



UFOP
Universidade Federal
de Ouro Preto

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Mecânica Celeste na Gravitação Newtoniana à G Variável

Felipe dos Santos Escórcio

Trabalho de Conclusão de Curso

Ouro Preto - MG
2024

Felipe dos Santos Escórcio

Mecânica Celeste na Gravitação Newtoniana à G Variável

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Física da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Física.

Área de concentração: Ciências Exatas

Prof. Dr. Hermano Endlich Schneider Velten

Ouro Preto - MG
2024

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

E74m Escorcio, Felipe Dos Santos.
Mecânica celeste na gravitação Newtoniana à G variável. [manuscrito]
/ Felipe Dos Santos Escorcio. - 2024.
64 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Hermano Velten.
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Física .

1. Newton, Isaac, 1643-1727. 2. Mecânica celeste. 3. Gravitação. 4.
Astrofísica. 5. Relatividade (Física). I. Velten, Hermano. II. Universidade
Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 531/534

Bibliotecário(a) Responsável: Paulo Vitor Oliveira - CRB6/2551



FOLHA DE APROVAÇÃO

Felipe dos Santos Escórcio

"Mecânica Celeste na Gravitação Newtoniana à G Variável"

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Física da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Física.

Aprovada em 08 de fevereiro de 2024

Membros da banca

Doutor - Hermano Endlich Schneider Velten - Universidade Federal de Ouro Preto.
Doutor - André Herkenhoff Gomes - Universidade Federal de Ouro Preto.
Doutor - Armando de Oliveira Brizola - Universidade Federal de Ouro Preto.

Hermano Endlich Schneider Velten, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 08/02/2024.



Documento assinado eletronicamente por **Hermano Endlich Schneider Velten**, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR, em 19/02/2024, às 15:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **André Herkenhoff Gomes**, COORDENADOR(A) DE CURSO DE BACHARELADO EM FÍSICA, em 19/02/2024, às 15:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Armando de Oliveira Brizola**, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR, em 19/02/2024, às 16:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0663103** e o código CRC **08AF82D6**.

*"A realidade é aquilo que, quando você para de acreditar, não desaparece."
(Philip K. Dick)*

Resumo

A construção de uma nova teoria relativística da gravitação que não desconsidere por completo a validade da teoria relativística de Einstein, apresenta-se como uma alternativa viável ao considerarmos a necessidade de resolver problemas inerentes à mecânica celeste, à cosmologia e à gravitação quântica. O último século tem sido palco do surgimento contínuo de várias teorias gravitacionais com tais propósitos em sua essência, sendo a teoria de Brans-Dicke uma forte candidata nesse aspecto. O trabalho de Brans-Dicke busca fundamentar a adição de um campo escalar nas equações de campo da relatividade geral, recuperando por completo a interpretação de Mach da gravitação [1]. No entanto, a teoria de Brans-Dicke pressupõe a existência de uma constante gravitacional G variável, na qual a variação de G está intrinsecamente ligada ao campo escalar correspondente. O formato dessa variação, associado à constante de acoplamento, não é uma característica inerente ao formalismo em si, mas definido apenas com o intuito de satisfazer as condições esperadas. Dentro desse cenário, o presente trabalho procura demonstrar os mecanismos utilizados para a construção de uma nova formulação teórica, na qual a variação da constante gravitacional G seja derivada de maneira natural por meio da lagrangiana proposta na Referência [2]. Anexamos na sequência o artigo publicado com essa finalidade, onde é apresentada a proposta para a força gravitacional modificada, com a qual analisamos a expressão obtida para o avanço do periélio e a utilizamos para restringir o único parâmetro livre existente na teoria. Além disso, demonstramos que não há impacto significativo no limite de Roche em comparação com resultados bem conhecidos na mecânica celeste, mostrando que a nova lei de força obtida não afeta os valores observacionais, para os quais a mecânica newtoniana é uma boa aproximação.

Palavras-chaves: Mecânica Celeste; Gravitação; Astrofísica; Teoria de Brans-Dicke, Teoria da Relatividade.

Abstract

The construction of a new relativistic theory of gravitation that does not completely disregard the validity of Einstein's relativistic theory presents itself as a viable alternative when considering the need to address inherent problems in celestial mechanics, cosmology, and quantum gravity. The last century has witnessed the continuous emergence of various gravitational theories with such purposes at their core, with the Brans-Dicke theory being a strong contender in this regard. The work of Brans-Dicke aims to justify the addition of a scalar field in the field equations of general relativity, fully recovering Mach's interpretation of gravity [1]. However, the Brans-Dicke theory presupposes the existence of a variable gravitational constant G , where the variation of G is intrinsically linked to the corresponding scalar field. The specific form of this variation, associated with the coupling constant, is not an inherent feature of the formalism itself but is defined solely to satisfy the expected conditions. Within this framework, the present work seeks to demonstrate the mechanisms used to construct a new theoretical formulation in which the variation of the gravitational constant G is naturally derived through the Lagrangian proposed in Reference [2]. Following this, we attach the published article with this purpose, presenting the proposal for the modified gravitational force. We analyze the obtained expression for the advance of the perihelion and use it to constrain the only free parameter existing in the theory. Furthermore, we demonstrate that there is no significant impact on the Roche limit compared to well-known results in celestial mechanics, showing that the newly obtained force law does not affect observational values, for which Newtonian mechanics is a good approximation.

Key words: Celestial Mechanics; Gravitation; Astrophysics; Brans-Dicke Theory; Theory of Relativity.

Sumário

1	Introdução	17
2	Gravitação newtoniana	21
2.1	Lei da Gravitação Universal	21
2.2	O potencial gravitacional	23
2.3	Equação de Poisson	24
2.4	Algumas aplicações	25
2.4.1	Hidrodinâmica gravitacional	25
2.4.2	O limite de Roche	26
3	Mecânica celeste e dinâmica orbital	29
3.1	Órbitas keplerianas no espaço	29
3.1.1	Atribuição de um referencial	30
3.2	Órbitas não keplerianas no espaço	32
3.2.1	Forças perturbativas	32
3.2.2	Órbitas osculantes	33
3.2.3	Equações das osculações dos elementos orbitais	34
4	A teoria da relatividade geral	37
4.1	O princípio da equivalência	37
4.1.1	O parâmetro de Eotvos	39
4.2	As equações de campo	40
4.3	Aplicações	42
4.3.1	O periélio de Mercúrio	43
4.3.2	Formalismo pós newtoniano parametrizado	44
5	Teorias escalares-tensoriais	47
5.1	Teoria de Brans-Dicke	47
6	Mecânica celeste e as teorias escalares tensoriais	49
6.1	Anexo 1: Celestial Mechanics in Newtonian-like gravity with variable G	49
7	Conclusão	61
	Referências	63

1 Introdução

Investigações voltadas às interações entre dois ou mais corpos de um sistema mecânico têm impulsionado pesquisas em diversas vertentes da física, sendo a causa e o efeito inerente aos fenômenos associados, determinados pelas forças existentes entre os corpos investigados. Na grande maioria dos casos, os fenômenos são mediados por meio de um campo de interação, o qual contém propriedades físicas e matemáticas particulares. O estudo da gravidade não escapa desse princípio ao representar a dinâmica entre corpos celestes em geral. Teorias gravitacionais contemporâneas, por exemplo, necessitam de um formalismo geométrico onde, ao se estabelecer por meio da relatividade geral que os fenômenos gravitacionais seriam provenientes da curvatura do espaço-tempo, a geometria passou a atuar como o próprio alicerce das interações entre corpos massivos. Nesse aspecto, as limitações impostas às alterações das equações de campo da gravidade revestem-se atualmente com extrema rigorosidade, uma vez que a relatividade geral e a física newtoniana demonstram uma excelente aproximação entre os valores teóricos esperados e os valores observados experimentalmente, em suas respectivas escalas. Os grandes problemas passam a aparecer quando a teoria conhecida não representa com eficácia determinados fenômenos de natureza gravitacional, colocando em questão a definição matemática e a interpretação física vigente.

O denominado setor escuro do universo surgiu inicialmente por meio da ausência da eficácia das teorias vigentes em representar eventos de natureza astronômica. Na primeira metade do século XX, aglomerados de galáxias eram frequentemente investigados por conta de suas particularidades, em especial devido a seu equilíbrio dinâmico e suas recorrentes violações do teorema do virial. Trabalhos liderados por Fritz Zwicky [3] indicavam frequentemente que a energia cinética, medida em todo aglomerado a partir das velocidades de suas componentes, não era compatível com a quantidade de energia potencial gravitacional obtida por meio da massa aparente de seus objetos. Além disso, a velocidade orbital de galáxias em rotação seria aproximadamente constante em função da distância de seu próprio centro, divergindo da previsão esperada por meio da mecânica newtoniana [cf. figura 1].

Importante observar que essas questões não são solucionadas pela relatividade geral, uma vez que o campo gravitacional na periferia de galáxias e em seus aglomerados é, em média, muito fraco. Conseqüentemente, a relatividade geral pouco difere da gravitação newtoniana nessas regiões. A conclusão imediata proveniente desse resultado é que deve haver mais matéria presente na galáxia e em seus aglomerados, além da observada. O problema da falta de massa deu origem ao termo "matéria escura", em alusão ao fato de que deve haver mais massa do que podemos detectar [4]. Uma possível solução para abordar essa questão, seria tratar a massa visível como constante, excluindo a existência da matéria escura, e, ao mesmo tempo, considerar a constante G como uma variável dependente da distância, ajustando-se à região

específica do espaço em que se encontra, isto é, $G \equiv G(r)$. A exploração dessas considerações sobre as constantes fundamentais da natureza, destacando suas implicações como constantes de acoplamento gravitacional, tem sido uma temática recorrente ao longo do tempo, motivando a construção da pesquisa aqui evidenciada.

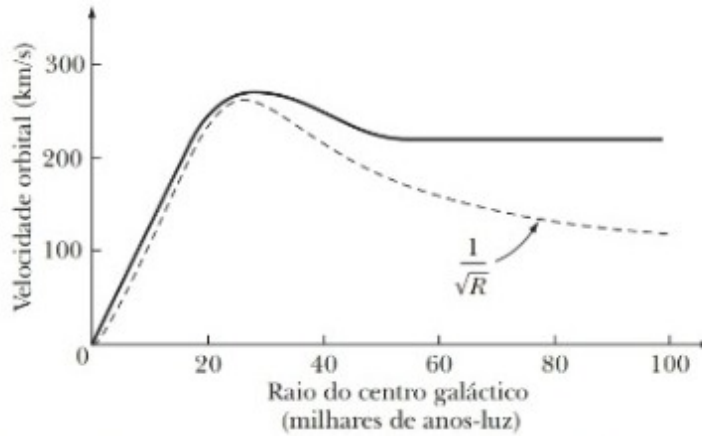


Figura 1 – A linha contínua representa os dados experimentais para a velocidade orbital. A linha pontilhada representa o mesmo comportamento determinado pela teoria newtoniana. O resultado analítico dessas grandezas pode ser obtido ao considerarmos que a força gravitacional newtoniana experimentada por um corpo de teste é igual à força centrípeta presente em sua órbita em relação ao centro da galáxia. Figura adaptada de [5].

O artigo denominado “As Constantes Cosmológicas” [6], escrito por Paul Dirac em 1937, introduz uma discussão acerca das constantes fundamentais da física e de suas utilizações na descrição de fenômenos naturais. Todo esse debate ocorreu com grande intensidade em meados do triunfo da física quântica, implicando diretamente também em suas interpretações. Envolto nesse contexto histórico, Dirac faz uma descrição das constantes naturais por meio de sua importância para a descrição de grandezas relevantes na representação de fenômenos, inserindo um conjunto de coincidências que emergem de valores numéricos em alguns sistemas físicos. A principal motivação de suas ideias sustenta-se pela coincidência observada entre as razões

$$\frac{hc}{Gm_p m_e} \sim \frac{m_p c^2}{H_0 h} \sim 10^{41}. \quad (1.1)$$

Aqui, a constante de Planck h , a velocidade da luz c , a massa do próton m_p e a do elétron m_e , a constante gravitacional G e o parâmetro de Hubble H_0 aproximam-se de valores em uma única escala na ordem de 10^{41} . Porém, ao considerarmos que a constante de Hubble H_0 possui uma dependência com o tempo, teremos que a constante gravitacional deverá possuir uma dependência temporal para satisfazer o valor esperado em qualquer instante, isto é, $G \equiv G(t)$. A razão permanece a mesma para qualquer unidade temporal, sugerindo que o acoplamento gravitacional varie seguindo a mesma proporcionalidade que a constante de Hubble. Apesar do argumento de Dirac ter um caráter puramente hipotético e com características pitagóricas

que carecem de evidência científica, suas considerações abriram margem para especulações da variabilidade de outras constantes fundamentais presentes na equação (1.1).

Diante da necessidade de abordar essas questões e explorar soluções para os problemas vigentes - como os relacionados com a matéria escura - surgiram diversas teorias alternativas à gravidade relativística, que passaram a incorporar uma variação de suas equações, considerando, por exemplo, uma constante de acoplamento G variável. Isso se traduz em tentativas de modificar as equações de movimento, levando-se em consideração a dependência da constante de acoplamento em relação à dinâmica do sistema. Essa abordagem pode se tornar útil para se analisar problemas presentes na física moderna, em especial quando necessita da constante gravitacional para se analisar fenômenos de natureza cosmológica. Além disso, muitos problemas cosmológicos são analisados em um quadro newtoniano, incluindo a dinâmica de galáxias e simulações numéricas de estruturas em grande escala. Ter uma teoria newtoniana bem fundamentada que leve em conta um G variável poderia ser desejável para resolver os casos supramencionados.

Com essa perspectiva, nosso principal objetivo neste trabalho será apresentar o método utilizado para a obtenção da força gravitacional, desenvolvida por meio de uma nova formulação teórica, na qual a variação da constante gravitacional G seja derivada de maneira natural através da lagrangiana proposta na Referência [2]. Concentraremos em fornecer resultados para o avanço do periélio orbital por meio dessa nova metodologia, e a usaremos para determinar valores relacionados à expressão modificada para o limite de Roche. Todas as definições teóricas para a construção da nova teoria serão conduzidas com base na revisão bibliográfica realizada no início da próxima seção, onde abordaremos a mecânica newtoniana, os princípios das teorias relativísticas e os fundamentos de teorias escalares-tensoriais. Em seguida, procederemos à inclusão da versão em acesso livre do artigo [7], no qual apresentamos detalhadamente a metodologia empregada para desenvolver a teoria gravitacional com uma constante gravitacional variável.

2 Gravitação newtoniana

A descrição de grande parte dos fenômenos que envolvem a dinâmica celeste compreendeu no século XVII um expressivo avanço científico promovido pela mecânica newtoniana. Os mecanismos disponibilizados por meio dessa nova forma de compreender o mundo favoreceram o entendimento de eventos que antes eram analisados de forma rudimentar, sem um formalismo matemático apropriado para representar de forma teórica os fenômenos observados. É importante não desconsiderarmos com esse pensamento a importância dos cálculos desenvolvidos por Kepler em seus estudos das órbitas planetárias, mas esses são, de certa forma, incompletos por não explicar a causa dos efeitos observados. Com a então mecânica newtoniana, torna-se possível detalharmos o movimento da Lua, bem como descrever anomalias orbitais que causariam efeitos até então não discutidos pelo método de Kepler. O presente capítulo buscará descrever os elementos fundamentais da mecânica newtoniana e suas decorrentes aplicações, baseando-se na Ref. [5].

2.1 Lei da Gravitação Universal

O princípio base para descrevermos os efeitos de natureza gravitacional parte da lei de força estabelecida pela Lei da Gravitação Universal, representando que cada partícula atrairá outra partícula no universo com uma força que varia inversamente com o quadrado da distância entre as massas m e M de dois corpos que constituem o sistema investigado,

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r}. \quad (2.1)$$

Nesse caso, o sinal de menos determina o caráter atrativo da força, fazendo com que o vetor aponte contrário à sua orientação positiva.



Figura 2 – Representação da orientação vetorial da força gravitacional, onde a partícula de massa m sente uma força de atração em direção à partícula de massa M e, vice-versa. Figura adaptada de [5].

Vale notar que o campo gravitacional newtoniano é um campo vetorial que se assemelha bastante com outros campos presentes na física clássica, como, por exemplo, o campo elétrico.

A principal diferença, como especificado pelo sinal da equação (2.1), reside no fato da força gravitacional ter caráter apenas atrativo, uma vez que a massa será sempre positiva. Com a gravitação newtoniana, mantemos ainda uma proporção com uma constante de acoplamento gravitacional G , onde seu valor pode ser estabelecido ao empregarmos a Lei da Gravitação Universal em sistemas físicos.

Uma maneira de determinar o valor dessa constante é por meio de duas pequenas esferas fixadas nas extremidades de uma barra. Essas duas esferas são atraídas, como resultado, em direção a duas outras esferas maiores posicionadas em um dos lados das esferas pequenas. Por meio desse experimento, denominado experimento de Cavendish [8], obtém-se um valor de

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{Kg}^2. \quad (2.2)$$

Para estender a aplicação da lei de Newton a corpos extensos que não possuem uma geometria esfericamente simétrica como as esferas do experimento, consideraremos que o campo de força gravitacional é um campo vetorial linear, sendo possível calcular a força gravitacional em um corpo devido à força sentida em várias outras partículas que o constituem. Logo, se somarmos os vetores de todas as forças individuais, conseguiremos encontrar a respectiva força total

$$\vec{F} = -G \int_V \frac{m\rho(r')}{r^2} \hat{r} dv'. \quad (2.3)$$

Nesse caso, $\rho(r')$ se apresenta como a densidade de massa do objeto com elementos de volume dv' localizados na posição do vetor r' . Se ambos os corpos, com massas m e M respectivamente, possuírem extensão finita, será necessário realizar uma segunda integração sobre o volume de massa m para calcular a força gravitacional total.

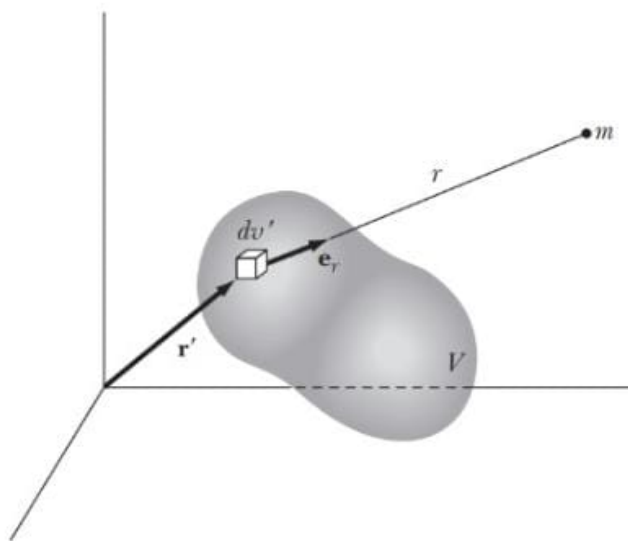


Figura 3 – Esquema que representa os vetores de posição de uma distribuição contínua de matéria de volume V com elementos de volume dv' localizados na posição do vetor r' . Figura adaptada de [5].

Por meio dessas relações, torna-se possível obter o vetor campo gravitacional gerado por um corpo de massa M . Esse processo estabelece, em todos os cenários, uma conexão direta entre a força, como definida pela Lei da Gravitação Universal de Newton, e a constante de proporcionalidade G associada. O entendimento dessas interações gravitacionais torna-se crucial para descrever e representar os fenômenos celestes, desde a movimentação dos corpos até a compreensão das órbitas planetárias. A vinculação entre a força gravitacional e a constante de acoplamento G define, portanto, a descrição de eventos astrofísicos em larga escala sustentados por uma constante fundamental obtida localmente de forma experimental.

2.2 O potencial gravitacional

É notável que o vetor que expressa a força gravitacional depende inversamente do quadrado da distância. Ainda, se $\vec{F}(r)$ é um campo vetorial conservativo, então existe uma função escalar ψ tal que $\vec{F}(r) = \vec{\nabla}\psi$, atendendo assim ao requisito que viabiliza a representação da força, como o gradiente de uma função escalar ψ . Essa característica matemática está presente na Lei da Gravitação Universal de Newton, pois, ao considerar a expressão matemática da força gravitacional, é possível relacioná-la a uma função escalar da seguinte maneira:

$$\vec{F} = -m\vec{\nabla}\psi = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}. \quad (2.4)$$

No caso em que o vetor \vec{F} depende apenas da coordenada radial, a função passa a ter uma variação apenas em r . Assim, para o caso de partículas pontuais ou para uma distribuição esférica de massa, temos

$$\frac{d\psi}{dr} = G\frac{M}{r^2}. \quad (2.5)$$

Por fim, se integramos dos dois lados, obtemos

$$\psi = G\frac{M}{r}, \quad (2.6)$$

que se apresenta justamente como o potencial gravitacional de um ponto material ou de uma distribuição esférica de massa M . Essa abordagem matemática proporciona uma perspectiva elegante para descrever e compreender o comportamento do campo gravitacional em função da distribuição de massa no espaço, onde a conexão entre a força gravitacional e uma função escalar não apenas simplifica a representação matemática, mas também revela uma relação direta entre as leis físicas fundamentais e os conceitos matemáticos associados.

O significado físico da função potencial gravitacional torna-se mais claro ao considerarmos o trabalho dW necessário para mover uma partícula em um campo gravitacional ao longo de uma distância dr . Nesse caso, o trabalho é igual ao produto escalar da força gravitacional pelo deslocamento,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -m\vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r}. \quad (2.7)$$

θ o ângulo formado entre o vetor \vec{n} e \vec{g} , podemos escrever a integral como

$$\phi = \int_S \vec{n} \cdot \vec{g} \, da = -4\pi GM. \quad (2.10)$$

Cabe recordarmos ainda o Teorema da Divergência de Gauss¹, sendo possível rescrever a equação (2.10) em função do divergente do fluxo de g . Para isso, iremos ainda generalizar esse resultado para uma superfície com várias massas m_i em seu interior,

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g} \, dV = -4\pi G \sum_i m_i. \quad (2.11)$$

Se a distribuição de massa m for contínua e homogênea em toda a superfície, descrevemos a sua soma através da integral do volume dessa superfície. Como iremos tratar de uma massa distribuída em uma dada região, seu valor torna-se a densidade $\rho = m/v$, presente nessa mesma região:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g} \, dV = -4\pi G \int_V \rho \, dV. \quad (2.12)$$

Portanto,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho. \quad (2.13)$$

Sendo $\vec{g} \equiv -\vec{\nabla}\psi$, temos que a equação de Poisson será representada por

$$\nabla^2\psi = 4\pi G\rho. \quad (2.14)$$

A expressão define que o laplaciano do potencial gravitacional é dado através da densidade de massa do corpo que contém esse potencial. Essa relação entre a equação de Poisson e o fluxo gravitacional proporciona uma descrição matemática da interação gravitacional em termos da massa e da geometria do corpo investigado. Analogamente ao eletromagnetismo, no qual a Lei de Gauss desempenha um papel fundamental na caracterização do fluxo elétrico, a equação de Poisson oferece um meio de entender e quantificar o fluxo gravitacional resultante de uma distribuição de massa.

2.4 Algumas aplicações

2.4.1 Hidrodinâmica gravitacional

Para descrevermos uma aplicação direta da Lei da Gravitação Universal na estrutura de corpos celestes, podemos realizar uma série de aproximações que determinarão qualquer corpo material como sendo feito de pequenos elementos, de modo que cada elemento contenha um número definido de componentes. Essa caracterização é feita com bastante detalhe na Ref. [9], apresentando os elementos com uma densidade de massa ρ , uma pressão p , e uma velocidade

¹ O Teorema da Divergência diz que um fluxo de um campo vetorial \vec{F} que passa através de uma superfície fechada é igual à integral do volume do divergente do fluxo de \vec{F} .

v . Além da velocidade, todas as variáveis consideradas são medidas por um observador que está momentaneamente em repouso com respeito ao elemento em questão. Esta definição é adequada em um cenário newtoniano onde tais considerações acabam sendo semelhantes à descrição de um fluido.

Um aspecto relevante em relação a um elemento fluido é a sua capacidade em preservar integralmente seu conteúdo enquanto se desloca dentro da região estabelecida. Ao considerarmos a massa do elemento como ρV , a segunda Lei de Newton definirá a força como

$$\vec{F} = (\rho V)\vec{a}. \quad (2.15)$$

A sua aceleração pode ser expressa como $d\vec{v}/dt$, definindo a taxa de mudança do vetor de velocidade do elemento conforme ele se move dentro do fluido. Seguindo a mesma lógica, torna-se possível estabelecermos a força gravitacional sentida por esse elemento, pois se definirmos $\vec{F}_{grav} = -m\vec{\nabla}\psi$, teremos a força relacionada ao potencial gravitacional descrita por

$$\vec{F}_{grav} = -(\rho V)\vec{\nabla}\psi. \quad (2.16)$$

Agora, se estabelecermos o gradiente da pressão como $\vec{\nabla}p = \frac{\vec{F}_{press}}{V}$, teremos a força relacionada à pressão definida como

$$\vec{F}_{press} = V\vec{\nabla}p. \quad (2.17)$$

Ao analisarmos as forças que atuam nessa estrutura torna-se evidente que o gradiente de pressão atuará na mesma direção, mas no sentido oposto da força gravitacional, uma vez que se considerarmos o formato estático desse mesmo elemento saberemos que seu tamanho não sofre grandes deformações, indicando assim um equilíbrio de forças, $F_{total} = F_{grav} + (-F_{press})$, entre a parte externa e interna de sua estrutura. A equação final para representar esse equilíbrio é construída considerando as equações (2.15), (2.16) e (2.17):

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\rho\vec{\nabla}\psi - \vec{\nabla}p. \quad (2.18)$$

Essa expressão é conhecida como equação de Euler e expressa justamente o equilíbrio existente entre as fronteiras estabelecidas pelo elemento de fluido. Nela é possível relacionar a dinâmica de um único pacote através do gradiente de pressão sentido pelo mesmo.

2.4.2 O limite de Roche

Com o intuito de determinar a menor distância para um corpo celeste de massa m_s orbitar em torno de um corpo hospedeiro de massa M_h , sem que as forças de maré em diferentes pontos do satélite provoquem a sua desintegração, é utilizado o chamado limite de Roche. Nesse caso, o vetor campo gravitacional pode ser estabelecido por

$$\vec{F} = -\frac{GM_h m_s}{r^2} \hat{r} \longrightarrow \vec{g} = -\frac{GM_h}{r^2} \hat{r}. \quad (2.19)$$

A derivação que representa a diferença de aceleração entre o centro do satélite e uma partícula teste localizada em sua extremidade é obtida ao considerarmos a diferença entre o vetor campo gravitacional na extremidade do satélite em relação ao seu centro:

$$\Delta\vec{g} = -\frac{GM_h}{r^2}\hat{r} + \frac{GM_h}{(r+r_s)^2}\hat{r} = GM_h\left(\frac{-2rr_s - r_s^2}{r^4 + 2r^3r_s + r^2r_s^2}\right)\hat{r}. \quad (2.20)$$

Se considerarmos ainda que $r_s \ll r$ os termos de r_s^2 e r_s serão irrelevantes. Portanto, $r_s \rightarrow 0$ no denominador e $r_s^2 \rightarrow 0$ no numerador, nos levando até

$$\Delta\vec{g} = -\frac{2GM_h r_s}{r^3}\hat{r}. \quad (2.21)$$

No limite da desintegração, a força de maré percebida pela extremidade será aproximadamente igual à força gravitacional que mantém a extremidade unida ao centro do satélite. Portanto, podemos equacionar a força de maré, obtida por meio da equação (2.21), à força existente que mantém o corpo m_s unido:

$$-\frac{2GM_h m_\otimes r_s}{r^3}\hat{r} = -\frac{Gm_\bullet m_\otimes}{r_s^2}\hat{r}. \quad (2.22)$$

Considerando que a massa m_\otimes localizada na extremidade do satélite é originada de uma partícula teste com valor unitário por definição, a equação se transforma em

$$\frac{2GM_h}{r^3} = \frac{Gm_\bullet}{r_s^3}. \quad (2.23)$$

Sendo m_\bullet a massa central do satélite, a distancia r que determina o limite de Roche pode ser obtida isolando r :

$$r = \left(\frac{2M_h}{m_s}\right)^{\frac{1}{3}} r_s. \quad (2.24)$$

Esse mesmo limite, determinado pela massa do hospedeiro, pela massa e pelo raio do satélite, será crucial para entendermos a formação de anéis em torno de planetas que já foram hospedeiros de corpos satélites que não resistiram à força de maré e se desintegraram.

Contudo, embora a equação (2.24) tenha sido amplamente utilizada para explicar a formação de anéis por meio da desintegração de corpos sólidos, sua aplicabilidade foi recentemente questionada pela observação do objeto transnetuniano Quaoar, cujo anel orbita em um ponto muito distante do esperado, desafiando modelos teóricos estabelecidos. Artigos recentemente publicados [10] descrevem o comportamento inesperado dos anéis em torno desse objeto transnetuniano. Mesmo que outros fenômenos possam justificar o confinamento desses anéis, há a possibilidade de uma correção nas equações newtonianas que descrevem o limite de Roche seja necessária. Essa possibilidade também motiva o conteúdo desta monografia, que busca explorar esses conceitos com mais detalhes no artigo anexado.

3 Mecânica celeste e dinâmica orbital

A mecânica celeste estabelece um campo da física que se dedica ao estudo do movimento dos corpos celestes no espaço, especialmente planetas, estrelas, satélites naturais e outros objetos astronômicos. A dinâmica orbital, por sua vez, é um subcampo da mecânica celeste que se concentra especificamente no estudo dos movimentos orbitais, buscando representar as forças e as interações que influenciam a trajetória de um corpo celeste em órbita.

As leis fundamentais que governam a mecânica celeste e a dinâmica orbital são derivadas das contribuições de Johannes Kepler, que formulou as leis do movimento planetário, e Isaac Newton, que estabeleceu as leis do movimento e a Lei da Gravitação Universal. As leis de Kepler, em particular, descrevem as características geométricas das órbitas, enquanto as leis de Newton quantificam as forças gravitacionais envolvidas. A análise matemática dessas leis permite a previsão precisa dos movimentos orbitais e a compreensão das interações entre corpos celestes. Neste capítulo, dedicaremos fundamentalmente a representar tais características por meio da revisão bibliográfica da literatura utilizada.

3.1 Órbitas keplerianas no espaço

A representação matemática das órbitas de corpos celestes necessita de um conjunto de princípios geométricos que levem em conta a adoção de um sistema de referenciais. Com isso, as órbitas keplerianas promovem uma expressiva simplificação das variáveis inseridas em problemas de dinâmica orbital, uma vez que o movimento ocorrerá somente em um plano orbital estabelecido. Neste aspecto, teremos uma descrição onde um referencial é especificamente escolhido para uma representação simplificada do movimento. Para isso, será definido o momento angular orbital \vec{L} como um vetor constante e ortogonal ao vetor posição \vec{r} e ao vetor velocidade \vec{v} , fazendo com que o movimento ocorra em um plano fixo que acaba sendo sempre perpendicular a \vec{L} . Portanto, ao considerarmos dois corpos de massa m_1 e m_2 e posições \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , respectivamente, teremos:

$$\vec{L} = m_1\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 = \mu\vec{r} \times \vec{v}, \quad (3.1)$$

sendo $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ denominada massa reduzida do sistema.

Uma vez que a maioria dos corpos celestes apresenta aproximadamente um movimento circular, torna-se útil descrevermos também o movimento em função de coordenadas polares:

$$\vec{r} = [r\cos(\phi), r\sin(\phi), 0], \quad (3.2)$$

sendo r e ϕ componentes polares que dependem do tempo através dos vetores unitários

$$\hat{n} = [\cos(\phi), \sin(\phi), 0] \quad \& \quad \hat{\lambda} = [-\sin(\phi), \cos(\phi), 0], \quad (3.3)$$

que estão intimamente ligados à descrição do movimento orbital, uma vez que \hat{n} se apresenta como um vetor paralelo a \vec{r} e possui $\hat{\lambda}$ ortogonal ao mesmo por meio da rotação do próprio vetor \vec{r} . Vale destacar que esses vetores satisfazem as relações

$$\frac{d\hat{n}}{d\phi} = \hat{\lambda} \quad \& \quad \frac{d\hat{\lambda}}{d\phi} = -\hat{n}. \quad (3.4)$$

Nesse caso, consideraremos também que a aceleração relativa $\vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$ entre dois corpos celestes será estabelecida pela Lei da Gravitação Universal, isto é,

$$\vec{a} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{n}. \quad (3.5)$$

Os detalhes dessas definições podem ser encontrados com mais aprofundamento na Ref. [9], que utiliza esse formalismo para representar justamente o movimento orbital de corpos celestes.

3.1.1 Atribuição de um referencial

Ainda com base na Ref. [9], apresentaremos também um plano com coordenadas (X, Y, Z) que será responsável por definir a descrição geométrica do sistema orbital analisado e descrito pela Figura 5.

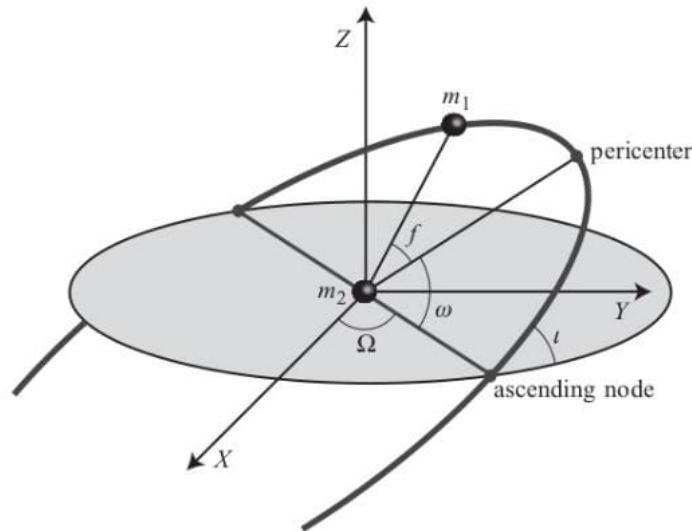


Figura 5 – Movimento orbital visualizado no referencial alternativo definido pelos eixos X, Y e Z . O ângulo ω da figura está sendo representado aqui por w . Figura adaptada de [9].

Neste sistema de eixos, o autor define o plano XY como o plano referência, sendo o eixo Z uma direção de referência previamente especificada. Assume-se também que o plano orbital e o plano alternativo compartilham a mesma origem, de modo que

$$X = Y = Z = 0 \quad \rightarrow \quad x = y = z = 0. \quad (3.6)$$

A descrição do movimento orbital em relação ao plano alternativo requer também a introdução de elementos orbitais adicionais. Por meio da Figura 5, destacam-se os seguintes elementos:

- ι : ângulo entre a direção z do plano orbital e a direção Z do plano alternativo.
- Ω : ângulo entre a direção X do plano alternativo e a linha de nós que indica a interceptação entre os dois planos.
- w : ângulo entre a linha de nós e a distância ao periélio.
- f : ângulo entre a distância ao periélio e o vetor posição do corpo m_1 .
- p : semi-latus da órbita.
- e : parâmetro que define a excentricidade da órbita.

Os dois últimos parâmetros são os que definem a geometria da órbita. A excentricidade é dada por e e o semi-latus p se relaciona com o semi-eixo maior a da elipse através da relação $p = a(1 - e^2)$. A equação da órbita elíptica é então dada por $r = p/(1 + e \cos f)$. É importante enfatizar que a constância de w é uma propriedade importante de uma órbita kepleriana, pois garante que a orientação da órbita permaneça fixa, uma vez que a posição de seu periélio não se move. Para esse caso, o movimento orbital se refaz de maneira idêntica após cada ciclo completo.

Ao considerarmos ainda os elementos orbitais, podemos definir que os componentes do vetor posição \vec{r} no plano alternativo (X, Y, Z) serão dados por

$$\begin{aligned} r_X &= r[\cos(\Omega) \cos(w + f) - \cos(\iota) \sin(w) \sin(w + f)], \\ r_Y &= r[\sin(\Omega) \cos(w + f) + \cos(\iota) \cos(w) \sin(w + f)], \\ r_Z &= r \sin(\iota) \sin(w + f). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Diferenciando as equações acima, teremos as componentes do vetor velocidade \vec{v} no plano alternativo como

$$\begin{aligned} v_X &= -\sqrt{\frac{Gm}{p}} \{ \cos(\Omega) [\sin(w + f) + e \sin(w)] + \cos(\iota) \sin(\Omega) [\cos(w + f) + e \cos(w)] \}, \\ v_Y &= -\sqrt{\frac{Gm}{p}} \{ \sin(\Omega) [\sin(w + f) + e \sin(w)] - \cos(\iota) \cos(\Omega) [\cos(w + f) + e \cos(w)] \}, \\ v_Z &= \sqrt{\frac{Gm}{p}} \sin(\iota) [\cos(w + f) + e \cos(w)]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Seguindo os mesmos princípios, teremos os vetores da base kepleriana $(\hat{n}, \hat{\lambda}, \hat{e}_z)$ definindo o plano orbital através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= [\cos(\Omega) \cos(w + f) - \cos(\iota) \sin(w) \sin(w + f)]\vec{e}_X + [\sin(\Omega) \cos(w + f) \\ &\quad + \cos(\iota) \cos(w) \sin(w + f)]\vec{e}_Y + \sin(\iota) \sin(w + f)\vec{e}_Z, \\ \vec{\lambda} &= [-\cos(\Omega) \sin(w + f) - \cos(\iota) \sin(w) \cos(w + f)]\vec{e}_X + [-\sin(\Omega) \sin(w + f) \\ &\quad + \cos(\iota) \cos(w) \cos(w + f)]\vec{e}_Y + \sin(\iota) \cos(w + f)\vec{e}_Z, \\ \vec{e}_z &= \sin(\iota) \sin(\Omega)\vec{e}_X - \sin(\iota) \cos(\Omega)\vec{e}_Y + \cos(\iota)\vec{e}_Z.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Para este capítulo, pouco importa a dedução das equações acima demonstradas, fazendo com que o interesse esteja centrado nas propriedades do movimento orbital que ela pode nos levar. Ainda assim, a descrição mais detalhada de tais propriedades pode ser acessada na Ref. [9].

3.2 Órbitas não keplerianas no espaço

Quando adicionamos uma perturbação orbital ao problema descrito na seção anterior, passamos a admitir uma solução aproximada de um valor exato. Com o conceito de perturbação orbital, podemos estabelecer o comportamento aproximado de um sistema perturbado por corpos externos, onde essa perturbação causa um movimento no plano orbital e, como consequência, apresenta uma órbita não kepleriana no espaço. A análise aproximada de pequenas influências externas em um sistema dominado por uma interação interna será a pauta principal tratada por este capítulo, uma vez que grandes perturbações influenciariam toda a descrição orbital prevista pelo Capítulo 3.1, fazendo com que os cálculos resultassem em péssimas aproximações. Portanto, incluiremos a perturbação por meio de uma força perturbativa que seja suficientemente pequena, uma vez que o nosso principal objetivo estará em definir uma maneira de descrever os pequenos desvios do movimento kepleriano produzidos por essa força.

3.2.1 Forças perturbativas

Suponha que a aceleração relativa $\vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$ entre dois corpos de um sistema seja definida por

$$\vec{a} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{n} + \vec{f}_p.\tag{3.10}$$

Seja \vec{f}_p a força perturbativa por unidade de massa, sendo equivalente a uma medida de aceleração, dependendo de \vec{r} , \vec{v} e também do tempo t . A presença da força perturbativa implica que o movimento kepleriano revisado anteriormente não é mais obtido de forma exata. Se assumirmos \vec{f}_p suficientemente pequeno, esperamos que a descrição kepleriana permaneça válida a cada instante, mas com os parâmetros orbitais variando no tempo. Para representar esse efeito, torna-se útil introduzirmos, como fizemos anteriormente, uma base vetorial adaptada

ao movimento orbital dos dois corpos, na qual tomaremos a tríade de vetores $(\hat{n}, \hat{\lambda}, \hat{e}_z)$ para formar a base desse mesmo plano.

Vale ressaltar que quando $\vec{f}_p = 0$ a base do vetor se reduz para aquele apresentado em órbitas keplerianas. No nosso caso, o momento angular continuará apontando na direção z , mas não será mais constante no tempo, uma vez que as bases acabam sendo bastante distintas na presença de uma força perturbativa. A força perturbativa, por sua vez, pode ser decomposta através da base de vetores $(\hat{n}, \hat{\lambda}, \hat{e}_z)$ com componentes R , S e W , respectivamente,

$$\vec{f}_p = R\hat{n} + S\hat{\lambda} + W\hat{e}_z. \quad (3.11)$$

No artigo anexado, mais adiante, demonstraremos que a modificação que a teoria à G variável proposta impõe à força gravitacional pode ser tratada como uma pequena perturbação determinada pela equação (3.11). As taxas de variação de cada elemento orbital vão ser, portanto, proporcionais às componentes dessa força perturbativa.

3.2.2 Órbitas osculantes

Dado que as órbitas não keplerianas alteram sua posição, bem como sua geometria em função do tempo, pode-se dizer que, como consequência, essas mesmas órbitas osculam. A transcrição de órbitas osculantes considera que todos os elementos de uma órbita acabam variando em função do tempo e podem ter sua variação descrita através do Método de Osculação dos Elementos Orbitais [9]. O ponto de partida desse método está na definição que as componentes não perturbáveis podem ser expressas como

$$r_i(t) = r_i(t, \mu^a) \quad \& \quad v_i(t) = v_i(t, \mu^a), \quad (3.12)$$

onde $i = X, Y, Z$, para todo r_i e v_i já definidos anteriormente. Por sua vez, μ^a denota os elementos orbitais no referencial adotado, sendo que, nesse caso, permanecem constantes em função do tempo. Logo, μ^a torna-se constante e independente do tempo.

Para o caso de órbitas osculantes, os elementos orbitais variam ao longo do movimento, implicando em $\mu^a(t)$. Portanto,

$$r_i(t) = r_i(t, \mu^a(t)) \quad \& \quad v_i(t) = v_i(t, \mu^a(t)). \quad (3.13)$$

Podemos ainda obter a velocidade \vec{v} do corpo em um instante t e a sua aceleração \vec{a} , realizando a derivada temporal por meio da regra da cadeia,

$$v_i = \frac{dr_i(t)}{dt} = \frac{\partial r_i}{\partial t} + \sum_a \frac{\partial r_i}{\partial \mu^a} \frac{d\mu^a}{dt}, \quad (3.14)$$

$$a_i = \frac{dv_i(t)}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_a \frac{\partial v_i}{\partial \mu^a} \frac{d\mu^a}{dt}. \quad (3.15)$$

É notável que, se não houver variação dos elementos orbitais em função do tempo, as derivadas $d\mu^a/dt$ das equações acima serão nulas, tornando o somatório igual a zero e descrevendo assim a velocidade \vec{v} e a aceleração \vec{a} de uma órbita kepleriana. Portanto, podemos dizer que os somatórios são definidos em cada caso como

$$\sum_a \frac{\partial v_i}{\partial \mu^a} \frac{d\mu^a}{dt} = 0 \quad \& \quad \sum_a \frac{\partial v_i}{\partial \mu^a} \frac{d\mu^a}{dt} \neq 0. \quad (3.16)$$

órbita Kepleriana órbita não Kepleriana

Por fim, se analisarmos a equação (3.15), conseguimos construir um paralelo entre a força perturbativa \vec{f}_p contida na equação (3.10), tal que

$$f_{p,i} = \sum_a \frac{\partial v_i}{\partial \mu^a} \frac{d\mu^a}{dt}. \quad (3.17)$$

Isso caracteriza a força perturbativa do movimento orbital em função da variação dos elementos que compõem essa órbita. Portanto, o Método das Órbitas Osculantes determina que, a qualquer momento, o corpo percorre uma elipse com parâmetros orbitais específicos. Ao compreender as componentes da força perturbativa, é possível determinar a taxa de variação de cada um desses parâmetros orbitais como consequência.

3.2.3 Equações das osculações dos elementos orbitais

As equações das osculações dos elementos orbitais são descritas através do ângulo f medido a partir do periélio orbital. Essas derivadas não serão aqui deduzidas, mas maiores detalhes desse processo podem ser novamente encontrados na Ref. [9]. As variações temporais são descritas em termos das componentes R , S e W da força perturbativa f_p [cf. equação (3.11)], a saber

$$\frac{dp}{dt} = 2\sqrt{\frac{p^3}{Gm}} \frac{1}{1 + e \cdot \cos f} S, \quad (3.18)$$

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{Gm}} \left[\sin f R + \frac{2 \cos f + e(1 + \cos^2 f)}{1 + e \cdot \cos f} S \right], \quad (3.19)$$

$$\frac{di}{dt} = \sqrt{\frac{p}{Gm}} \frac{\cos(w + f)}{1 + e \cdot \cos f} W, \quad (3.20)$$

$$\sin \iota \frac{d\Omega}{dt} = \sqrt{\frac{p}{Gm}} \frac{\sin(w + f)}{1 + e \cdot \cos f} W, \quad (3.21)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{Gm}} \left[-\cos f R + \frac{2 + e \cdot \cos f}{1 + e \cdot \cos f} \sin f S - e \cdot \cot \iota \frac{\sin(w + f)}{1 + e \cdot \cos f} W \right], \quad (3.22)$$

$$\frac{df}{dt} = \sqrt{\frac{Gm}{p^3}} (1 + e \cdot \cos f)^2 + \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{Gm}} \left[\cos f R - \frac{2 + e \cdot \cos f}{1 + e \cdot \cos f} \sin f S \right]. \quad (3.23)$$

Observe que o semi-latus da órbita p , o parâmetro que define a excentricidade da órbita e e o ângulo f são afetados apenas pelas componentes R e S (componentes do plano orbital) de \vec{f}_p ,

enquanto o ângulo Ω e ι são afetados apenas pela componente W (componente fora do plano orbital). O único elemento orbital afetado por todas as componentes é o ângulo w entre o nó ascendente e a distância ao periélio.

Também pode-se obter uma boa aproximação da dinâmica orbital integrando as equações acima em relação a t e considerando os elementos orbitais nos lados direitos das expressões como constantes. No entanto, é mais conveniente usar o ângulo f como variável independente em vez de t , uma vez que o ângulo f pode ser analisado de maneira empírica apenas adotando um eixo de referência no sistema analisado. Procedendo dessa forma, o sistema de equações osculantes torna-se, em primeira aproximação,

$$\frac{dp}{df} \simeq 2 \frac{p^3}{Gm} \frac{1}{(1 + e \cdot \cos f)^3} S, \quad (3.24)$$

$$\frac{de}{df} \simeq \frac{p^2}{Gm} \left[\frac{\sin f}{(1 + e \cdot \cos f)^2} R + \frac{2 \cos f + e(1 + \cos^2 f)}{(1 + e \cdot \cos f)^3} S \right], \quad (3.25)$$

$$\frac{dl}{df} \simeq \frac{p^2}{Gm} \frac{\cos(w + f)}{(1 + e \cdot \cos f)^3} W, \quad (3.26)$$

$$\sin \iota \frac{d\Omega}{df} \simeq \frac{p^2}{Gm} \frac{\sin(w + f)}{(1 + e \cdot \cos f)^3} W, \quad (3.27)$$

$$\frac{dw}{df} \simeq \frac{1}{e} \frac{p^2}{Gm} \left[\frac{-R \cos f}{(1 + e \cdot \cos f)^2} + \frac{2 + e \cos f}{(1 + e \cdot \cos f)^3} \sin f S - e \cot \iota \frac{\sin(w + f)}{(1 + e \cdot \cos f)^3} W \right]. \quad (3.28)$$

Nas diversas aplicações das equações das osculações dos elementos orbitais, observa-se que cada elemento experimenta variações distintas, manifestando-se por meio de dois tipos diferentes de alterações. O primeiro tipo de variação manifesta-se em torno de múltiplos do período orbital:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{Gm}}. \quad (3.29)$$

A segunda variação ocorre em torno de valores que não atingem uma média após alguns ciclos orbitais. Tais mudanças são conhecidas como mudanças seculares e são normalmente mais interessantes, porque se acumulam ao longo do tempo e, eventualmente, levam a grandes desvios em relação à configuração orbital inicial. A mudança secular de todos os elementos orbitais μ^a ao longo de uma órbita completa pode ser dada em termos do período orbital P como

$$\Delta\mu^a = \int_0^P \frac{d\mu^a}{dt} dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu^a}{df} df. \quad (3.30)$$

Em que f é o ângulo definido na Figura 5, variando de 0 a 2π quando o corpo de massa m_1 realiza uma órbita completa de período P .

4 A teoria da relatividade geral

Ao considerarmos a física newtoniana e as estruturas matemáticas demonstradas nos capítulos anteriores, abordamos a representação dos fenômenos de natureza gravitacional fundamentalmente baseada nos referenciais de Galileu. Nesse aspecto, a geometria euclidiana passa a ser utilizada para fundamentar a descrição do movimento de corpos celestes. Como uma evolução desse quadro, ao considerar os princípios da relatividade restrita, Albert Einstein combina as leis da relatividade com a gravitação ao modificar a interpretação geométrica de campo, adotando geometrias não euclidianas e obtendo as equações previstas pela relatividade geral como consequência.

Portanto, a principal diferença entre a gravidade newtoniana e a gravidade descrita pela relatividade de Einstein encontra-se na consideração de que os fenômenos físicos respeitam certas simetrias que não são mais restritas à invariância de Galileu, comumente utilizada na mecânica clássica. Como exemplo, ao se referir à teoria da relatividade restrita, as equações de Einstein exibem localmente a invariância de Lorentz como simetria. A invariância de Lorentz, por sua vez, é um exemplo significativo de que as leis da física permanecem as mesmas para todos os observadores inerciais, uma vez que as equações não sofrerão modificações quando aplicadas a qualquer sistema de coordenadas particular. Muitas previsões decorrentes dessa diferença promovem efeitos consideravelmente diferentes da descrição esperada pela física newtoniana, especialmente ao considerarmos o tempo relativo e a geometria do espaço.

A relatividade geral passa a fornecer uma descrição unificada da gravidade como uma propriedade geométrica do espaço e do tempo. Em particular, a gravidade passa a ser um efeito promovido pela curvatura do espaço-tempo, estando diretamente relacionada com a energia e o momento de qualquer distribuição de massa presente no universo. Contudo, tais considerações passam a se tornar significativas apenas quando se trata de velocidades que se aproximam da velocidade da luz e, também, em fenômenos envolvendo campos gravitacionais intensos. Por esse motivo, a física newtoniana é uma excelente aproximação em regime de campos fracos, enquanto a relatividade geral passa a atuar em regime de campos fortes. Neste capítulo, iremos fornecer uma breve demonstração das consequências previstas pela relatividade geral, onde apresentaremos a resolução do periélio de mercúrio e forneceremos uma introdução ao formalismo pós-newtoniano utilizado no artigo anexado.

4.1 O princípio da equivalência

A formulação de uma teoria da gravitação relativística satisfatória necessita de uma reformulação do princípio da equivalência fraco de Galileu, de modo que consiga generalizar a sua consideração de que dois objetos com diferentes massas, quando soltos à mesma altura,

chegam ao solo ao mesmo tempo. Ao contrário da física newtoniana, Einstein desempenhou o papel de aprimorar esse princípio, considerando-o intrínseco à natureza, e não apenas uma coincidência observada de forma experimental. Com esse objeto, a relatividade geral passa a determinar que corpos reagem da mesma maneira a um campo gravitacional homogêneo, e é justamente por meio dessa característica que o princípio é cunhado como "princípio da equivalência".

O termo equivalência refere-se ao fato dos corpos reagirem da mesma forma ao campo gravitacional, podendo estabelecer uma equivalência entre um observador parado e sob ação da gravidade e um referencial acelerado não submetido a um campo gravitacional externo. Como exemplo, tomemos o campo gravitacional próximo à superfície da Terra. Neste caso, podemos considerar que o campo gravitacional homogêneo provoca uma aceleração de $\vec{g} = -9.8 \text{ m/s}^2 \hat{z}$ em partículas teste. Se estivéssemos dentro de uma nave que se descola na ausência de campo gravitacional, com uma aceleração de $\vec{a} = 9.8 \text{ m/s}^2 \hat{z}$, não conseguiríamos distinguir se a partícula presente no interior da nave encontra-se sobre atração da gravidade ou se estaríamos acelerados com o valor de \vec{a} informado.

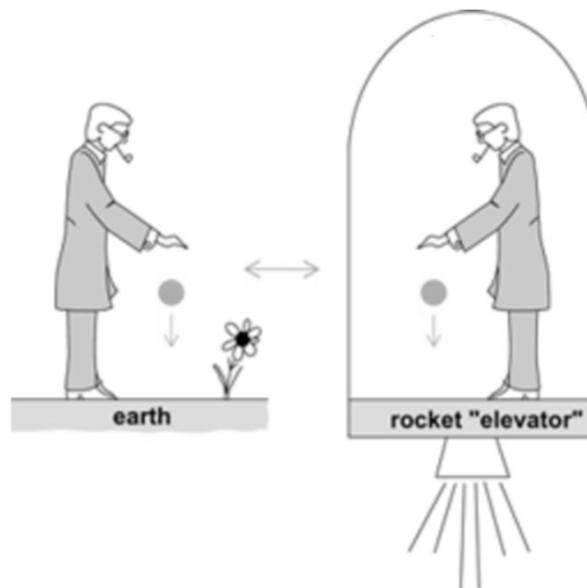


Figura 6 – Esquema que representa, à esquerda, uma bolinha solta sobre atração gravitacional. No foguete à direita, o mesmo fenômeno é observado, mas, nesse caso, é a nave que se desloca em direção à bolinha. Figura adaptada de [11].

Portanto, em ambos os casos, podemos estabelecer uma relação direta entre a massa inercial m_i e a denominada massa gravitacional m_g

$$m_i \vec{a} = m_g \vec{g} \longrightarrow m_i = m_g. \quad (4.1)$$

Por meio dessa, a massa inercial torna-se a massa que possui o efeito de oposição ao movimento quando esse é promovido por uma força, e a massa gravitacional se apresenta como a massa que

promove a distorção no espaço-tempo. Com a relatividade geral também podemos promover uma distinção mais rebuscada em relação à massa gravitacional, inserindo o conceito de massa gravitacional passiva e massa gravitacional ativa: define-se massa gravitacional passiva a quantidade que determina como um corpo reage ao campo gravitacional e denomina-se massa gravitacional ativa a massa que indica como o corpo cria o campo gravitacional.

É relevante destacar que, além das leis físicas de caráter gravitacional, outras também podem ser empregadas para analisar as duas situações demonstradas na Figura 6. Sob essa perspectiva, observamos a manifestação do princípio da equivalência, onde um referencial acelerado e um campo gravitacional homogêneo são considerados equivalentes. Torna-se intrínseco à natureza desse princípio a incapacidade de distingui-los, uma vez que nenhuma experiência física local é capaz de evidenciar uma diferenciação expressiva entre eles.

4.1.1 O parâmetro de Eotvos

Mesmo que levemos em conta que nenhuma distinção é considerada entre massa gravitacional e massa inercial, podemos assumir a validade do princípio da equivalência por meio de experimentos. Ainda que experimentos sejam capazes de aferir essa igualdade, espera-se que a precisão seja limitada até certa ordem.

Com o intuito de aferir o princípio da equivalência, consideraremos os chamados experimentos de Eotvos [12]. Estes, denominados em homenagem a Lorand Eotvos, consistem, na maioria das vezes, em um aparato experimental de balança de torção que une duas massas de mesmo peso, mas com diferentes materiais, por meio de uma barra que fica suspensa em um ponto médio por um fio. Nesse caso, se a aceleração em cada material difere, uma força de reação surge no aparato.

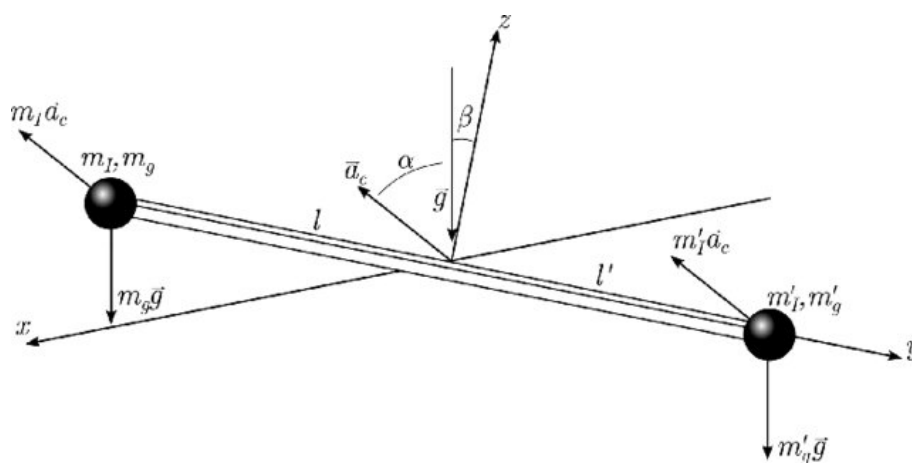


Figura 7 – Balança de torção para a realização do experimento de Eotvos. Essa balança, em específico, é nomeada de balança de Eotvos e relaciona os corpos de massa m_1 e m_2 com suas respectivas massas inerciais e gravitacionais, m_i e m_g . Figura adaptada de [12].

Vale notar que o experimento evidenciado pela balança de torção encontra um grau de precisão expressivamente alto para o princípio da equivalência fraco¹ por meio do parâmetro de Eotvos,

$$\eta = 2 \frac{\left(\frac{m_g}{m_i}\right)_A - \left(\frac{m_g}{m_i}\right)_B}{\left(\frac{m_g}{m_i}\right)_A + \left(\frac{m_g}{m_i}\right)_B} = 2 \frac{\mathcal{M}_A - \mathcal{M}_B}{\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B}. \quad (4.2)$$

Nessa relação, A e B apresentam-se como o conjunto que representa a razão \mathcal{M} das massas testes dos diferentes materiais A e B , respectivamente. Portanto, se a massa inercial e gravitacional são equivalentes entre as esferas, teremos $\eta = 0$. Em meados do século XX esse mesmo experimento já estabelecia uma precisão de 10^{-9} [8], sendo esse valor aprimorado com os recentes experimentos realizados por satélites em órbita terrestre, como os da missão MICROSCOPE [13], que indicam uma igualdade entre massas inercial e gravitacional com precisão de 10^{-15} .

Além disso, é importante observar que os experimentos não apenas estabelecem os valores esperados para o princípio da equivalência fraco, mas também fomentam outras investigações destinadas a comprovar o princípio da equivalência forte². Em todos os casos, é fundamental que os fenômenos de natureza gravitacional sejam independentes da velocidade do referencial, bem como da posição e do instante de tempo em que são observados. A consequência direta de uma eventual violação dos princípios da equivalência seria a completa revisão da teoria da relatividade geral. Essa violação poderia ser justificada ao considerarmos a dependência da constante gravitacional de Newton com o espaço-tempo ou, até mesmo, com o tempo cósmico. Contudo, o artigo anexado mais à frente discute uma aparente inconsistência entre o parâmetro de Eotvos obtido por meio da teoria newtoniana à G variável e os valores experimentais encontrados pelo MICROSCOPE, aparentando demonstrar uma forte inconsistência entre o modelo proposto pelo artigo e a realidade.

4.2 As equações de campo

Os dados experimentais que sustentam o princípio da equivalência não apenas validam esse princípio, mas também revelam que o tempo medido por relógios é afetado na presença de um campo gravitacional. No formalismo da geometria do espaço-tempo, essa medida temporal não se alinha com a métrica de Minkowski, que estabelece a medida de distância entre dois pontos em um espaço n -dimensional plano, sugerindo a necessidade da construção de uma geometria mais abrangente. Ainda assim, em escalas pequenas, todos os referenciais em queda livre se equiparam, aproximando-se de configurações minkowskianas. Isso nos conduz a uma

¹ A equivalência fraca afirma que em uma pequena região do espaço-tempo, as leis da física em um sistema acelerado são equivalentes às leis da física em um sistema gravitacional uniforme.

² A equivalência forte vai além e afirma que não importa o quão extensa seja a região do espaço-tempo ou o quão intensa seja a distorção no espaço-tempo considerado, é possível escolher um sistema de coordenadas local em que as leis da física são equivalentes às leis da física em um sistema de referência inercial.

generalização curva do espaço de Minkowski, conhecida como métrica pseudoriemanniana. Além disso, cada métrica pseudoriemanniana está intrinsecamente ligada a um tipo específico de conexão que atende ao princípio da equivalência, conferindo ao espaço uma característica localmente minkowskiana. Portanto, as equações de campo da relatividade geral necessitam ser diferentes das equações de campo previstas pela física newtoniana, principalmente por conta das diferentes características geométricas que representam os fenômenos físicos em geral.

O espaço-tempo na teoria da relatividade geral é descrito por uma variedade pseudoriemanniana de quatro dimensões, equipada com um tensor simétrico representado por $g_{\mu\nu}$. As distâncias neste espaço são expressas em termos da métrica

$$dl^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.3)$$

que representa o quadrado da distância infinitesimal entre dois pontos genéricos no espaço-tempo, a partir da qual podemos calcular as propriedades geométricas e físicas do espaço-tempo.

Ao considerarmos ainda que, na relatividade geral, estamos abordando um espaço-tempo curvo, teremos que definir a derivada em uma variedade curva, estabelecendo um conjunto de regras que possibilite uma eventual comparação de tensores definidos em diferentes situações. Nesse aspecto, podemos descrever os fenômenos por meio de uma conexão cujas componentes são conhecidas como Símbolos de Cristoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, sendo definido como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (4.4)$$

O mesmo possibilita determinar as características sobre a curvatura da variedade, por meio do tensor de curvatura de Riemann

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma. \quad (4.5)$$

Os detalhes que levaram à construção das equações (4.4) e (4.5) não serão descritos aqui, mas podem ser encontrados com facilidade na literatura utilizada [cf. Referência [8]].

Outro aspecto importante surge ao considerarmos as teorias relativísticas, uma vez que na gravidade newtoniana a fonte é simplesmente a massa. Na teoria da relatividade, a massa se integra a uma entidade mais abrangente denominada tensor de energia-momento. As características de uma distribuição passam a ser consideradas levando em conta principalmente a densidade de matéria e energia de um corpo como a fonte do campo gravitacional. É justamente com essa consideração que Einstein estabelece que, para a densidade de matéria, o candidato mais provável seria o tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$. Já o novo potencial gravitacional deveria ser representado por um tensor que carregue a métrica do espaço-tempo em sua estrutura. Portanto, define-se como tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ o tensor responsável por estabelecer uma relação direta com a métrica do espaço-tempo por meio da seguinte equação:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (4.6)$$

Nessa expressão, temos o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. O mesmo é diretamente relacionado com o tensor de curvatura de Riemann por meio da relação

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} \delta_{\alpha}^{\beta}. \quad (4.7)$$

No qual δ_{α}^{β} , é o delta de Kronecker definido usualmente. Ainda, R será definido como a curvatura escalar,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (4.8)$$

Pode-se ainda estabelecer um paralelo entre o tensor que determina as características do novo análogo ao potencial gravitacional e a fonte do campo, isto é, $G_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}$. É justamente essa equivalência o fator que determina a dinâmica do potencial gravitacional e estabelece as novas equações de campo como consequência:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu}. \quad (4.9)$$

Nessa equação, k se apresenta como uma constante de proporcionalidade obtida de forma experimental com o valor de $k = 8\pi G/c^4$. Portanto,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (4.10)$$

descreve como a gravidade afeta a matéria e, de forma análoga, como a matéria acaba criando a gravidade. Ao considerarmos as equações de movimento da mecânica clássica, esperaríamos também que a construção de uma teoria gravitacional relativística possuísse um paralelo com a gravitação newtoniana. Com essa finalidade, levando em conta a equação de Poisson, espera-se que o lado esquerdo preserve derivadas segundas do campo gravitacional, enquanto o lado direito traga as informações de fonte de matéria e energia. Essa característica geral expressa pela equação de Poisson (2.14) já possui sua semelhança estabelecida nas equações de campo (4.10). Tal paridade remonta o conforto em construir uma teoria relativística da gravitação, tendo um paralelo com a gravitação newtoniana que, quando em regime de campos fracos e baixas velocidades, consiga recuperar a mecânica clássica e suas aproximações.

4.3 Aplicações

A construção de uma teoria relativística para a gravidade, como proposta por Albert Einstein na forma da relatividade geral, representou uma evolução na compreensão da natureza fundamental das interações gravitacionais. Essa teoria não apenas determinou o princípio da equivalência, como mencionado anteriormente, mas também abriu caminho para uma série de testes e verificações experimentais que solidificaram sua validade. Ao propor a teoria, Einstein apresentou soluções para problemas pendentes que desafiavam a física na época. A precessão do periélio de Mercúrio, por exemplo, foi explicada de maneira precisa pela relatividade geral. Além disso, a teoria previu corretamente a deflexão da luz na proximidade de corpos massivos,

um fenômeno confirmado por observações astronômicas, como no famoso experimento de Arthur Eddington durante o eclipse solar em Sobral, em meados de 1919 [14].

Outras confirmações experimentais, como o desvio gravitacional para o vermelho e o atraso temporal de Shapiro, contribuíram para validar as previsões da relatividade geral. A resolução bem-sucedida desses problemas evidenciou a capacidade da nova teoria estabelecida em descrever e prever fenômenos gravitacionais em diferentes contextos. Assim, a teoria relativística da gravidade não apenas introduziu um novo conjunto de definições conceituais sobre a natureza, mas também foi submetida a rigorosos testes experimentais que, por sua vez, fortaleceram sua aceitação na comunidade científica e consolidaram seu papel como uma descrição precisa da gravidade. Nesse aspecto, abordaremos nesta parte do trabalho as duas consequências fundamentais da relatividade geral que utilizamos no método empregado para a construção da teoria à G variável: a precessão do periélio de Mercúrio e o formalismo pós-newtoniano.

4.3.1 O periélio de Mercúrio

Observava-se que o avanço do periélio de Mercúrio (ponto de maior aproximação do Sol) ocorre a uma taxa de 575 segundos de arco por século em relação às estrelas fixas. Esse avanço poderia ser facilmente justificável considerando-se a interação gravitacional dos outros planetas do sistema solar. Como consequência, astrônomos utilizaram a dinâmica newtoniana para calcular a quantidade que cada planeta contribuiria para o avanço do periélio de Mercúrio, mas o total não coincidia com o valor medido observacionalmente. A discrepância não poderia ser atribuída a erros de cálculo ou observações incorretas, e nenhuma explicação viável pode ser encontrada por bastante tempo. Em 1915, Albert Einstein, usando as novas equações de campo da relatividade geral, calcula a taxa de avanço do periélio de Mercúrio e mostra que as leis relativísticas do movimento orbital explicariam a notória discrepância observada.

Mesmo que a relatividade geral carregue outros princípios geométricos em seu fundamento, podemos ainda tratar os planetas do sistema solar como partículas testes de massa que orbitam o sol por conta de seu campo gravitacional. Considerando essa possibilidade, Einstein obteve o valor para as componentes do campo gravitacional do Sol ao determinar as equações de movimento para uma massa pontual movendo-se sob ação de um corpo central. Ao considerarmos que o quadri vetor velocidade permanece tangente a trajetória espaçotemporal ao realizarmos um transporte paralelo ao longo dessa trajetória, torna-se possível obter o deslocamento de um corpo ou uma partícula em queda livre sob ação de um campo, movendo-se em uma geodésica expressa pela equação

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (4.11)$$

Notemos em sua estrutura que τ se apresenta como um parâmetro comum que estabelece o tempo próprio da partícula, x^α suas coordenadas e o Símbolo de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ que determina

a conexão do espaço-tempo. A igualdade pode conter também as equações newtonianas de movimento como uma primeira aproximação, sendo descrita com detalhes pela Referência [15].

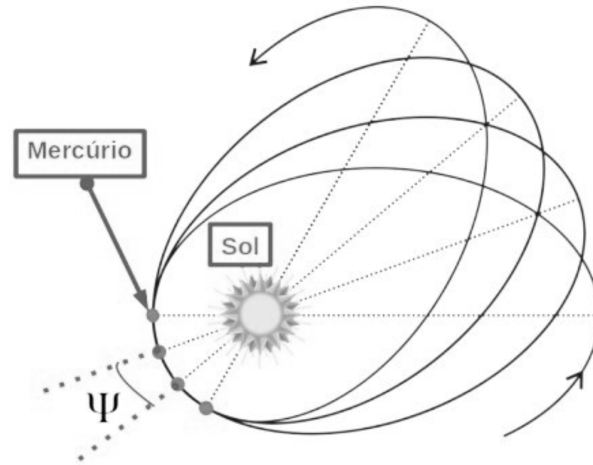


Figura 8 – Movimento da precessão do periélio de Mercúrio representado pelo ângulo Ψ formado entre os pontos de referência de cada ciclo orbital. Figura adaptada de [12].

Por meio desse método, Einstein calculou as equações das linhas geodésicas e comparou-as com as equações newtonianas das órbitas dos planetas no sistema solar. Ele verificou que o movimento sobre o plano orbital continuaria dependendo da distância r do planeta ao centro de massa do sistema e do ângulo de referência formado. Assim, a equação da órbita planetária é novamente obtida, sendo que, com a teoria de Einstein, a equação (4.11) leva a uma equação relativística para as órbitas. Podemos, assim, realizar o mesmo processo utilizado na equação (3.30) do capítulo anterior, determinando o avanço do periélio relativístico como

$$\Delta w_{GR} = 6\pi \frac{Gm}{ac^2(1 - e^2)}. \quad (4.12)$$

Einstein revelou que a discrepância entre as equações orbitais newtonianas e aquelas que incorporam os efeitos relativísticos era, na verdade, de apenas um termo. Mediante tais aproximações, ele obteve a forma como a curvatura do espaço-tempo influencia o avanço do periélio de Mercúrio, oferecendo, como resultado, a resolução do problema previsto pela física newtoniana.

4.3.2 Formalismo pós newtoniano parametrizado

A teoria newtoniana descreve os fenômenos de natureza gravitacional no sistema solar com uma precisão limitada, uma vez que a gravidade nessa região se demonstra suficientemente fraca para conseguir aumentar proporcionalmente a precisão das medidas realizadas. Um exemplo

desta limitação encontra-se também na incerteza relativa no valor da constante gravitacional G , a qual é várias ordens de magnitude maiores do que outras importantes constantes fundamentais [16]. Ainda assim, esperamos estabelecer teorias métricas de gravitação equivalentes à teoria newtoniana quando aplicadas a sistemas de baixas velocidades e com campo gravitacional suficientemente fraco. Nesse regime, um corpo sujeito a um campo gravitacional continuará se movendo conforme as leis de Newton descritas no Capítulo 1.

Se a partícula apresenta uma velocidade significativamente menor que a velocidade da luz, podemos considerar que a derivada da componente contravariante $x^0 = ct$ será numericamente maior que as derivadas das outras componentes x^1 , x^2 e x^3 , simplificando a geodésica:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\alpha \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\alpha \left(c \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (4.13)$$

Portanto, a aceleração pode ser determinada no formato

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = -\Gamma_{00}^\alpha. \quad (4.14)$$

Ao considerarmos ainda um campo gravitacional estático, todas as derivadas da métrica em relação ao tempo serão nulas, determinando

$$\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\beta g_{00}. \quad (4.15)$$

Com tais expressões, passamos a conseguir estabelecer um análogo para regimes pós-newtonianos em que o formalismo da relatividade passa a atuar em paridade com as leis da mecânica newtoniana, recuperando também as equações de Poisson. No primeiro capítulo, utilizamos ainda o símbolo ψ para o potencial newtoniano e $\nabla^2 \psi = 4\pi G \rho$ para a equação de Poisson. Aqui iremos considerar uma pequena modificação de tal forma que

$$\mathcal{U} = -\psi \rightarrow \begin{cases} G = 1 \\ \vec{a} = \vec{\nabla} \mathcal{U} \\ \nabla^2 \mathcal{U} = -4\pi \rho \end{cases} \quad \forall \quad \mathcal{U}(x, t) = \int \frac{\rho(x', t)}{|x-x'|} d^3 x'. \quad (4.16)$$

Esta convenção é denominada formalismo PPN (Parameterized post-Newtonian formalism) e é corriqueiramente utilizada na literatura visando expandir as componentes da métrica em diferentes escalas, de modo a se obter valores para alguns parâmetros que podem ser usados para comparar a mesma teoria em diferentes regimes de baixa ordem. Na formulação PPN, considera-se o sistema solar de maneira que o Sol seja como uma esfera imóvel, enquanto os planetas são tratados como corpos de teste que se deslocam ao longo de trajetórias geodésicas dentro de sua métrica simplificada. Tais características do formalismo são exploradas com mais detalhes na Referência [8], e foram comumente aplicadas para o desenvolvimento da força gravitacional à G variável por meio do método aproximativo.

5 Teorias escalares-tensoriais

A teoria da relatividade geral, em sua essência, pode ser formulada em notação tensorial, sendo a interação gravitacional determinada pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Em contraste, surgem teorias escalares-tensoriais, nas quais postula-se que a interação gravitacional é influenciada tanto por um tensor métrico quanto por um campo escalar ϕ . A introdução do campo escalar traz consigo a possibilidade de uma nova força fundamental, além das quatro já conhecidas. Dessa forma, essas teorias emergem como candidatas promissoras para explicar fenômenos observacionais relacionados à matéria e energia escura, eliminando a necessidade dessas componentes adicionais [2].

As maiorias das teorias escalares-tensoriais buscam considerar em partes a validade da relatividade geral de Einstein, mas agora, modificando alguns fundamentos conceituais que estruturam seu formalismo. Um exemplo dessa característica encontra-se no artigo de pesquisa “Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation”, publicado no ano de 1961, por Carl Brans e Robert Dicke. Nesse, há uma busca em fundamentar uma discussão em torno da construção de uma teoria relativística da gravitação baseada nos princípios de Mach, conciliando tais perspectivas com a interpretação de espaço predominante e, evidenciando por meio de um experimento mental, os problemas existentes ao se considerar os efeitos das medições de forças inerciais como ocorre na relatividade geral. Por meio das ideias de Mach, os autores passam a fundamentar seus procedimentos metodológicos ao considerar que a interação gravitacional depende da disposição de massas do universo, sendo um fenômeno puramente referencial e devendo ser constantemente influenciado pela distribuição de matéria, mesmo que ela seja pequena e esteja consideravelmente afastada. Os detalhes de tais considerações promovem uma expressiva alteração nas equações de campo, sendo esses e outros detalhes apresentados neste capítulo.

5.1 Teoria de Brans-Dicke

Na física, a teoria da gravitação de Brans-Dicke é uma concorrente da teoria da relatividade geral de Einstein, sendo um exemplo de teoria escalar-tensorial. Tal consideração influencia diretamente a validade de que o espaço físico possui propriedades geométricas e inerciais intrínsecas além daquelas derivadas da matéria e energia nele contida, devendo as interações analisadas promovidas pelas considerações de massas inerciais presentes em todo o sistema investigado, como destacado abaixo:

Considere um corpo de teste caindo em direção ao Sol. Em um sistema de coordenadas escolhido de tal forma que o objeto não esteja acelerando, a atração gravitacional do Sol pode ser considerada equilibrada por outra atração gravitacional. Note que o equilíbrio não é perturbado pelo duplicar

de todas as forças gravitacionais. Assim, a aceleração é determinada pela distribuição de massa no universo, mas é independente da intensidade das interações gravitacionais. (DICKE, 1961, pag 1, tradução nossa).

Nesse sentido, o movimento de real relevância passa a ser aquele que se relaciona com o restante da matéria presente no universo. Dessa forma, os autores defendem que tal interpretação acarretaria um efeito expressivamente relevante para a descrição do movimento. Ainda, se considerarmos uma descrição dimensional das equações dinâmicas através da distribuição de massa do sistema, passamos a notar que a constante gravitacional G passa ser uma variável dependente desse deslocamento aparente, o que pode inclusive ser comparado com uma constante que varia dependendo da distribuição e da posição de massas de um universo em expansão. Nesse sentido, o artigo destaca com eficácia as consequências diretas dessas ponderações, principalmente ao destacar que as reações inerciais observadas localmente dependem da distribuição de massa no universo em torno do ponto de observação. Consequentemente, os aspectos mensuráveis das leis físicas observados em contextos locais, e que se manifestam nas chamadas constantes físicas, demonstram variações segundo a sua localização. Essas variações poderiam ser expressas apenas por meio da constante gravitacional, que evidentemente passa a ser tratada pelos autores como um campo escalar.

Para efeito de comparação, as equações de campo decorrentes dessas considerações se tornam

$$G_{\mu\nu} = \frac{k}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{1}{\phi} \left[\nabla_\nu \nabla_\mu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi \right] + \frac{\omega}{\phi^2} \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + X g_{\mu\nu} \right], \quad (5.1)$$

$$\frac{2\omega}{\phi} \square \phi = -R - \frac{2\omega}{\phi^2} X. \quad (5.2)$$

Enquanto as de Einstein seguem sendo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (5.3)$$

Na equação (5.1), o termo X é o chamado termo cinético do campo escalar ϕ . O tensor energia-momento se estabelece como $T_{\mu\nu}$ e ∇_a como derivadas covariantes. Talvez o valor mais importante resida em ω , que é conhecido como constante de acoplamento de Brans-Dicke, apresentando-se como um parâmetro constante e adimensional que deve ser estabelecido. É possível argumentar também que a teoria de Brans-Dicke recupera a relatividade geral quando o campo escalar é constante e ω tende a infinito. Porém, a teoria da relatividade geral carece de qualquer parâmetro adimensional como esse, tornando-se assim mais suscetível a testes de falseabilidade quando comparada à teoria de Brans-Dicke. Além disso, abordagens que apresentam o acréscimo de parâmetros ajustáveis desse tipo são ocasionalmente desconsideradas, fundamentadas no princípio de que, entre duas teorias que coincidem com as observações, aquela que é mais econômica em termos de parâmetros é considerada preferível. Ainda assim, a teoria de Brans-Dicke, é utilizada até hoje como protótipo para teorias escalares-tensoriais modernas e fundamenta o tema desta monografia.

6 Mecânica celeste e as teorias escalares tensoriais

Ao considerarmos a mecânica celeste, podemos ilustrar a eficácia dos princípios considerados por Albert Einstein. Ao analisarmos também as teorias alternativas, cujas bases abrangem tanto campos tensoriais quanto escalares, adentramos um terreno de exploração onde a mecânica celeste e seus fenômenos observacionais se apresentam sob uma descrição geométrica fundamentalmente diferente. O entendimento aprofundado da mecânica celeste por meio dessas teorias não só enriquece a possibilidade de descrever a gravidade de outra forma, como proporciona também diferentes caminhos para se estabelecer, possivelmente, a verdadeira representação dos fenômenos físicos em larga escala.

Ainda assim, com o sucesso da teoria da relatividade geral, os conceitos abordados pela gravitação newtoniana encontraram substitutos mais precisos. No entanto, como muitos sistemas astronômicos possuem um fraco campo gravitacional e podem ser tratados dentro do limite newtoniano da relatividade, uma questão que ainda persiste é a da possibilidade de se construir uma gravitação newtoniana modificada que nos permita descrever sistemas adequadamente, assim como é realizado em teorias relativísticas alternativas.

Com essa perspectiva, estruturaremos em nosso artigo um modelo newtoniano para a gravitação baseado nas lagrangianas descritas pela teoria de Brans-Dicke, o que nos permite obter, ao invés de uma constante gravitacional G , uma variável dependente de um campo escalar. Fundamentaremos, portanto, uma teoria alternativa da gravitação newtoniana cujo objetivo seja solucionar problemas que não são bem descritos pela gravitação universal, como o avanço do periélio de Mercúrio. Mais precisamente, usaremos os dados observacionais do avanço do periélio orbital para vincularmos o parâmetro livre ω , apresentado pela teoria modificada que trabalharemos. Com o objetivo de realizarmos a extensão da aplicabilidade de novas equações na descrição de uma teoria modificada, sem que façamos um expressivo distanciamento do modelo tido como eficaz por meio da teoria descrita pela mecânica clássica, utilizaremos a mecânica celeste e dos dados observacionais decorrentes da mesma para se analisar a validade da teoria construída.

6.1 Anexo 1: Celestial Mechanics in Newtonian-like gravity with variable G

As páginas seguintes estarão destinadas ao artigo de acesso livre, posteriormente publicado na *The European Physical Journal Plus* [7], de autoria de Felipe S. Escórcio, Júlio C. Fabis, Júnior D. Toniato e Hermano Velten.

Celestial mechanics in Newtonian-like gravity with variable G

Felipe S. Escórcio,¹ Júlio C. Fabris,^{2,3,*} Júnior D. Toniato,^{4,†} and Hermano Velten^{1,‡}

¹*Departamento de Física, Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP),
Campus Universitário Morro do Cruzeiro, 35.400-000, Ouro Preto, Brazil*

²*Núcleo Cosmo-ufes & Departamento de Física, Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)
Av. Fernando Ferrari, 540, CEP 29.075-910, Vitória, ES, Brazil.*

³*National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering
Physics Institute), 115409, Kashirskoe shosse 31, Moscow, Russia*

⁴*Núcleo Cosmo-ufes & Departamento de Química e Física,
Universidade Federal do Espírito Santo - Campus Alegre, ES, 29500-000, Brazil*

A Newtonian-like theory inspired by the Brans-Dicke gravitational Lagrangian has been recently proposed in Ref. [1]. This work demonstrates that the modified gravitational force acting on a test particle is analogous to that derived from the Manev potential. Specifically, an additional term $\propto r^{-3}$ emerges alongside the conventional Newtonian component. We analyse the predicted expression for the pericenter advance and the Roche limit and use them to constraint the theory's single free parameter ω which is analogous to the Brans-Dicke parameter. At the same time this theory is able to solve the advance of Mercury's perihelion, we also show that there is no relevant impact on the Roche limit in comparison to the well known Newtonian results.

I. INTRODUCTION

The question of whether the fundamental constants of physics remain constant has been a long-standing inquiry. Four fundamental constants are particularly significant: h , defining the quantum world; c , the speed of light associated with relativistic effects; G , indicating gravitational interaction; and k_B , the Boltzmann constant related to thermodynamics. Of the four constants, G , was the first to be identified but is known with the least precision, only up to the order of 10^{-4} [2].

Modern theories interpret the gravitational phenomena as a consequence of spacetime curvature. Due to its dominant influence on large-scale systems like astrophysics and cosmology, constraints on the variation of G from observations and experiments are extremely strict. Even a slight variation in G with time or position can significantly impact cosmological and astrophysical observations, including addressing the Hubble constant tension [3] and altering the cosmological large scale structure formation scenario [4].

Various relativistic theories of gravity attempt to incorporate the variation of gravitational coupling, with the Brans-Dicke theory being a traditional paradigm [5]. The latter is a piece of the Horndesky class of theories that provides the most comprehensive gravitational Lagrangian, yielding to second-order field equations that often allow for a dynamical gravitational coupling [6]. These are examples of scalar-tensor theories where the gravitational interaction is mediated both by the metric tensor $g_{\mu\nu}$ as well as by a new dynamical scalar field $\phi \equiv \phi(t)$ which couples to the gravitational coupling G

i.e., $G \equiv G(\phi)$. This is an example of the physical mechanism behind this possible variation of G .

It is important to highlight that General Relativity (GR) stands as the dominant and widely accepted theory for describing the gravitational interaction. It has withstood rigorous scrutiny and demonstrated remarkable accuracy in explaining a myriad of gravitational phenomena. Over the years, it has successfully passed numerous tests at both the solar and Galactic levels, reaffirming its validity and precision in predicting the motion of planets, the bending of light around massive objects, and other gravitational effects.

However, despite its immense success, alternative theories to GR have been studied, hoping to refine or expand our understanding of gravity. One notable alternative is the Brans-Dicke theory, proposed as a way to incorporate a dynamical gravitational coupling. This theory offers deviations from GR for certain values of a dimensionless new coupling parameter, denoted as ω . Notably, in the limit of extremely large ω values, the Brans-Dicke theory essentially reduces to the familiar framework of General Relativity.

Nonetheless, dark matter and dark energy dominate the behavior of the universe at the cosmological scale, yet their true nature remains elusive. Existing theories, including General Relativity, have struggled to account for their existence and effects adequately. As a result, the absence of a convincing explanation for dark matter and dark energy serves as motivation to probe the gravitational sector for signs of new physics.

In light of the so called dark sector a new investigation route has been established: to seek novel approaches and alternative theoretical frameworks for gravity. Exploring beyond General Relativity could potentially lead to breakthroughs, shedding light on the elusive nature of dark matter and dark energy. Such efforts might unveil new, yet undiscovered gravitational phenomena. While

* julio.fabris@cosmo-ufes.org

† junior.toniato@ufes.br

‡ hermano.velten@ufop.edu.br

General Relativity has proven its worth and remains the leading theory for describing gravitational interactions, it is essential to explore alternatives like the Brans-Dicke theory to deepen our comprehension of gravity and its effects. Therefore, it is valid to seek for non-covariant based theories of gravity that can be directly compared to successful Newtonian predictions.

Despite the abundance of relativistic theories with varying gravitational coupling, constructing a Newtonian theory with a dynamic G is challenging. Initial proposals to incorporate a varying G effect in a Newtonian context were relatively simple, replacing the constant G in the Poisson equation with a varying gravitational coupling function $G(t)$ [7]. However, there is no dynamic equation governing this new function, necessitating ad hoc imposition of its behaviour with time. A natural choice is to employ the Dirac proposal [8, 9], with $G = G_0(t_0/t)$, where t_0 is the present age of the universe and G_0 is the current value of the gravitational coupling. Nonetheless, this Newtonian theory with varying gravitational coupling lacks a complete Lagrangian formulation since $G(t)$ remains an arbitrary function.

In a recent paper [1], a new Newtonian theory with a varying gravitational coupling has been proposed. The gravitational coupling, expressed as a function of time and position, is dynamically determined alongside the gravitational potential through a novel gravitational Lagrangian. This theory demonstrates consistency with the general properties of spherical objects like stars and can generate homogeneous and isotropic cosmological solutions leading to an accelerated expansion of the universe (see also [10]).

The interest in constructing a Newtonian theory with varying G arises from several motivations. First, it satisfies the academic curiosity of developing a complete and coherent Newtonian formulation that incorporates a dynamic gravitational coupling. The Newtonian framework is conceptually simpler than the relativistic one, raising questions as to why providing G with a dynamic behaviour is challenging, despite being feasible in a relativistic context. Second, many astrophysical and cosmological problems are more conveniently analysed within a Newtonian framework, including the dynamics of galaxies, galaxy clusters, and numerical simulations of large-scale structures. Having a consistent Newtonian theory that accounts for a non-constant G would be desirable in such cases.

Our main goal in this work is to obtain in a post-Newtonian inspired way the effective gravitational force acting of a system of massive bodies or individual test particles. This has not been done previously in the sequence of works by some of the same authors.

In this work we apply the non-relativistic prototype of varying G theory developed in [1] to the celestial dynamics domain by focusing on the orbital pericenter ad-

vance,¹ with particular application to the Mercury's Perihelion precession, but also the modified Roche limit expression for this theory. Our aim is to verify whether or not one can constrain the free parameter ω from this local analysis.

The general theoretical set up is reviewed in the beginning of the next section. We then proceed calculating the corrections in the gravitational potential expansion up to second order. The equations of motion and applications to the pericenter advance are performed in section III. We discuss the equivalence principle in section IV. In sections V and VI the Roche limit is analysed. We conclude in the final section.

II. THE GRAVITATIONAL FORCE IN VARYING G NEWTONIAN GRAVITY

The Newtonian theory with a variable G is obtained through the following Lagrangian [1],

$$\mathcal{L} = -\frac{\nabla\psi \cdot \nabla\psi}{8\pi G_0} + \frac{\omega}{8\pi G_0} \left(\psi \frac{\dot{\sigma}^2}{\sigma^2} - c^4 \nabla\sigma \cdot \nabla\sigma \right) - \rho\sigma\psi, \quad (1)$$

where G_0 is a constant, ψ is an equivalent of the ordinary Newtonian potential and σ is a new dimensionless dynamical field. The Newtonian limit is fully recovered by setting $\sigma = 1$. The field σ is supposed to play the same rôle as the scalar field in covariant scalar-tensor gravitational theories. Here, the parameter ω is also a constant, the theory's free parameter. While not obligatory, it provides utility in facilitating the final dynamics and can also be interpreted as the analogous Brans-Dicke parameter. Concerning ω , however, as we will see, the Newtonian limit is achieved with $\omega \rightarrow \infty$. A constant with dimensions of velocity, the speed of light c , has been introduced to guarantee the Lagrangian has the correct physical dimensions. However, in our reasoning we are not making direct mention to a relativistic framework in doing so: actually, this is equivalent to borrow from electromagnetism the two fundamental constants, the vacuum electric permittivity ϵ_0 and the magnetic permeability μ_0 .

The field equations of the theory are obtained by varying the Lagrangian with respect to the fields ψ and σ . They read

$$\nabla^2\psi + \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right)^2 = 4\pi G_0 \sigma \rho, \quad (2)$$

$$\nabla^2\sigma - \frac{1}{c^4\sigma} \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi\dot{\sigma}}{\sigma} \right) = \frac{4\pi G_0 \psi \rho}{c^4\omega}. \quad (3)$$

¹ Pericenter is a generic term used to refer to the point of maximum approximation between two celestial bodies in a bounded orbit. When considering orbital motion of planets around the Sun, this point is also called perihelion.

The over-dot indicates total time derivative, which assures to the resulting equations invariance with respect to Galilean transformations. Now, from the above equations one can see that the Newtonian limit of the theory i.e., the Poisson equation is obtained both when σ is a constant and $\omega \rightarrow \infty$ simultaneously.

In order to examine the dynamics of a massive body we verify from (1) that the interaction of the gravitational fields with matter is given by the term $\rho\psi\sigma$. This will give rise to an effective gravitational potential such that Euler's equation for a self-gravitating fluid becomes,

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\rho \nabla(\psi\sigma) - \nabla p. \quad (4)$$

Thus, one can define the effective gravitational potential in the varying G Newtonian gravity as

$$U_{\text{eff}} = -\psi\sigma + \lambda, \quad (5)$$

with λ an arbitrary constant which does not contribute to the equation of motion of massive bodies.

A. Corrections to the Newtonian potential

In this section we will analyse the structure of the U_{eff} potential using an approximate method in order to obtain the first order corrections to the ordinary Newtonian gravitational potential. Let us expand the scalar fields up to second order,

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots \quad (6)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots, \quad (7)$$

where ψ_0 and σ_0 are constants and $\psi_2 \ll \psi_1 \ll \psi_0$ as well as $\sigma_2 \ll \sigma_1 \ll \sigma_0$. Moreover, in substituting this into the field equations we will also assume that every time derivative is one order higher, i.e. $\dot{\psi}_1 \sim O(2)$ (this is equivalent to assume that the gravitational fields are slowly varying in time, which is consistent with local environments as the solar system), and the matter density ρ is $\sim O(1)$ (since it is responsible to create the perturbed fields).

1. First order

Retaining only first order terms, one obtains

$$\nabla^2 \psi_1 = 4\pi G_0 \sigma_0 \rho, \quad (8)$$

$$\nabla^2 \sigma_1 = \frac{4\pi G_0}{c^4 \omega} \psi_0 \rho. \quad (9)$$

The solutions of these equations are proportional to the ordinary Newtonian potential U ,

$$\psi_1 = -\frac{G_0 \sigma_0}{G_N} U, \quad \sigma_1 = -\frac{G_0 \psi_0}{G_N c^4 \omega} U, \quad (10)$$

with

$$U = G_N \int \frac{\rho(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'. \quad (11)$$

being the negative of the Newtonian potential and G_N is the Newtonian gravitational constant.

The effective gravitational potential then becomes,

$$U_{\text{eff}} = -\psi\sigma + \lambda \approx \frac{G_0}{G_N} \left(\frac{\psi_0^2}{c^4 \omega} + \sigma_0^2 \right) U, \quad (12)$$

where λ has been set equals to zero without loss of generality. Since it is expected that the second scalar field σ introduces only corrections to the Newtonian gravity, one can also consider the approximation

$$\frac{\psi_0^2}{c^4 \omega} \ll \sigma_0^2. \quad (13)$$

Thus, after taking this limit in (12), at first order, the theory will reproduce Newtonian gravity if

$$G_0 \sigma_0^2 = G_N. \quad (14)$$

For simplicity, let us work with $\sigma_0 = 1$ (there is no new physics in doing this choice, because any value of this constant can be always absorbed by the coupling constant G_0).

2. Second order

Using the previous results, the second order field equations are

$$\nabla^2 \psi_2 = -\frac{4\pi G_N \psi_0}{c^4 \omega} \rho U, \quad (15)$$

$$\nabla^2 \sigma_2 = -\frac{4\pi G_N}{c^4 \omega} \rho U, \quad (16)$$

Using the post-Newtonian potential,

$$\Phi_2 = G_N \int \frac{\rho(x') U(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x', \quad (17)$$

one has

$$\psi_2 = \frac{\psi_0}{c^4 \omega} \Phi_2 \quad (18)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{c^4 \omega} \Phi_2, \quad (19)$$

after using definition (14).

Finally, going to the second order of the effective potential, one obtains

$$U_{\text{eff}} \approx U - \frac{\psi_0}{c^4 \omega} (U^2 + 2\Phi_2). \quad (20)$$

It is worth noting that both second order potentials, U^2 and Φ_2 , are present in the post-Newtonian metric of general relativity [11].

B. Equation of motion of massive bodies

We are interested in deriving the equation of motion of a certain body A within a N -body system. The force acting on this specific body reads

$$\mathbf{f}_A = m_A \mathbf{a}_A = \int_A \rho(t, \mathbf{x}) \frac{d\mathbf{v}}{dt} d^3x. \quad (21)$$

In the above expression, the domain of integration is a fixed volume V_A , which is bigger than the volume occupied by body A but also smaller enough such that it does not intersect any other body of the system. This is feasible once we will assume the bodies are far away apart from each other. Moreover, \mathbf{a}_A stands for the center-of-mass acceleration of body A .

Plugging Euler's equation (4) into the integral above, one obtains

$$\mathbf{f}_A = \int_A \rho(t, \mathbf{x}) \nabla U_{\text{eff}} d^3x. \quad (22)$$

The pressure contribution is found to be zero by using the Gauss theorem and noting that $p = 0$ in the border of the volume of integration. Once the gravitational potential within the integral is due to the contribution of all bodies within the system, including body A , we need to split it in two parts. For instance, we rewrite the Newtonian potential as

$$U = U_A + U_{\text{ext},A}, \quad (23)$$

where U_A stands for the potential created by the body A , and $U_{\text{ext},A}$ is the contribution due to the remaining bodies of the system. Both are calculated as in (11), but U_A is integrated over V_A while the external potential is a sum of integrals over the volume surrounding each one of the remaining bodies of the system. By considering that each body density is reflect symmetric over its center of mass, it is possible to show that only the external parts do contribute to the force. Moreover, these terms can be removed from the integral in (22) since the bodies are wide separated, i. e., the external potentials will not depend on the integration variable as a first approximation.² After the above considerations, one has

$$f_A^j = m_A \partial_j U_{\text{ext},A} - \frac{2\psi_0 m_A}{c^4 \omega} \partial_j \Phi_{2\text{ext},A} + \frac{2\psi_0 \partial_j U_{\text{ext},A}}{c^4 \omega} (2\Omega_A - m_A U_{\text{ext},A}), \quad (24)$$

where $\partial_j \equiv \partial/\partial x^j$, m_A is the mass of body A and Ω_A is its gravitational energy, namely

$$m_A = \int_A \rho d^3x, \quad (25)$$

$$\Omega_A = -\frac{G_N}{2} \int_A \frac{\rho(\bar{\mathbf{x}})\rho(\bar{\mathbf{x}'})}{|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}'|} d^3\bar{x} d^3\bar{x}', \quad (26)$$

with $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{r}_A$ being the body coordinate with respect to its center-of-mass \mathbf{r}_A .

Once we are assuming the bodies are well separated, the external potentials can be expanded in a Taylor series (see, for instance, [11, pp. 437]),

$$U_{\text{ext},A} = \sum_{B \neq A} \frac{G_N m_B}{r_{AB}}, \quad (27)$$

$$\partial_j U_{\text{ext},A} = - \sum_{B \neq A} \frac{G_N m_B}{r_{AB}^2} \hat{r}_{AB}^j, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \partial_j \Phi_{\text{ext},A} = & 2 \sum_{B \neq A} \frac{G_N \Omega_B}{r_{AB}^2} \hat{r}_{AB}^j - \sum_{B \neq A} \frac{G_N^2 m_A m_B}{r_{AB}^3} \hat{r}_{AB}^j - \\ & \sum_{B \neq A} \sum_{C \neq A, B} \frac{G_N^2 m_B m_C}{r_{AB}^2 r_{BC}} \hat{r}_{AB}^j. \end{aligned} \quad (29)$$

In the above expression we are using the notation $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ and $\hat{r}_{AB} = \mathbf{r}_{AB}/r_{AB}$.

With a redefinition of the mass of each body,

$$M_A = m_A + \frac{4\Omega_A}{c^2 \tilde{\omega}} \quad (30)$$

with

$$\tilde{\omega} \equiv c^2 \omega / \psi_0, \quad (31)$$

the final form of the force (24) will be

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_A = & - \sum_{B \neq A} \frac{G_N M_A M_B}{r_{AB}^2} \hat{\mathbf{r}}_{AB} + \\ & \sum_{B \neq A} \frac{G_N^2 M_A M_B (M_A + M_B)}{c^2 \tilde{\omega} r_{AB}^2} \frac{1}{r_{AB}} \hat{\mathbf{r}}_{AB} + \\ & \sum_{B \neq A} \sum_{C \neq A, B} \frac{G_N^2 M_A M_B M_C}{c^2 \tilde{\omega} r_{AB}^2} \left(\frac{1}{r_{AC}} + \frac{1}{r_{BC}} \right) \hat{\mathbf{r}}_{AB}, \end{aligned} \quad (32)$$

since terms of order ψ_0^2/c^4 , or higher, are neglected.

The first term in (32) resembles the typical Newtonian gravitational force in a N -body system. The distance dependence is the ordinary one but the departure from Newtonian gravity comes from the mass redefinition (30). It shows a contribution of the body gravitational energy in the gravitational attraction. This is a remarkable difference between this formalism and Newtonian gravity. It indicates a distinction between inertial and gravitational masses in this theory. The first one is m , the mass

² The results for the integral of the divergence of each potential is already known. Reference [11] presents a well detailed exposition of those calculations. Although it is used a distinct definition of mass density, since the conserved density in general relativity is given by $\rho^* = \rho\sqrt{-g}$, their results are still valid in the Newtonian context once here ρ is the one satisfying the continuity equation.

relating force and acceleration, while the latter, M , is the mass determining the gravitational potential (in relativistic terms, the active gravitational mass). But it must be noted that this departure does not violate the Newtonian limit of the theory, since it only occurs at the post-Newtonian order.

It is worth to note also that in GR, a mass redefinition in post-Newtonian analysis is present too. But there $(M_A)_{\text{GR}} = m_A + E_A/c^2$, where E_A is the body total energy, and this redefinition does not spoil the mass conservation statement. Neither the equivalence between inertial and gravitational mass is broken. Notwithstanding, some others relativistic theories of gravity can eventually violate this equivalence principle, even after the relativistic mass redefinition. Even so, the distinction between inertial and gravitational mass is well constrained now a days and this must give a upper bound to the parameter $\tilde{\omega}$. In Section IV we will derive this constrain.

C. Binary systems

Considering a system of two bodies, the force (32) can be simplified by using the relative motion between the bodies with respect to the system center-of-mass. Therefore, the binary system can be interpreted as a single particle of reduced mass $\mu = M_1 M_2 / M$ moving in the gravitational field of a body of mass $M = M_1 + M_2$. However, one can not measure the difference in gravitational and inertial mass in a two-body system. Thus, we can neglect the distinction between M and m and assume the latter as the Kepler-measured mass of the system.

With that said, the force in a two-body system, up to first post-Newtonian order, can be written as follows,

$$\mathbf{f} = \left(-\frac{G_N m \mu}{r^2} + \frac{G_N^2 m^2 \mu}{c^2 \tilde{\omega} r^3} \right) \hat{\mathbf{r}}, \quad (33)$$

with $\mu = m_1 m_2 / m$ and $m = m_1 + m_2$ and also $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Therefore, it is noteworthy that the smaller the free constant $\tilde{\omega}$ is, the larger the perturbation term of the force due to variable G will be.

III. VARIATIONS OF ORBITAL ELEMENTS

The modified gravitational force obtained in the previous section will not make test particles to follow perfect ellipses around the source. Actually, the Keplerian parameters which characterise an orbit and its orientation with respect to the central object will undergo through secular variation. The most iconic of those variations is the advance of the pericenter argument, the angle correspondent to the maximum approximation in a two-particle system. In order to obtain expressions for the variations of the Keplerian parameters, we interpret the correction to the Newtonian gravitational force as a perturbative effect. This is justified by the

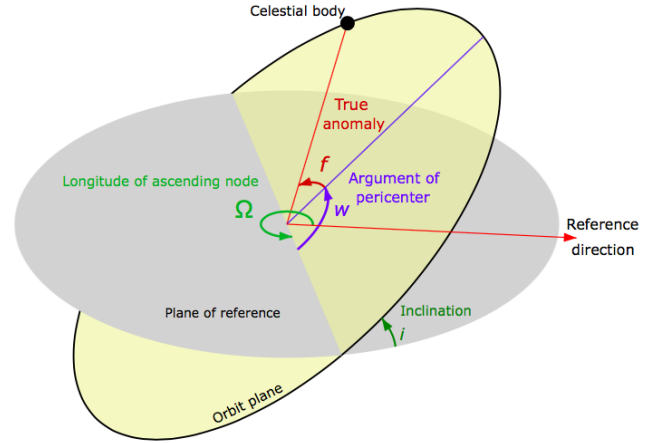


FIG. 1. Orbital motion decomposed in a reference plane. Credits: Lasunncty, through Wikimedia commons. Used under license CC BY-SA 3.0 and adapted by the authors.

fact that, for bounded systems, the Virial theorem imply $G_N m / r \sim v^2$, where v is the typical orbital velocity. Thus, the correction to the Newtonian gravitational potential is at least of order of v^2/c^2 , which is small for planetary or satellite orbits, for instance. We are also assuming that $\tilde{\omega}$ is not too small to guarantee validity of the perturbative expansion.

The zeroth order solution will be the same as in Newtonian gravity. Considering a system of two particles with masses m_1 and m_2 , and adopting the center-of-mass as the origin of the coordinate system, one thus obtain the conic equation for the trajectory of the relative position between the particles,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}. \quad (34)$$

In the above, e is the eccentricity, a the semi-major axis and f is the true anomaly, the orbital angle as measured from the pericenter. For observational purposes, it is necessary to describe the orbital motion with respect to the Earth's orbital plane, which requires the introduction of additional orbital parameters: the orbit inclination i , the angle Ω between the ascending node and a reference direction in the reference plane, and the argument of the pericenter w . These parameters are represented in Figure 1.

To calculate the secular variations of the Keplerian parameters we use the method of osculating orbits. The particle is interpreted to being moving in a ellipse in each instant of time, but the orbital parameters defining the ellipse are time varying functions due to the perturbing acceleration. The rate of change of each orbital element is proportional to the acceleration components vector: an orbital radial component \mathcal{R} , a component \mathcal{W} normal to the orbital plane, and a third component \mathcal{S} orthogonal to the previous two. We refer to Reference [11] for more details on osculating orbits method.

The gravitational force (33) resembles the Newtonian one plus an extra term proportional to $\tilde{\omega}^{-1}$. If this extra term is interpreted as a perturbative correction, this leads to an acceleration correction with radial component only such as

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{G_N^2 m^2}{c^2 r^3}. \quad (35)$$

This causes variations just on the eccentricity and pericenter argument, which are given by

$$\frac{dw}{df} = - \frac{a^2(1-e^2)^2}{eGm} \frac{\cos f}{(1+e \cos f)^2} \mathcal{R} \quad (36)$$

$$\frac{de}{df} = \frac{a^2(1-e^2)^2}{Gm} \frac{\sin f}{(1+e \cos f)^2} \mathcal{R}. \quad (37)$$

Using the relation (34), we integrate the above expressions over a complete orbital period to obtain

$$\Delta w = - \frac{\pi}{\tilde{\omega}} \frac{G_N m}{ac^2(1-e^2)}, \quad (38)$$

$$\Delta e = 0. \quad (39)$$

Thus, from all the Keplerian orbital parameters, only the pericenter argument undergoes a secular variation. It is worth to note that general relativity prediction for the orbital variation of the pericenter advance is given by

$$\Delta w_{\text{GR}} = 6\pi \frac{G_N m}{ac^2(1-e^2)}. \quad (40)$$

This shows that the result derived from the modified Newtonian gravity with variable G is the same as the general relativistic one if $\tilde{\omega} = -1/6 \approx -0.16$.

The variation per orbit can be converted in a variation per time by dividing Δw by an orbital period P . In this process, we can eliminate the period through Kepler's third law, i.e. $P = 2\pi a^{3/2}/\sqrt{G_N m}$.³ The result is

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{\text{sec}} = - \frac{1}{2\tilde{\omega}} \frac{(G_N m)^{3/2}}{a^{5/2} c^2 (1-e^2)}. \quad (41)$$

A. Observational Constraints

The secular advance of the orbital pericenter can be used to obtain observational constraints for the parameter $\tilde{\omega}$. In this section we will consider data from three systems where this secular variation is detected. In practise, we shall convert the existing observational results in constraints on the parameter $\tilde{\omega}$.

³ In principle, Kepler's third law would be modified due to the new gravitational force but, since Δw is already of post-Newtonian order, the corrections are negligible.

1. Perihelion precession of Mercury

The most famous test of an advance of orbital pericenter is the one performed with Mercury. It consists of a classical gravitational test and it was determinant for the success of general relativity. The argument of Mercury's perihelion undergoes a secular variation due to the gravitational attraction of other planets from solar system, the non-zero quadrupole moment of the Sun and the precession of the Earth's spring equinox (the reference axis). However, all these contributions together can not explain a deficit given by,

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{\text{sec}} = (42.9799 \pm 0.0009)''/\text{century}. \quad (42)$$

The above data was extracted from most recent estimations using MESSENGER spacecraft data [12]. Others published values for this quantity can be consulted in Refs. [13, 14].

For a numerical estimation of (41) we use $G_N = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$, $M = M_\odot = 1.988 \times 10^{30} \text{ kg}$ as the mass of the Sun, Mercury's eccentricity and semi-major axis $e = 0.205631$ and $a = 57.909 \times 10^9 \text{ m}$. Equality of (41) and (42) results in

$$\tilde{\omega} = -0.166591 \pm 0.000003. \quad (43)$$

2. LAGEOS Satellites

The LAGEOS project consists of two satellites orbiting around the Earth with a precise tracking of their trajectories. LAGEOS II has higher eccentricity, which gives a more precise measurement of its pericenter advance. According to reference [15], the observed value is

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{\text{sec}} = (3.351 \pm 0.007)''/\text{yr}. \quad (44)$$

To evaluate the theoretical prediction we use $M = 5.9724 \times 10^{24} \text{ kg}$ for the mass of Earth, and LAGEOS II orbital parameters $e = 0.0135$ and $a = 12.162 \times 10^6 \text{ m}$. The resulting bound is given by

$$\tilde{\omega} = -0.1667 \pm 0.0003. \quad (45)$$

3. Precession of S2 around Sgr A*

After almost 30 years observing the motion of stars around the Sgr A*, the black hole in the center of Milk Way galaxy, the GRAVITY collaboration has been able to determine the orbital precession of the star S2 to be [16]

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{\text{sec}} = (50 \pm 9)''/\text{yr}. \quad (46)$$

The correspondent bound is given by

$$\tilde{\omega} = -0.15 \pm 0.03, \quad (47)$$

where we have taken $M = 8.26 \times 10^{36}$ kg, $e = 0.884649$ and $a = 1.54 \times 10^{14}$ m.

IV. THE EQUIVALENCE PRINCIPLE

Within ordinary Newtonian theory the relation between inertial and gravitational mass is given by the experiments: no theoretical relation exists between the two masses. They are considered equal because the experimental bounds suggests this equality. General Relativity, on the other hand, make both masses equal from the beginning, constituting one of the cornerstones of the theory. For known modifications of the Newtonian theory the situation may acquire new features. McVittie theory behaves like Newtonian theory in this subject, while MOND [17–19], on the other hand, does not satisfy the equivalence principle in general (by the way, neither Newton's third law).

The Newtonian theory with variable G investigated here allows to have a theoretical prevision for the equivalence principle in terms of the free parameter $\tilde{\omega}$. Of course, we may not expect this theory to satisfy the experimental bounds for the equality of inertial and gravitational mass, since it is not a relativistic theory. However, we can obtain an estimation on the relation between both masses.

The dependence of a massive-body equation of motion with its internal structure, evidenced through the mass redefinition (30), can produce violations of the weak equivalence principle (WEP) at post-Newtonian order. This is better explained using a general quasi-Newtonian second law expression for a N -body system,

$$\mathbf{f}_A = (\mathcal{M}_{\mathcal{I}})_A \mathbf{a}_A = (\mathcal{M}_{\mathcal{P}})_A \nabla \sum_{B \neq A} \frac{G_N (\mathcal{M}_A)_B}{r_{AB}}. \quad (48)$$

In the above expression, \mathcal{M}_A is the amount of mass generating a gravitational potential: the *active gravitational mass*; $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ is the mass term relating force with the gradient of the potential: the *passive gravitational mass*; and the *inertial mass*, i.e. the relation between force and acceleration, is represented by $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$.

An equality between inertial and passive gravitational masses is the manifestation of the WEP: the acceleration of a body in an external gravitational field does not depend of its mass or internal structure. This is the case happening here. Comparing (48) with the first term of (32), one can easily make the identifications $\mathcal{M}_{\mathcal{I}} = m$ and $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \mathcal{M}_A = M$. The equivalence between active and passive gravitational masses is a consequence of the validity of Newton's third law, i.e., total momentum conservation of the system.

Tests of WEP are quantified by the Eötvos ratio,

$$\eta = 2 \frac{\mathcal{M}_{\mathcal{P}} - \mathcal{M}_{\mathcal{I}}}{\mathcal{M}_{\mathcal{P}} + \mathcal{M}_{\mathcal{I}}} \approx \frac{4}{\tilde{\omega}} \left(\frac{\Omega_2}{m_2 c^2} - \frac{\Omega_1}{m_1 c^2} \right), \quad (49)$$

with the last terms being the result for the varying- G theory, and the sub-indexes 1 and 2 refereeing to generic bodies. The strongest constraint were obtained recently by the MICROSCOPE experiment, giving $\eta \lesssim 10^{-15}$ [20]. The experiment is to measure the relative acceleration of two test masses, with different compositions, while both are orbiting the Earth. However, we couldn't find information on the values of Ω/m for the used test masses.

Notwithstanding, in Ref. [21], improvements on lunar laser ranging analysis of the Earth-Moon system falling into the Sun gravitational potential determined the Eötvos ratio only about a factor of 10 weaker than MICROSCOPE result. With the difference of the gravitational self-energy between the Earth (\oplus) and Moon (\mathbb{C}) being

$$\left(\frac{\Omega}{m c^2} \right)_{\oplus} - \left(\frac{\Omega}{m c^2} \right)_{\mathbb{C}} = -4.45 \times 10^{-10}, \quad (50)$$

we can estimate, for $\tilde{\omega} = -1/6$, that $\eta \sim 10^{-8}$. As expected, such violation of the experimental results is in the post-Newtonian order. It is worth to note that, to be in a complete agreement with those observational bounds, one must work with $\tilde{\omega} \gtrsim 10^5$, which consequently would result in no corrections to the orbital pericenter shift.

V. CORRECTIONS IN THE ROCHE LIMIT

Modifications in gravitational force can alter the calculation performed for the Roche Limit, which establishes, through Newtonian mechanics, a critical distance for an object's orbit to not be sufficiently close to its host body, as this proximity would result in the satellite's disintegration. In this chapter, we are proceeding with the calculation of the modified Roche Limit, considering the contribution of the total gravitational force as presented in the last section. In the proposed calculation, the zeroth-order solution remains the same as in Newtonian gravity. However, we will demonstrate that the suggested correction (with $\tilde{\omega} = -1/6$ for the advance of the pericenter) has minimal impact on the known Roche Limit, indicating that the developed theory addresses issues related to general relativity without affecting the already known numerical results in Newtonian physics.

To construct the Roche Limit affected by first-order force corrections, it is sufficient to consider that at the point of disintegration, the difference Δg between the acceleration perceived by the edge of the satellite relative to its center will be given by equation (33). Thus, the difference in acceleration takes the form:

$$\Delta g = -\frac{2G_N M_h r_s}{r^3} + \frac{3G_N^2 M_h^2 r_s}{c^2 \tilde{\omega} r^4}. \quad (51)$$

When considering that at the brink of disintegration, this same difference will be approximately equal to the force that holds the satellite together, we obtain

$$-\frac{G_N m_s}{r_s^3} + \frac{G_N^2 m_s^2}{c^2 \tilde{\omega} r_s^4} = -\frac{2G_N M_h}{r^3} + \frac{3G_N^2 M_h^2}{c^2 \tilde{\omega} r^4}. \quad (52)$$

Therefore, in this case, we are stating that the distance r between both bodies will be the upper limit for the difference in acceleration between their ends not to cause the satellite's disintegration. We will refer to this limit as the Variable-G Roche Limit.

To implement equation (52), one can rewrite it as

$$-\frac{m_s}{r_s^3} + \frac{G_N m_s^2}{c^2 \tilde{\omega} r_s^4} = -\frac{2M_h}{r^3} + \frac{G_N 3M_h^2}{c^2 \tilde{\omega} r^4}. \quad (53)$$

This approach allows us to investigate how changing the scale of the constant $\tilde{\omega}$ affects the behavior of the system and its physical properties. The aim here is to allow the comparison of different possible values for $\tilde{\omega}$, without restricting it only to $-1/6$ and, thus, compare with the expected values for the Roche limit already known in the literature for some astrophysical systems. Let us investigate how the different $\tilde{\omega}$ values impact the dynamics in different astrophysical scenarios. In this attempt, in the next section we will obtain the Roche limits as a function of the $\tilde{\omega}$ values fixing the real value of the analyzed satellite radius, which we refer to as r_s . Again, the typical Newtonian result is achieved in the limit $|\tilde{\omega}| \rightarrow \infty$, now accompanied by a correction term proportional to r^{-4} . A perturbative term of this order can contribute to a slight alteration in the known result, but if the value assigned to $\tilde{\omega}$ is sufficiently small, the correction can become significantly larger.

VI. HOST-SATELLITE SYSTEMS

The selection of the analyzed systems was based on evaluating their proximity to the Roche limit. With the exception of the celestial bodies Earth and Moon, the remaining selected systems are positioned considerably close to the disintegration limit. Our goal, therefore, is to quantify the impact of different values of $\tilde{\omega}$ on the Roche limit.

Given the results provided in the last section, we therefore will start verifying values around $\tilde{\omega} \approx -0.16$. Thus, in order to perform an analysis close to the values of interest, it is necessary to go back to equation (53) and consider that

$$\frac{G_N}{c^2 \tilde{\omega}} = -4,44667 \times 10^{-27}. \quad (54)$$

For the above numerical estimation we have used $G_N = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$ and $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$. A slight increase in the scale associated of the constant $G_N/c^2 \tilde{\omega}$ also

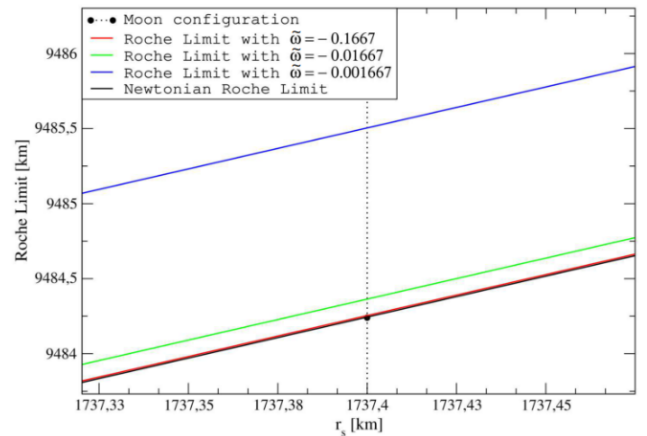


FIG. 2. Roche Limit Graph for different satellite radius values relative to a constant mass m_s . The different curves express the different values of $\tilde{\omega}$. The dashed vertical line seeks to indicate the different Roche limits for $\tilde{\omega}$ considering the radius of the Moon.

leads to a considerable decrease in the constant $\tilde{\omega}$. For instance, in the next figures, by adopting $\tilde{\omega} \approx -0.016$, we obtain the green curve that shows a greater divergence from the expected values compared to $\tilde{\omega} \approx -0.16$, represented by the red curve. When we adopt different values for the constant $\tilde{\omega}$, we also obtain new values for the Roche limit. In our case, we will compare such divergences until $\tilde{\omega} \approx -0.0016$, which will be represented by the blue line in each figure.

A. Earth-Moon System

The numerical range chosen for the analysis of the Earth-Moon system has a center corresponding to the average radius of the satellite, which in this case is approximately 1737.4km. Therefore, it is established as the midpoint between the values 1687km and 1787km, which were selected as the lower and upper limits, respectively. This choice allows us to create a curve based on equation (53) that represents the $\tilde{\omega}$ values within the same highlighted range.

To investigate the minimal influence of the perturbative force in the Roche limit, we consider the already known value for the Earth-Moon system and compare it with the resulting theoretical predictions when adopting different $\tilde{\omega}$ values.

The Earth-Moon system consists of Earth, which has a mass of $5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$, and its natural satellite, the Moon, with a mass of $7.34 \times 10^{22} \text{ kg}$. Upon analysing this case, it is observed that any value greater than $\tilde{\omega} = -0.1667$ leads to a significant departure from the expected results according to the classical Roche limit, represented by the black line (almost indistinguishable from the red line) in Fig. (2). Nevertheless, choosing $\tilde{\omega} = -0.1667$ provides a good approximation for the

investigated system, considering that the theory with variable G should only cause a small disturbance to Newtonian gravity, remaining consistent with the values obtained in Section III A. In practise, values of order $|\tilde{\omega}| \sim O(10^{-1})$ have no impact in the Roche limit keeping the same value as in Newtonian gravity. Table (VI A) refers to the numerical results obtained from this analysis. The presentation of our results in the next subsections follow the same structure.

TABLE I. Percentage differences in the Roche limit for different values of $\tilde{\omega}$. This results quantifies the curves shown in Fig. 2 for the Earth-Moon system.

$\tilde{\omega}$	Deviation from the Newtonian Roche limit
-0.1667	$\approx 0.00011\%$
-0.01667	$\approx 0.0013\%$
-0.001667	$\approx 0.013\%$

B. Jupiter-Europa System

The method employed to analyse the Jupiter-Europa system is the same as before, the difference lies in the values of the intrinsic orbital parameters of the system, where the average radius of the satellite in this case will be approximately 1560.8km. Therefore, it is established as the midpoint between the values 1510km and 1610km, which were selected as the lower and upper bounds, respectively.

To investigate the minimal influence of the perturbative force in the Roche limit, we consider the already known value for the Jupiter-Europa system and compare it with the expected theoretical values when adopting different $\tilde{\omega}$.

TABLE II. Percentage differences in the Roche limit for different values of $\tilde{\omega}$. This results quantifies the curves shown in Fig. 3 for the Jupiter-Europa system

$\tilde{\omega}$	Deviation from the Newtonian Roche limit
-0.1667	$\approx 0.0063\%$
-0.01667	$\approx 0.063\%$
-0.001667	$\approx 0.62\%$

The Jupiter-Europa system consists of Jupiter, which has a mass of 1.898×10^{27} kg, and its natural satellite, Europa, with a mass of 4.8×10^{22} kg. Obviously, the constant ω does not directly depend on the orbital parameters in its equation, so any value smaller than $\tilde{\omega} \approx -0.1667$ would again result in a divergence from the expected results according to the classical Roche limit.

It is observed that the orbital values directly influence the expected distance between the Roche limit with variable G and the Newtonian Roche limit since the dependence on the parameters is inherent in equation (52). Even with the value of order $\tilde{\omega} = 10^{-1}$, the displacement between the curves promoted by the perturbative theory

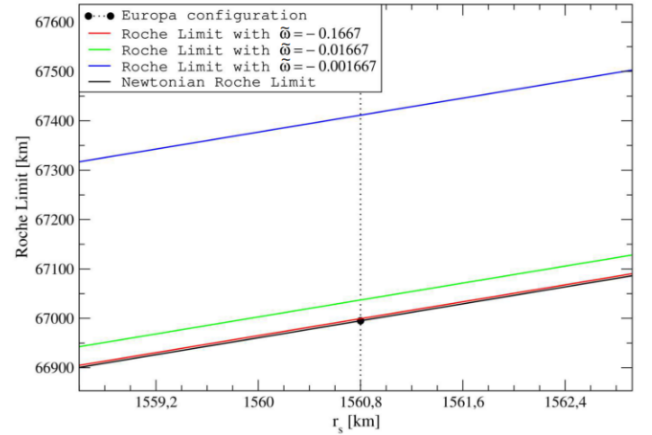


FIG. 3. Roche Limit Graph for different satellite radius values relative to a constant mass m_s . The different curves express the different values of $\tilde{\omega}$. The dashed vertical line seeks to indicate the different Roche limits for $\tilde{\omega}$ considering the radius of the Europa.

and the Newtonian one is minimal. According to Table (II) with $\tilde{\omega} = -0.1667$ the percentual difference is about 0.0063%.

C. Saturn-Prometheus System

In the Saturn-Prometheus system, the average radius of the satellite will be 43.1km, established as the midpoint between the values of 38km and 48km, which were selected as the lower and upper bounds, respectively.

TABLE III. Percentage differences in the Roche limit for different values of $\tilde{\omega}$. This results quantifies the curves shown in Fig. 4 for the Saturn-Prometheus system

$\tilde{\omega}$	Deviation from the Newtonian Roche limit
-0.1667	$\approx 0.0016\%$
-0.01667	$\approx 0.015\%$
-0.001667	$\approx 0.15\%$

The Saturn-Prometheus system is composed of Saturn, which has a mass of 5.683×10^{26} kg, and its natural satellite, Prometheus, with a mass of 1.595×10^{17} kg. Once again, any value greater than $\tilde{\omega} \approx -0.1667$ would result in a deviation from the expected results by the classical Roche Limit.

VII. CONCLUSIONS

We have revisited the Newtonian-like theory inspired by the Brans-Dicke gravitational Lagrangian, as proposed in Reference [1]. In this study, our main focus relied on deriving the effective force experienced by massive test particles (33) having as a free parameter ω or,

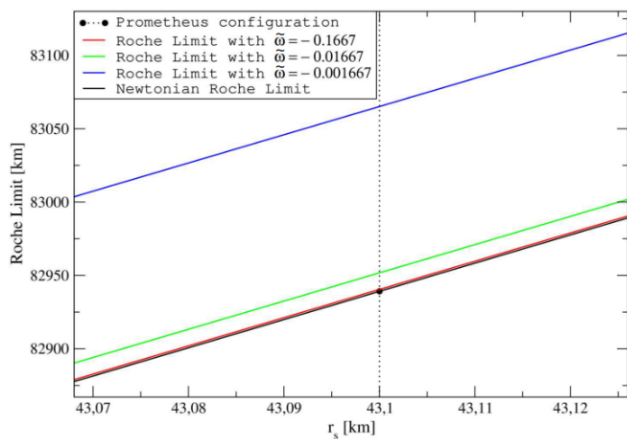


FIG. 4. Roche Limit Graph for different satellite radius values relative to a constant mass m_s . The different curves express the different values of $\tilde{\omega}$. The dashed vertical line seeks to indicate the different Roche limits for $\tilde{\omega}$ considering the radius of the Prometheus.

equivalently, its redefinition $\tilde{\omega}$ (31). The effective gravitational force resembles the exact form of the famous

Manev potential. Subsequently, we applied this corrected gravitational force to conduct the classical test of Mercury's perihelion advance. The value $\tilde{\omega} = -1/6$ is the one able to solve this test. Other bounds on $\tilde{\omega}$ based on similar pericenter advance tests have also been imposed using different astrophysical systems.

The question now is how this value would impact other known results in the domain of celestial mechanics. In order to address this issue we investigated the impact of the value $\tilde{\omega} = -1/6$ on the Roche limit. Our main finding is that this value has no significant impact, and the analysis demonstrates the same Newtonian behavior. In practise, the Roche limit is weakly sensitive to the ω value. This means that this theory can not damage local celestial dynamics.

In brief, we have shown that the Newtonian theory with varying G , as proposed in Ref. [1], remains robust when tested against the two constraints arising from celestial mechanics described above.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank FAPEMIG, FAPES and CNPq for financial support.

-
- [1] J. C. Fabris, T. Gomes, J. D. Toniato, and H. Velten, Newtonian-like gravity with variable G , *Eur. Phys. J. Plus* **136**, 143 (2021), [arXiv:2009.04434 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/2009.04434).
 - [2] C. Xue, J.-P. Liu, Q. Li, J.-F. Wu, S.-Q. Yang, Q. Liu, C.-G. Shao, L.-C. Tu, Z.-K. Hu, and J. Luo, Precision measurement of the Newtonian gravitational constant, *National Science Review* **7**, 1803 (2020), <https://academic.oup.com/nsr/article-pdf/7/12/1803/38880653/nwaa165.pdf>.
 - [3] V. Marra and L. Perivolaropoulos, Rapid transition of G_{eff} at $z_t \simeq 0.01$ as a possible solution of the hubble and growth tensions, *Phys. Rev. D* **104**, L021303 (2021).
 - [4] G. Alestas, L. Perivolaropoulos, and K. Tanidis, Constraining a late time transition of G_{eff} using low- z galaxy survey data, *Phys. Rev. D* **106**, 023526 (2022), [arXiv:2201.05846 \[astro-ph.CO\]](https://arxiv.org/abs/2201.05846).
 - [5] C. Brans and R. Dicke, Mach's principle and a relativistic theory of gravitation, *Phys. Rev.* **124**, 925 (1961).
 - [6] G. W. Horndeski, Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space, *Int. J. Theor. Phys.* **10**, 363 (1974).
 - [7] C. Duval, G. W. Gibbons, and P. Horvathy, Celestial mechanics, conformal structures and gravitational waves, *Phys. Rev. D* **43**, 3907 (1991), [arXiv:hep-th/0512188](https://arxiv.org/abs/hep-th/0512188).
 - [8] P. A. Dirac, The Cosmological constants, *Nature* **139**, 323 (1937).
 - [9] P. A. Dirac, New basis for cosmology, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **A165**, 199 (1938).
 - [10] J. C. Fabris, T. Ottoni, J. D. Toniato, and H. Velten, Stellar Structure in a Newtonian Theory with Variable G , *MDPI Physics* **3**, 1123 (2021), [arXiv:2109.08687 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/2109.08687).
 - [11] E. Poisson and C. M. Will, *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic* (Cambridge University Press, 2014).
 - [12] R. S. Park, W. M. Folkner, A. S. Konopliv, J. G. Williams, D. E. Smith, and M. T. Zuber, Precession of mercury's perihelion from ranging to the MESSENGER Spacecraft, *The Astronomical Journal* **153**, 121 (2017).
 - [13] G. A. Krasinsky, E. V. Pitjeva, M. L. Sveshnikov, and L. I. Chunayeva, The motion of major planets from observations 1769–1988 and some astronomical constants, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **55**, 1 (1993).
 - [14] E. V. Pitjeva, Modern numerical ephemerides of planets and the importance of ranging observations for their creation, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **80**, 249 (2001).
 - [15] D. M. Lucchesi and R. Peron, Accurate measurement in the field of the earth of the general-relativistic precession of the lagesos ii pericenter and new constraints on non-newtonian gravity, *Physical Review Letters* **105**, 10.1103/physrevlett.105.231103 (2010).
 - [16] R. Abuter, A. Amorim, M. Bauböck, J. P. Berger, H. Bonnet, W. Brandner, V. Cardoso, Y. Clénet, P. T. de Zeeuw, and et al., Detection of the schwarzschild precession in the orbit of the star s2 near the galactic centre massive black hole, *Astronomy & Astrophysics* **636**, L5 (2020).
 - [17] B. Famaey and S. S. McGaugh, Modified Newtonian Dynamics (MOND): Observational Phenomenology and Relativistic Extensions, *Living Reviews in Relativity* **15**, 10 (2012).
 - [18] M. Milgrom, Mond theory, *Canadian Journal of Physics*

- 93, 107 (2015).
- [19] J. Bekenstein and M. Milgrom, Does the missing mass problem signal the breakdown of Newtonian gravity?, *Astrophys. J.* **286**, 7 (1984).
- [20] P. Touboul *et al.* (MICROSCOPE Collaboration), *MICROSCOPE* Mission: Final results of the test of the equivalence principle, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 121102 (2022).
- [21] F. Hofmann and J. Müller, Relativistic tests with lunar laser ranging, *Classical and Quantum Gravity* **35**, 035015 (2018).

7 Conclusão

Por meio dos conceitos tratados nos capítulos iniciais, abordamos uma revisão bibliográfica do conteúdo utilizado no artigo denominado "Celestial mechanics in Newtonian-like gravity with variable G ", com o qual apresentamos uma teoria semelhante à teoria gravitacional newtoniana, inspirada agora na lagrangiana gravitacional de Brans-Dicke. Nesse estudo, concentramo-nos na derivação da força efetiva experimentada por partículas de teste massivas em tais configurações, utilizando $\tilde{\omega}$ como parâmetro livre. A conclusão imediata extraída da abordagem metodológica utilizada é que a força gravitacional efetiva assemelha-se a uma força perturbativa. Isso implica que a força gravitacional corrigida pode ser empregada para descrever o avanço do periélio de Mercúrio, especialmente quando consideramos o valor específico de $\tilde{\omega} = -1/6$.

Ao explorar como $\tilde{\omega} = -1/6$ afetaria outros resultados conhecidos no âmbito da mecânica celeste, dedicamos uma análise específica ao limite de Roche. Os resultados demonstram de maneira conclusiva que $\tilde{\omega}$ não exerce um impacto significativo, convergindo para um comportamento semelhante ao observado na mecânica newtoniana convencional. Na prática, o limite de Roche é fracamente sensível ao valor de ω , sendo um indicativo que essa teoria não prejudica a dinâmica celestial local e os valores observacionais tidos como esperados. Dessa maneira, demonstramos que a teoria newtoniana com G variável permanece robusta quando testada nas restrições provenientes da mecânica celeste.

Vale notar que a precisão da teoria na descrição desses fenômenos não garante automaticamente que tal descrição esteja em consonância com a forma pela qual a natureza realmente funciona. É importante ressaltar também que a utilização de um método que admita falseabilidades e que tenha em sua estrutura uma análise fenomenológica empregada, não nos diz nada se a própria análise construída sobre um determinado fenômeno gravitacional é apenas uma descrição da realidade, envolvendo apenas uma tentativa de traduzir observações pessoais, ou se, de fato, constitui uma representação intrínseca da realidade – uma perspectiva independente da visão humana, embora possa estar enraizada nela – capaz de ilustrar a verdadeira essência do funcionamento da natureza. Neste caso, as considerações teóricas carregam uma certa precisão que só será limitada ao tentarmos considerar outros fenômenos que tornariam completamente obsoleta a descrição dos eventos destacados. Esse tipo de limitação pode ser imposta ao considerarmos o princípio da equivalência violado em uma ordem pós-newtoniana pela teoria à G variável demonstrada. Além disso, esse tipo de restrição pode ser utilizada para estabelecer os valores de $\tilde{\omega}$ por meio dos dados experimentais do próprio princípio da equivalência, sem entrar em conflito com as previsões da relatividade geral. Essa abordagem pode permitir a aplicação da teoria à G variável para descrição de fenômenos ainda não compreendidos, sem propor diretamente sua utilização na descrição de fenômenos já validados, como o avanço do periélio de Mercúrio.

No entanto, os demais resultados revelam-se robustos ao empregar o formalismo de ação relativística associado ao formalismo de Brans-Dicke. As conclusões extraídas dos resultados demonstrados no trabalho, aparentam fundamentar uma boa descrição dos fenômenos gravitacionais, especialmente quando realiza-se uma comparação entre a variável G e a teoria relativística no formalismo PPN, bem como sua aplicação em sistemas binários. Tais aspectos proporcionam restrições observacionais significativas que promovem a construção de uma teoria newtoniana modificada, sem afetar os valores teóricos considerados corretos pela mecânica celeste e descrevendo fenômenos gravitacionais de interesse.

Referências

- 1 Brans, C.; Dicke, R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 124, p. 925–935, Nov 1961. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.925>>.
- 2 Fabris, Júlio C. et al. Newtonian-like gravity with variable G . *Eur. Phys. J. Plus*, v. 136, n. 2, p. 143, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01146-z>>.
- 3 Zwicky, F. On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. , v. 86, p. 217, out. 1937. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1937ApJ...86..217Z>>.
- 4 Rodrigues, Davi Cabral; Hernandez-Arboleda, Alejandro. Rotação de galáxias e matéria escura. *Cadernos de Astronomia*, v. 2, n. 1, p. 6, fev. 2021. Disponível em: <<https://periodicos.ufes.br/astronomia/article/view/33939>>.
- 5 Thorton, Stephen T; Marion, Jerry B. *Dinâmica clássica de partículas e sistemas*. São Paulo: Cengage Learning, 2011.
- 6 DIRAC, P. A. The Cosmological constants. *Nature*, v. 139, p. 323, 1937.
- 7 Escórcio, Felipe S. et al. Celestial mechanics in newtonian-like gravity with variable g . *Eur. Phys. J. Plus*, v. 138, n. 12, p. 1084, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-04729-0>>.
- 8 Júlio César Fabris; Júnior Diniz Toniato; Hermano Velten. *Gravitação*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.
- 9 Poisson, Eric; Will, Clifford M. *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
- 10 Pereira, C. L. et al. The two rings of (50000) quaoar. *AA*, v. 673, p. L4, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/202346365>>.
- 11 Cook, Matthew. 3d visualizations of paradoxes in special relativity. In: . [s.n.], 2014. p. 13. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/269165706_3D_Visualizations_of_Paradoxes_in_Special_Relativity>.
- 12 Acevedo, O.A.; Morais, Eduardo; Pimentel, B.M. O princípio de equivalência. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 41, 02 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0329>>.
- 13 Pierre Touboul et al. *MICROSCOPE* Mission: Final results of the test of the equivalence principle. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 129, p. 121102, Sep 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.129.121102>>.
- 14 Novaes, Marcel; Studart, Nelson. Eddington e o encurvamento gravitacional da luz - com a tradução de weighting light do seu clássico livro space, time and gravitation. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Sociedade Brasileira de Física, v. 41, p. e20190230, 2019. ISSN 1806-1117. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2019-0230>>.

-
- 15 MIRANDA, O. D. Avanço do periélio de mercúrio – o primeiro sucesso da teoria da relatividade geral de einstein. *Conexões - Ciência e Tecnologia*, v. 13, n. 2, p. 7–20, 2019. ISSN 2176-0144. Disponível em: <<https://conexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/article/view/1670>>.
- 16 National Institute of Standards and Technology. *NIST CODATA Fundamental Physical Constants*. 2018. Disponível em: <<https://pml.nist.gov/cuu/Constants/>>.