistemas monotanque e comparar os resultados experimentais com os simulados.

### 1.4 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 1, é apresentada uma introdução com a descrição de alguns trabalhos precursores bem como as motivações que impulsionaram a realização deste projeto e os objetivos do mesmo.

No Capítulo 2, é feito um estudo acerca dos conceitos aplicados na realização do trabalho. Ainda neste capítulo, é descrita a forma utilizada para a obtenção do modelo não linear usado para representar a dinâmica do sistema. É apresentado, também, a função de

transferência no domínio de Laplace obtida por técnicas de linearização, necessária para o projeto do controlador PI.

No Capítulo 3, são apresentados os métodos e materiais utilizados no desenvolvimento do protótipo. Também, são apresentadas as calibrações do sensor e do atuador, possibilitando assim encontrar alguns parâmetros do modelo do sistema. Ao final do capítulo, é realizado o projeto dos controladores PI e LER.

No Capítulo 4, são apresentados os resultados obtidos por meio de simulações e também os resultados obtidos experimentalmente, tanto para o controle PI quanto para o controle por LER. Neste capítulo é apresentado, também, o estudo comparativo entre as técnicas de controle implementadas.

Finalmente, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões acerca do trabalho realizado, as considerações finais e perspectivas para trabalhos futuros.

## 2 Revisão Bibliográfica

No presente capítulo, são apresentados os conceitos abordados durante a realização deste trabalho. Na Seção 2.1 são vistas as formas de representação de sistemas de controle. A Seção 2.2 apresenta o diagrama de blocos de um sistema de controle digital. Na Seção 2.3, são vistos métodos de linearização de modelos, para que se possa aproximar o sistema não linear à um ponto de operação. A Seção 2.5 mostra a estrutura do controlador PID. Por fim, na Seção 2.6 é realizada a modelagem matemática do sistema monotanque, com a aplicação da técnica de linearização, apresentada na Seção 2.3, em torno do ponto de operação. Dessa forma, são explicitadas as representações linearizadas obtidas utilizando Espaço de Estados e Função de Transferência.

### 2.1 Formas de Representação

#### 2.1.1 Função de Transferência no Tempo Contínuo

Modelos matemáticos de sistemas físicos são utilizados para projetar e analisar sistemas de controle. A dinâmica dos sistemas geralmente são descritas na forma de equações diferenciais. Como a maioria dos sistemas são não lineares é necessário utilizar aproximações de linearizações para que, assim, seja possível o uso de técnicas baseadas na transformada de Laplace. Sendo assim, obtêm-se as relações do tipo entrada-saída, sob a forma de função de transferência (DORF; BISHOP, 2009).

Segundo Castrucci, Bittar e Sales (2011), a função de transferência  $G(s)$  é definida como o quociente da transformada de Laplace do sinal de saída,  $Y(s)$ , pela transformada de Laplace do seu sinal de entrada,  $U(s)$ , quando todas as condições iniciais são nulas ( $c.i = 0$ ), ou seja,

$$G(s) = \left. \frac{Y(s)}{U(s)} \right|_{c.i=0}. \quad (2.1)$$

Na Figura 1 tem-se a representação de um sistema no tempo contínuo, linear e invariante no tempo, com entrada  $U(s)$  e saída  $Y(s)$ .

Figura 1 – Função de transferência no tempo contínuo.



### 2.1.2 Função de Transferência no Tempo Discreto

Um computador digital pode atuar como um controlador em um sistema de controle, onde utiliza dados amostrados em intervalos preestabelecidos. Esses dados amostrais podem ser transformados do domínio  $s$  para o domínio  $z$  por meio da relação  $z = e^{sT}$  (onde  $T$  é o período de tempo). O domínio de frequência complexa em termos de  $z$  possui propriedades semelhantes às do domínio  $s$  de Laplace (DORF; BISHOP, 2009).

Pode-se usar a transformada  $z$  de uma função de transferência para analisar a estabilidade e a resposta transitória de um sistema. De acordo com Castrucci, Bittar e Sales (2011), a função de transferência  $G(z)$  é dada pela razão da transformada  $Z$  da saída  $Y(z)$  e da entrada  $U(z)$  do sistema supondo condições iniciais nulas ( $c.i = 0$ ). Ou seja,

$$G(z) = \left. \frac{Y(z)}{U(z)} \right|_{c.i=0}. \quad (2.2)$$

Na Figura 2 tem-se a representação de um sistema no tempo discreto, linear e invariante no tempo, com entrada  $U(z)$  e saída  $Y(z)$ .

Figura 2 – Função de transferência no tempo discreto.

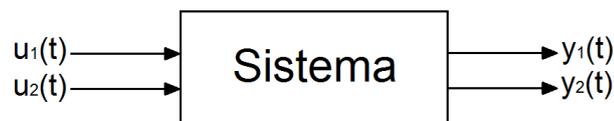


### 2.1.3 Variáveis de Estado de Sistemas Dinâmicos

De acordo com Dorf e Bishop (2009), o estado de um sistema é um conjunto de variáveis tal que o conhecimento das funções de entrada, com as equações que descrevem a dinâmica, fornecem os estados futuros e as saídas futuras do sistema.

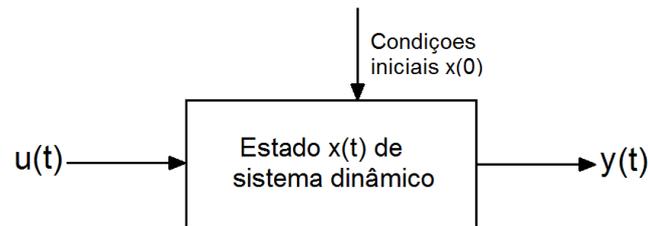
Na Figura 3,  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são os sinais de saída e  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  são os sinais de entrada. O conjunto de variáveis de estado  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é um conjunto tal que o conhecimento dos valores iniciais das variáveis de estado  $[x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]$  no instante  $t_0$  e dos sinais de entrada  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  para  $t \geq t_0$  é suficiente para determinar os valores futuros das saídas e das variáveis de estado (RUGH, 1996). A forma geral de um sistema dinâmico está mostrado na Figura 4.

Figura 3 – Diagrama de blocos de um sistema.



A dinâmica de um sistema é descrita por meio de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem escritas em termos das variáveis de estado  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,

Figura 4 – Sistema dinâmico.



$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1m}u_m \\
 \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \cdots + b_{2m}u_m \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \cdots + b_{nm}u_m
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ . Deve-se ressaltar que as equações de estado também podem ser apresentadas em tempo discreto, aplicando o mapeamento  $z = e^{sT}$ .

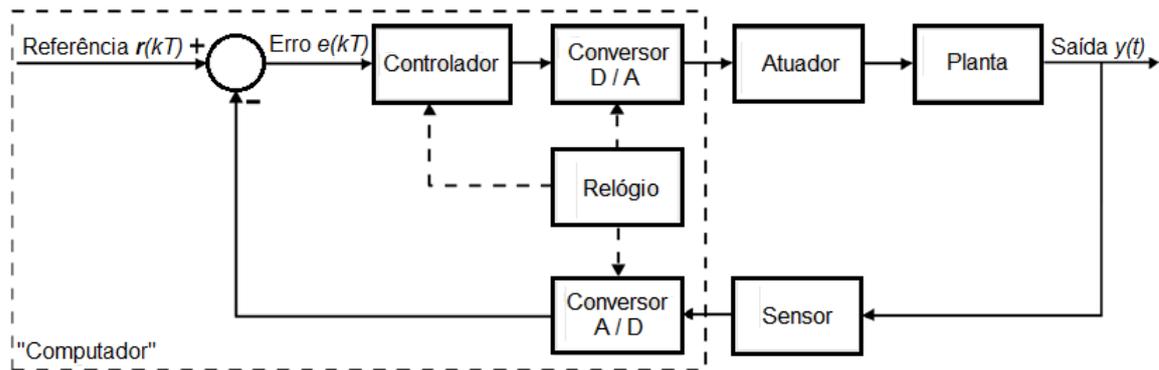
## 2.2 Sistemas de Controle Digital

De acordo com a Figura 5 um sistema de controle digital com realimentação, é composto da seguinte forma:

- A planta é o sistema dinâmico a ser controlado;
- O atuador é o dispositivo de potência, pelo qual o controlador consegue atuar na planta;
- O sensor é o elemento que converte uma grandeza física da saída da planta em um sinal eletrônico. O sinal proveniente da saída do sensor é um sinal analógico que é convertido para um sinal digital por meio de um conversor A/D. Da mesma forma, o sinal digital proveniente da saída do controlador é convertido para analógico por meio de um conversor D/A;
- O relógio é responsável pelo sincronismo de conversão;
- A referência (*Setpoint*) é ajustada internamente ao computador (dispositivo eletrônico capaz de realizar cálculos digitalmente);
- O erro é sinal de entrada do controlador, chamado de erro atuante.

O sistema da Figura 5, também, pode ser encarado como um sistema híbrido, pois aparecem sinais tanto no tempo discreto quanto no tempo contínuo. Dessa forma, a dinâmica do sistema em malha fechada pode ser completamente explicitada de duas maneiras: por transformada de Laplace ou por transformada Z.

Figura 5 – Diagrama de blocos de um sistema de controle digital.



Adaptado de: (CASTRUCCI; BITTAR; SALES, 2011)

### 2.2.1 Amostragem e Reconstrução de Sinais de Tempo Contínuo

Os sistemas de tempo discreto são sistemas dinâmicos onde as variáveis mudam apenas em instantes discretos de tempo denominados  $kT$  (onde  $T$  é o período de tempo entre instantes de amostragem  $k$ ). Estes sistemas ocorrem, por exemplo, quando se tem um sistema controlado por computador. Neste caso, as variáveis contínuas precisam ser amostradas para que o controlador possa realizar as operações de controle necessárias (OGATA, 1995).

Em sistemas controlados por computador a operação de amostragem é realizada por conversores analógico-digital (A/D). Um amostrador convencional consiste em um interruptor que se fecha para admitir um sinal de entrada a cada  $T$  segundos, convertendo-o em uma série de impulsos (CHARLES; NAGLE et al., 1995).

A conversão de um sinal analógico na correspondente versão amostrada é uma aproximação que implica a substituição da variação contínua das variáveis por um conjunto finito de valores. Este processo é chamado de quantização e, em geral, conduz a um pior desempenho do sistema de controle.

A reconstrução do sinal, é realizada por elementos denominados de seguradores. Em um sistema controlado por computador, essa reconstrução é realizada por conversores digital-analógico (D/A). Os seguradores mais simples convertem o sinal amostrado  $x^*(t)$  em um sinal com amplitude constante entre dois instantes consecutivos de amostragem  $x_k(t)$ , este processo é conhecido como *zero-order hold* (segurador de ordem zero). A Figura 6 mostra o conjunto amostrador-segurador e a Figura 7 apresenta os passos para a reconstrução do sinal  $x(t)$ .

#### 2.2.1.1 Transformada Z de um Sinal Amostrado

Segundo Castrucci e Sales (1990), a transformada Z permite a transformação de sinais no domínio do tempo discreto para o domínio Z, sendo utilizada em sinais discretos

Figura 6 – Conjunto amostrador-segurador.

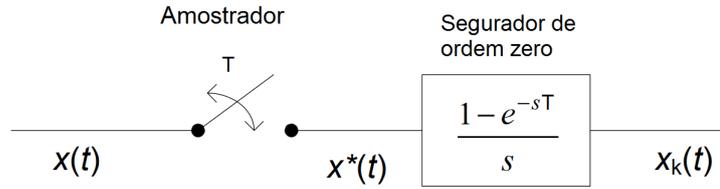
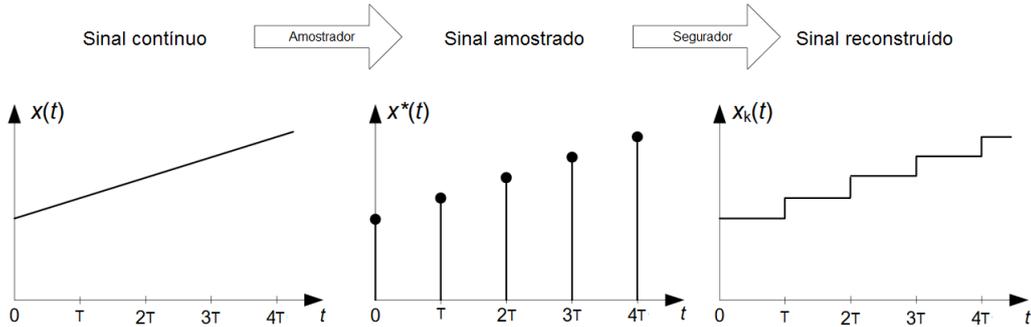


Figura 7 – Operações de amostragem e reconstrução aplicadas ao sinal contínuo  $x(t)$ .



Adaptado de: (OGATA, 1995)

da mesma forma que a transformada de Laplace é utilizada em sinais contínuos.

O sinal de tempo discreto, obtido a partir de um contínuo, pode ser representado como uma sequência de impulsos com amplitudes iguais à do sinal de tempo contínuo nos instantes de amostragem. O sinal resultante é definido por:

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta(t - kT) = u(0)\delta(t) + u(T)\delta(t - T) + u(2T)\delta(t - 2T) \dots \quad (2.4)$$

Aplicando a Transformada de Laplace ao sinal amostrado e fazendo a mudança de variável  $z = e^{Ts}$ , tem-se um procedimento alternativo para a definição da Transformada Z de um sinal amostrado (CASTRUCCI; SALES, 1990).

$$Z\{u(t)\} = U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k} = u(0) + u(T)z^{-1} + u(2T)z^{-2} + \dots \quad (2.5)$$

### 2.2.1.2 Transformada Z Inversa

A sequência de amostras representada por uma transformada Z, isto é, a transformada Z inversa, pode ser obtida por meio dos seguintes métodos: método de expansão em série por divisão contínua e método de expansão em frações parciais. Esses dois métodos podem ser vistos em Castrucci e Sales (1990).

### 2.2.1.3 Equações a Diferenças

Em geral, um sistema dinâmico linear de tempo discreto com entrada  $u(k)$  e saída  $y(k)$  pode ser descrito por uma equação a diferenças linear, como

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_0y(k) = b_nu(k+n) + b_{n-1}u(k+n-1) + \dots + b_0u(k). \quad (2.6)$$

#### Exemplo 2.2.1

Considere o exemplo de Ogata (1995), onde é dada a seguinte equação à diferença:

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 0, \quad (2.7)$$

com  $y(0) = 0$  e  $y(1) = 1$ .

Aplicando a propriedade do deslocamento à esquerda<sup>1</sup> da transformada  $Z$  na Equação (2.7) obtém-se

$$z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) + 3zY(z) - 3zy(0) + 2Y(z) = 0. \quad (2.8)$$

Substituindo as condições iniciais  $y(0) = 0$  e  $y(1) = 1$

$$z^2Y(z) - z + 3zY(z) + 2Y(z) = 0, \quad (2.9)$$

$$Y(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2}. \quad (2.10)$$

Aplicando a transformada  $Z\{a^k\} = \frac{z}{z-a}$ , tem-se

$$y(k) = (-1)^k - (-2)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

□

## 2.2.2 Projeto do Controlador Discreto

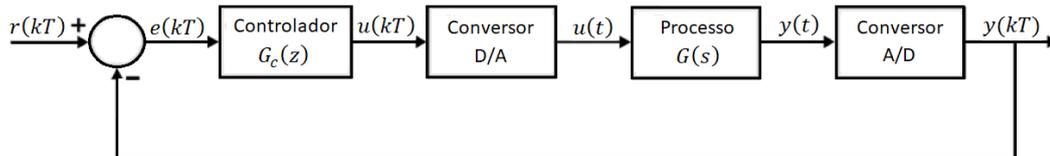
A Figura 8 apresenta o diagrama de blocos de um sistema em malha fechada com realimentação unitária e controle discreto, onde  $G_c(z)$  é a função de transferência discretizada do controlador,  $G(s)$  é a função de transferência no tempo contínuo do processo,  $r$  é a referência,  $e$  é o sinal erro,  $u$  é a ação de controle e  $y$  é a saída do sistema. De acordo com Castrucci, Bittar e Sales (2011), o subsistema D/A + processo mais +

<sup>1</sup>  $Z\{x(k+1)u(k)\} = z\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)u(k)z^{-k} - x(0)\right)$

A/D pode ser representado pela função de transferência  $H(z)$ , que é calculada tomando-se a transformada  $Z$  de  $\frac{G(s)}{s}$ , cujo resultado é:

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]. \quad (2.12)$$

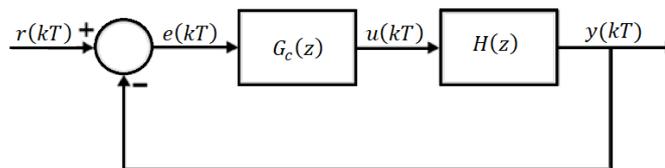
Figura 8 – Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada com controle discreto.



Adaptado de: (CASTRUCCI; BITTAR; SALES, 2011)

Assim, o diagrama equivalente do sistema discreto em malha fechada é representado pela Figura 9.

Figura 9 – Diagrama de blocos equivalente do sistema discreto em malha fechada.



Adaptado de: (CASTRUCCI; BITTAR; SALES, 2011)

Dessa forma, sendo  $R(z) = Z[r(kT)]$  e  $Y(z) = Z[y(kT)]$ , a função de transferência de malha fechada é dada por

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)H(z)}{1 + G_c(z)H(z)}. \quad (2.13)$$

### 2.2.3 Projeto do Controlador Discreto a partir do Projeto de Controlador Contínuo

Um sistema de controle contínuo apresenta um controlador no qual seu projeto é realizado inteiramente no plano  $s$  de Laplace. Para se obter um controlador discreto a partir de um sistema contínuo é necessário adicionar blocos de conversores A/D e D/A, conforme representado na Figura 5.

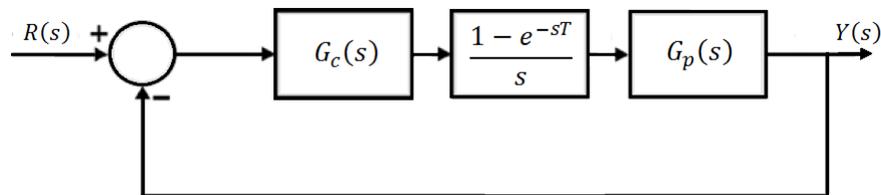
Dessa forma, os dois blocos conversores, geram um atraso de tempo na malha que reduz a estabilidade relativa do sistema. Tal atraso deve ser considerado no projeto do controlador contínuo, para que assim, quando o controlador discreto for implementado no

sistema não ocorra a instabilidade em malha fechada. A função que modela o processo de reconstrução do sinal, denominada segurador de ordem zero é,

$$G_{so} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \quad (2.14)$$

Assim, projeta-se o controlador contínuo como o diagrama de blocos da Figura 10. Quanto menor o período de amostragem, menor a influência na estabilidade do sistema. Finalmente, para obter-se o controlador discreto, utiliza-se métodos que fazem a aproximação do controlador contínuo  $G_c(s)$ , por exemplo Tustin, mapeamento polo-zero, entre outros (CASTRUCCI; BITTAR; SALES, 2011).

Figura 10 – Sistema de controle contínuo com segurador.



## 2.3 Linearização de Modelos

A maioria dos sistemas físicos apresentam algum tipo de não linearidade. Nessa classe de sistemas os modelos lineares são válidos apenas em uma faixa de operação.

Porém, analisar a dinâmica e projetar controladores para modelos não lineares é uma tarefa relativamente mais trabalhosa do que o projeto dos modelos lineares, uma vez que os métodos clássicos da teoria de sistemas de controle não são aplicáveis aos sistemas não lineares (SLOTINE; LI, 1998). Contudo, se o objetivo for simplificar a análise e o foco estiver apenas em uma região de operação do sistema, pode-se aproximar o modelo não linear por um linear aplicando-se técnicas de linearização em torno de um ponto de operação.

### 2.3.1 Estabilidade pela Linearização

Nesta seção é apresentado o método da linearização de Lyapunov, que utiliza o conceito de sistema linearizado para analisar a estabilidade de sistemas não lineares. Tal método justifica as técnicas de controle linear utilizadas em torno dos pontos de operação de determinado sistema (SLOTINE; LI, 1998).

## 2.3.1.1 Sistema Linearizado

De acordo com Slotine e Li (1998), um sistema autônomo representado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.15)$$

Se  $\mathbf{f}$  for uma função não linear de classe  $C^1$ , ou seja, é diferenciável uma vez, então (2.15) pode ser escrita como

$$\dot{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_e=0} \mathbf{x} + \mathbf{f}_{os}(\mathbf{x}), \quad (2.16)$$

onde  $\left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)$  representa o primeiro termo do desenvolvimento de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  em série de Taylor e  $\mathbf{f}_{os}(\mathbf{x})$  representa os termos restantes de ordem superior. Uma vez que o desenvolvimento em série é feito em torno do ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_e = 0$ , a expressão (2.16) não tem termo constante.

Repare que  $\left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)$  representa a matriz Jacobiana de  $\mathbf{f}$ , e pode ser representada por  $A$ ,

$$A \Big|_{x_e=0} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Nestas condições, o sistema (2.16) pode ser escrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = A \Big|_{x_e=0} \mathbf{x} + \mathbf{f}_{os}(\mathbf{x}). \quad (2.18)$$

Se em (2.18) for ignorado os termos de ordem superior  $\mathbf{f}_{os}(\mathbf{x})$ , então

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (2.19)$$

Ao sistema (2.19) dá-se o nome sistema linearizado.

Repare que para obter-se os termos  $\mathbf{f}_{os}(\mathbf{x})$  não é necessário calcular derivadas de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  de ordem superior à 1ª (nem tal condição é exigida para obter a linearização), basta calcular o sistema linearizado e subtraí-lo do sistema original:

$$\mathbf{f}_{os}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (2.20)$$

Note que a linearização pode ser aplicada a sistemas excitados com entrada  $\mathbf{u}$ , invariante no tempo,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{u}(\mathbf{t})], \quad (2.21)$$

resultando no desenvolvimento

$$\dot{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_e=0, \mathbf{u}=0} \mathbf{x} + \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\mathbf{x}_e=0, \mathbf{u}=0} \mathbf{u} + \mathbf{f}_{\text{os}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (2.22)$$

ou ainda

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{\text{os}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (2.23)$$

sendo a linearização do sistema dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (2.24)$$

com

$$\mathbf{A} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_e=0, \mathbf{u}=0}, \quad (2.25)$$

e

$$\mathbf{B} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\mathbf{x}_e=0, \mathbf{u}=0}. \quad (2.26)$$

### 2.3.2 Método de Lyapunov da Linearização

Considere um sistema linear simples,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \quad (2.27)$$

Como se trata de um sistema simples a matriz  $\mathbf{A}$  é regular e, portanto, o único ponto de equilíbrio do sistema é a origem do espaço de estados,  $x_e = 0$ . Se o sistema é linear, a estabilidade é sempre global e o seu tipo é independente das condições iniciais e, portanto, independente da distância entre o ponto de partida em  $t = 0$  e o ponto de equilíbrio.

Segundo Slotine e Li (1998), em relação a estabilidade, um sistema linear contínuo apenas pode ser:

- **Exponencialmente estável:** matriz  $\mathbf{A}$  com todos os autovalores no semiplano complexo  $s$  esquerdo;
- **Marginalmente estável:** matriz  $\mathbf{A}$  com os polos no semi-plano complexo  $s$  esquerdo e com pelo menos um valor próprio sobre o eixo  $iw$ ;
- **Instável:** matriz  $\mathbf{A}$  com pelo menos um valor próprio no semi-plano complexo  $s$  direito. Neste caso, a solução  $\|x(t)\|$  tende para  $\infty$  quanto  $t \rightarrow \infty$ .

Em Slotine e Li (1998) o método da linearização de Lyapunov parte da análise da matriz  $A$  do sistema linearizado para concluir sobre a estabilidade do sistema não linear e afirma o seguinte:

1. Se o sistema linearizado for (exponencialmente) estável, o correspondente sistema não linear é assintoticamente estável.
2. Se o sistema linearizado for instável, o correspondente sistema não linear é instável.
3. Se o sistema linearizado for marginalmente estável, nada se pode concluir sobre o sistema não linear correspondente.

Note que se o valor do estado estiver próximo do equilíbrio, o sistema linearizado representa com bastante fidelidade o comportamento do sistema não linear de partida. No entanto, se o sistema linearizado for marginalmente estável é de se esperar que os termos de ordem superior desempenhem um papel decisivo no comportamento do sistema não linear (SLOTINE; LI, 1998).

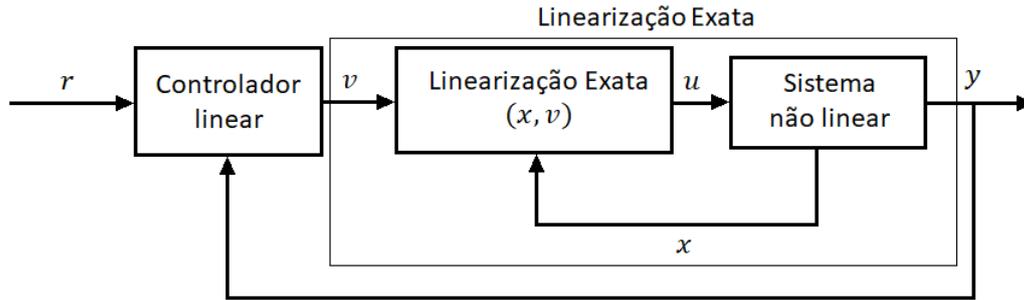
## 2.4 Linearização Exata por Realimentação de Sistemas Não Lineares

A desvantagem da técnica de linearização de um sistema em torno de um ponto de operação é que a validade é assegurada apenas em uma região em torno do ponto de operação e, durante o seu funcionamento, o estado do sistema apresenta um comportamento diferente do esperado, o que reduz a eficiência do controlador (FRANCO et al., 2006). Uma das possibilidades para contornar tal problema é o emprego das técnicas de linearização exata por realimentação. De acordo com Franco et al. (2006), nesta técnica uma malha de realimentação transforma o sistema não linear em um sistema linear e uma segunda malha com um controlador linear atua sobre a primeira malha, como mostra a Figura 11. Em Chen (1999), afirma-se que esse procedimento oferece diversas vantagens, tais como a redução dos efeitos das variações dos parâmetros, suprimindo os ruídos e perturbações. Tal método permite a aplicação de técnicas de controle linear ao sistema linearizado, por exemplo PID, fazendo com que ele se aproxime mais do sistema real.

Segundo Slotine e Li (1998), não são todos os tipos de sistemas que podem ser linearizados exatamente por realimentação: podem ser linearizado os sistemas da classe SISO (*Single Input, Single Output*) em que na equação de estado, as variáveis de entrada e de estado são separáveis, ou seja, sistemas representáveis pelo modelo na forma canônica companheira,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \\ y = \mathbf{h}(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (2.28)$$

Figura 11 – Estrutura do controle por linearização exata.



Este procedimento pode não ter êxito quando não se conhece o grau relativo<sup>2</sup> do sistema que se está analisando. Este mesmo grau relativo corresponde ao número de estados observáveis do sistema, descrito por (2.28), podendo vir a serem controlados. Caso o grau relativo seja menor que o grau do próprio sistema, há uma dinâmica interna, não observável, que precisará ser analisada separadamente. Para o caso do grau relativo ser igual ao grau do sistema, diz-se que há uma linearização por entrada-estado, onde todos os estados são observáveis, podendo ser controlados (SLOTINE; LI, 1998).

Dessa forma, para os casos em que é possível efetuar a linearização exata, normalmente é necessário realizar uma mudança de variável de estado

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x}), \quad (2.29)$$

e introduzir uma lei de controle

$$u = u(\mathbf{x}, v), \quad (2.30)$$

ou seja, realizar uma mudança de variável de controle, em que  $v$  é uma nova variável intermediária que conduz o sistema original (2.28), a um sistema linear.

#### Exemplo 2.4.1

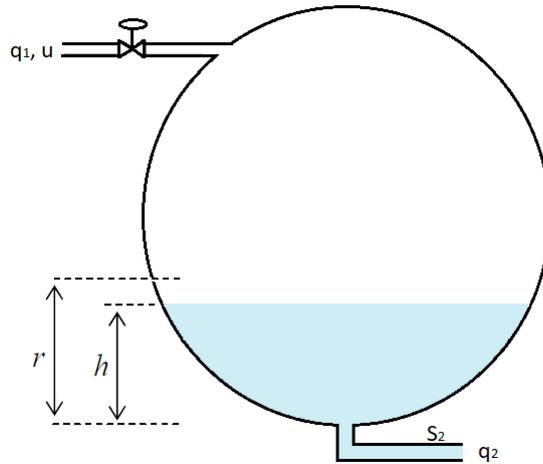
Considere-se o exemplo de Silva (2006), onde deseja-se controlar o nível do líquido no interior de um tanque esférico aberto, como é visto na Figura 12.

A variável a ser manipulada é a vazão de entrada  $u = q_1$ . A variável controlada é o nível do líquido no interior da esfera  $y = h$ . Existe uma vazão de saída  $q_2$  contínua de líquido para um reservatório, a qual depende da altura do líquido no interior da esfera, dada pela Equação de Bernoulli

$$q_2 = S_2 \sqrt{2gh}, \quad (2.31)$$

<sup>2</sup> Grau relativo é o número de derivações efetuadas na saída até que se obtenha uma equação que apresente a entrada do sistema  $u$  explicitamente.

Figura 12 – Controle de nível de uma esfera.



Adaptado de: (SILVA, 2006)

onde  $S_2$  representa a área do tubo por onde o líquido sai e  $g$  a aceleração da gravidade.

Neste sistema, a variação de volume no interior da esfera é resultante da diferença entre a vazão que entra e a vazão que sai. Representando por  $S(h)$  a área da superfície livre do líquido, obtém-se o volume de líquido integrando  $S(h)dh$  entre o intervalo 0 e  $h$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_0^h S(\zeta) d\zeta = u(t) - S_2 \sqrt{2gh(t)}, \quad (2.32)$$

ou ainda, desenvolvendo o lado esquerdo de (2.32),

$$S(h)\dot{h}(t) = u(t) - S_2 \sqrt{2gh(t)}. \quad (2.33)$$

Se o valor desejado para a altura,  $r$  (referência), estiver, por exemplo, à metade da altura da esfera, o ganho ideal para um controlador linear deverá ser bastante diferente do ganho ideal para uma referência igual a 1/4 da altura.

Uma lei de controle para linearizar (2.33), pode ser do tipo

$$u(t) = S(h)v(t) + S_2 \sqrt{2gh(t)} \quad (2.34)$$

em que  $v(t)$  é uma nova variável manipulada intermediária, escolhida por (2.34) de modo a tornar (2.33) linear. Assim, substituindo  $u(t)$  na equação do sistema, tem-se

$$\dot{h}(t) = v(t) \quad (2.35)$$

Este sistema pode ser controlado para uma referência  $r(t)$  variável no tempo utilizando a lei de controle

$$v(t) = \dot{r}(t) - Ce(t), \quad (2.36)$$

em que  $e = h - r$  representa o valor do erro e  $C$  é uma constante real. Substituindo (2.36) em (2.35) obtém-se

$$\dot{e}(t) + Ce(t) = 0. \quad (2.37)$$

Se a constante  $C$  for escolhida positiva, a solução de (2.37) tende para zero quando  $t \rightarrow \infty$ , ou seja, a equação do erro é exponencialmente estável. Se a referência  $r$  mudar, o novo erro tende exponencialmente para zero, o que significa que o nível do tanque segue a referência.

Substituindo a lei de controle (2.36) em (2.34) obtém-se

$$u(t) = S_2\sqrt{2gh} + S(h)\dot{r} - S(h)Ce. \quad (2.38)$$

O primeiro termo do lado direito de (2.38) é usado para compensar diretamente a vazão de saída no fundo do tanque. O segundo termo compensa as variações da referência e, por fim, o terceiro termo compensa outras perturbações do nível.

□

## 2.5 Controlador PID

O controlador PID (Proporcional, Integral e Derivativo) é um algoritmo de controle bastante utilizado na indústria de processos. De acordo com Takatsu, Itoh e Araki (1998), desde a década de 90 a grande maioria das malhas de controle de processos industriais são do tipo PID. Ele pode ser implementado como um controlador analógico ou como parte de um sistema digital de controle. O modelo matemático de um controlador PID é dado por

$$m(t) = K_c \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{\partial e(t)}{\partial t} \right), \quad (2.39)$$

sendo:

$m(t)$ : sinal de saída do controlador, chamado de variável manipulada;

$e(t)$ : sinal de entrada do controlador, chamado de erro atuante;

$K_c$ ,  $T_I$  e  $T_D$ : parâmetros de ajuste do controlador, os quais representam os termos proporcional, integral e derivativo, respectivamente.

A função de transferência do controlador PID é

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_c \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right). \quad (2.40)$$

O processo de ajuste dos parâmetros  $K_c$ ,  $T_I$  e  $T_D$  é comumente chamado de sintonia do controlador. Neste trabalho, será utilizado o método Síntese Direta uma vez que o modelo do processo monotanque é conhecido.

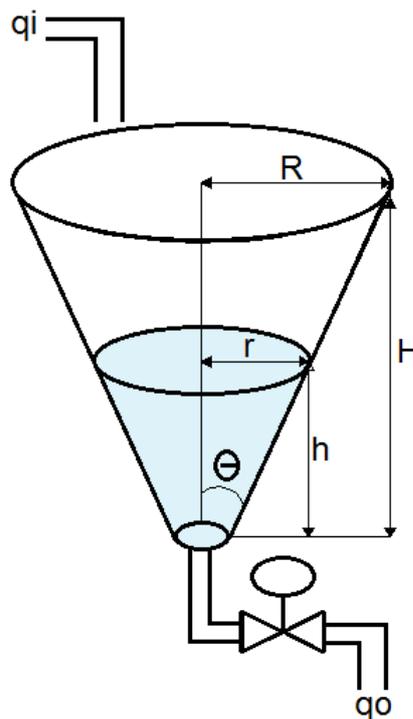
## 2.6 Modelagem do Tanque de Área Variável

O diagrama esquemático do sistema de tanque cônico é mostrado na Figura 13. O modelo físico do tanque pode ser obtido considerando o nível como a variável de controle e a vazão de entrada do tanque como a variável manipulada (ARAVIND; VALLUVAN; RANGANATHAN, 2013).

Os parâmetros operacionais são:

- $q_i$  - vazão de entrada do tanque;
- $q_0$  - vazão de saída do tanque;
- $H$  - altura total do tanque;
- $R$  - raio no topo do tanque;
- $h$  - altura do líquido no tanque;
- $r$  - raio da superfície do líquido no tanque;
- $K$  - coeficiente da válvula;
- $\theta$  - ângulo entre a geratriz e o centro do cone.

Figura 13 – Diagrama esquemático do sistema de tanque cônico.



A área da seção transversal do tanque cônico é

$$A = \pi r^2. \quad (2.41)$$

$$\tan(\theta) = \frac{r}{h} = \frac{R}{H}. \quad (2.42)$$

$$r = R \frac{h}{H}. \quad (2.43)$$

Substituindo (2.43) em (2.41) tem-se que a área é dada por

$$A = \pi \frac{h^2 R^2}{H^2}. \quad (2.44)$$

De acordo com a equação do balanço de massa, sabe-se que a variação do volume é igual a vazão de entrada menos a vazão de saída, como mostra a Equação (2.45)

$$A \frac{dh}{dt} = q_i - q_o, \quad (2.45)$$

onde,  $q_o$  é dado pela Equação (2.46), de acordo com a Equação de Bernoulli apresentada no Apêndice A.

$$q_o = K \sqrt{h}. \quad (2.46)$$

Utilizando (2.44) e (2.46) em (2.45), obtém-se

$$A \frac{dh}{dt} = A \dot{h} = q_i - K \sqrt{h}. \quad (2.47)$$

Assim, o modelo em espaço de estados (EE) do tanque pode ser escrito como se segue

$$\dot{h} = \frac{q_i - K \sqrt{h}}{\pi R^2 h^2 / H^2}. \quad (2.48)$$

A Equação (2.48) é não linear e pode ser linearizada utilizando-se a expansão em série de Taylor em torno de um ponto de operação ( $p.o$ ), dada pela Equação (2.49), a qual é uma equação genérica para a linearização.

$$f(x,y) \approx f(x,y) \Big|_{p.o} + \frac{df(x,y)}{dx} \Big|_{p.o} (x - x_{p.o}) + \frac{df(x,y)}{dy} \Big|_{p.o} (y - y_{p.o}). \quad (2.49)$$

Com isso, aplica-se a Equação (2.49) para realizar a linearização do modelo em torno dos pontos de operação  $h_s$  e  $q_s$

$$\dot{h} = \dot{h}_s + \frac{d\dot{h}}{dq_i} \Big|_{h_s, q_s} (q_i - q_s) + \frac{d\dot{h}}{dh} \Big|_{h_s, q_s} (h - h_s), \quad (2.50)$$

$$\dot{h} - \dot{h}_s = \frac{q_i - q_s}{\pi R^2 h_s^2 / H^2} + \left[ \frac{-2q_s}{\pi R^2 h_s^3 / H^2} + \frac{3K}{2\pi R^2 h_s^{5/2} / H^2} \right] (h - h_s), \quad (2.51)$$

para  $\alpha = \frac{1}{\pi(R/H)^2}$  e  $\beta = K\alpha$ .

$$\dot{h} - \dot{h}_s = \frac{\alpha(q_i - q_s)}{h_s^2} + \left[ \frac{-2q_s\alpha}{h_s^3} + \frac{3\beta}{2h_s^{5/2}} \right] (h - h_s). \quad (2.52)$$

De acordo com Vijula et al. (2014), em condições de estado estacionário tem-se que,  $\alpha q_s = \beta h_s^{5/2}$ .

$$\dot{h} - \dot{h}_s = \frac{\alpha(q_i - q_s)}{h_s^2} + \left[ \frac{-2\beta h_s^{1/2}}{h_s^3} + \frac{3\beta}{2h_s^{5/2}} \right] (h - h_s). \quad (2.53)$$

Agora, introduzindo as variáveis  $Y = h - h_s$  e  $U = q_i - q_s$

$$\dot{Y} = \alpha h_s^{-2} U + \left[ -2\beta h_s^{-5/2} + \frac{3}{2}\beta h_s^{-5/2} \right] Y, \quad (2.54)$$

$$\dot{Y} = \alpha h_s^{-2} U - \frac{1}{2}\beta h_s^{-5/2} Y, \quad (2.55)$$

$$sY = \alpha h_s^{-2} U - \frac{1}{2}\beta h_s^{-5/2} Y. \quad (2.56)$$

Assim, a função de transferência do sistema (2.56) é

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C_1}{\tau s + 1}, \quad (2.57)$$

onde,  $\tau = \frac{2}{\beta} h_s^{5/2}$  e  $C_1 = \frac{2}{\beta} h_s^{1/2} \alpha$ .

Na Tabela 1, são resumidos os modelos obtidos para o sistema monotanque.

Tabela 1 – Modelos para o sistema monotanque: EENL (2.48), EEL (2.55) e função de transferência (2.57).

Modelo em espaço de estados não linear	$\dot{h} = \frac{q_i - K\sqrt{h}}{\pi R^2 h^2 / H^2}$
Modelo em espaço de estados linear	$\dot{Y} = \alpha h_s^{-2} U - \frac{1}{2}\beta h_s^{-5/2} Y$
Função de transferência	$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C_1}{\tau s + 1}$

## 3 Metodologia

Neste capítulo é apresentada a metodologia utilizada na implementação do projeto. Na Seção 3.1 é vista uma breve descrição do sistema monotanque. Em seguida, na Seção 3.2 é apresentada a instrumentação utilizada na malha de controle, composta pelo elemento sensor, atuador e microcontrolador. A Seção 3.3 mostra como foi feita a calibração estática da bomba e do sensor. Por fim, as Seções 3.4 e 3.5 apresentam os projetos desenvolvidos para os controladores PI e LER.

### 3.1 Descrição do sistema

A planta utilizada neste trabalho é composta por dois tanques, o tanque superior, de formato cônico, é onde deseja-se controlar o nível de água. O tanque inferior é o de reservatório. Uma bomba de água é acoplada no tanque reservatório para bombear o líquido para o tanque superior. O sensor está posicionado no tanque superior para que haja a medição e o monitoramento do nível de água, também na base do tanque foi instalada uma válvula para a drenagem do líquido para o reservatório.

A Figura 14 apresenta um desenho esquemático que ilustra a montagem da planta com seus componentes. O tanque reservatório tem a função de fornecer o líquido utilizado no controle. A bomba de água está fixada junto ao tanque reservatório para ser abastecida pela água armazenada e com isso abastecer o tanque onde é feito o controle. O tanque reservatório tem capacidade de armazenamento maior do que o tanque superior para garantir que a bomba não trabalhe a seco. O tanque cônico é o principal elemento do sistema, pois é onde realiza-se o controle de nível. Quando a bomba é acionada, o tanque começa a encher, o regime permanente é atingido quando a vazão se estabiliza e o nível do tanque se acomoda.

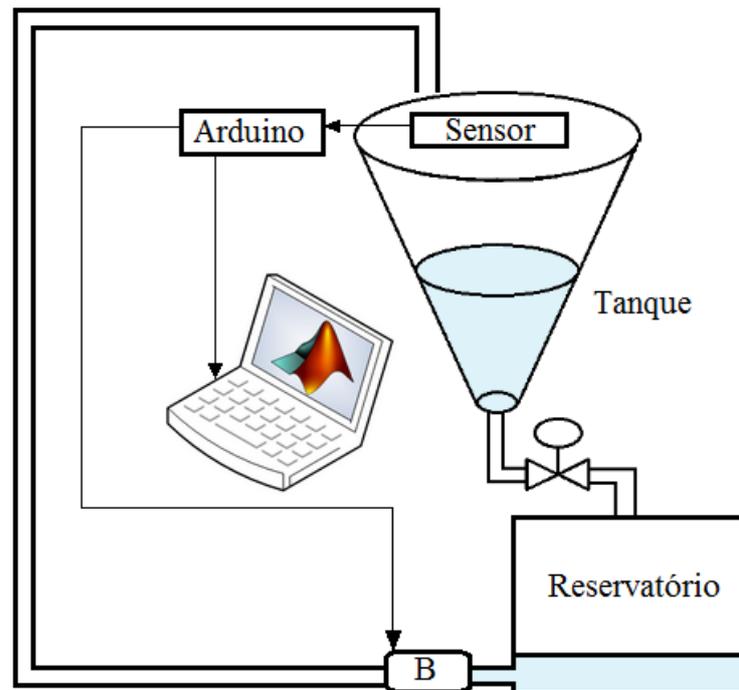
### 3.2 Instrumentação

Nesta seção, são descritos o sensor, *software* e a planta que são utilizados no presente trabalho, os quais possibilitam a análise das variáveis envolvidas no processo de modelagem e controle de nível do tanque.

#### 3.2.1 Sensor de Nível

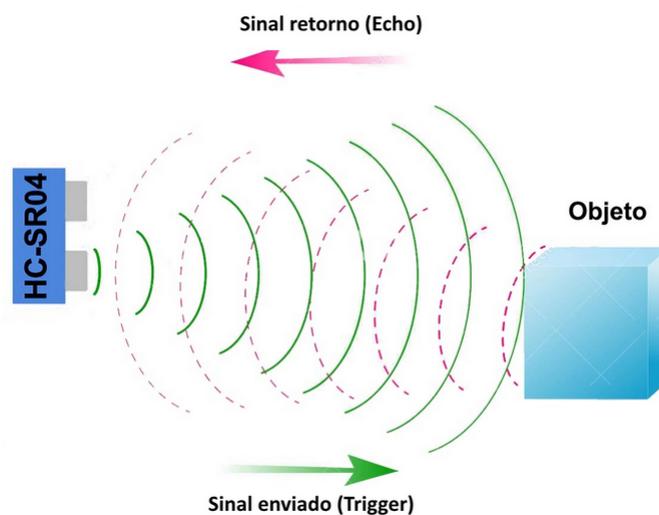
A medição de nível é feita por um sensor ultrassônico, o qual apresenta uma medição contínua do nível de líquido no tanque. No sensor ultrassônico, é utilizado um transdutor acústico especial que permite o envio ou recebimento de ondas sonoras. O

Figura 14 – Desenho da planta.



transdutor envia uma quantidade definida de ondas sonoras, as quais são refletidas pelo objeto a ser detectado, como é visto na Figura 15. Após o envio dos pulsos, o sensor ultrassônico é alternado para o modo de recepção. O tempo até a chegada de um possível eco é proporcional à distância do objeto até o sensor de proximidade. O microcontrolador recebe o sinal de tensão vindo do sensor de nível interpretando-o como altura.

Figura 15 – Exemplo de funcionamento do sensor ultrassônico.



Fonte: (FILIPFLOP, 2011)

O modelo de sensor utilizado é o HC-SR04, Figura 16. Nele, existe um circuito

de controle, um transmissor e um receptor ultrassônico. Segundo o fabricante Elecfreaks (2011), tal sensor fornece medidas de 20 mm a 4000 mm, cuja precisão pode chegar a 3 mm.

Figura 16 – Sensor HC-SR04.



Fonte: (ELECTFREAKS, 2011).

### 3.2.2 Atuador do Sistema

A função da bomba é controlar a intensidade de envio de água do tanque reservatório para o tanque a ser controlado. Ela é o elemento atuador que converte o sinal elétrico em vazão e auxilia na definição do *Setpoint* de acordo com o nível em relação onde se deseja realizar o controle.

A bomba d'água utilizada é um modelo encontrado em parabrisas de carros. Ela necessita de uma tensão de 12  $V_{DC}$  e consome uma corrente aproximada de 2 A. A bomba é apresentada na Figura 17.

Figura 17 – Bomba d'água 12 V.



Fonte: (DRIFT, 2017).

### 3.2.3 Microcontrolador

Microcontroladores são sistemas computacionais completos, ou seja, possuem uma unidade central de processamento (CPU), memórias de dados e de programas, sistema

de *clock* e variados periféricos tais como conversores A/D e temporizadores, todos em um mesmo componente.

### 3.2.3.1 Plataforma Arduino

O Arduino Nano é uma placa de circuito impresso bastante utilizado na criação de protótipos eletrônicos, baseado nas filosofias de *software* e *hardware* livres. Ele interage com o ambiente recebendo em suas entradas sinais de variados tipos de sensores e realizando o acionamento de luzes, motores ou outros atuadores.

Na Figura 18, é possível observar o Arduino Nano utilizado. Ele possui 14 pinos de entradas/saída digitais, 8 entradas analógicas, 1 porta serial de *hardware*, um oscilador de cristal de 16 MHz, uma conexão mini-USB, uma entrada de alimentação, um conexão ICSP e um botão de reset (ARDUINO, 2016).

Figura 18 – Placa Arduino Nano.



Fonte: (ARDUINO, 2016)

## 3.3 Calibração

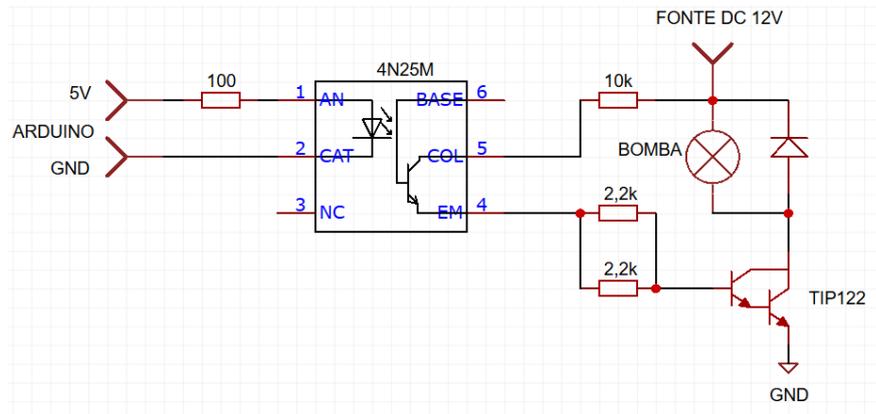
A calibração é definida como o conjunto de operações que estabelecem, sob condições especificadas, a relação entre os valores indicados por um sistema de medição e os valores correspondentes das grandezas estabelecidas por padrões (JABUONSKI et al., 2003).

### 3.3.1 Calibração da Bomba

O acionamento da bomba é realizado por um circuito de potência acionado por meio das saídas do Arduino, a Figura 19 apresenta tal circuito.

A dinâmica da bomba é muito mais rápida do que a dinâmica do tanque, dessa forma pode-se desconsiderá-la durante o processo de modelagem. A vazão na bomba pode ser escrita em função da tensão aplicada no circuito de acionamento, ou seja,  $q = x(v)$ , onde  $v$  é o sinal de comando na faixa de 0 a 12V. Para realizar a calibração da bomba, aplicou-se o seguinte procedimento, repetindo-o três vezes: fechou-se a válvula de escoamento de água do tanque e aplicou-se um degrau de tensão na bomba em um dado intervalo de

Figura 19 – Circuito de acionamento da bomba.

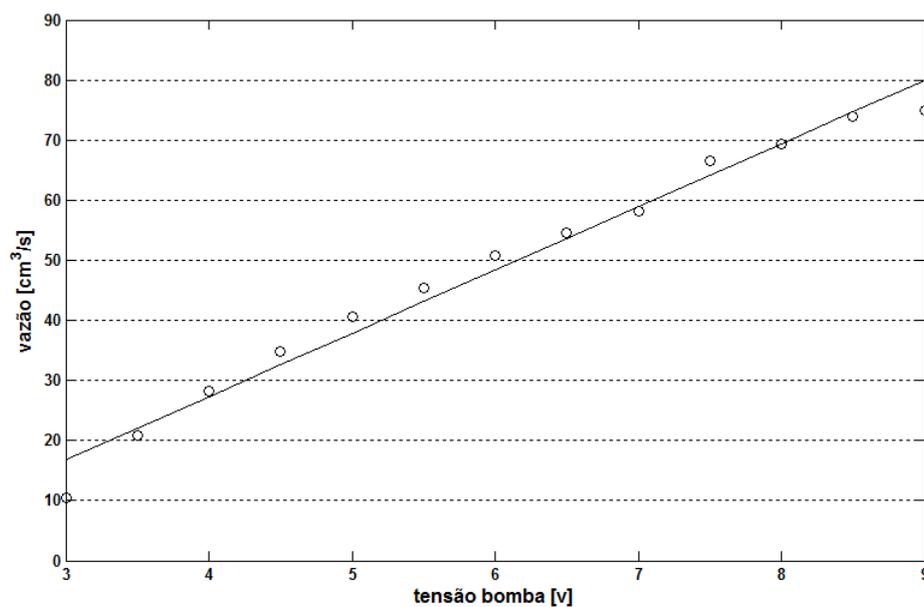


tempo para que um determinado volume fosse preenchido, em seguida calculou-se a vazão média na bomba para uma dada tensão.

A Figura 20 mostra a curva de calibração da bomba obtida utilizando-se o método dos mínimos quadrados (AGUIRRE, 2015). A fim de evitar o sobreaquecimento da bomba, determinou-se uma faixa de operação entre 3V e 9V. A expressão que modela a vazão na bomba em função da tensão de acionamento é:

$$q(v) = 10,51v - 14,72 \quad 3V < v < 9V. \quad (3.1)$$

Figura 20 – Curva de calibração da bomba. Os dados obtidos no ensaio estão representados por (o). A linha representa a curva ajustada.



### 3.3.2 Calibração do Sensor

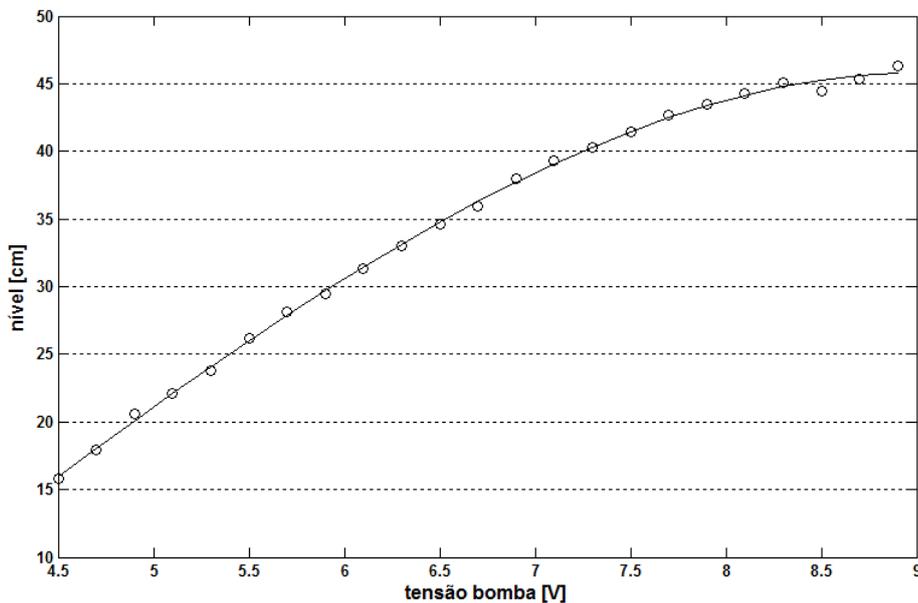
O sensor ultrassônico está instalado na parte superior do tanque, a uma distância de 50 cm da abertura da válvula de saída, o que equivale à altura total do tanque.

Assim como a bomba, o sensor possui uma dinâmica muito mais rápida do que a dinâmica do tanque, com isso pode-se obter uma resposta instantânea. Para se levantar a curva  $h$  cm x  $v$  volts, utilizou-se um método de calibração onde, para cada tensão entre 4,5V e 8,9V, com intervalo de 0,2V, foi medido o nível do tanque em estado estacionário. A calibração foi repetida por três vezes, após a terceira vez, fez-se o mesmo procedimento diminuindo a tensão em um intervalo de 0,2V para que assim fosse verificada a existência de histerese na resposta do sensor. Para a calibração realizada, observou-se que a histerese é desprezível. Dessa forma, a expressão do nível do tanque em função da tensão no acionamento da bomba obtida é

$$h(v) = -0,132v^3 + 1,546v^2 + 4,535v - 23,683. \quad (3.2)$$

A Figura 21 mostra a curva de calibração do sensor, que também foi obtida por meio do método dos mínimos quadrados (AGUIRRE, 2015).

Figura 21 – Curva de calibração do sensor. Os dados obtidos no ensaio estão representados por (o). A linha representa a curva ajustada.



### 3.3.3 Parâmetros do Modelo

No modelo matemático obtido em (2.48), somente a área da seção transversal do tanque é conhecida. Por conseguinte é necessário determinar o coeficiente da válvula  $K$ , que é definido a partir da Equação de Bernoulli.

Para isso, realizou-se um teste estático onde, para uma vazão de entrada conhecida  $q_i$  no tanque, aguardou-se um tempo suficiente para que a altura do nível de líquido se estabilizasse. Nessa situação, a vazão de saída  $q_0$  é igual a vazão de entrada  $q_i$ . O resultado do teste é apresentado na Tabela 2.

Tabela 2 – Resultado do teste estático.

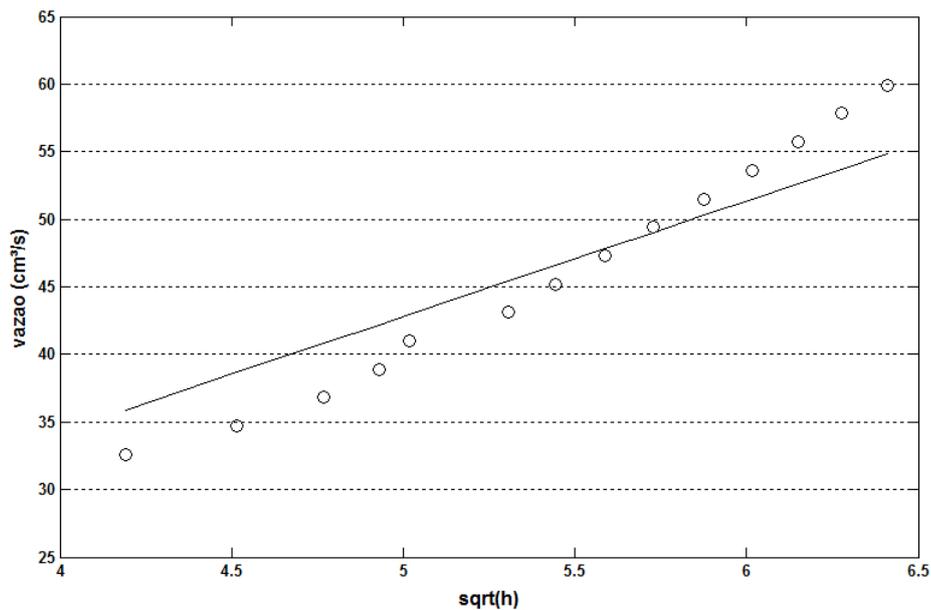
	$q_i(cm^3/s)$	$h(cm)$		$q_i(cm^3/s)$	$h(cm)$
1	32,59	17,56	8	47,31	31,21
2	34,69	20,40	9	49,42	32,81
3	36,79	22,73	10	51,52	34,53
4	38,90	24,29	11	53,62	36,21
5	41,01	25,18	12	55,72	37,82
6	43,11	28,17	13	57,82	39,39
7	45,21	29,62	14	58,93	41,11

Por meio do resultado apresentado na Tabela 2, o valor do coeficiente da válvula  $K$  foi determinado de forma experimental utilizando o método dos mínimos quadrados, onde se obteve

$$q_0 = 8,5593\sqrt{h}. \quad (3.3)$$

A Figura 22 apresenta os pontos obtidos experimentalmente e a curva ajustada.

Figura 22 – Vazão de saída do processo. Os dados obtidos no ensaio estão representados por (o). A linha representa a curva ajustada.

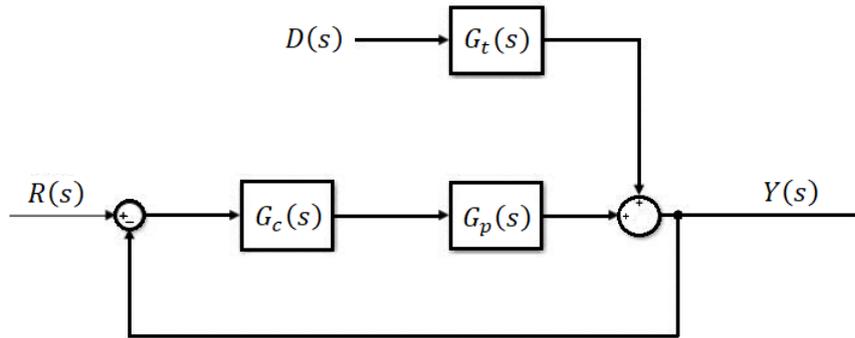


## 3.4 Projeto do Controlador PI

### 3.4.1 Método Síntese Direta

A Figura 23 ilustra uma estrutura clássica de controle em que  $G_p(s)$ ,  $G_c(s)$  e  $G_t(s)$ , são, respectivamente, as funções de transferência do processo, do controlador e do distúrbio.

Figura 23 – Modelo clássico de controle em malha fechada.



Adaptado de: (CHEN; SEBORG, 2002)

O método Síntese Direta tem como princípio selecionar uma resposta adequada ao sistema e a partir dela, calcular analiticamente o controlador. Uma das vantagens de se utilizar a aproximação por síntese direta é o fato de que ela incorpora os parâmetros requeridos de performance da resposta por meio da especificação da resposta em malha fechada (CHEN; SEBORG, 2002).

Considerando um sistema de controle com o diagrama de blocos apresentado na Figura 23, a função de transferência em malha fechada é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}. \quad (3.4)$$

Reescrevendo (3.4) de forma a explicitar  $G_c(s)$  tem-se

$$G_c(s) = \frac{\frac{Y(s)}{R(s)}}{G_p(s) \left[ 1 - \frac{Y(s)}{R(s)} \right]}. \quad (3.5)$$

Escolhendo  $\frac{Y(s)}{R(s)}$  como a resposta desejada, isto é,  $G_d(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ , de (3.5) obtém-se

$$G_c(s) = \frac{1}{G_p(s)} \frac{G_d(s)}{1 - G_d(s)}. \quad (3.6)$$

Para o sistema da Figura 23, deseja-se uma resposta de primeira ordem com constante de tempo  $\tau_d$ , ou seja,

$$G_d(s) = \frac{1}{\tau_d s + 1}. \quad (3.7)$$

### 3.4.2 Projeto do Controlador

Para projetar o controlador PI para controlar o nível  $h$  do tanque, é utilizado a função de transferência descrita pela Equação (2.57), que foi obtida linearizando-se o processo em torno de um ponto de operação  $h_s$ . Escolhendo-se um ponto de operação  $h_s = 25 \text{ cm}$ , tem-se a seguinte função de transferência:

$$G_p(s) = \frac{1,168}{167,246s + 1}. \quad (3.8)$$

Aplicando o método da Síntese Direta, e substituindo a Equação (3.8) em (3.6), obtém-se a função de transferência do controlador

$$G_c(s) = \frac{143,19}{\tau_d} + \frac{1}{1,168\tau_d s}. \quad (3.9)$$

## 3.5 Projeto do Controle por Linearização Exata por Realimentação

Como foi visto na Seção 2.6, a variação do volume no interior do tanque é resultante da diferença entre a vazão de entrada  $q_i$  e a vazão de saída  $q_o$ . Tendo  $A(h)$  como a área do interior do tanque e  $q_i = u(t)$  como variável manipulada, da Equação (2.45)

$$A(h)\dot{h} = u(t) - K\sqrt{h(t)}. \quad (3.10)$$

Considerando uma lei de controle que possa linearizar a Equação (3.10) do tipo

$$u(t) = A(h)v(t) + K\sqrt{h}. \quad (3.11)$$

Ao substituir (3.11) em (3.10), o resultado é dado por

$$\dot{h} = v(t). \quad (3.12)$$

Este sistema pode ser controlado para um referência  $r(t)$  variável no tempo, utilizando a lei de controle

$$v(t) = \dot{r}(t) - Ce(t), \quad (3.13)$$

onde  $e = h - r$  representa o valor do erro e  $C$  uma constante real. Substituindo (3.13) em (3.12) tem-se

$$\dot{e}(t) + Ce(t) = 0. \quad (3.14)$$

Se a constante  $C$  for positiva, a solução da Equação (3.14) tenderá para zero quando  $t \rightarrow \infty$ , ou seja, a equação do erro é exponencialmente estável. Se a referência  $r$  mudar, o novo erro tende exponencialmente para zero, o que significa que o nível do tanque segue a referência.

Substituindo a lei de controle (3.13) em (3.11) obtém-se

$$u(t) = K\sqrt{h} + A(h)\dot{r} - A(h)Ce. \quad (3.15)$$

Analisando a Equação (3.15), tem-se que o primeiro termo da equação é utilizado para compensar diretamente a vazão de saída do tanque. O segundo termo compensa as variações de referência. Por fim, o terceiro termo compensa outras perturbações do nível.

### 3.5.1 Lei de Controle com Controlador PI

Ao implementar o controle por LER na prática, é bem comum a existência de erro em regime permanente, com isso, torna-se interessante associar o algoritmo de controle PID à técnica da linearização exata. Portanto, optou-se por utilizar um controlador PI, implementando-o na lei de controle dada pela Equação (3.15). O controlador PI é uma variação da Equação (2.40) dado por

$$U(s) = K_c + \frac{K_I}{s}. \quad (3.16)$$

onde  $K_I$  é o ganho integral do controlador.

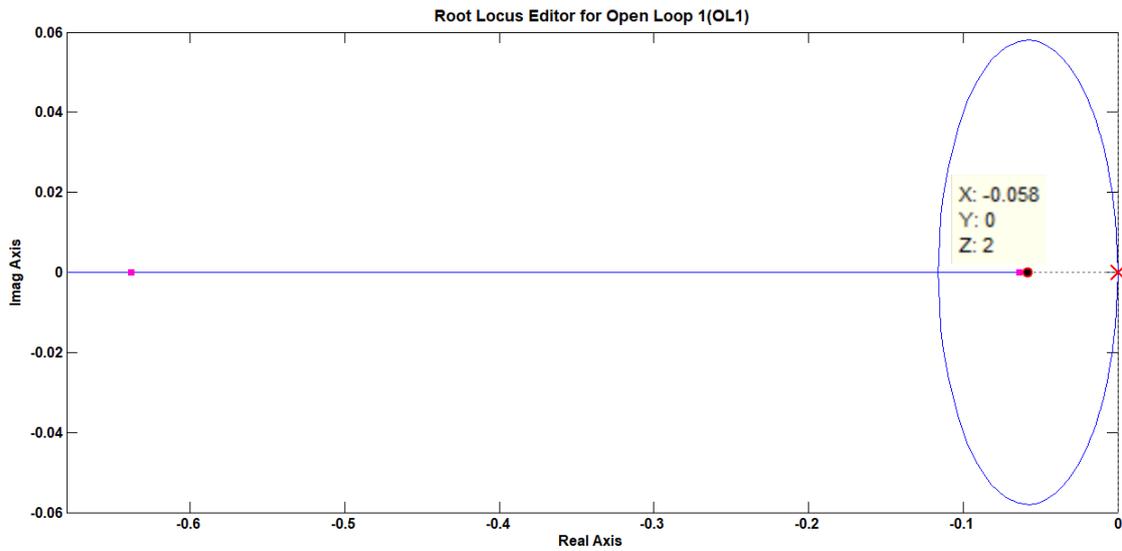
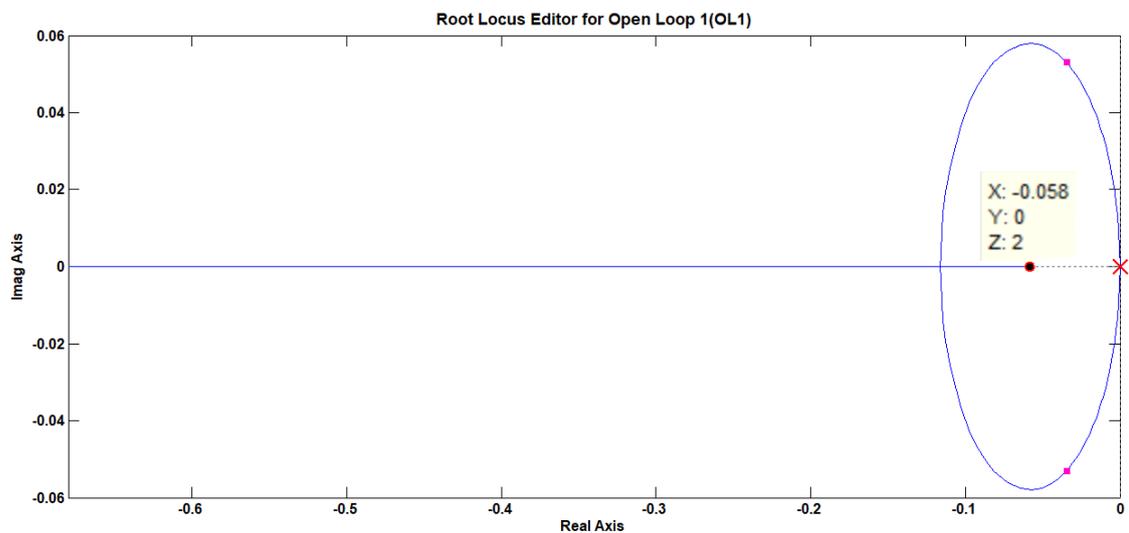
Dessa maneira, no LGR (Lugar Geométrico das Raízes) tem-se dois integradores, sendo necessário escolher um zero e o ganho.

Na escolha do zero, considerou-se dois quesitos:

- Escolheu-se um zero próximo do comportamento desejado, para que o polo dominante fique perto do mesmo;
- Escolheu-se um zero em  $-0,058$ , para que o controle fique parecido com o controle PI realizado por Síntese Direta.

O ganho escolhido deve ser grande o suficiente de forma que o polo dominante fique próximo ao zero, mas pequeno o suficiente de modo que um não cancele o comportamento do outro (e o esforço de controle não seja muito grande), como mostra a Figura 24.

Porém, valores excessivos de  $K$  podem causar saturação dos atuadores, dessa forma a definição do ganho neste projeto foi feita escolhendo-se um ganho menor, de maneira que os polos sejam complexos conjugados, ver Figura 25.

Figura 24 – Lugar geométrico das raízes para um ganho  $K = 0,04072$ .Figura 25 – Lugar geométrico das raízes para um ganho  $K = 0,004$ .

Sendo assim, tem-se a função de transferência do controlador, dada por

$$U(s) = 0,004 \left( \frac{1 + 17s}{s} \right). \quad (3.17)$$

onde as constantes são definidas como  $K_c = 0,068$  e  $K_I = 0,004$ .

A resposta ao degrau para  $K = 0,004$  é apresentada na Figura 27. Em relação a resposta ao degrau para o ganho  $K = 0,04072$ , Figura 26, existe um aumento no tempo de assentamento e, também, no sobressinal. Porém, dessa maneira o sistema exige um esforço menor do atuador.

Figura 26 – Resposta ao degrau para  $K = 0,04072$ .

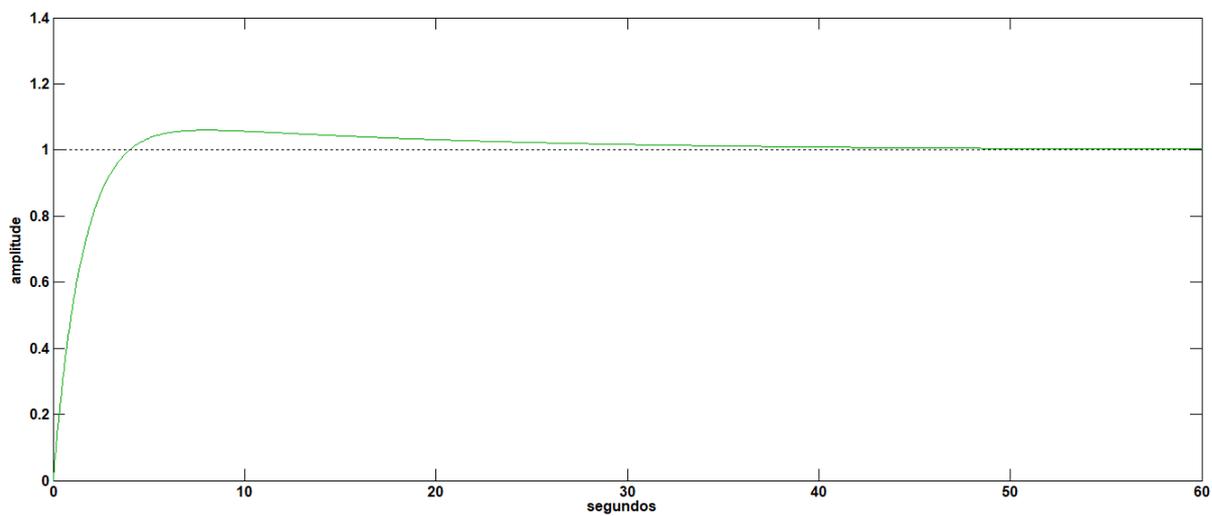
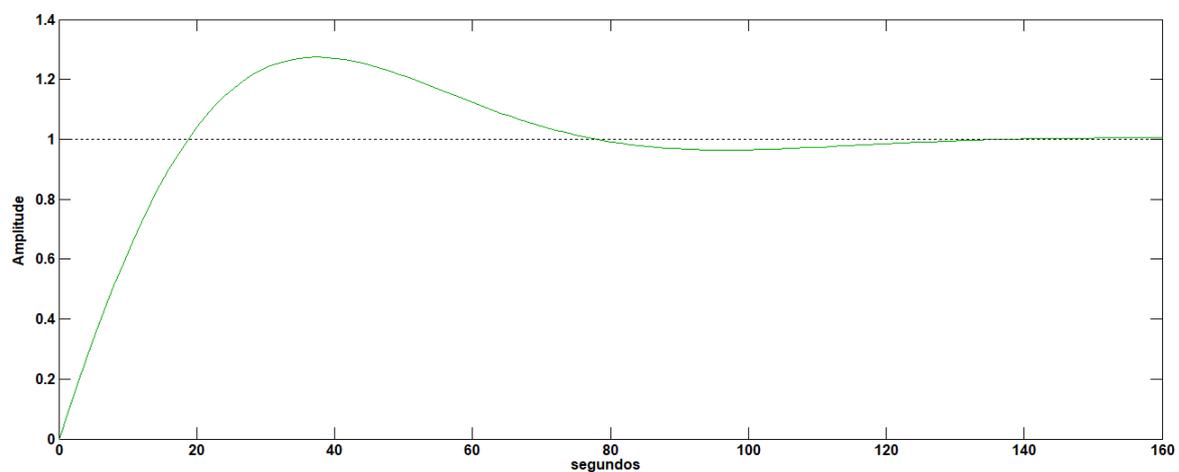


Figura 27 – Resposta ao degrau para  $K = 0,004$ .



## 4 Análise de Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos por meio de simulações e ensaios experimentais para o sistema monotanque. Na Seção 4.1 realizou-se a simulação do sistema em malha aberta para os modelos linear e não linear, em seguida, é feita a comparação da simulação com o resultado obtido experimentalmente. Na Seção 4.2 são apresentadas as simulações para o controlador PI no tempo contínuo e tempo discreto, ao final da seção são mostrados os resultados experimentais que são comparados com os simulados. A Seção 4.3 apresenta o controlador por LER, nela são apresentados os resultados simulado e experimentais e, em seguida, a comparação entre os dois. Por fim, na Seção 4.4 é feita a comparação entre os resultados apresentados pelos controladores PI e LER.

### 4.1 Sistema em Malha Aberta

Para simular o sistema não linear utilizou-se o modelo (2.48). Para o sistema linear, foi utilizado a função de transferência descrita pela Equação (2.57), que foi obtida linearizando-se o processo em torno do ponto de operação  $h_s = 25$  cm. Assim, o sistema linear é dado pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{1,168}{167,246s + 1}. \quad (4.1)$$

#### 4.1.1 Resultado Simulado

As simulações dos modelos não linear e linear desenvolvidos têm o objetivo de auxiliar na avaliação de desempenho do sistema. O sinal de entrada utilizado nos testes é uma função degrau.

O diagrama de blocos das simulações dos modelos não linear e linear em malha aberta são apresentados nas Figuras 28 e 29, respectivamente. Observa-se que na entrada do diagrama do sistema não linear, adiciona-se o valor da vazão a qual o sistema se estabiliza no ponto de operação  $h_s = 25$  cm, o mesmo ponto utilizado para se obter a função de transferência do modelo linear. No modelo linear adiciona-se o sinal de saída do sensor para o nível no ponto de operação.

A Figura 30 apresenta a resposta ao degrau em malha aberta para os modelos não linear e linear. Observa-se que a resposta do modelo linear para o ponto de operação, apresenta resposta idêntica ao do modelo não linear.

Figura 28 – Diagrama de blocos do sistema em malha aberta para o modelo não linear (2.48). Desenvolvido no Toolbox SIMULINK do MATLAB.

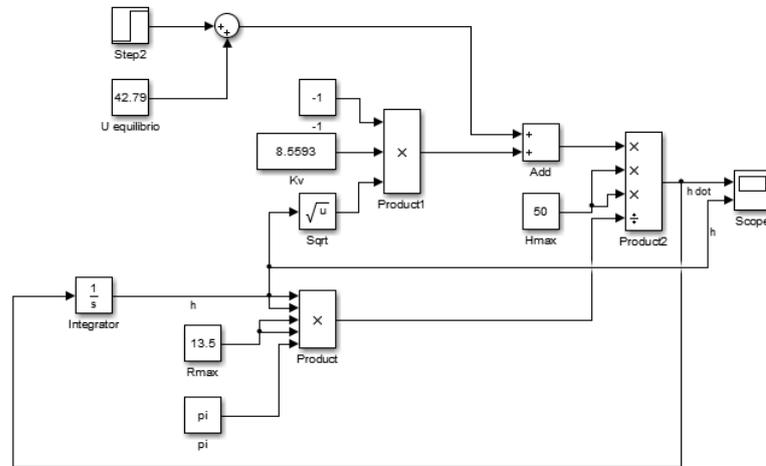


Figura 29 – Diagrama de blocos para o sistema em malha aberta para o modelo linear (4.1). Desenvolvido no Toolbox SIMULINK do MATLAB.

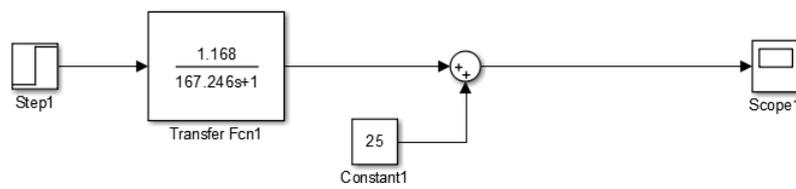
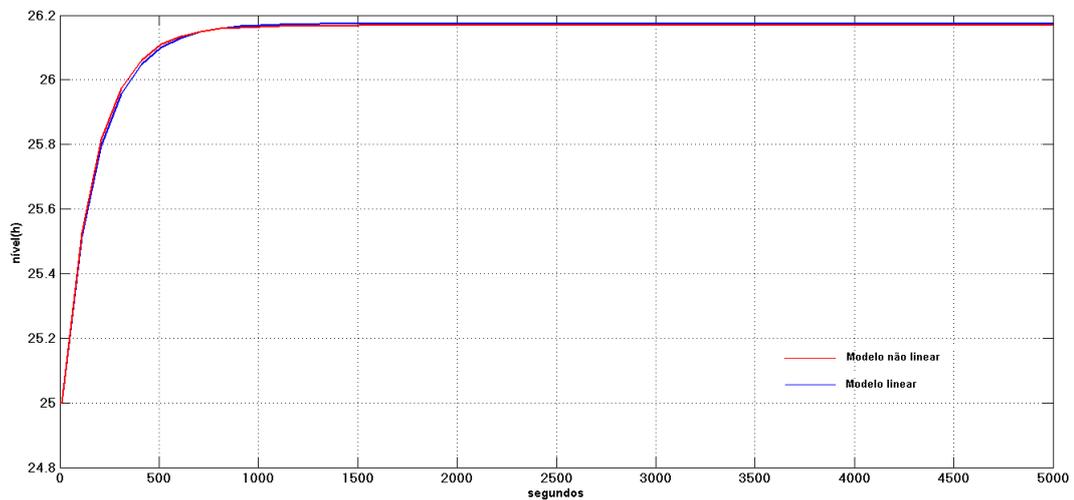


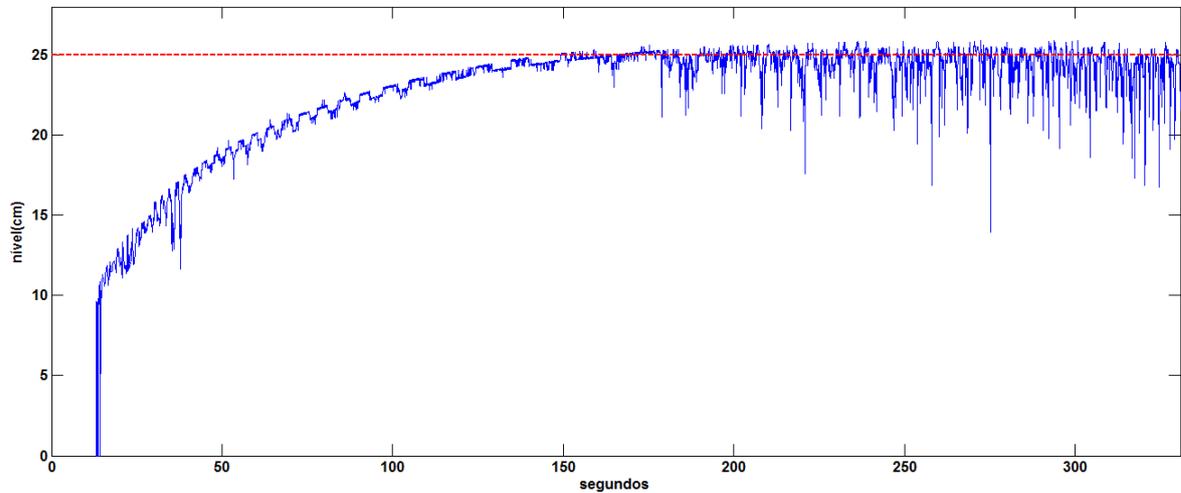
Figura 30 – Resposta ao degrau em malha aberta para os modelos linear e não linear.



### 4.1.2 Resultado Experimental

Para se obter a resposta ao degrau em malha aberta para um determinado *Setpoint*, utilizaram-se os resultados obtidos na Seção 3.3, com isso foi possível garantir que a saída do sistema fosse da forma que se esperava. Na Figura 31, tem-se a resposta ao degrau em malha aberta para o sistema, onde o *Setpoint* escolhido é  $h = 25$  cm. Para o sistema em malha aberta, o tempo de acomodação foi igual a 178 segundos.

Figura 31 – Resposta ao degrau em malha aberta para  $Setpoint = 25$  cm. Em vermelho está representado o valor de  $Setpoint$  e em azul o valor medido pelo sensor de nível.



A presença de oscilação no sinal de nível é gerada pelo sensor. Essa oscilação surge, principalmente, devido à oscilação do espelho d'água.

## 4.2 Controle PI do Modelo Linearizado

Segundo Skogestad (2003), o valor da constante de tempo  $\tau_d$  da Equação (3.9) pode ser escolhida arbitrariamente, mas deve estar dentro de um intervalo onde o ganho de controle obtido seja positivo e diferente de zero. Um valor ideal para  $\tau_d$  poderia ser determinado levando-se em consideração dois quesitos:

- Rápida velocidade de resposta e boa rejeição de perturbação (para um valor pequeno de  $\tau_d$ );
- Estabilidade, robustez e pequena variação de entrada (para um valor grande de  $\tau_d$ ).

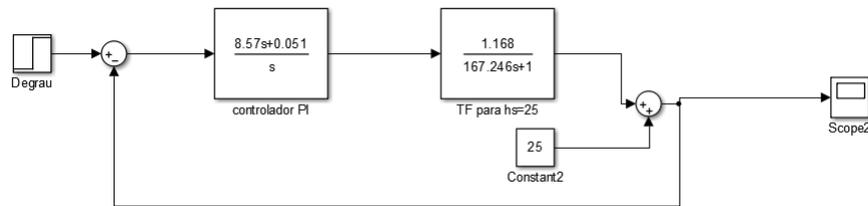
Sendo assim, para o projeto do controlador em torno de um ponto de operação  $h_s = 25$  cm (dado por (4.1)), optou-se em utilizar um valor de  $\tau_d = 16,7$ , para que assim o sistema controlado seja 10 vezes mais rápido que o sistema em malha aberta. Dado tal valor para  $\tau_d$ , é possível obter os ganhos  $K_P$  e  $K_I$  do controlador, que são  $K_P = 8,57$  e  $K_I = 0,051$ . A função de transferência do controlador é mostrada abaixo:

$$G_c(s) = \frac{8,57s + 0,051}{s}. \quad (4.2)$$

### 4.2.1 Resultado Simulado

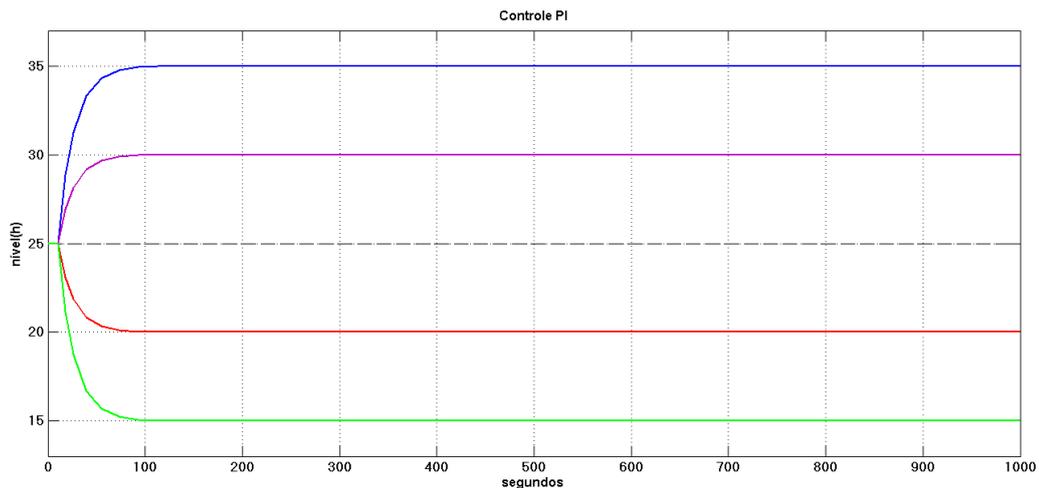
O diagrama de blocos do sistema em malha fechada com o controlador PI é apresentado na Figura 32. O sinal de entrada utilizado nos testes é uma função degrau.

Figura 32 – Diagrama de blocos do sistema com o controlador PI.



Na Figura 33 são apresentadas as respostas ao degrau para o sistema com o controlador PI. Foi simulado o controle para quatro *Setpoints* diferentes. Apesar da função de transferência do controlador, obtida pelo método da Síntese Direta, ter sido calculada para o ponto de operação  $h_s = 25$  cm, pode-se observar pela figura que para pontos tanto acima quanto abaixo desse ponto, o controlador demonstra um bom desempenho.

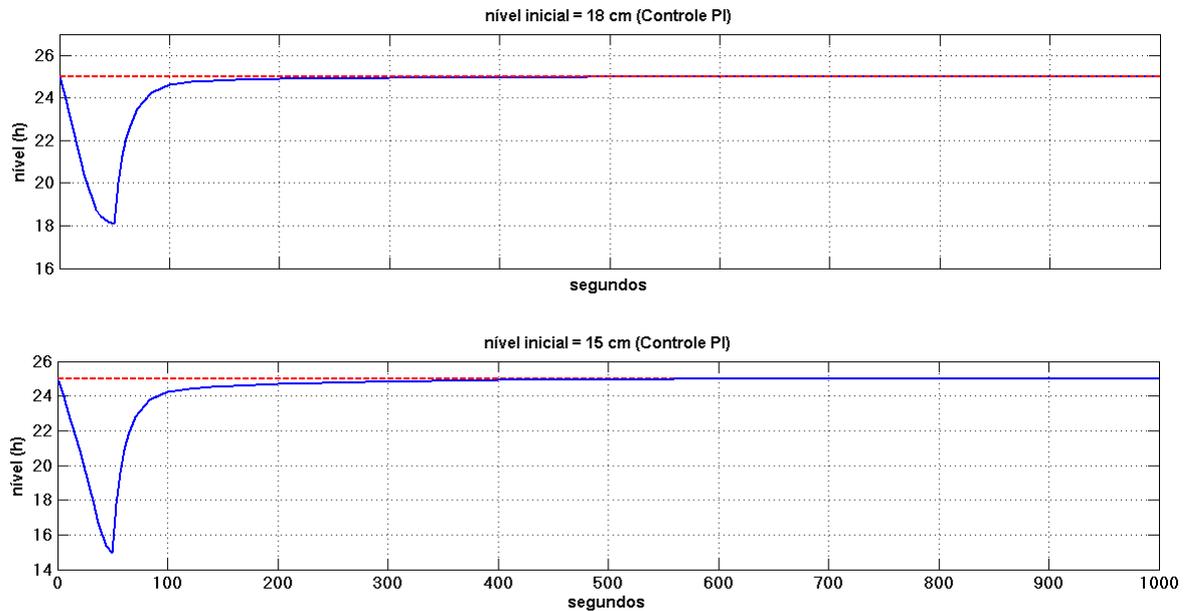
Figura 33 – Resposta ao degrau em malha fechada para o sistema controlado. Valor inicial igual a 25 cm e *Setpoints* de 15, 20, 30 e 35 representados pelas cores verde, vermelho, roxo e azul, respectivamente.



O resultado apresentado na Figura 34 demonstra a simulação do controlador PI para o sistema quando o mesmo está em um nível inicial de  $h = 18$  cm e também para um nível inicial de  $h = 15$  cm, onde o *Setpoint* é  $h = 25$  cm. O ganho integral resulta em um controle mais preciso do nível, tendendo a zerar o erro de estado estacionário e não apresentar sobressinal ao degrau de referência. Para o nível inicial de  $h = 18$  cm o sistema levou 367 segundos para atingir o regime permanente e para o nível inicial de  $h = 15$  cm, o tempo total para atingir o regime permanente foi de 572 segundos.

#### 4.2.2 Resultado Experimental

Para a implementação prática do controle PI no sistema monotanque, utilizou-se o método Síntese Direta de duas maneiras. Na primeira, a função de transferência do controlador foi determinada no tempo contínuo e, após isso, a mesma foi discretizada para

Figura 34 – Controle PI simulado para *Setpoint* = 25 cm.

que pudesse ser implementada no microcontrolador. Na segunda, o método Síntese Direta foi aplicado com a função de transferência do sistema já discretizada e, a partir disso, determinou-se a função de transferência do controlador, para que a mesma fosse implementada no microcontrolador. A seguir, é apresentado os procedimentos para determinar as funções de transferência mencionadas.

#### 4.2.2.1 Função de Transferência do Controlador no Tempo Contínuo

O procedimento para se determinar a função de transferência do controlador  $G_c(s)$ , é o mesmo apresentado na Seção 3.4.1. Aplicando-se o mesmo valor de  $\tau_d$  que foi utilizado nas simulações, obtém-se o mesmo resultado encontrado para a Equação (4.2).

Em seguida, foi feita a discretização de  $G_c(s)$  utilizando o método de Tustin apresentado em Castrucci, Bittar e Sales (2011), para uma taxa de amostragem  $T = 0,1$  segundos

$$G_c(z) = \frac{8,577z - 8,572}{z - 1}. \quad (4.3)$$

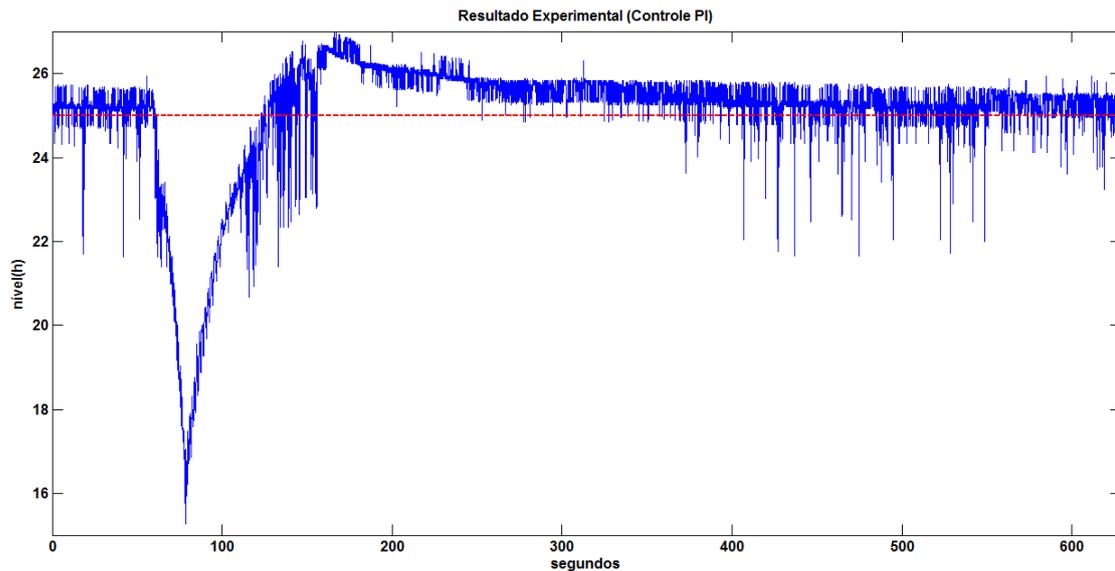
A partir de (4.3), determina-se a equação a diferença que é implementada no microcontrolador, dado por (4.4).

$$y[n] = y[n - 1] + 8,577x[n] - 8,572x[n - 1]. \quad (4.4)$$

A Figura 35 mostra o resultado experimental para o controle PI com sua função de transferência no tempo contínuo, a qual foi obtida a partir de (2.57), com o *Setpoint* em 25 cm. Repare que para este ensaio, inicialmente o nível do tanque já estava no valor desejado. Por um pequeno intervalo de tempo o atuador do sistema foi desligado, e ao ser

ligado novamente a ação de controle fez com que o nível alcançasse o valor definido no *Setpoint*. O desempenho do controlador PI pode ser considerado bom, onde foi possível eliminar o erro em regime permanente. O sistema apresentou um valor de sobressinal igual a 16,7%, o que indica que o sistema é suficientemente amortecido. O tempo total para o sistema atingir o regime permanente foi de 436 segundos.

Figura 35 – Controle PI realizado para *Setpoint* = 25 cm. Em vermelho está representado o valor de *Setpoint* e em azul o valor medido pelo sensor de nível.



Ao comparar o resultado experimental com o resultado simulado percebe-se que o tempo para o sistema atingir o regime permanente foi mais rápido para o experimental, porém ocorreu sobressinal. Pode-se dizer que o resultado alcançado foi próximo do esperado, já que o sistema atingiu o valor de nível desejado sem existir erro em regime permanente.

#### 4.2.2.2 Função de Transferência do Controlador no Tempo Discreto

Para a obtenção da função de transferência do controlador no tempo discreto, primeiro foi necessário discretizar a função dada por (4.1), utilizando um segurador de ordem zero para uma taxa de amostragem  $T = 1$  segundo onde o resultado é dado por

$$G(z) = \frac{0,007}{z - 0,994}. \quad (4.5)$$

Como o método Síntese Direta agora é aplicado ao sistema discretizado, temos que

$$G_c(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{G_d(z)}{1 - G_d(z)}. \quad (4.6)$$

onde  $G_d(z) = \frac{k_d}{z - 0,94}$ .

Em seguida, para que o erro em regime permanente seja zero, é necessário determinar um  $k_d$  que faça com que o ganho em regime permanente seja igual a um, ou seja

$$\text{Ganho}(DC) = \lim_{z \rightarrow 1} G_d(z) = 1. \quad (4.7)$$

Resolvendo (4.7), tem-se que  $k_d = 0,06$ .

Substituindo  $G_d(z)$  na Equação (4.6), tem-se a função de transferência do controlador discretizada, dada pela equação abaixo:

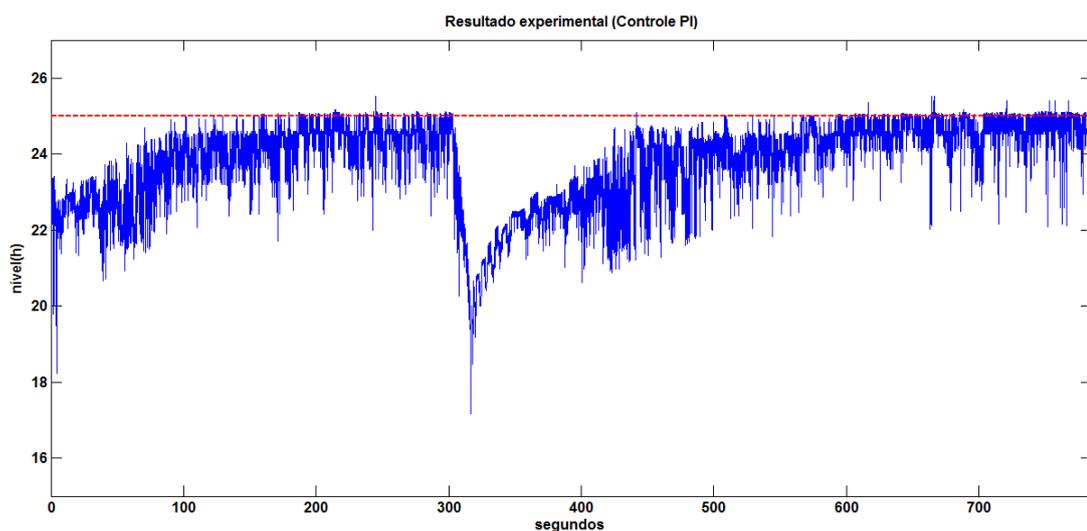
$$G_c(z) = \frac{8,571z - 8,518}{z - 1}. \quad (4.8)$$

A partir de (4.8), determina-se a equação a diferença que é implementada no microcontrolador, dado por (4.9).

$$y[n] = y[n - 1] + 8,571x[n] - 8,518x[n - 1] \quad (4.9)$$

Na Figura 36 é apresentado o resultado experimental para o controle PI com sua função de transferência no tempo discreto. Do mesmo modo que foi feito na seção anterior, por um pequeno intervalo de tempo o atuador do sistema foi desligado e ao ser ligado novamente a ação de controle fez com que o nível atingisse o valor definido no *Setpoint*. Pode-se dizer que houve uma melhora no desempenho em relação ao caso anterior, onde o erro em regime permanente foi eliminado pelo controlador e não houve sobressinal. O tempo de acomodação nesse caso foi igual a 395 segundos.

Figura 36 – Controle PI realizado para *Setpoint* = 25 cm. Em vermelho está representado o valor de *Setpoint* e em azul o valor medido pelo sensor de nível.



Comparando o resultado mostrado na Figura 36 com o resultado simulado, percebe-se que o desempenho do controlador foi bastante satisfatório, onde o tempo total para atingir o regime permanente, apesar de maior, foi bem próximo do valor simulado.

### 4.3 Controle por Linearização Exata por Realimentação

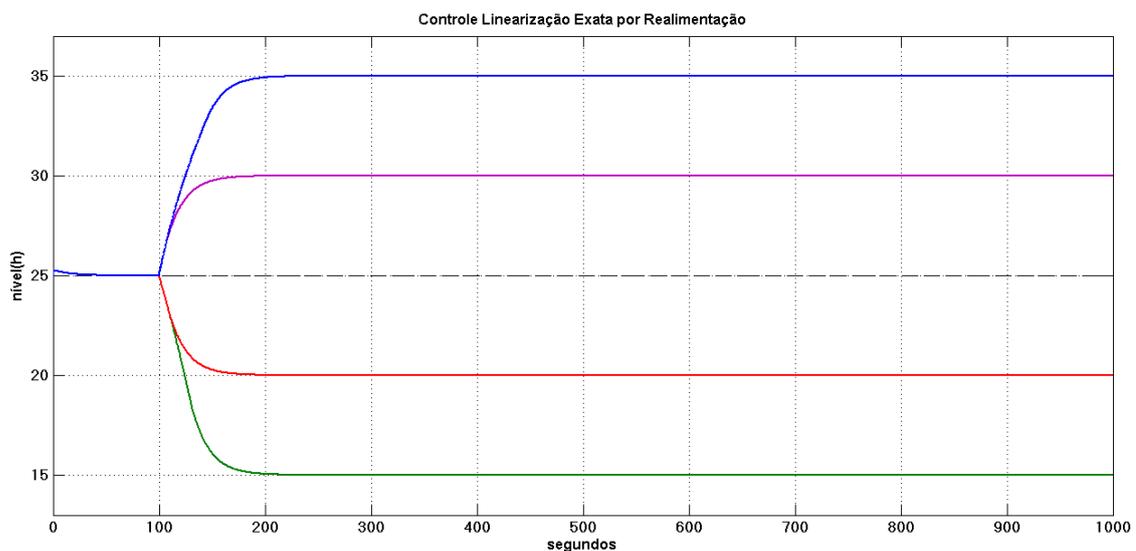
O controle por Linearização Exata por Realimentação (LER) no sistema monotanque, foi realizado a partir da lei de controle obtida anteriormente, dada pela Equação (3.15).

#### 4.3.1 Resultado Simulado

O diagrama de blocos do sistema em malha fechada com o controle por Linearização Exata por Realimentação é apresentado na Figura 44, que se encontra no Anexo B. O sinal de entrada utilizado nos testes é uma função degrau.

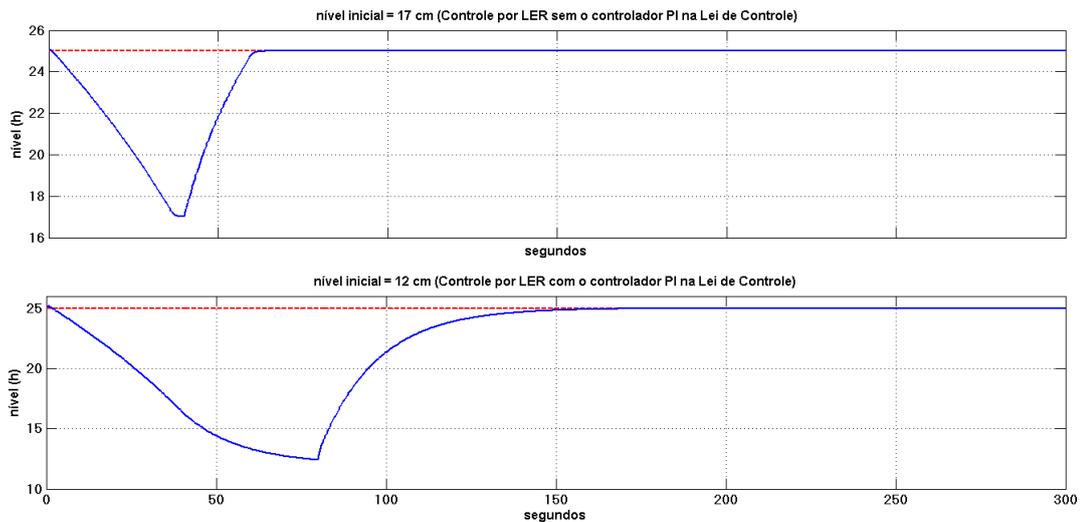
Na Figura 37 são apresentadas as respostas ao degrau para os sistema controlado por LER. Foi simulado o controle para quatro *Setpoints* diferentes. A linearização por realimentação transforma o sistema não linear em um sistema linear. Assim, o controle no sistema monotanque pode ser realizado para qualquer ponto de operação.

Figura 37 – Resposta ao degrau em malha fechada para o sistema controlado. Valor inicial igual a 25 cm e *Setpoints* de 15, 20, 30 e 35 representados pelas cores verde, vermelho, roxo e azul, respectivamente.

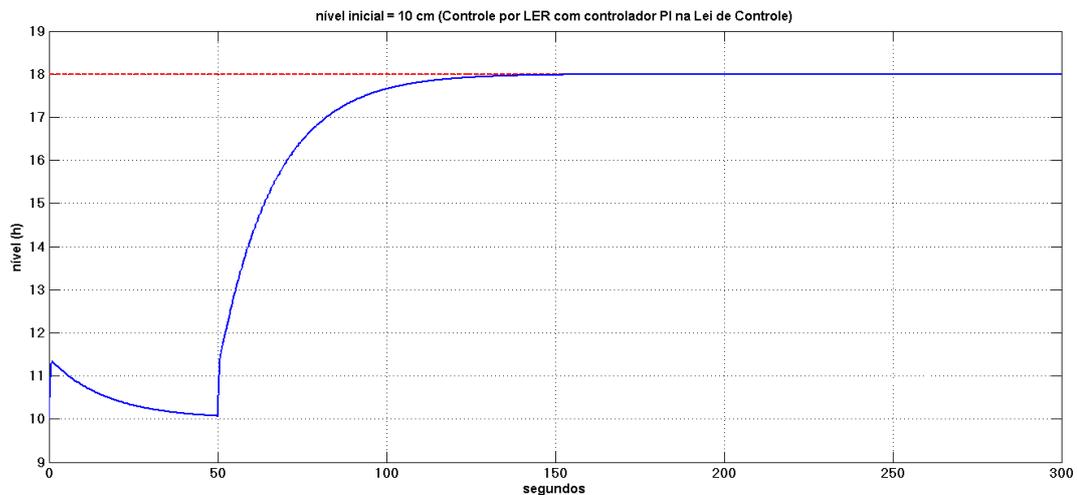


Na Figura 38 são apresentadas as simulações para o controle com níveis iniciais de  $h = 17$  cm e  $h = 12$  cm. Para o nível  $h = 17$  cm, a simulação foi realizada utilizando-se a lei de controle determinada pela Equação (3.15). Para o nível  $h = 12$  cm, a simulação foi realizada com um controlador PI adicionado à lei de controle, para que o resultado pudesse se aproximar mais do que foi feito experimentalmente. Para o nível inicial de  $h = 17$  cm o sistema levou 24 segundos para atingir o regime permanente e para o nível de  $h = 12$  cm, o tempo total para atingir o regime permanente foi de 110 segundos.

A Figura 39 mostra o resultado da simulação do controle por LER para um *Setpoint* de 18 cm, também realizado com um controlador PI na lei de controle para que o resultado

Figura 38 – Controle por LER simulado para  $Setpoint = 25$  cm.

simulado pudesse ser mais próximo do que foi feito na prática. Nesse caso, o tempo total para o sistema atingir o regime permanente foi de 121 segundos.

Figura 39 – Controle por LER simulado para  $Setpoint = 18$  cm.

### 4.3.2 Resultado Experimental

A implementação prática do controle LER no sistema monotanque foi realizada de duas formas. Na primeira, utilizou-se a lei de controle dada pela Equação (3.15) diretamente na programação do microcontrolador. Na Figura 40, é possível observar o sistema controlado pela LER. O tempo para atingir o regime permanente foi de 111 segundos, resultado que se comparado com o tempo simulado, foi muito mais lento. O sistema também apresentou um erro em regime permanente muito alto, igual a 25%.

Com o uso de técnicas lineares de controle foi possível projetar um controlador para que o erro em regime permanente fosse eliminado. Para isso, utilizou-se o método do

lugar das raízes (LGR), a fim de definir os polos que determinassem esse comportamento.

Sendo assim, utilizou-se um controlador PI na lei de controle, não necessitando da ação derivativa para obter o desempenho desejado. Discretizando-se a Equação (3.17), por meio de um segurador de ordem zero para uma taxa de amostragem de  $T = 1$  segundo, obteve-se a seguinte função de transferência para o controlador PI

$$G_c(z) = \frac{0,0682z - 0,0678}{z - 1}. \quad (4.10)$$

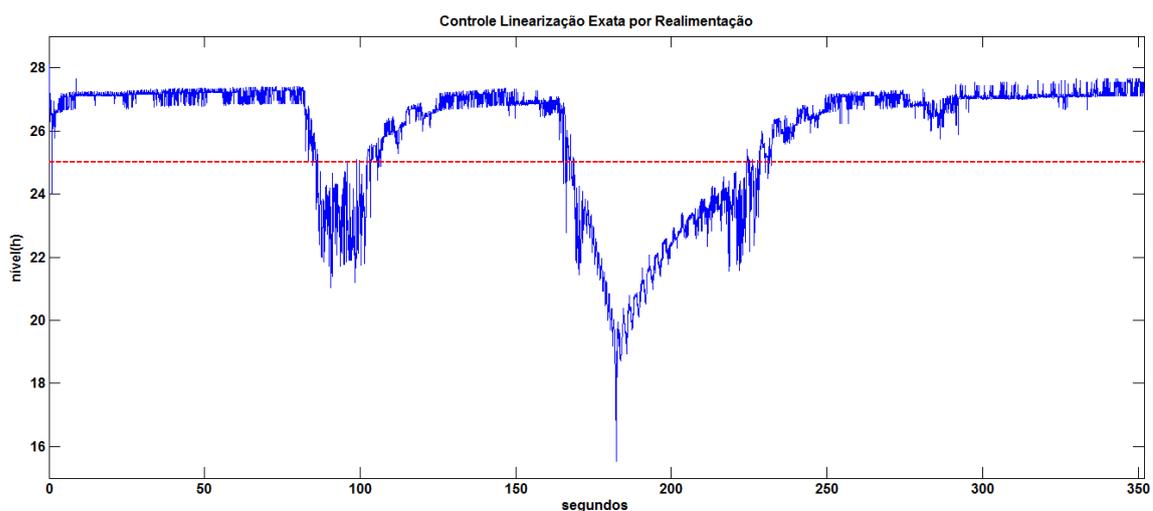
A equação a diferença abaixo, obtida de (4.10), é implementada na lei de controle obtida no projeto do controlador LER.

$$y[n] = y[n - 1] - 0,0682x[n] - 0,0678x[n - 1] \quad (4.11)$$

Na Figura 41, pode-se observar o momento em que o atuador é desligado com o nível em 25 cm e quando é ligado novamente, não demora muito para que o tanque atinja o valor estabelecido no *Setpoint*. O sistema ficou mais lento em relação ao apresentado na Figura 40, com tempo de acomodação igual a 217 segundos, e apresentou um sobressinal elevado de 38,5%. Contudo, esse sobressinal elevado já era esperado de acordo com o projeto realizado. Além disso, o tempo de acomodação também foi bem próximo do projetado na Seção 3.5.1 e o erro em regime permanente foi eliminado.

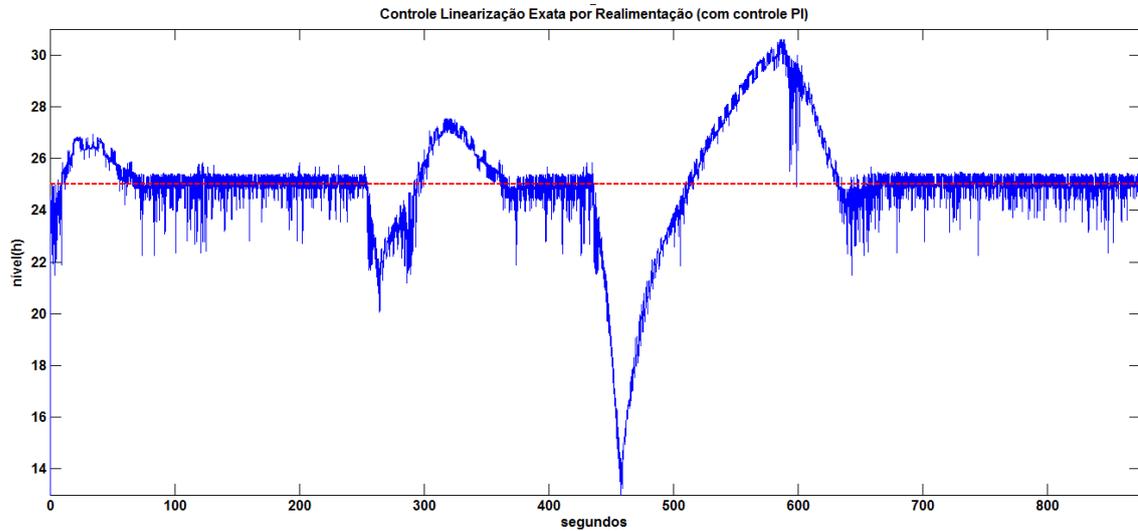
Comparado à simulação, o resultado apresentado na Figura 41 mostrou bom desempenho, apesar do sobressinal elevado, o sistema atingiu o regime permanente em tempo satisfatório.

Figura 40 – Controle LER realizado para *Setpoint* = 25 cm. Em vermelho está representado o valor de *Setpoint* e em azul o valor medido pelo sensor de nível.



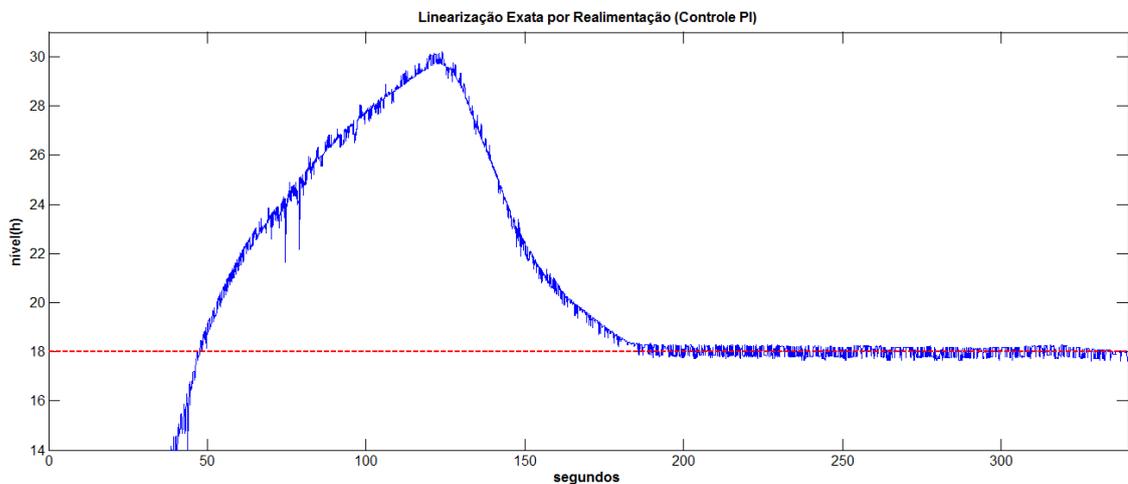
O resultado apresentado na Figura 42, indica o controle realizado a partir de um nível inicial de  $h = 10$  cm para um valor se *Setpoint* de 18 cm. O sistema apresentou um sobressinal muito elevado, de quase 150% e um tempo de acomodação de 167 segundos. Em relação à simulação, o tempo para atingir o regime permanente foi um pouco maior,

Figura 41 – Controle LER realizado para  $Setpoint = 25$  cm. Em vermelho está representado o valor de  $Setpoint$  e em azul o valor medido pelo sensor de nível.



tendo em vista seu sobressinal elevado. O erro em regime permanente foi eliminado pelo controlador, com isso pode-se dizer que o desempenho foi satisfatório.

Figura 42 – Controle LER realizado para  $Setpoint = 18$  cm. Em vermelho está representado o valor de  $Setpoint$  e em azul o valor medido pelo sensor de nível.



#### 4.4 Comparação Entre os Controladores PI e LER

A Tabela 3 apresenta os parâmetros definidos através dos ensaios experimentais. As siglas  $PI_C$  e  $PI_D$  representam, respectivamente, o controle PI com a função de transferência no tempo contínuo e o controle PI com a função de transferência no tempo discreto. As siglas  $LER_S$  e  $LER_{PI}$  indicam, respectivamente, o controle por LER sem o controlador PI na lei de controle e o controle por LER com o controlador PI adicionado à lei de controle.

Tabela 3 – Comparação entre os controladores.

$h_s = 25 \text{ cm}$	$PI_C$	$PI_D$	$LER_S$	$LER_{PI}$
$e_{ss}$	0	0	25%	0
$M_p$	16,7%	0	0	38,5%
$t_s(\text{seg})$	425	395	111	217

Analisando os valores da Tabela 3, pode-se dizer que os resultados para o controle PI não são muito rápidos, mas não apresentaram erro de regime como esperava-se no projeto. O controle PI para a função de transferência discreta, além de não apresentar erro em regime permanente, também não apresentou sobressinal. Com isso, pode-se dizer que seu desempenho foi melhor em relação ao controle PI com a função de transferência contínua.

Para o controle por LER, observa-se que o controle por  $LER_{PI}$  apresentou um sobressinal muito elevado e seu tempo de assentamento foi quase 2 vezes maior que o tempo de assentamento para o controlador  $LER_S$ , no entanto, para o controlador  $LER_{PI}$  o erro em regime permanente foi igual a zero, enquanto que para o controle por  $LER_S$  o erro em regime permanente foi muito além do que é aceitável. Sendo assim, o controlador  $LER_{PI}$  apresentou um desempenho melhor do que o controlador  $LER_S$ .

Tendo em vista esses resultados, como o controlador  $PI_D$  atendeu as especificações de projeto, que eram não apresentar sobressinal e eliminar o erro em regime permanente, conclui-se que ele foi o que apresentou o melhor desempenho para o ponto de operação  $h_s = 25 \text{ cm}$ .

O controlador  $LER_{PI}$  mostrou bom desempenho, por ser mais rápido e por ter uma faixa de operação maior, funcionando para qualquer ponto de operação do tanque.

## 5 Conclusão

Desenvolver projetos é muito importante para gerar e incentivar novos conhecimentos. A área de sistemas de controle é de grande importância para o estudante de engenharia, pois proporciona experiências práticas que se agregam ao conhecimento teórico, fornecendo ao acadêmico o entendimento de conceitos e técnicas utilizadas fora das salas de aula.

Este trabalho apresentou uma proposta de implementação de um sistema monotanque automatizado para supervisão, modelagem e controle. Foi escolhido um tanque de formato cônico onde o objetivo é controlar o nível de líquido. Este tipo de tanque está presente em vários tipos de processos industriais, caracterizando assim sua relevância.

Foi apresentado um estudo comparativo entre os resultados simulados e os resultados experimentais. Em seguida, realizou-se uma comparação entre as técnicas utilizadas para o controle de nível no sistema monotanque.

O controle PI apresentou um bom desempenho em relação ao erro em regime permanente, eliminando-o. O desempenho do controladores PI neste trabalho é ruim quando o processo opera longe do ponto de operação utilizado para linearizar o processo.

Utilizando o controle por LER, o controle foi realizado em toda a faixa de operação do tanque. Entretanto, para o  $LER_S$  o sistema apresentou elevado erro em regime permanente e para o  $LER_{PI}$  demonstrou elevado sobressinal.

Levando em consideração que o projeto foi realizado para que não houvesse sobressinal e que o erro em regime permanente fosse eliminado, o controlador que demonstrou o melhor desempenho foi o controle  $PI_D$ .

Como proposta de trabalhos futuros sugere-se a implementação de outras técnicas de controle, por exemplo utilizando-se outro método de sintonia para o controle PI. Seria interessante também, o controle de nível em tanques acoplados, adicionando ao conjunto de tanques, um tanque de formato cônico. Assim, poderiam ser testadas as técnicas de controle MIMO<sup>1</sup>.

De maneira geral, o presente trabalho comprovou através dos resultados práticos apresentados, que é possível projetar e aplicar técnicas de controle, como as que foram propostas.

---

<sup>1</sup> MIMO (múltiplas entradas e múltiplas saídas)

# Referências

- AGUIRRE, L. *Introdução à Identificação de Sistemas*. [S.l.: s.n.], 2015. ISBN 978-85-423-0079-6. 27, 28
- AMATROL. *Level and Flow Process Control Learning System - T5552*. 2011. <<http://http://www.amatrol.com/coursepage/t5552/>>. Acesso: agosto/2017. 2
- ARAVIND, P.; VALLUVAN, M.; RANGANATHAN, S. Modelling and simulation of non linear tank. *International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering*, v. 2, n. 2, p. 842–849, 2013. 20
- ARDUINO. *Arduino nano user manual v2.3*. 2016. <<http://https://www.arduino.cc/en/uploads/Main/ArduinoNanoManual23.pdf>>. Acesso: julho/2017. 26
- BRITO, P. V. G. C. de; SILVA, L. E. B. Modelagem e controle de um sistema não linear empregando a metodologia de linearização exata por realimentação. *Revista Científico*, v. 13, n. 25, p. 105–118, 2015. 3
- CAMPOS, M. C. M. M. de; TEIXEIRA, H. C. *Controles típicos de equipamentos e processos industriais*. [S.l.]: Edgard Blücher, 2006. 1
- CASTRUCCI, P.; SALES, R. M. *Controle digital*. [S.l.]: E. Blucher, 1990. 9, 10
- CASTRUCCI, P. D. L.; BITTAR, A.; SALES, R. Controle automático. *Editora LTC*, 2011. 6, 7, 9, 11, 12, 13, 39
- CHARLES, L. P.; NAGLE, H. T. et al. Digital control system analysis and design. *Prentice Hall*, 1995. 9
- CHEN, C.-T. Linear system theory and design. 1999. 16
- CHEN, D.; SEBORG, D. E. Pi/pid controller design based on direct synthesis and disturbance rejection. *Industrial & engineering chemistry research*, ACS Publications, v. 41, n. 19, p. 4807–4822, 2002. 30
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. Sistemas de controle modernos, 12<sup>a</sup>. *Edição*, Editora LTC, 2009. 1, 6, 7
- DRIFT, B. *Bombas*. 2017. <[www.driftdobrasil.com.br/pdfs/DRIFT\\_Bombas.pdf](http://www.driftdobrasil.com.br/pdfs/DRIFT_Bombas.pdf)>. Acesso: agosto/2017. 25
- ELECFREAKS. *Ultrasonic Ranging Module HC-SR04*. 2011. <<http://http://users.ece.utexas.edu/~valvano/Datasheets/HCSR04B.pdf>>. Acesso: julho/2017. 25
- FILIPFLOP. *Como conectar o Sensor Ultrassônico HC-SR04 ao Arduino*. 2011. <<http://http://www.blog.filipeflop.com/sensores/sensor-ultrassonico-hc-sr04-ao-arduino.html>>. Acesso: março/2017. 24
- FONSECA, D. G. V. d. *Modelagem e controle adaptativo de uma planta didática de nível com instrumentação industrial*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2012. 2

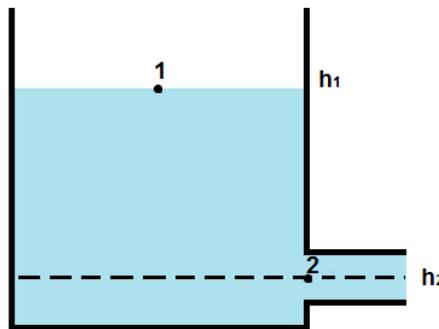
- FRANCO, A. L. D. et al. Controle não linear robusto: um método baseado em uma linearização por realimentação. Florianópolis, SC, 2006. 16
- GOSMANN, H. L. *Um sistema Multivariável de tanques acoplados para avaliação de técnicas de controle*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2002. 2, 51
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. Fundamentos de física: Gravitação. *Ondas e Termodinâmica*, v. 2, p. 6, 2009. 50
- JABUONSKI, R. E. et al. Sistema de experimentação remota configurável de controle de nível de líquidos multivariável. *VI SBAI, Bauru, Brasil*, 2003. 26
- JAUREGUI, C. et al. Conical tank level control with fractional pid. *IEEE Latin America Transactions*, IEEE, v. 14, n. 6, p. 2598–2604, 2016. 1, 3
- JOSEPH, A.; ISAAC, J. S. Real time implementation of model reference adaptive controller for a conical tank. *International Journal on Theoretical and Applied Research in Mechanical Engineering*, v. 2, n. 1, p. 57–62, 2013. 1, 3
- OGATA, K. *Discrete-time control systems*. [S.l.]: Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1995. v. 8. 9, 10, 11
- OLIVEIRA, J. C. P. de; RESENDE, P.; MAIA, C. A. Controle neural gain scheduling de tanques interativos. *ResearchGate*, 1997. 2
- RUGH, W. J. *Linear System Theory*. [S.l.]: Prentice-Hall Upper Saddle River, NJ, 1996. v. 2. 7
- SILVA, G. V. M. da. Controlo não linear. *Escola superior de tecnologia de Setúbal*, 2006. 17, 18
- SKOGESTAD, S. Simple analytic rules for model reduction and pid controller tuning. *Journal of process control*, Elsevier, v. 13, n. 4, p. 291–309, 2003. 37
- SLOTINE, J.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991. [S.l.]: Received, 1998. 13, 14, 15, 16, 17
- TAKATSU, H.; ITOH, T.; ARAKI, M. Future needs for the control theory in industries—report and topics of the control technology survey in japanese industry. *Journal of Process Control*, Elsevier, v. 8, n. 5-6, p. 369–374, 1998. 19
- VIJULA, D. A. et al. Model based controller design for conical tank system. *International Journal of Computer Applications*, Foundation of Computer Science, v. 85, n. 12, 2014. 22

# A Equação de Bernoulli

Considere o tanque apresenta na Figura 43, onde o nível representado por  $h_2$  é o nível de referência. Sabe que as pressões na parte de cima do tanque  $p_1$  e a pressão  $p_2$  na saída do furo são iguais à pressão atmosférica. De acordo com Halliday, Resnick e Walker (2009), ao aplicar-se a Equação de Bernoulli entre os pontos 1 e 2 tem-se

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2. \quad (\text{A.1})$$

Figura 43 – Equação de Bernoulli aplicada à um tanque.



O segundo termo no lado esquerdo da Equação (A.1) se iguala a zero, pois a velocidade do líquido na parte de cima do tanque (velocidade com que o nível do líquido diminui) pode ser desprezada. O terceiro termo no lado direito da Equação (A.1) também é igual a zero, pois o nível de referência está situado na altura do furo. Sabendo-se que  $p_1 = p_2 = p_{atm}$ , a Equação (A.1) é reescrita da seguinte forma

$$p_{atm} + 0 + \rho g h_1 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0. \quad (\text{A.2})$$

Assim, obtém-se a velocidade do fluido na saída do tanque

$$v_2 = \sqrt{2gh_1}. \quad (\text{A.3})$$

Caso exista na saída do tanque um válvula, deve-se adicionar na Equação (A.1) um termo referente a perda de carga no escoamento. Desse modo, ela é reescrita da seguinte maneira

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + f \frac{L_T}{D} \frac{1}{2}\rho v_2^2, \quad (\text{A.4})$$

em que  $f$  é o coeficiente de perda de carga,  $L_T$  é o comprimento da válvula e  $D$  é o

diâmetro da válvula. Fazendo-se a mesma análise que foi feita para a Equação (A.1), obtém-se

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh_1}{f\frac{L}{D} + 1}}. \quad (\text{A.5})$$

O coeficiente de perda de carga  $f$  é encontrado experimentalmente. Esse valor depende do número de Reynolds ( $Re$ ) (GOSMANN, 2002), dado por

$$Re = \frac{\rho D v}{\mu}, \quad (\text{A.6})$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $D$  é o diâmetro interno da válvula,  $v$  é a velocidade média do fluido no tubo e  $\mu$  é a viscosidade absoluta do fluido.

Por fim, para os dois casos, a velocidade (e conseqüentemente a vazão) de saída do fluido é dada pela Equação A.7

$$v = k\sqrt{h}, \quad (\text{A.7})$$

sendo que para o caso onde existe uma válvula,  $k$  é variável.

## B Diagramas de blocos

Nesta seção é apresentado o diagrama de bloco do sistema controlado por LER, ver Figura 44. Também são mostrados aqui, os diagramas de blocos para o filtro, lei de controle e tanque, nas Figuras 45, 46 e 47, respectivamente.

Figura 44 – Diagrama de blocos do sistema controlado por linearização exata por realimentação.

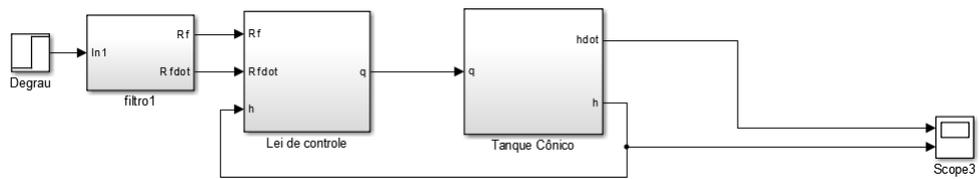


Figura 45 – Diagrama de bloco do filtro.

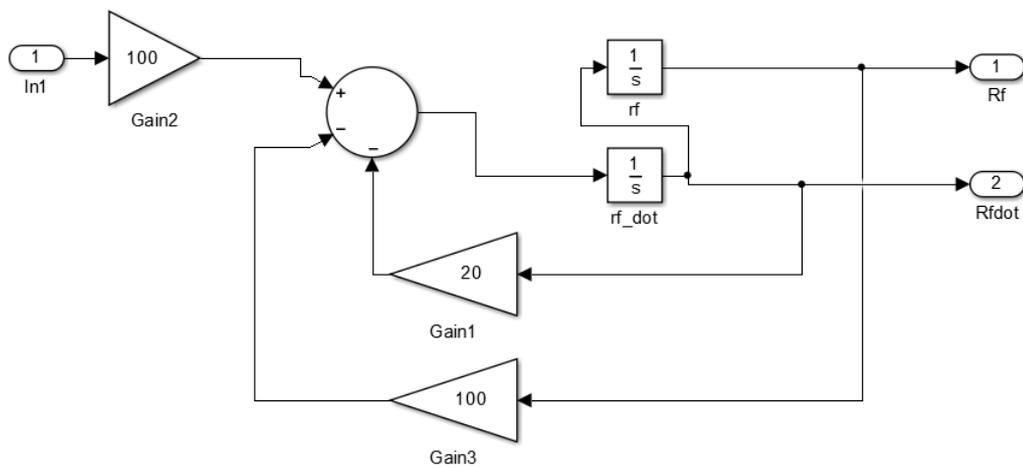


Figura 46 – Diagrama de bloco para a lei de controle representada por (3.11).

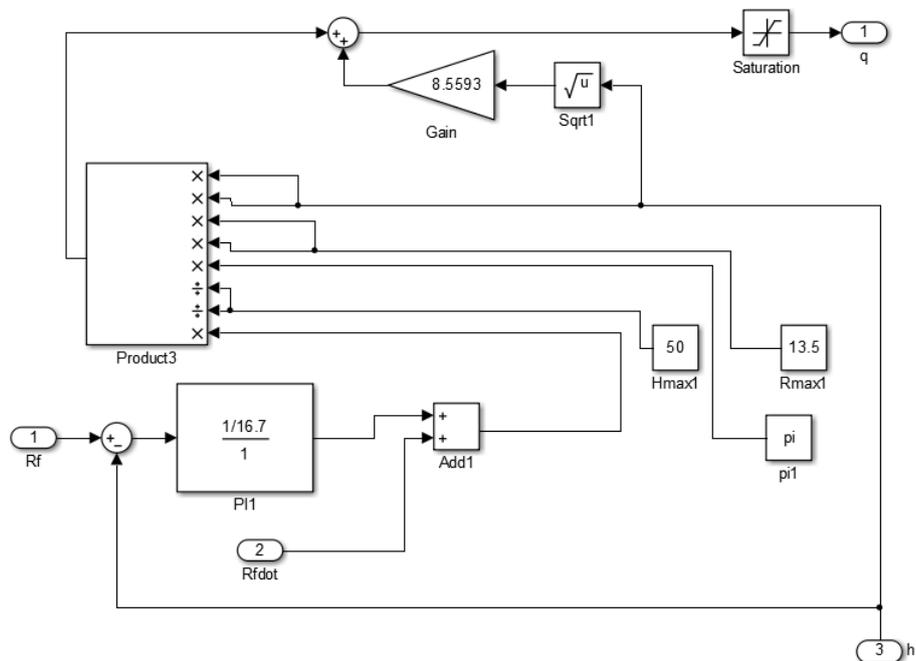
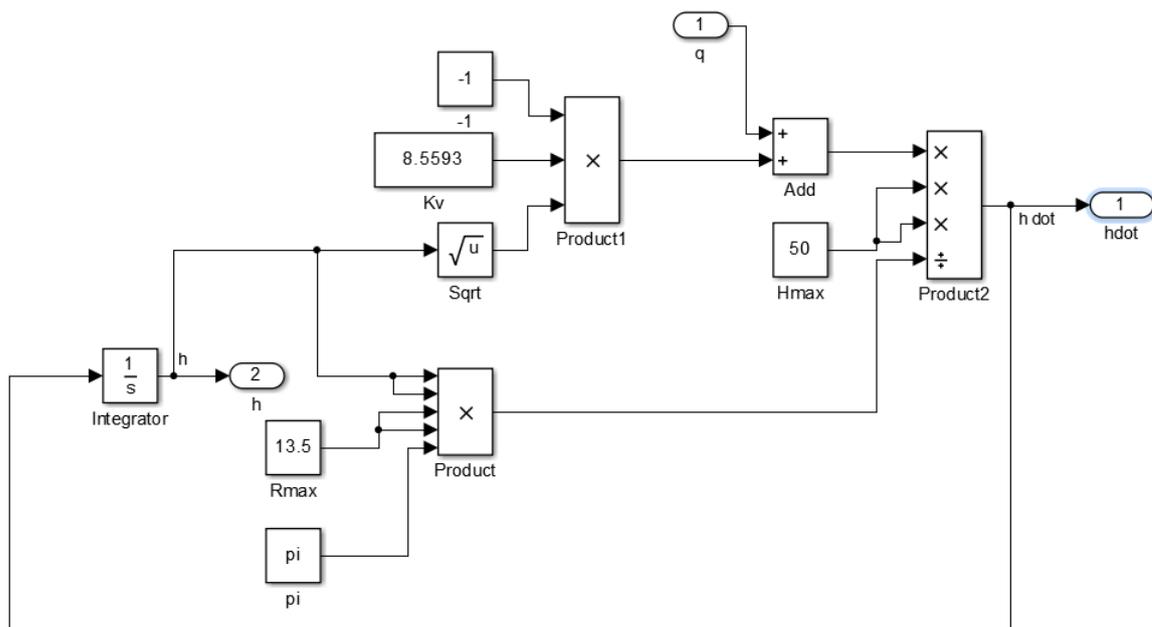


Figura 47 – Diagrama de bloco do tanque de área variável representado por (2.48).

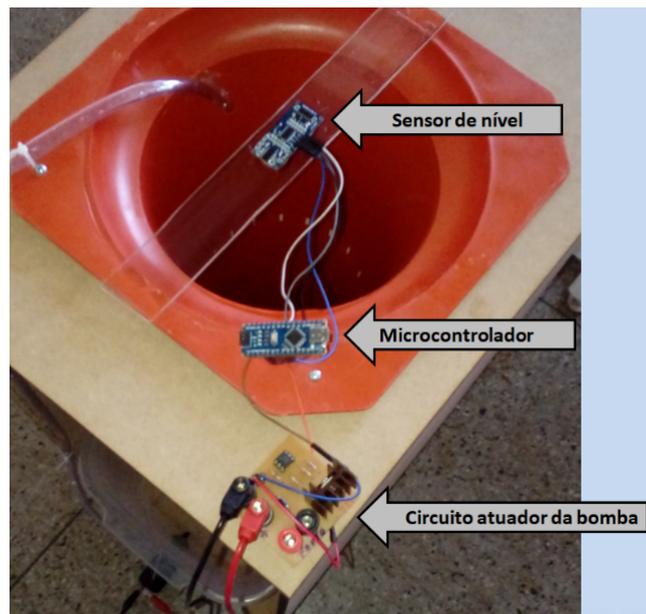


## C Planta para Modelagem e Controle de Nível

Figura 48 – Planta didática.



Figura 49 – Instrumentação da planta.



# D Programação do Arduino

## D.1 Controle PI (Síntese Direta no Tempo Contínuo)

```

#include "Ultrasonic.h" //inclui a função para medir nível
#define pino_trigger 4 // define o pino 4 para o trigger do sensor
#define pino_echo 5 // define o pino 5 para o echo do sensor
#define pino_pwm 3 // define o pino 3 como a saída pwm do arduino
double v,pwm;
double e,e_ant,q,q_ant; // declaração de variaveis
Ultrasonic ultrasonic(pino_trigger, pino_echo);

void setup()
{
  pinMode(pino_pwm,OUTPUT); // Configura o pino_pwm como saída
  Serial.begin(9600);
  q_ant=0;
  e_ant=0;
}

void loop()
{
  long microsec = ultrasonic.Timing(); // Leitura do tempo da onda
  //ultrassonica do sensor
  double y = 50 - (microsec/58.0); //calculo da altura do nível

  e=25-y; //erro entre o setpoint e o nível medido
  q=q_ant+e*8.577-e_ant*8.572; //equacao a diferenca obtida
  q_ant=q;
  e_ant=e;
  q = q + 42.79; //condição de operação na qual
  //foi feita a linearizacao
  if (q > 79.87) //limite máximo de vazão da bomba
    q = 79.87;
  if (q < 16.81) //limite mínimo de vazão da bomba
    q = 16.81;

```

```
v=(q+14.72)/10.51; //valor da tensao na bomba em funcao da vazao,  
// obtido na calibracao  
pwm=map(v,0,12,0,255); //conversao dos valores de tensao para o sinal pwm  
analogWrite(3,pwm); //gera o sinal pwm no pino 3  
  
Serial.print(v); //imprime no serial o valor de tensao da bomba  
Serial.print(" ");  
Serial.println(y); //imprime o valor da altura do nível  
delay(100);  
}
```

## D.2 Controle PI (Síntese Direta no Tempo Discreto)

```
#include "Ultrasonic.h" //inclui a função para medir nível  
#define pino_trigger 4 // define o pino 4 para o trigger do sensor  
#define pino_echo 5 // define o pino 5 para o echo do sensor  
#define pino_pwm 3 // define o pino 3 como a saída pwm do arduino  
double v,pwm;  
double e,e_ant,q,q_ant; // declaração de variaveis  
Ultrasonic ultrasonic(pino_trigger, pino_echo);  
  
void setup()  
{  
pinMode(pino_pwm,OUTPUT); // Configura o pino_pwm como saída  
Serial.begin(9600);  
q_ant=0;  
e_ant=0;  
contador=0;  
}  
  
void loop()  
{  
long microsec = ultrasonic.Timing(); // Leitura do tempo da onda  
//ultrassonica do sensor  
double y = 50 - (microsec/58.0); //calculo da altura do nível  
contador++;  
  
if (contador==10){
```

```
contador=0;
e=25-y; //erro entre o setpoint e o nível medido
q=q_ant+e*8.571-e_ant*8.518; //equacao a diferenca obtida
e_ant=e;
q = q + 42.79;
if (q > 79.87) //limite máximo de vazão da bomba
q = 79.87;
if (q < 16.81) //limite mínimo de vazão da bomba
q = 16.81;
q_ant= q -42.79;

v=(q+14.72)/10.51; //valor da tensao na bomba em funcao da vazao,
// obtido na calibracao
pwm=map(v,0,12,0,255); //conversao dos valores de tensao para o sinal pwm
analogWrite(3,pwm); //gera o sinal pwm no pino 3

Serial.print(v); //imprime no serial o valor de tensao da bomba
Serial.print(" ");
Serial.println(y); //imprime o valor da altura do nível
delay(100);
}
```

### D.3 Controle por LER

```
#include "Ultrasonic.h" //inclui a função para medir nível
#define pino_trigger 4 // define o pino 4 para o trigger do sensor
#define pino_echo 5 // define o pino 5 para o echo do sensor
#define pino_pwm 3 // define o pino 3 como a saída pwm do arduino
double v,pwm;
double e,e_ant,q,q_ant; // declaração de variaveis
Ultrasonic ultrasonic(pino_trigger, pino_echo);

void setup()
{
pinMode(pino_pwm,OUTPUT); // Configura o pino_pwm como saída
Serial.begin(9600);
}
```

```

void loop()
{
  long microsec = ultrasonic.Timing();
  double y = 50 - (microsec/58.0);
  area=(3.1415*y*y*13.5*13.5)/2500;
  e=25-y;
  q=area*((1/16.7)*e)+8.5593*sqrt(y); //lei de controle
  q = q + 42.79; //condição de operação na qual
  //foi feita a linearizacao
  if (q > 79.87) //limite máximo de vazão da bomba
  q = 79.87;
  if (q < 16.81) //limite mínimo de vazão da bomba
  q = 16.81;

  v=(q+14.72)/10.51; //valor da tensao na bomba em funcao da vazao,
  // obtido na calibracao
  pwm=map(v,0,12,0,255); //conversao dos valores
  //de tensao para o sinal pwm
  analogWrite(3,pwm); //gera o sinal pwm no pino 3
  Serial.print(v); //imprime no serial o valor de tensao da bomba
  Serial.print(" ");
  Serial.println(y); //imprime o valor da altura do nível
  delay(100);
}

```

## D.4 Controle por LER com controle PI na Lei de Controle

```

#include "Ultrasonic.h" //inclui a função para medir nível
#define pino_trigger 4 // define o pino 4 para o trigger do sensor
#define pino_echo 5 // define o pino 5 para o echo do sensor
#define pino_pwm 3 // define o pino 3 como a saída pwm do arduino
double v,pwm,area;
double e,q,w,w_ant,e_ant; // declaração de variaveis

Ultrasonic ultrasonic(pino_trigger, pino_echo);
void setup()
{
  pinMode(pino_pwm,OUTPUT); // Configura o pino_pwm como saída

```

```
Serial.begin(9600);
w_ant=0;
e_ant=0;
}

void loop()
{
  long microsec = ultrasonic.Timing(); // Leitura do tempo da onda
                                        //ultrassonica do sensor
  double y = 50 - (microsec/58.0); //calculo da altura do nível
  area=(3.1415*y*y*13.5*13.5)/2500; //calculo da area do tanque
  e=25-y; //erro entre o setpoint e o nível medido
  w=w_ant+0.0682*e-0.0678*e_ant; //variável manipulada da
                                   //lei de controle (controlador PI)
  q=area*w+8.5593*sqrt(y); //lei de controle
  w_ant=w;
  e_ant=e;
  q = q + 42.79; //condição de operação na qual
//foi feita a linearizacao
  if (q > 79.87) //limite máximo de vazão da bomba
  q = 79.87;
  if (q < 16.81) //limite mínimo de vazão da bomba
  q = 16.81;

  v=(q+14.72)/10.51; //valor da tensao na bomba em funcao da vazao,
                    // obtido na calibracao
  pwm=map(v,0,12,0,255); //conversao dos valores de
//tensao para o sinal pwm
  analogWrite(3,pwm); //gera o sinal pwm no pino 3

  Serial.print(v); //imprime no serial o valor de tensao da bomba
  Serial.print(" ");
  Serial.println(y); //imprime o valor da altura do nível
  delay(100);
}
```