UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Alguns Resultados Recentes sobre Pontos Fixos em Contrações Fracas

Rafael Romero

Orientadores : **Prof. Wenderson Marques Ferreira** (orientador)
Prof. Eder Marinho Martins (coorientador)

OURO PRETO, DEZEMBRO DE 2023

Rafael Romero

Alguns Resultados Recentes sobre Pontos Fixos em Contrações Fracas

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos para conclusão do curso de graduação em Matemática.

Orientador:
Prof. Wenderson Marques Ferreira
Coorientador:
Prof. Eder Marinho Martins
Universidade Federal de Ouro Preto

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E BIOLOGICAS
COLEGIADO DO CURSO DE BACHARELADO EM
MATEMATICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Rafael Romero

Alguns resultados recentes sobre pontos fixos em contrações fracas

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Matemática

Aprovada em 20 de dezembro de 2023

Membros da banca

Dr. Wenderson Marques Ferreira - Orientador - (Universidade Federal de Ouro Preto)
Dr. Eder Marinho Martins - Coorientador - (Universidade Federal de Ouro Preto)
Me. Vinícius V. Pires de Almeida - (Universidade Federal de Ouro Preto)

Wenderson Marques Ferreira, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 25/01/2024.

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163
Telefone: (31)3559-1312 - www.ufop.br

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me fazer acordar todos os dias pra poder viver as oportunidades que a Universidade me apresentou. Agradeço também aos meus pais, minha irmã e minha namorada, que foram refúgio em dias difíceis e que me deram forças para continuar. Agradeço à minha família, por sempre me incentivarem a seguir meu sonho e continuar sempre me dedicando aos estudos. Agradeço ao professor Wenderson Marques Ferreira, meu orientador, que durante todos os anos de graduação me proporcionou diversas oportunidades dentro do curso, o que me incentivou muito a continuar. Além disso, agradeço também pela paciência e pelas boas conversas que tivemos. Agradeço ao meu coorientador, professor Eder Marinho Martins, que esteve muito presente durante meus últimos anos de graduação e que, como tutor no PETMAT, me ajudou muito a melhorar como pessoa dentro do curso. Agradeço à banca examinadora pela disponibilidade e pelas observações que me fizeram aprender muito mais sobre o meu trabalho. Em especial, agradeço ao professor Vinícius Vivaldino Pires de Almeida, pelos ótimos conselhos, o que tornou tudo isso possível, e pela ótima referência como professor. Agradeço aos meus amigos da Casa 2, que foram um suporte essencial e uma ótima companhia para aguentar as dificuldades da graduação. Por fim, mas não menos importante, agradeço a todos os professores que fizeram parte dessa minha jornada e ao PETMAT, que me fez ser parte do curso de graduação em Matemática.

Sumário

Resumo

Existem diversas aplicações para a Teoria de Ponto Fixo, a qual, de maneira geral, envolve a garantia de solução de algum problema e, em alguns casos, sua unicidade. Desta teoria, serão apresentados resultados clássicos que podem ser vistos durante os cursos de graduação, como o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, em um contexto de Análise Real, e o Teorema do Ponto Fixo de Banach, em um contexto de Topologia de Espaços Métricos. Este segundo teorema tem como uma de suas hipóteses que a função envolvida seja uma contração. Porém, este resultado não se aplica no caso de contrações fracas. A partir disso, apresentaremos resultados que foram estudados a partir dos trabalhos de E. Rakotch (em [11]), de D. W. Boyd e J. S. Wong (em [3]) e Vittorino Pata (em [9]), sendo o mais antigo deles publicado na segunda metade do século passado, ou seja, são resultados relativamente recentes. Um dos principais objetivos deste trabalho foi analisar os avanços que cada um desses trabalhos alcançou em relação ao anterior, considerando a ordem cronológica dos resultados. Também apresentaremos alguns exemplos que mostram os avanços alcançados em cada trabalho e terminaremos mostrando resultados de equivalência entre as diversas noções de contração fraca apresentada, desde que sejam considerados espaços métricos compactos.

Palavras Chave: Pontos Fixos, Espaços Métricos, Sequências de Cauchy, Contração, Contração Fraca, Teorema do Ponto Fixo de Banach, Teorema do Ponto Fixo de Rakotch, Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong, Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata.

Abstract

There are several applications for Fixed Point Theory, which generally involves guaranteeing the solution of a problem and, in some cases, its uniqueness. From this theory, we will present classic results that can be seen during undergraduate courses, such as Brouwer's Fixed Point Theorem, in a Real Analysis context, and Banach's Fixed Point Theorem, in a Topology of Metric Spaces context. One of the hypotheses of this second theorem is that the function involved is a contraction. However, this result does not apply in the case of weak contractions. Based on this, we will present results that have been studied from the works of E. Rakotch (in [11]), D. W. Boyd and J. S. Wong (in [3]) and Vittorino Pata (in [9]), the the first in this sequence of articles was published in the second half of the last century, i.e. they are relatively recent results. One of the main objectives of this work was to analyze the advances that each of these works has made in relation to the previous one, considering the chronological order of the results. We will also present some examples that show the progress made in each work and we will end by showing equivalence results between the various notions of weak contraction presented, as long as compact metric spaces are considered.

Keywords: Fixed Points, Metric Spaces, Cauchy Sequences, Contractions, Weak Contractions, Banach Fixed Point Theorem, Rakotch Fixed Point Theorem, Boyd-Wong Fixed Point Theorem, Vittorino Pata Fixed Point Theorem.

Introdução

A Teoria de Ponto Fixo possui diversas aplicações em diferentes áreas da ciência, como, por exemplo, na física e na biologia. De acordo com [4], “a teoria de ponto fixo é essencial em diversas áreas da teoria e aplicação, tais como inequações variacionais e não lineares, teoria da aproximação, análise não linear, equações diferenciais e integrais e inclusões, teoria de sistemas dinâmicos e fractais, economia (teoria de jogos e problemas de equilíbrio e otimização) e modelagem matemática”. Contudo, apresentaremos resultados de existência e unicidade de ponto fixo do ponto de vista unicamente teórico, sem enfatizar suas aplicações.

O presente trabalho tem dois objetivos principais: analisar os avanços, considerando a ordem cronológica, dos resultados apresentados nos artigos [11] (de E. Rakotch), [3] (de D. W. Boyd e J. S. Wong) e [9] (de V. Pata) e demonstrar resultados de equivalência entre as novas noções de contração fraca no caso de espaços métricos compactos.

No Capítulo 1, iniciaremos com a definição de ponto fixo e partiremos com a demonstração de um dos resultados clássicos da Teoria de Ponto Fixo, como o conhecido Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Os resultados apresentados neste capítulo são vistos, em geral, nos cursos de graduação e, muitas vezes, são o primeiro contato dos alunos com essa teoria. Estes resultados serão importantes para compreendermos, de maneira mais simples, as ideias de ponto fixo tanto na reta real como em Espaços Métricos. Nossas principais referências nesta parte serão os clássicos livros de Elon Lages Lima (ver [6] e [7]).

No Capítulo 2, apresentaremos resultados que envolvem espaços métricos, cuja definição e casos especiais estão presentes no texto, como também o clássico Teorema do Ponto Fixo de Banach e, por fim, sua principal aplicação na teoria matemática, o Teorema de Existência e Unicidade para EDO. Contudo, mostraremos também que a partir apenas deste teorema não conseguimos garantir a existência de ponto fixo quando a aplicação considerada for uma contração fraca.

No Capítulo 3, considerando X um espaço métrico e $f : X \to X$ uma aplicação, serão apresentados resultados presentes em três principais artigos: de E. Rakotch ([11]), obtidos em 1962, que consiste em considerar uma família de funções $\alpha \in F_1$, tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha(d(x,y))d(x,y),$$

$\alpha(d(x,y)) < 1$ para todo $x, y \in X$ e $\sup \alpha = 1$; de D. W. Boyd e J. S. Wong ([3]), obtidos em 1969, no qual é considerada uma função $\varphi : \overline{P} \to \mathbb{R}$, sendo $P = \{d(x,y) : x, y \in X\}$, semicontínua superiormente à direita tal que $\varphi(t) < t$ para todo $t > 0$ e satisfaz

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x,y))$$

para todo $x, y \in X$; de Vittorino Pata [9], de 2011, em que são consideradas aplicações que satisfazem

$$d(f(x), f(y)) \leq (1-\varepsilon)d(x,y) + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)[1 + d(x,x_0) + d(y,x_0)]^{\beta}$$

para todo $\varepsilon \in [0,1]$e todo $x, y \in X$, em que $\Lambda \geq$, $\alpha \geq 1$ e $\beta \in [0,\alpha]$ são constantes fixadas.

Esses resultados, apresentados no capítulo 3, garantem a existência e unicidade de ponto fixo e envolvem hipóteses adicionais sobre as contrações fracas, mantendo as outras hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Além disso, à medida em que estes resultados forem sendo apresentados, estabeleceremos comparações entre eles de modo a perceber as diferenças e evoluções de cada um em relação a seu anterior, com mudanças e/ou enfraquecimento das hipóteses e com a consequente ampliação das aplicações admitidas. As comparações serão ilustradas por exemplos em que um resultado vale e o outro não.

Por fim, no Capítulo 4, serão apresentadas, em espaços métricos compactos, as equivalências entre a definição clássica de contração fraca e as definições utilizadas nos artigos citados, com as hipóteses adicionais apresentadas pelos autores. Em diversos casos, por haver tal equivalência, podemos concluir que os resultados apresentados equivalem aos clássicos teoremas de ponto fixo.

Capítulo 1

Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Neste Capítulo iremos definir ponto fixo e apresentar o clássico Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Também apresentaremos, ao longo do Capítulo, diversas definições e resultados fundamentais para a demonstração deste Teorema. Nossa principal referência será a obra de Elon Lages Lima acerca da Análise Real, em [6].

1.1 Ponto Fixo

Definição 1.1

Sejam X e Y conjuntos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Chamamos de ponto fixo de f todo $a \in X$, tal que $f(a) = a$.

Geometricamente, se esboçarmos o gráfico da função $f(x)$, os pontos fixos são os valores das abscissas dos pontos nos quais tal gráfico intercepta o gráfico da função identidade.

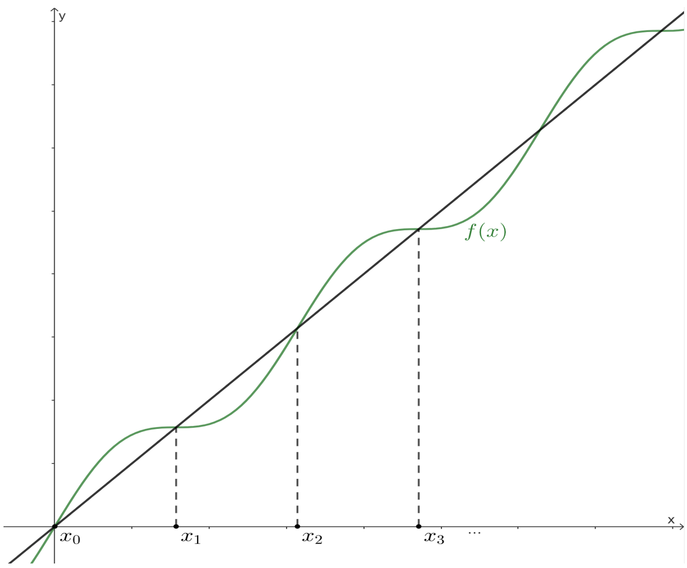

Figura 1.1: x_0, x_1, x_2 e x_3 são pontos fixos da função $f(x) = x + \text{sen x}$ cujo gráfico é indicado na figura.

Observação 1.1 *Durante todo este capítulo, consideraremos apenas as aplicações com domínio e contradomínio sendo subconjuntos de $\mathbb{R}$, isto é, funções reais. Porém, a definição de ponto fixo se estende para conjuntos que não são os de números reais, o que veremos no próximo capítulo.*

1.2 Exemplos de funções e seus pontos fixos

Exemplo 1.1 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 2x + 2$ possui dois pontos fixos.*

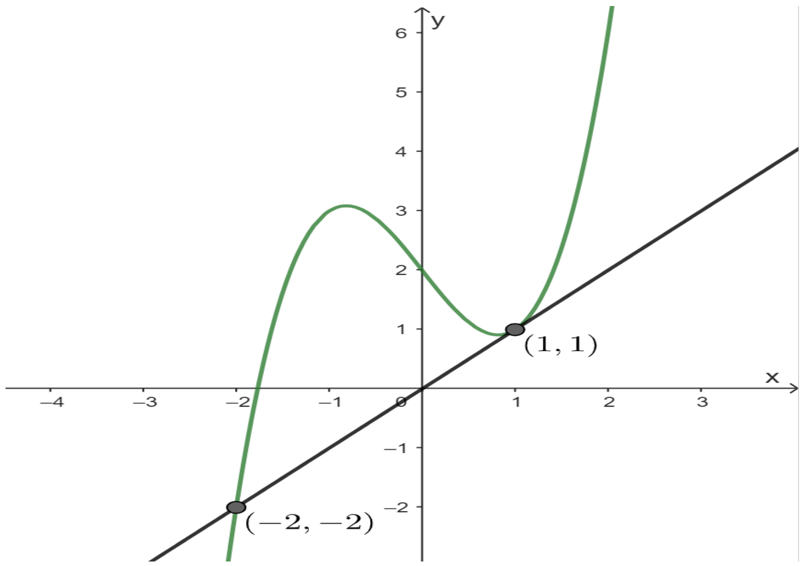

Figura 1.2: As abscissas dos pontos de intersecção entre o gráfico de f e o da função identidade são $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$.

Exemplo 1.2 *A função $f(x) = \sqrt{x}$, definida no domínio $[0, 1]$, possui dois pontos fixos.*

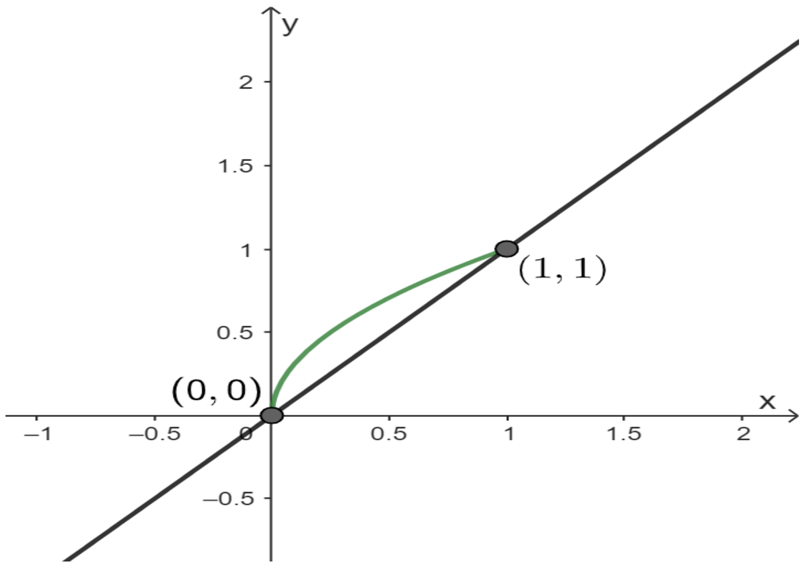

Figura 1.3: $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ são os valores das abscissas dos pontos em comum entre o gráfico de f e o da função identidade.

Exemplo 1.3 *A função $f(x) = \ln(x)$, definida nos reais positivos, não possui ponto fixo.*

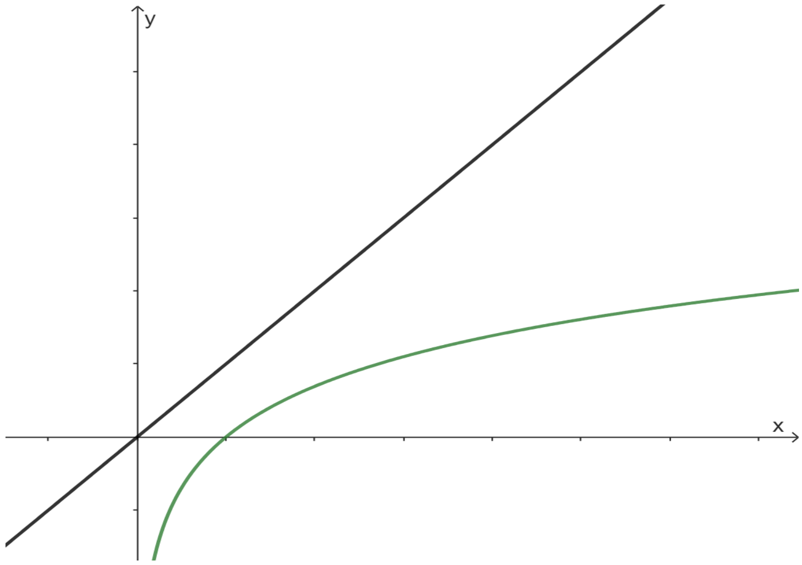

Figura 1.4: O gráfico da função não possui pontos em comum com o gráfico da função identidade

Exemplo 1.4 *A função $f : [0, 2] \to [0, 2]$ dada por $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ possui um único ponto fixo.*

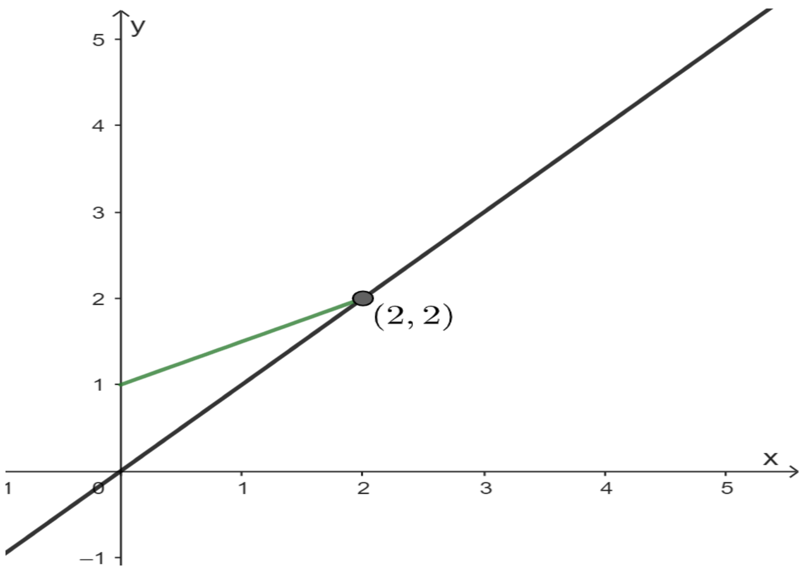

Figura 1.5: O gráfico da função possui um único ponto em comum com a função identidade, em que a abscissa é $x = 2$.

Exemplo 1.5 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(x)$ possui infinitos pontos fixos, sendo que não existe nenhum conjunto limitado da reta que contenha todos eles.*

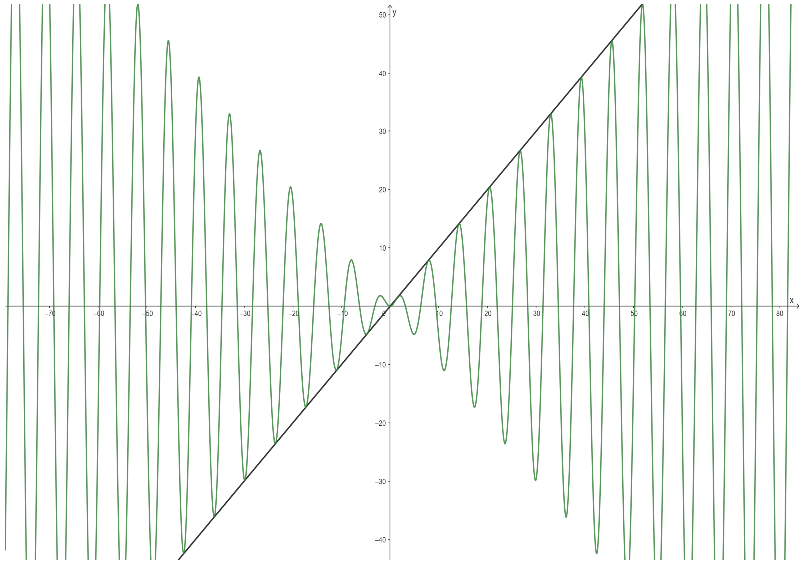

Figura 1.6: O gráfico da função f possui intersecção com o da função identidade, por exemplo, nos pontos em que $\operatorname{sen}(x) = 1$, ou seja, quando $x = \frac{(4n+1)\pi}{2}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.6 *A função* $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$*, com* $x \in \mathbb{R}$ *e* $x \neq 0$*, possui infinitos pontos fixos, todos localizados no intervalo fechado* $[-1, 1]$.

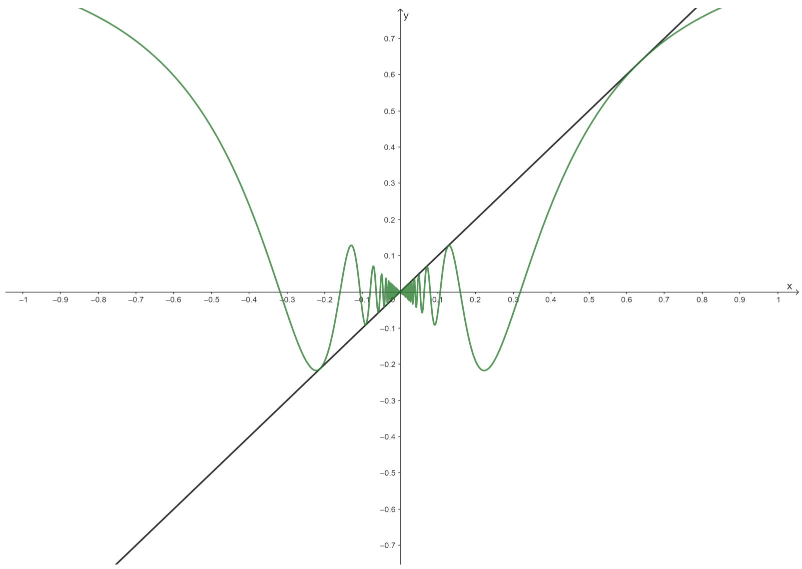

Figura 1.7: Neste caso temos que os pontos de intersecção dos gráficos ocorrem quando $x = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 1.2 *Todos os pontos da função* $f(x) = x$*, definida na reta real, são pontos fixos.*

Vejamos um outro exemplo interessante sobre ponto fixo.

Exemplo 1.7 *Consideremos a função real*

$$f(x) = x^2 - k,$$

em que k é uma constante real.

Vamos observar como a função e seus pontos fixos se comportam de acordo com o parâmetro k. Para isso, devemos comparar $f(x)$ com a função identidade, isto é,

$$x^2 - k = x \Leftrightarrow x^2 - x - k = 0 \tag{1.1}$$

Note então que, para analisarmos o número de pontos fixos da função de acordo com k, devemos observar como as raízes reais de (1.1) se comportam em relação a esse parâmetro. Ou seja, a quantidade de raízes reais está associada à de pontos fixos da função.

Lembre-se que se Δ for o discriminante da equação quadrática (1.1) associada à função, temos:

(i) *Se $\Delta = 0$, a equação possui uma raiz real;*

(ii) *Se $\Delta > 0$, duas raízes reais;*

(iii) *Se $\Delta < 0$, não possui raiz real.*

Assim, como

$$\Delta = 1 + 4a,$$

então para $a < -\frac{1}{4}$, $a = -\frac{1}{4}$ e $a > -\frac{1}{4}$, temos nenhum, um e dois pontos fixo, respectivamente. $\triangleleft$

A partir do exemplo anterior, pode-se observar que podemos ter funções polinomiais de mesmo grau que não possuem a mesma quantidade de pontos fixos ou, até mesmo, não possuir ponto fixo. Esse exemplo nos motiva a obter condições necessárias para garantir pelo menos a existência de ponto fixo.

Antes de apresentarmos um teorema clássico que garante a existência de ponto fixo, veremos algumas definições e resultados de Análise Matemática que serão fundamentais na sequência do texto.

1.3 Conjuntos de Números Reais

Nesta seção, definiremos o que é uma cisão e, a partir dessa definição, obteremos um resultado importante sobre intervalos, que será importante para garantirmos a existência de ponto fixo. Deste modo, é essencial citarmos algumas ideias iniciais acerca de subconjuntos em $\mathbb{R}$ e resultados que obtemos sob determinadas condições.

Definição 1.2

Um ponto x é limite de uma sequência (x_n) quando dado $\varepsilon > 0$ podemos obter um índice $n_0 > 0$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$.

A definição anterior será importante para obtermos o ponto fixo por meio de uma sequência de iterações, o que será visto na demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach, no próximo capítulo.

Definição 1.3

Dizemos que um ponto a é aderente ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando é limite de alguma sequência de pontos $\{x_n\} \subset X$.

Exemplo 1.8 *Seja $X = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Tem-se que a é aderente ao conjunto X pois, para a sequência (a_n), com $a_n = a + \frac{1}{n}$, segue-se que $|a_n - a| < \varepsilon$ para todo $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Da mesma maneira, b também é aderente, pois é limite da sequência $x_n = b - \frac{1}{n}$. De maneira análoga, todos os pontos $x \in (a, b) \subset X$ também são aderentes ao conjunto.*

Observação 1.3 *O ponto aderente não precisa necessariamente pertencer ao conjunto. Por exemplo, se considerássemos X o intervalo aberto (a, b) no exemplo anterior ainda teríamos que $(a_n) \subset X$ e $(b_n) \subset X$ com a e b limites dessas sequência, respectivamente.*

A ideia de ponto aderente é utilizada para definirmos um conjunto com a propriedade de possuir todos os seus elementos como limite de uma sequência. Como dito anteriormente, isso nos ajudará a garantir a existência de ponto fixo a partir de uma sequência. Assim, torna-se natural apresentarmos a definição a seguir.

Definição 1.4

Chama-se fecho de X o conjunto $\overline{X}$ formado por todos os pontos aderentes a X. Quando $X = \overline{X}$ chamamos X de conjunto fechado.

Exemplo 1.9 *Para o conjunto do exemplo anterior, tem-se que $\overline{X} = X$. Logo X é um conjunto fechado.*

Definição 1.5 (Cisão)

Uma cisão de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma decomposição de X tal que $X = A \cup B$, em que $A \cap \overline{B} = \varnothing$ e $\overline{A} \cap B = \varnothing$, isto é, nenhum ponto de A é aderente a B, e vice-versa. A decomposição $X = X \cup \varnothing$ é chamada de cisão trivial.

Teorema 1.1 (Teorema dos Intervalos Encaixados)

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $[a_n, b_n]$ um intervalo de números reais. Se

$$I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$$

Então existe algum número c que pertence a todos os intervalos $[a_n, b_n]$.

Demonstração:

Defina $I_n = [a_n, b_n]$. Deste modo, como consequência da definição,

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_1.$$

Sendo $b_n \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e definindo-se os conjuntos $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ e $B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$, segue-se que o conjunto A é limitado superiormente por qualquer elemento de B e, de modo análogo, B é limitado inferiormente pelos elementos de A. Assim, uma vez que a sequência dos $\{a_n\}$ é monótona crescente e limitada, existe $c \geq a_n$ tal que $c = \sup A$. Deste modo, c é a menor das cotas superiores de A e, consequentemente, como por hipótese $a_m \leq b_n$ para todo n, m, temos que $c \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, tem-se que existe $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Agora que apresentamos o Teorema dos Intervalos Encaixados, somos capazes de demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 1.2

Um intervalo só admite cisão trivial.

Demonstração:

Suponha que um intervalo X admita cisão não trivial. Desta forma, é possível fazer uma decomposição $X = A \cup B$, tal que $A \cap \overline{B} = \varnothing$ e $\overline{A} \cap B = \varnothing$. Daí, existem $a \in A$ e $b \in B$, sendo que a não pertence a B e b não pertence a A. Assim, suponha, sem perda de generalidade, $a < b$, então $[a, b] \subset X$. Seja c o ponto médio de $[a, b]$. Logo, teremos duas possibilidades:

(i) Se $c \in A$, tome $a_1 = c$ e $b_1 = b$;

(ii) Se $c \in B$, tome $a_1 = a$ e $b_1 = c$.

Em ambos os casos, teremos como resultado $[a_1, b_1] \subset [a, b]$. Assim, fazendo este mesmo procedimento repetidas vezes, teremos

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

Pelo Teorema 1.1 existe $d \in [a_n, b_n] \subset X$ para todo n. Note então que existem sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tal que seu limite é d, isto é, $d \in \overline{A}$ e $d \in \overline{B}$. A partir disso, considerando que a cisão foi suposta não trivial, tem-se que d não pertence a A nem a B (ou teríamos $d \in \overline{A} \cap B$ ou $d \in A \cap \overline{B}$), o que é uma contradição. $\square$

1.4 Funções Contínuas e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Iniciemos a seção com a definição de função contínua. Essa definição será fundamental para a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, que veremos na sequência.

Definição 1.6

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem em $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Observação 1.4 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita contínua quando for contínua em todos os pontos $a \in X$. Em contrapartida, quando existe um ponto $a \in X$ no qual f não é contínua, a chamamos de descontínua.*

Exemplo 1.10 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$. Temos que, por ser uma função polinomial, f é contínua para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.*

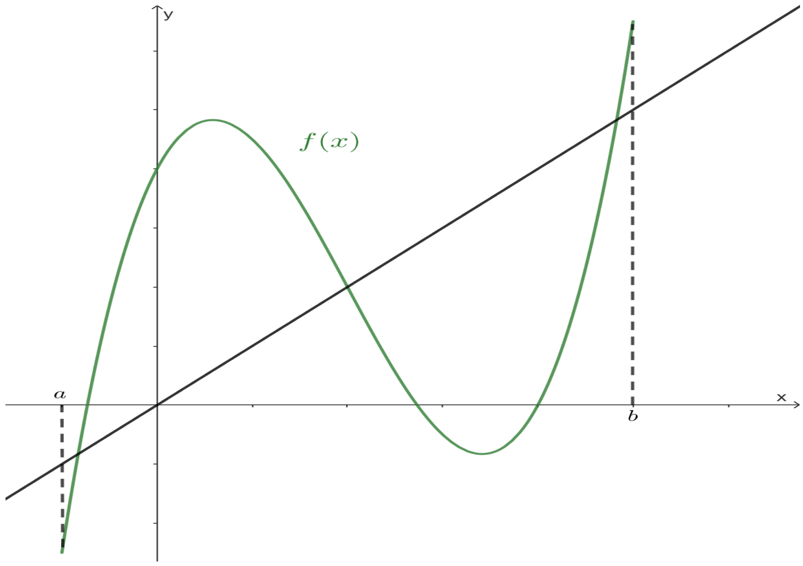

Figura 1.8: Temos que a função f é contínua para quaisquer intervalos $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Exemplo 1.11 *Se tivermos $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & 0 \leq x < 2 \\ 12 - 4x, & 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

temos que f não é contínua em $x = 2$. De fato, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ não é satisfeita a definição de continuidade já que, independentemente do valor de δ, existem pontos $x_0 < 2$, $x_0 \in [0, 3]$, tais que $|f(2) - f(x_0)| \geq \frac{1}{2}$. Portanto, $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ é descontínua.

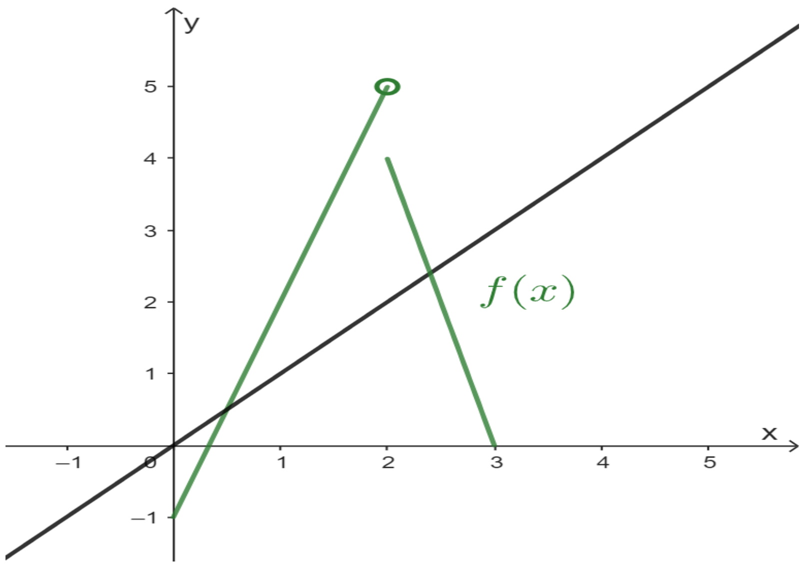

Figura 1.9: Na figura acima podemos observar que, graficamente, f é descontínua no ponto $x = 2$.

Observação 1.5 *Note que, se restringirmos a função do exemplo anterior ao domínio*

$[0,2]$, *teremos uma função contínua em todos os pontos.*

Outro resultado importante envolvendo funções contínuas é o Teorema do Valor Intermediário. Esse teorema será utilizado para demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, nosso principal objetivo neste capítulo.

Teorema 1.3 (Teorema do Valor Intermediário)
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* $f(a) < d < f(b)$, *então existe* $c \in (a,b)$ *tal que* $f(c) = d$.

Demonstração:

Tomamos $[a,b] = A \cup B$ tal que $A = \{x \in [a,b] : f(x) \leq d\}$ e $B = \{x \in [a,b] : f(x) \geq d\}$. Daí, $a \in A$ e $b \in B$. Note que A, B são fechados, isto é, $A = \overline{A}$ e $B = \overline{B}$. Então $\overline{A} \cap B = A \cap B = A \cap \overline{B}$.

Assim, temos que, se $A \cap B \neq \varnothing$, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = d$ e o teorema está demonstrado. Caso contrário, se $A \cap B = \varnothing$, então $A \cap \overline{B} = \varnothing$ ou $\overline{A} \cap B = \varnothing$ e teríamos uma cisão não trivial, o que contradiz o Teorema 1.2. □

Exemplo 1.12 *É possível mostrar que se* f *for uma função contínua em* $[a,b]$, *então existe* $c \in [a,b]$ *tal que*

$$\frac{(f(a))^4 + (f(b))^4}{2} = (f(c))^4.$$

Para isso, definimos a função auxiliar

$$g(x) = (f(x))^4 - \frac{(f(a))^4 + (f(b))^4}{2}.$$

Daí, por f *ser contínua em* $[a,b]$, g *também o é. Além disso:*

(i) $g(a) = (f(a))^4 - \dfrac{(f(a))^4 + (f(b))^4}{2} = \dfrac{(f(a))^4 - (f(b))^4}{2}$.

(ii) $g(b) = (f(b))^4 - \dfrac{(f(a))^4 + (f(b))^4}{2} = \dfrac{(f(b))^4 - (f(a))^4}{2} = -g(a)$.

Como $g(b) = -g(a)$, *então, pelo Teorema 1.3, existe* $c \in [a,b]$ *tal que* $g(c) = 0$, *ou seja,*

$$0 = (f(c))^4 - \frac{(f(a))^4 + (f(b))^4}{2}$$

o que equivale a

$$(f(c))^4 = \frac{(f(a))^4 + (f(b))^4}{2}.$$

Vistos todos esses resultados, agora somos capazes de apresentar o seguinte Teorema.

Teorema 1.4 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em que $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.*

Demonstração:
Seja f satisfazendo as condições. Observe que se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, o teorema já é válido. Assim, para $f(a) > a$ e $f(b) < b$, temos $f(a) - a > 0$ e $f(b) - b < 0$. Tomemos então $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) - x$. Temos que g é contínua. Logo, pelo Teorema 1.3, existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$. Portanto, $f(c) - c = 0$, o que implica em $f(c) = c$.$\square$

Observação 1.6 *Neste capítulo, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer foi demonstrado utilizando o Teorema do Valor Intermediário. Porém, é importante pontuar que os dois teoremas são equivalentes, ou seja, é possível obtermos o Teorema* 1.4 *e, a partir dele, demonstrarmos o Teorema 1.3. Isso pode ser visto em [10] .*

O Teorema anterior não nos garante quantos pontos fixos existem. Podemos verificar, por exemplo, que as funções dos Exemplos 1.2 e 1.4 satisfazem as hipóteses do Teorema e apresentam 2 e 1 pontos fixos, respectivamente. Assim, o questionamento sobre garantir a unicidade desse ponto fixo continua. No próximo capítulo, veremos um resultado que, além de garantir a existência, garante também a unicidade de ponto fixo.

1.5 Alguns Contra-exemplos

Antes de seguirmos com os próximos resultados estudados, vejamos alguns contra-exemplos caso retirássemos alguma hipótese do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Exemplo 1.13 *Seja $f : (0, 1) \cup (1, 2) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 1 \\ \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi - 2}{2}\right), & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Note que a função é contínua em todo o domínio e que $f((0, 1) \cup (1, 2)) \subset (0, 1) \cup (1, 2)$. No entanto f não possui ponto fixo. Isso ocorre pois a função definida não satisfaz a hipótese de que seu domínio seja um intervalo fechado.

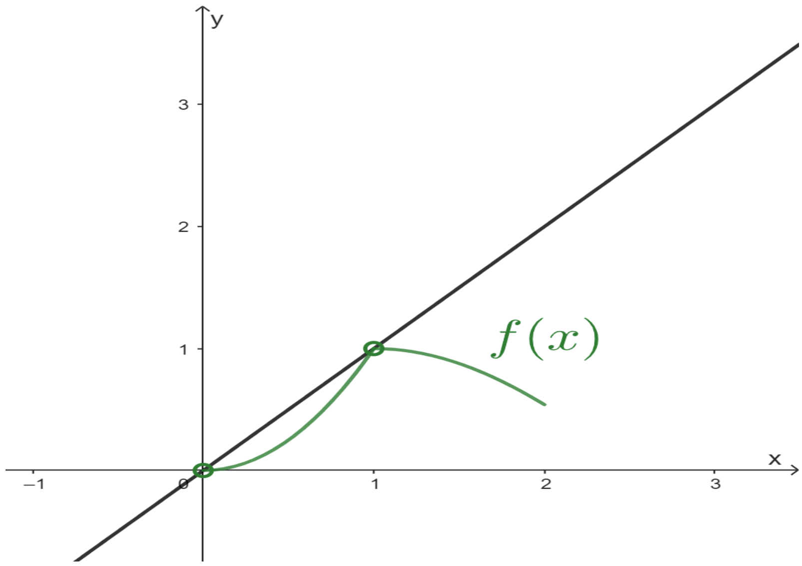

Figura 1.10: O domínio não-fechado $(0,1) \cup (1,2)$ é aplicado em si mesmo pela função descontínua f que não possui pontos fixos.

Exemplo 1.14 *Consideremos* $f : [-1,3] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = -1 \\ x^3, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \\ \operatorname{sen}(x + \frac{\pi - 6}{2}) + 2, & 1 < x < 3 \\ 0, & x = 3. \end{cases}$$

Neste caso, a função está definida em um intervalo fechado e $f([-1,3]) = (-1,3) \subset [-1,3]$*, porém a função não possui ponto fixo. Isto se deve à descontinuidade de* f*.*

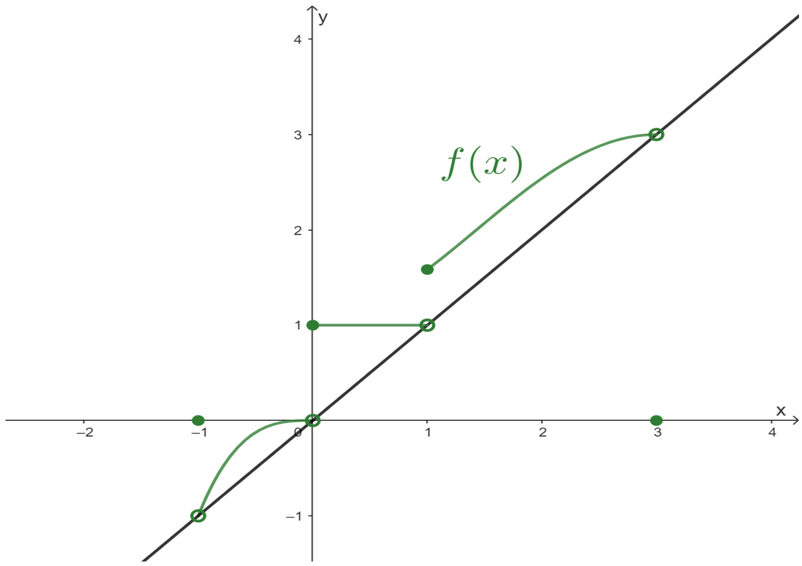

Figura 1.11: Na figura, temos o gráfico de uma função tal que $f([-1,3]) \subset [-1,3]$, mas que não possui pontos fixos por ser descontínua.

Exemplo 1.15 *Seja* $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = x + 1$$

Temos que a função é contínua em todo o domínio, o qual é um intervalo fechado, mas

$$f([0,1]) = [1,2],$$

que não está contido em $[0,1]$*. Além disso, tal função não possui pontos fixos.*

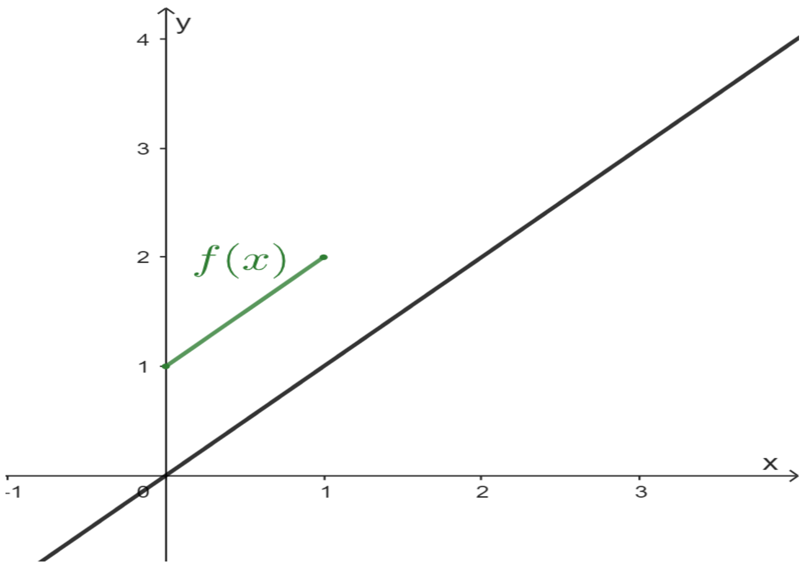

Figura 1.12: Exemplo que ilustra a necessidade de f aplicar seu domínio em si mesmo, para que seja válido o Teorema 1.4

Capítulo 2

Teorema do Ponto Fixo de Banach

Neste Capítulo iniciaremos com a definição de Espaços Métricos e estudaremos um importante resultado sobre pontos fixos nestes espaços: o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Chamamos a atenção para o fato de que o Teorema do Ponto Fixo de Banach, além de ser um resultado de existência, é também um resultado de unicidade, o que o difere, por exemplo, do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, visto no capítulo anterior. Além disso, nos baseamos no livro *Espaços Métricos* de Elon Lages Lima, [7].

2.1 Espaços Métricos

Um espaço métrico, em linhas gerais, é um conjunto não-vazio em que as distâncias entre seus elementos são definidas. Vejamos a definição formal de espaço métrico e outras que serão fundamentais no texto.

Definição 2.1

Chamamos de espaço métrico um par (M, d), em que M é um conjunto e $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é uma função que associa $(a, b) \in M \times M$ à distância $d(a, b) \in \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições para $a, b, c \in M$:

(i) $d(a, b) \geq 0$;

(ii) $d(a, b) = 0$ *se, e somente se,* $a = b$;

(iii) $d(a, b) = d(b, a)$;

(iv) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ *(desigualdade triangular).*

Definição 2.2

Seja M um espaço métrico. Chamamos $(x_n) \subset M$ de sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implique $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Observação 2.1 *Observe que a fim de que uma sequência seja de Cauchy basta que, dado* $\varepsilon > 0$, *tenhamos* $d(x_N, x_{N+p}) < \frac{\varepsilon}{2}$ *para* N *suficientemente grande e para todo* $p > 0$. *De fato, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* N *tal que dados* $m = N + p'$ *e* $n = N + p''$ *tem-se*

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_{N+p'}, x_N) + d(x_N, x_{N+p''}),$$

isto é,

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Definição 2.3

Um espaço métrico M *é dito completo quando toda sequência de Cauchy em* M *converge para um ponto* $a \in M$.

Definição 2.4

Dizemos que um espaço métrico M *é compacto quando toda cobertura por abertos possuir subcobertura finita, ou, equivalentemente, quando toda sequência* $(x_n) \subset M$ *possuir subsequência convergente.*

Teorema 2.1

Todo espaço métrico compacto é completo.

Demonstração:

Sejam M um espaço métrico compacto e uma sequência $(x_n) \subset M$ de Cauchy. Pela definição de compacto, temos que (x_n) possui subsequência (x_{n_i}) convergente em M, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in M$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$d(x, x_{n_i}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n_j, n_i > n_0$. Além disso, como (x_n) é de Cauchy, vale

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $m, n > n_0$. Deste modo, pela desigualdade triangular, obtemos

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $n > n_0$. Logo, (x_n) é convergente em M. Portanto M é completo. $\square$

Definição 2.5

Seja M um espaço métrico. Dizemos que M é limitado quando existir $r > 0$ tal que $M \subset B(x_0, r)$ para algum $x_0 \in M$, em que

$$B(x_0, r) = \{x \in M : d(x, x_0) < r\}$$

é chamada bola aberta de centro x_0 e raio r.

Teorema 2.2

Todo espaço métrico compacto é limitado.

Demonstração:

Seja M um espaço métrico compacto. Podemos considerar a cobertura aberta $M = \bigcup_{x \in M} B(x, 1)$, em que $B(x, 1)$ são as bolas abertas de raio igual a 1 centradas em cada $x \in M$. Como M é compacto, então tal cobertura possui subcobertura finita, ou seja,

$$M = B(x_1, 1) \cup B(x_2, 1) \cup ... \cup B(x_n, 1).$$

Portanto, M é limitado. $\square$

Definição 2.6

Dados M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ é dita contínua em $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica que $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Observação 2.2 *É possível notar que a definição de continuidade de funções feita no capítulo anterior é uma particularização da definição para espaços métricos em geral, isto é, para o caso $d(a, b) = |a - b|$.*

Definição 2.7

Um espaço vetorial normado completo é chamado de espaço de Banach.

2.2 Contrações e Teorema do Ponto Fixo de Banach

Temos alguns casos de aplicações que serão importantes para a sequência do texto. Dentre elas citamos as aplicações de Lipschitz e seus casos particulares, as contrações. O que veremos a seguir.

Definição 2.8

Sejam M e N espaços métricos. Dizemos que uma aplicação $f : M \to N$ é lipschitziana quando para quaisquer $x, y \in M$ existe uma constante $c > 0$, tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y),$$

que damos o nome constante de Lipschitz.

Observação 2.3 *Toda aplicação lipschitziana é contínua. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$ e veja que $d(x, y) < \delta$ implica que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Definição 2.9

*Chamamos de **contração** a aplicação lipschitziana $f : M \to N$ em que a constante de Lipschitz é tal que $0 \leq c < 1$. Uma **contração fraca** é quando*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in M$, sem a necessidade de existir uma constante $c < 1$ que satisfaça

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

Observação 2.4 *Toda contração é uma contração fraca. De fato, seja $f : M \to N$ uma contração, então existe $0 \leq c < 1$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

Daí, temos que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ para todo $x, y \in M$.

Na sequência demonstraremos um dos principais teoremas de ponto fixo que garante tanto a existência como a unicidade do ponto fixo e que, diferentemente do Teorema 1.4, também fornece um método iterativo para obtê-lo.

Teorema 2.3 (Teorema do Ponto Fixo de Banach para Espaços Métricos)

Sendo M um espaço métrico completo, então toda contração $f : M \to M$ possui um único ponto fixo em M.

Demonstração:

Seja $x_0 \in M$, defina a sequência

$$f(x_0) = x_1, f(x_1) = x_2, ..., f(x_n) = x_{n+1}, ...$$

Como f é uma contração, então

$$d(f(x_0), f(x_1)) \leq c \cdot d(x_0, x_1);\ 0 \leq c < 1.$$

Por outro lado, conforme f foi definida, $d(f(x_0), f(x_1)) = d(x_1, x_2)$. Daí,

$$d(x_1, x_2) \leq c \cdot d(x_0, x_1), \tag{2.1}$$

e

$$d(x_2, x_3) \leq c \cdot d(x_1, x_2). \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2), tem-se:

$$d(x_2, x_3) \leq c^2 \cdot d(x_0, x_1)$$

Por indução, o mesmo pode ser feito para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, em geral, tem-se

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1). \tag{2.3}$$

Desta maneira, sendo M espaço métrico, dados $n, m \in \mathbb{N}$ quaisquer tal que $m > n$, segue-se que

$$d(x_n, x_m) = d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}).$$

De (2.3) ,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &= [c^n + c^{n+1} + ... + c^{n+p-1}] \cdot d(x_0, x_1) \\ &= c^n\,[1 + c + ... + c^{p-1}] \cdot d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Basta tomar

$$n_0 > \log_{\mathrm{c}}\left(\frac{(1-\mathrm{c})}{\mathrm{d}(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1)} \cdot \varepsilon\right)$$

e obtemos que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ com $a \in M$.

Além disso temos que, como f é contínua,

$$f(a) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a.$$

Portanto, a é ponto fixo de M.

Para provarmos a unicidade, basta mostrarmos que M não admite dois pontos fixos distintos. De fato, supondo que admita, ou seja, que existam $a, b \in M$ tal que $f(a) = a$ e

$f(b) = b$, temos

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq c \cdot d(a,b);\ 0 \leq c < 1.$$

Daí, $(1-c) \cdot d(a,b) \leq 0$ e então temos $d(a,b) = 0$. Logo, $a = b$. □

Corolário 2.1

Se uma contração fraca possuir ponto fixo, este é único.

Demonstração:

Sejam M um espaço métrico, f uma contração fraca e $a, b \in M$ pontos fixos de f. Daí

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) < d(a,b),$$

o que é um absurdo. □

Observação 2.5 *Podemos verificar se uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma contração fraca analisando sua derivada. Isto é possível pois, para f ser uma contração, precisamos ter que*

$$|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|;\ 0 \leq c < 1 \tag{2.4}$$

o que é equivalente a

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq c.$$

Além disso, como f é diferenciável em M, vale o Teorema do Valor Médio. Logo para cada $x, y \in \mathbb{R}$ existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq c$$

Deste modo, para ser uma contração fraca teríamos

$$f'(x_0) = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < 1 \tag{2.5}$$

com $\sup f' = 1$.

É importante ressaltarmos que o Teorema do Ponto Fixo de Banach já não vale para os casos em que a aplicação for uma contração fraca, ou seja, a aplicação pode ou não possuir ponto fixo. Obviamente, se enfraquecermos as outras hipóteses também não garantimos o resultado, porém estes casos não foram o foco do estudo.

No exemplo a seguir, veremos um caso em que a função, que é uma contração fraca, não possui ponto fixo.

Exemplo 2.1 *Nem toda contração fraca possui ponto fixo. Por exemplo, a função*

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

com $x \in [1, +\infty)$*. Note que a função dada é uma contração fraca, pois*

$$0 \leq f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} < 1,$$

com $\sup f = 1$*. Além disso,* f *claramente não possui ponto fixo, já que, para* $x > 0$ *e* $x < 0$*, temos* $f(x) > x$ *e* $f(x) < x$*, respectivamente.*

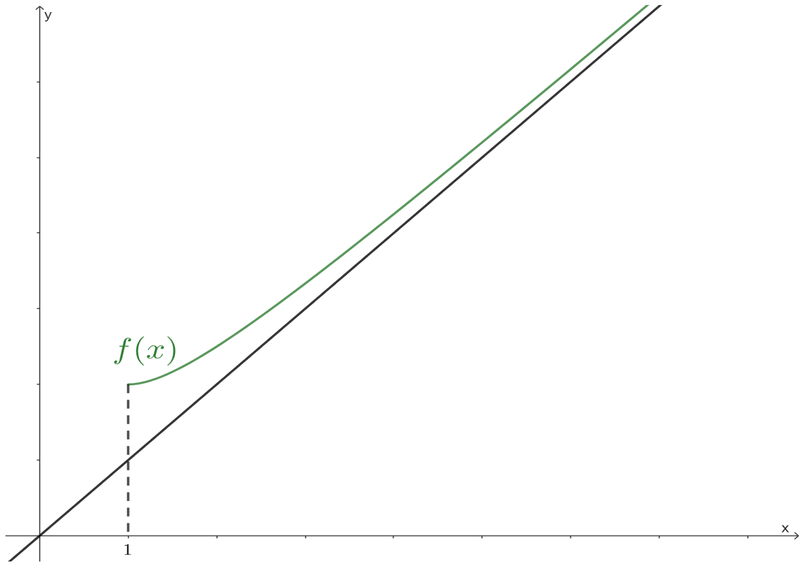

Figura 2.1: O gráfico da função f assintota o da identidade para x suficientemente grande.

$\triangleleft$

Outro exemplo de contração fraca sem ponto fixo será visto no Exemplo 3.2. Vejamos agora um exemplo de contração fraca que possui ponto fixo.

Exemplo 2.2 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = x - \arctan(x)$$

é um exemplo de contração fraca que possui ponto fixo. De fato, uma vez que

$$0 \leq f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2} < 1,$$

com $\sup f' = 1$*, temos que* f *é uma contração fraca. Por outro lado,*

$$f(0) = 0 - \arctan(0) = 0,$$

isto é, $x = 0$ é ponto fixo de f e é único.

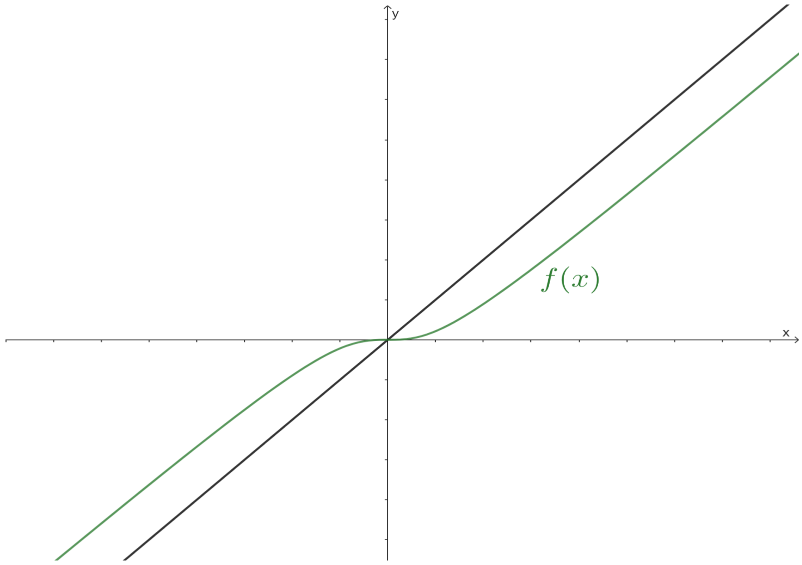

Figura 2.2: Os gráficos da $f(x) = x - \arctan(x)$ e da identidade possuem intersecção apenas no ponto cuja abscissa é $x = 0$.

$\triangleleft$

O Teorema do Ponto Fixo de Banach pode ser utilizado para provar o Teorema da Existência e Unicidade de soluções para Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), conforme veremos na próxima Seção.

2.3 Teorema da Existência e Unicidade para EDO

Teorema 2.4 (Teorema da Existência e Unicidade de Solução de uma EDO) *Seja E um espaço de Banach. Considere um aberto $U \subset \mathbb{R} \times E$ e uma aplicação lipschitziana na segunda variável $f : U \to E$ com $c > 0$, constante de Lipschitz, ou seja,*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq c \cdot |x - y| \;\forall\; (t,x), (t,y) \in U.$$

Dado $(t_0, x_0) \in U$ fixado, então é possível obter uma única solução φ para o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.6}$$

em que $\varphi : I \to E$ é solução, definida em um intervalo I.

Demonstração:

Como $U \subset \mathbb{R} \times E$ é aberto, existem $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que

$$I \times B(x_0, \beta) \subset U$$

com $I = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ e $B(x_0, \beta)$ é a bola centrada em x_0 e raio β. Como podemos ver na figura a seguir:

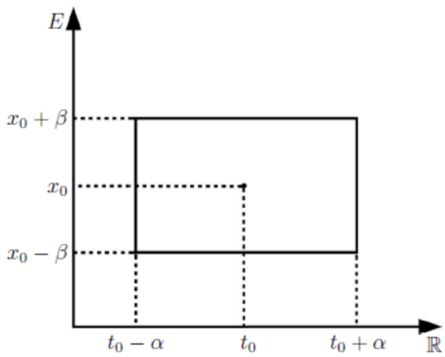

Figura 2.3: A figura mostra o espaço $I \times B(x_0, \beta)$.

Além disso, como f é de Lipschitz, temos que f é contínua. E por ser contínua, podemos considerar α e β suficientemente pequenos tais que f é limitada em $I \times B(x_0, \beta)$, isto é, existe $M > 0$ tal que

$$|f(t, x)| \leq M \tag{2.7}$$

para todo $(t, x) \in I \times B(x_0, \beta)$.

Uma candidata à solução é a aplicação $\varphi : I \to E$ dada por

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \tag{2.8}$$

pois satisfaz o problema de valor inicial (2.6). De fato, temos que

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \ e \ \varphi(t_0) = x_0.$$

Queremos utilizar o Teorema 2.3, em que φ é o ponto fixo que procuramos. Para isso, devemos construir uma aplicação, que mostraremos ser uma contração, definida em um espaço métrico completo.

Deste modo, como E é um espaço de Banach, podemos considerar $C \subset E$ o espaço das funções contínuas com domínio em I e contradomínio na bola $B(x_0, \beta)$, em que podemos considerar a métrica da convergência uniforme, isto é, dados $f, g \in C$, segue-se que

$$d(f,g) = \sup_{t \in I}\{|f(t) - g(t)|\}.$$

Afirmação 1: O espaço métrico C é completo.

De fato, sendo (g_n) uma sequência de Cauchy, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(g_n, g_m) = \sup_{t \in I}\{|g_n(t) - g_m(t)|\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $m, n > n_0$. Como g_n é contínua em um compacto, g_n assume máximo e mínimo. Logo, a sequência (g_n) é limitada e portanto possui uma subsequência (g_{n_i}) convergente, ou seja, existe g tal que

$$d(g_{n_i}, g) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí, pela desigualdade triangular, temos que

$$d(g_n, g) \leq d(g_n, g_{n_i}) + d(g_{n_i}, g) < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Assim, g_n converge para g e converge uniformemente, uma vez que (2.9) implica que

$$|g_n(t) - g(t)| < \varepsilon$$

para todo $t \in I$ e $n > n_0$. Logo $f \in C$ e, portanto, C é completo.

A partir disso, já garantimos uma das hipóteses do Teorema 2.3. Basta construirmos uma contração definida em C com contradomínio também em C. Para isso, seja F uma aplicação definida em C dada por

$$F(g(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds.$$

Temos que F está bem definida em C, pois f está bem definida.

Afirmação 2: $F(C) \subseteq C$.

Basta mostrarmos que $F(g(I)) \subset B(x_0, \beta)$ para toda $g \in C$ e que $F(g(t))$ é contínua.

(i) Tomando α suficientemente pequeno tal que $M\alpha \leq \beta$. tem-se que

$$|F(g(t)) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds \right| = \int_{t_0}^{t} |f(s, g(s))|ds$$

e por (2.7) segue-se que

$$|F(g(t)) - x_0| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq \beta,$$

ou seja, $F(g(t)) \in B(x_0, \beta)$ para todo $t \in I$ e para cada $g \in C$.

(ii) Sejam $g \in C$ e $t_1, t_2 \in I$. Temos que

$$\begin{aligned}
|F(g(t_2)) - F(g(t_1))| &= \left| \int_{t_0}^{t_2} f(s, g(s))ds - \int_{t_0}^{t_1} f(s, g(s))ds \right| \\
&= \left| \int_{t_0}^{t_2} f(s, g(s))ds + \int_{t_1}^{t_0} f(s, g(s))ds \right| \\
&= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, g(s))ds \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(s, g(s))|ds \\
&\leq M|t_2 - t_1|.
\end{aligned}$$

Logo F é uma aplicação lipschitziana, ou seja, é contínua.

Por fim, como α é suficientemente pequeno, podemos tomá-lo de modo a satisfazer $k := \alpha c < 1$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned}
||F(u(t)) - F(v(t))|| &= \sup\{| \int_{t_0}^{t} [f(s, u(s)) - f(s, v(s))]ds| : t \in I\} \\
&\leq \alpha \sup\{|f(s, u(s)) - f(s, v(s))| : s \in I\} \\
&\leq \alpha c \sup\{|u(s) - v(s)| : s \in I\} \\
&\leq \alpha c ||u - v|| = k||u - v||,
\end{aligned}$$

ou seja, F é uma contração. Logo pode-se fazer uso do Teorema 2.3 e, portanto, existe uma única $\varphi \in C$ tal que $F(\varphi) = \varphi$. $\square$

Capítulo 3

Resultados de Pontos Fixos para Contrações Fracas

Neste Capítulo, veremos resultados de pontos fixos para contrações fracas. Nos basearemos em alguns artigos. O primeiro deles foi publicado na segunda metade do século passado por E. Rakotch como parte de sua tese no Departamento de Matemática do Instituto de Tecnologia de Israel, em Haifa. Já o segundo foi publicado 7 anos depois pelos matemáticos D. W. Boyd e J. S. Wong, na revista *Proceedings of the American Mathematical Society*. Depois de 42 anos da publicação do artigo de Boyd-Wong, em 2011, Vittorino Pata publicou o último artigo que estudamos de teoria de ponto fixo envolvendo contração fraca, que veremos mais a frente.

Pretendemos estudar cada um desses resultados, compará-los entre si, estabelecer exemplos que mostram casos em que um deles pode ser aplicado enquanto outros não têm suas hipóteses atendidas.

Como já vimos no Capítulo 2, contrações fracas podem ou não ter pontos fixos (ver Exemplos 2.1 e 2.2) e também, de acordo com o Corolário 2.1, que uma contração fraca não pode ter mais que um ponto fixo. Todos esses artigos possuem teoremas que garantem a existência e unicidade de ponto fixo para contrações fracas sob determinadas condições.

3.1 Os Resultados de E. Rakotch

Nesta seção, nossa principal referência será o artigo de E. Rakocth (ver [11]), que trata de resultados para uma família de funções, F_1, que veremos a definição a seguir.

Note que fazendo uma substituição da constante positiva $0 \leq c < 1$ no Teorema do Ponto Fixo de Banach por uma função $\alpha(x, y)$ limitada por uma constante $\alpha_0 < 1$ ainda garantimos sua tese, pois a função f continua sendo uma contração. Partindo dessa ideia, seguimos com a mudança da constante $0 \leq c < 1$ por uma função $\alpha(x, y)$ com $x, y \in X$ (em que X é o domínio de f), ou seja,

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha(x, y)d(x, y),$$

porém com $\sup \alpha(x, y) = 1$. Neste caso, f passa a ser uma contração fraca. Vejamos a definição da família de funções F_1 para as quais ainda garantiremos a tese do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Como visto na Definição 2.9, consideraremos contração fraca a aplicação $f : M \to N$ tal que

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Definição 3.1

Denotaremos por F_1 a família das funções $\alpha(x, y)$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $\alpha(x, y) = \alpha(d(x, y))$, *ou seja, α depende apenas da distância entre x, y;*

(ii) $0 \leq \alpha(t) < 1$ *para todo $t > 0$;*

(iii) $\alpha(t)$ *é uma função monótona decrescente.*

Observação 3.1 *É possível observar que, no item* (i), cometemos um abuso de notação, pois a função α aparece dependendo de duas variáveis e, ao mesmo tempo, de apenas uma. A rigor, o correto seria inferir que existe uma função $\beta : [0, \mathrm{diam(X)}] \to [0, 1)$ tal que $\alpha = \beta \circ d$, em que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma métrica em X.

A partir dessa definição, teremos dois importantes teoremas, que serão demonstrados nesta seção. Para tanto, faremos uso do teorema a seguir. Sua demonstração pode ser vista em [1].

Teorema 3.1 (Teorema do Ponto Fixo de Edelstein)

Seja X um espaço métrico compacto. Se $f : X \to X$ é uma contração fraca, isto é, vale

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$ com $x \neq y$, então f possui um único ponto fixo.

Vejamos o primeiro teorema obtido por Rakotch.

Teorema 3.2

Seja X um espaço métrico e $f : X \to X$ uma contração fraca. Se existem $M \subset X$ e $x_0 \in M$ tais que

$$d(x, x_0) - d(f(x), f(x_0)) \geq 2d(x_0, f(x_0)) \ \forall \ x \in X - M \tag{3.1}$$

e $f(M)$ é compacto, então existe um único ponto fixo de f.

Demonstração:

Suponha $f(x_0) \neq x_0$ e defina

$$x_n = f^n(x_0); \ n = 1, 2, ...$$

isto é,

$$x_{n+1} = f(x_n); \ n = 0, 1, 2, ...$$

Afirmação: $x_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como f é uma contração fraca, então

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) < d(x_0, x_1)$$

e consequentemente

$$d(x_2, x_3) < d(x_1, x_2) < d(x_0, x_1).$$

Repetindo-se o mesmo procedimento, concluímos que

$$d(x_n, x_{n+1}) < d(x_0, x_1). \tag{3.2}$$

Deste modo, pela desigualdade triangular, segue-se que

$$d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}).$$

Logo, por (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} d(x_0, x_n) - d(x_1, x_{n+1}) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_n, x_{n+1}) \\ &< d(x_0, f(x_0)) + d(x_0, f(x_0)) \qquad (3.3) \\ &= 2d(x_0, f(x_0)), \end{aligned}$$

ou seja, de acordo com (3.1), $x_n \in M$ para todo n.

Por outro lado, por hipótese, $f(M)$ é compacto. Portanto, segue-se do Teorema 4.2 que existe um único ponto fixo para f. $\square$

Vejamos um exemplo de uma função que satisfaz as hipóteses do teorema anterior.

Exemplo 3.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \frac{x}{2}$. Tem-se que f é uma contração, então claramente vale*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Deste modo, a fim de garantirmos as demais hipóteses do Teorema 3.2, provaremos que existe $M \subset X$ e $x_0 \in M$ satisfazendo (3.1).

Para tanto, queremos

$$|x - x_0| - \left|\frac{x}{2} - \frac{x_0}{2}\right| \geq 2\left|x_0 - \frac{x_0}{2}\right|$$

Para facilitar os cálculos, consideraremos $x_0 > 0$. Daí, se $x > x_0$, temos

$$(x - x_0) - \left(\frac{x}{2} - \frac{x_0}{2}\right) \geq x_0,$$

ou equivalentemente

$$\frac{x}{2} - \frac{x_0}{2} \geq x_0,$$

ou seja

$$x - x_0 \geq 2x_0.$$

Portanto

$$x \geq 3x_0.$$

Agora, se $x < x_0$, temos

$$(x_0 - x) - \left(\frac{x_0}{2} - \frac{x}{2}\right) \geq x_0$$

que equivale a

$$\frac{x_0}{2} - \frac{x}{2} \geq x_0.$$

Consequentemente

$$x \leq -x_0.$$

Deste modo, definindo $x_0 = 1$, então $x \geq 3$ e $x \leq -1$. Logo podemos considerar $M = [-1, 3]$, e $f(M) = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ é um compacto. A função possui um único ponto fixo, a saber, a origem.

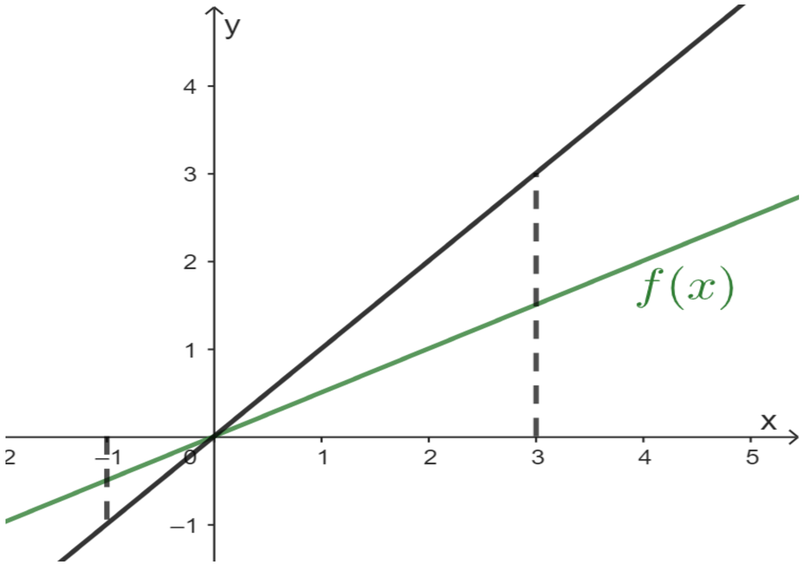

Figura 3.1: Na figura, é possível observar que o ponto fixo pertence ao intervalo $M = [-1, 3]$.

Corolário 3.1

Seja f uma contração fraca tal que existe um ponto $x_0 \in X$ que satisfaz

$$d(f(x), f(x_0)) \leq \alpha(x, x_0) d(x, x_0) \tag{3.4}$$

para todo $x \in X$, em que $\alpha(x, y) \in F_1$. Suponha $f(B(x_0, r)) \subset X$ compacto, em que $B(x_0, r) = \{x : d(x, x_0) < r\}$ e

$$r = \frac{2d(x_0, f(x_0))}{1 - \alpha(2d(x_0, f(x_0))}. \tag{3.5}$$

Então f possui um único ponto fixo.

Demonstração:

Tome no Teorema anterior, $M = B(x_0, r)$. Assim, $x \in X - M$, então $d(x, x_0) \geq r$. De (3.4), temos

$$\begin{aligned} d(x, x_0) - d(f(x), f(x_0)) &\geq d(x, x_0) - \alpha(d(x, x_0)) d(x, x_0) \\ &= d(x, x_0) \cdot [1 - \alpha(d(x, x_0))] \end{aligned} \tag{3.6}$$

Como $d(x, x_0) \geq r$ e α é monótona decrescente, temos

$$\alpha(d(x, x_0)) \leq \alpha(r),$$

o que nos dá

$$1 - \alpha(d(x_0, x)) \geq 1 - \alpha(r).$$

Logo, de (3.6), temos

$$\begin{aligned} d(x, x_0) - d(f(x), f(x_0)) &\geq d(x, x_0)[1 - \alpha(d(x, x_0))] \\ &\geq r[1 - \alpha(r)] \end{aligned} \tag{3.7}$$

De (3.5), e como $0 \leq \alpha(d(x, y)) < 1$ para todo $x, y \in X$, temos

$$r = \frac{2d(x_0, f(x_0))}{1 - \alpha(2d(x_0, f(x_0))} \geq 2d(x_0, f(x_0)).$$

Como α é monótona decrescente,

$$\alpha(r) \leq \alpha(2d(x_0, f(x_0))).$$

Usando isso e (3.5) em (3.7), segue-se que

$$\begin{aligned} d(x, x_0) - d(f(x), f(x_0)) &\geq r[1 - \alpha(2d(x_0, f(x_0)))] \\ &= 2d(x_0, f(x_0)). \end{aligned}$$

Deste modo, podemos aplicar o Teorema 3.2 e segue-se que f possui um único ponto fixo. $\square$

Exemplo 3.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \ln(1 + e^x).$$

Tem-se que f é uma contração fraca, uma vez que

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} < 1 \ .$$

Por outro lado, geometricamente, f assintota o gráfico da função identidade.

De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} (\ln(1 + e^x) - x) &= \lim_{x\to\infty} (\ln(1 + e^x) - \ln(e^x)) \\ &= \lim_{x\to\infty} \ln(\tfrac{1+e^x}{e^x}) \\ &= \lim_{x\to\infty} \ln(\tfrac{e^x(1+\frac{1}{e^x})}{e^x}) \\ &= \lim_{x\to\infty} \ln\left(1 + \tfrac{1}{e^x}\right) = 0. \end{aligned}$$

Daí, por $\ln(1 + e^x) > \ln(e^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue-se que f não possui ponto fixo.

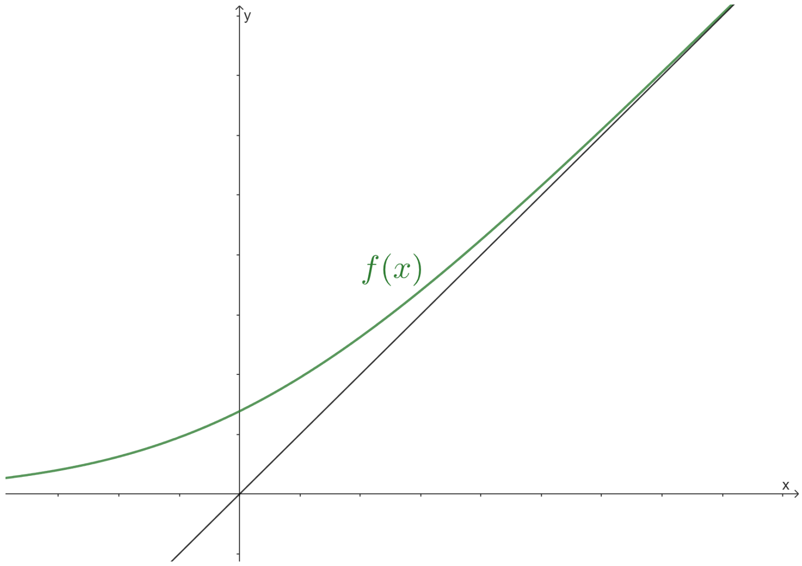

Figura 3.2: Na figura, é possível observar como o gráfico da função f se aproxima arbitrariamente do gráfico da função identidade para x suficientemente grande.

Observação 3.2 *No próximo teorema, veremos condições suficientes para que uma contração fraca possua pontos fixos. Umas das hipóteses necessárias é que exista $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in F_1$ tal que*

$$d(f(x), f(x_0)) \leq \alpha(d(x, x_0))d(x, x_0)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. A função do exemplo anterior, considerando-se a métrica usual, não satisfaz essa condição. De fato, como visto anteriormente, temos que

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - x) = 0,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$ temos que $d(f(x), x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para x suficientemente grande. Além disso, pela desigualdade triangular, tem-se que

$$d(f(u), f(u+1)) \leq d(f(u), u) + d(u, f(u+1))$$

e então,

$$d(f(u), f(u+1)) \leq d(f(u), u) + d(u, u+1) + d(u+1, f(u+1))$$

isto é

$$d(f(u), f(u+1)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

desde que seja tomado u suficientemente grande.

Mais que isso, temos que

$$\lim_{u\to\infty} d(f(u), f(u+1)) = \lim_{u\to\infty} \ln\left(\frac{1+e^{u+1}}{1+e^u}\right) = \lim_{u\to\infty} \ln\left(\frac{\dfrac{1}{e^u}+e}{\dfrac{1}{e^u}+1}\right) = 1$$

Logo, para todo $\varepsilon' > 0$, existe u_0 suficientemente grande de modo que se tem

$$d(f(u), f(u+1)) > 1 - \varepsilon'$$

sempre que $u > u_0$.

Daí, supondo que exista $\alpha \in F_1$ tal que

$$d(f(u), f(u+1)) \leq \alpha(d(u, u+1))d(u, u+1).$$

Então

$$d(f(u), f(u+1)) \leq \alpha(1) \cdot 1 = \alpha(1).$$

Tomando-se o limite quando u tende ao infinito, obtemos $\alpha(1) = 1$, o que é uma contradição pela caracterização das funções $\alpha \in F_1$. $\triangleleft$

Teorema 3.3

Seja X um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma contração fraca tal que existe $M \subset X$ e um ponto $x_0 \in M$ que satisfaz as seguintes condições:

(I) $d(x, x_0) - d(f(x), f(x_0)) \geq 2d(x_0, f(x_0))$ *para todo $x \in X - M$;*

(II) $d(f(x), f(y)) \leq \alpha(d(x, y))d(x, y)$ *para todo $x, y \in M$, em que $\alpha \in F_1$ (ver Definição 3.1).*

Então existe um único ponto fixo de f, $x \in X$, tal que $f^n(x_0) \to x$. .

Demonstração:

Suponha $f(x_0) \neq x_0$. Definindo a sequência $x_n = f^n(x_0)$ como no Teorema 3.2, obtemos de maneira similar que

$$d(x_n, x_{n+1}) < d(x_0, x_1) \tag{3.8}$$

e que $x_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, por (II) e pela definição da sequência (x_n), temos que

$$d(x_1, x_{n+1}) = d(f(x_0), f(x_n)) \leq \alpha(d(x_0, x_n))d(x_0, x_n). \tag{3.9}$$

Daí, pela desigualdade triangular, segue-se que

$$d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_n).$$

Novamente pela desigualdade triangular,

$$d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n).$$

Logo, fazendo as devidas substituições pelos resultados (3.8) e (3.9), tem-se que

$$d(x_0, x_n) < d(x_0, x_1) + \alpha(d(x_0, x_n))d(x_0, x_n) + d(x_0, x_1)$$

o que equivale a

$$[1 - \alpha(d(x_0, x_n))]d(x_0, x_n) < 2d(x_0, x_1),$$

ou seja,

$$d(x_0, x_n) < \frac{2d(x_0, x_1)}{1 - \alpha(d(x_0, x_n))}. \tag{3.10}$$

Afirmação 1: (x_n) é limitada.

Se existir uma constante $d_0 > 0$, tal que $d(x_0, x_n) < d_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então teríamos que (x_n) é limitada. Suponha que existam elementos da sequência (x_n) tais que $d(x_0, x_n) > d_0$, como α é monótona decrescente, temos que

$$\alpha(d_0) \geq \alpha(d(x_0, x_n)).$$

Assim, de (3.10), temos que

$$d(x_0, x_n) < \frac{2d(x_0, x_1)}{1 - \alpha(d_0)} := C.$$

Deste modo, tomamos $R := max\{d_0, C\}$ e segue-se que

$$d(x_0, x_n) < R,$$

ou seja, que (x_n) é limitada.

Afirmação 2: (x_n) é de Cauchy.

Seja $p \in \mathbb{N}$ arbitrário. Utilizando (II), temos que

$$d(x_{k+1}, x_{k+p+1}) = d(f(x_k), f(x_{k+p})) \leq \alpha(d(x_k, x_{k+p}))d(x_k, x_{k+p}).$$

Assim, tomando o produto em ambos os lados desde $k = 0$ a $k = n - 1$, segue-se que

$$d(x_1, x_{p+1})...d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_0, x_p)...d(x_{n-1}, x_{n+p-1}) \prod_{k=0}^{n-1} \alpha(d(x_k, x_{k+p})). \tag{3.11}$$

Daí, simplificando ambos os lados por seus termos semelhantes tem-se

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_0, x_p) \prod_{k=0}^{n-1} \alpha(d(x_k, x_{k+p}))$$

Note que mesmo que $d(x_{k+1}, x_{k+p+1}) = 0$ para algum $k = 0, ..., n-1$, a desigualdade (3.11) se mantém. E como a sequência $\{x_n\}$ é limitada, segue-se que

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq R \prod_{k=0}^{n-1} \alpha(d(x_k, x_{k+p})). \tag{3.12}$$

Note que $d(x_{n-1}, x_{n+p-1}) < \varepsilon$ implica que $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$, já que, sendo f uma contração fraca,

$$d(x_n, x_{n+p}) = d(f(x_{n-1}), f(x_{n+p-1})) < d(x_{n-1}, x_{n+p-1}).$$

Assim, se $d(x_k, x_{k+p}) < \varepsilon$ para algum $k = 0, ..., n-1$, então a sequência é de Cauchy. Por outro lado, se $d(x_k, x_{k+p}) \geq \varepsilon$ para $k = 0, ..., n-1$, então por α ser monótona decrescente

$$\alpha(d(x_k, x_{k+p})) \leq \alpha(\varepsilon).$$

Então, por (3.12) segue-se que

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq R[\alpha(\varepsilon)]^n.$$

Logo, sendo $\alpha(\varepsilon) < 1$, tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} [\alpha(\varepsilon)]^n = 0$$

e, portanto, a sequência é de Cauchy.

Portanto, por X ser completo, existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$ e, por f ser contínua, x é um ponto fixo para tal função. Temos que a unicidade segue do Corolário 2.1. □

Por fim, considerando $M = X$ no teorema anterior, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.2

Sejam X um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma contração fraca tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha(d(x, y))d(x, y),$$

em que $\alpha \in F_1$, para todo $x, y \in X$. Então f possui um único ponto fixo.

Demonstração:

Considerando $M = X$, temos que $X - M = \varnothing$. Portanto, por vacuidade, a condição (I) do Teorema 3.3 é satisfeita e, consequentemente, segue o resultado que f possui um único ponto fixo. $\square$

Podemos observar então que o Teorema 3.3 é uma generalização para o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Com isso, concluímos a presente seção. A seguir veremos outros resultados para contrações fracas sob diferentes condições.

3.2 Os Resultados de D. W. Boyd e J. S. Wong

Nesta seção, veremos alguns resultados apresentados no artigo de Boyd e Wong [3] e investigaremos as aplicações $f : M \to M$ que satisfazem a seguinte condição:

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y)) \tag{3.13}$$

em que $\psi : \overline{P} \to [0, \infty)$ com

$$P = \{d(x, y) : x, y \in M\}. \tag{3.14}$$

Hipóteses adicionais sobre φ serão vistas a seguir no texto mas, a princípio, pediremos apenas que $\varphi(t) < t$ para $t > 0$ e que a mesma seja semicontínua superiormente à direita.

Observação 3.3 *A definição formal de uma função ser semicontínua superiormente à direita é:*

Definição 3.2 *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é semicontínua superiormente à direita em $a \in X$ quando, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(a) + \varepsilon$ sempre que $0 < x - a < \delta$ e $x \in X$.*

Contudo, utilizaremos o seguinte teorema como caracterização para funções semicontínuas superiormente à direita:

Teorema 3.4 *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Então f é semicontínua superiormente à direita em $a \in X$ se, e somente se, $\limsup_{t \to a^+} f(t) \leq f(a)$.*

Sua demonstração pode ser vista em [8].

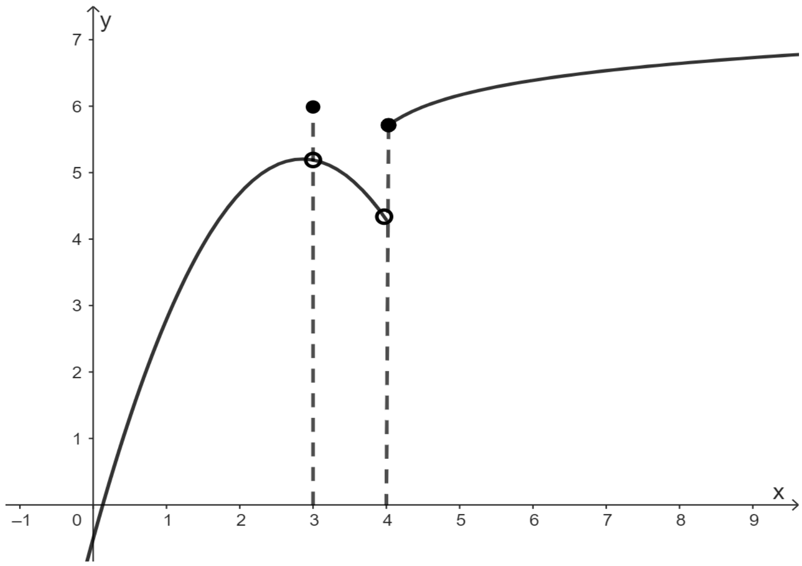

Figura 3.3: A função cujo gráfico está apresentado na figura é semicontínua superiormente à direita em $x = 3$ e $x = 4$.

A partir da ideia de considerar uma função φ que satisfaz (3.13), é válido fazermos a seguinte observação.

Observação 3.4 *Note que se tivéssemos* $\varphi(d(x, y)) = \alpha(d(x, y))d(x, y)$*, em que* $\alpha \in F_1$ *(ver Definição 3.1), então, sob as demais condições do Teorema 3.3, a aplicação que satisfaz (3.13) possui um único ponto fixo. Este foi o resultado que vimos no capítulo anterior.*

Vejamos uma definição fundamental e um resultado que assumiremos, para os quais obteremos as condições necessárias sobre φ para garantir existência e unicidade de ponto fixo para f, em (3.13).

Definição 3.3

Um espaço métrico M *é chamado de metricamente convexo se para cada* $x, y \in M$ *existir* $z \in M$*, com* z *diferente de* x *e* y*, tal que* $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$.

Lema 3.1 *(Menger) Se* M *é um espaço metricamente convexo, então para* $0 < k < 1$ *e* $x, y \in M$ *arbitrários existe* $z \in M$ *tal que*

$$d(x, z) = k \cdot d(x, y) \text{ e } d(z, y) = (1 - k)d(x, y).$$

A demonstração do lema pode ser vista em [2].

É possível notar que, para um espaço metricamente convexo M, teremos que P é convexo. De fato, sejam $a, b \in P$, isto é, $a = d(x_1, y_1)$ e $b = d(x_2, y_2)$ com $x_i, y_i \in M$. Daí, se M é metricamente convexo, pelo Lema 3.1, temos que existe $z_1 \in M$ tal que

$$d(x_1, z_1) = k \cdot a \ e \ d(z_1, y_1) = (1-k) \cdot a$$

com $0 < k < 1$. Logo $(0, a] \subset P$. Analogamente, $(0, b] \subset P$. Supondo, sem perda de generalidade, $a < b$, segue-se que $[a, b] \subset P$.

No resultado a seguir veremos que, de fato, ao considerarmos um espaço metricamente convexo, obtemos a condição φ semicontínua superiormente, essencial para os demais resultados acerca da existência e unicidade de ponto fixo.

Lema 3.2

Suponha M um espaço metricamente convexo e $f : M \to M$ uma aplicação que satisfaz

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y))$$

para alguma constante c. Seja $\phi : P \to \overline{P}$ dada por

$$\phi(t) = \sup \{d(f(x), f(y)) : x, y \in M \ e \ t = d(x, y)\}. \tag{3.15}$$

Então

(i) *$s > 0$, $t > 0$ e $s + t \in P$ implica $\phi(s+t) \leq \phi(s) + \phi(t)$.*

(ii) *ϕ é semicontínua superiormente à direita em P.*

Demonstração:

(i) Pelo Lema 3.1, existe $z \in M$ tal que $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$. Denotemos $d(x, z) := s$ e $d(z, y) := t$, então $d(x, y) = s + t$.

Daí, pela desigualdade triangular e pela definição de ϕ,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(y)) \\ &\leq \phi(s) + \phi(t). \end{aligned}$$

Logo, como x e y são arbitrários, $\phi(s+t) \leq \phi(s) + \phi(t)$.

(ii) De (i), se $t, t_0, t - t_0 \in P$ com $t > t_0$, então

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq \phi(t - t_0) + \phi(t_0) \\ &\leq c(t - t_0) + \phi(t_0). \end{aligned}$$

Daí, tomando o limite superior quando t tende a t_0 à direita, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0^+}\sup \phi(t) &\leq \lim_{t\to t_0^+}\sup[c(t-t_0)+\phi(t_0)]\\ &= \phi(t_0).\end{aligned}$$

Logo ϕ é semicontínua superiormente à direita de $t_0 \in P$. $\square$

Teorema 3.5

Seja M um espaço métrico completo e $f : M \to M$ satisfazendo (3.13), em que φ é semicontínua superiormente à direita em $\overline{P}$ e $\varphi(t) < t$ para todo $t \in P - \{0\}$. Então f possui um único ponto fixo $\overline{x}$ e $f^n(x) \to \overline{x}$ para cada $x \in M$.

Demonstração:

Dado $x \in M$, definimos

$$a_n = d(f^n(x), f^{n-1}(x)).$$

Como f satisfaz (3.13), então

$$\begin{aligned}d(f^n(x), f^{n-1}(x)) &\leq \varphi(d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)))\\ &< d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)),\end{aligned}$$

ou seja, (a_n) é decrescente e é limitada inferiormente por 0. Logo, (a_n) é convergente.

Afirmação 1: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0.$

De fato, suponha que não convirja para 0, então a_n converge para algum $a > 0$. Daí, como $a_{n+1} \leq \varphi(a_n)$,

$$a \leq \lim_{n\to+\infty}\sup a_{n+1} \leq \lim_{n\to+\infty}\sup \varphi(a_n) = \lim_{t\to a^+}\sup \varphi(t).$$

Mas, φ é semicontínua superiormente à direita em P, ou seja, $\lim\sup\limits_{t\to a^+} \varphi(t) \leq \varphi(a)$. Então $a \leq \varphi(a)$ para $a > 0$, o que é uma contradição.

Afirmação 2: $(f^n(x))$ é de Cauchy.

Suponha que $(f^n(x))$ não seja uma sequência de Cauchy, então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existem $m(k) > n(k) > k$ (veja que m e n dependem de k) tais que

$$d_k = d(f^{m(k)}(x), f^{n(k)}(x)) \geq \varepsilon. \tag{3.16}$$

Note que, como o conjunto de índices $m(k) > n(k)$,

$$B = \{m(k) \in \mathbb{N} : m(k) > n(k) > k \text{ e } d(f^{m(k)}(x), f^{n(k)}(x)) \geq \varepsilon\},$$

é um subconjunto dos naturais, então pelo Princípio da Boa Ordem (PBO) existe, para cada k, um menor elemento tal que (3.16) vale. Denotando $n(k)$ apenas por n (para facilitar a notação) e tomando m para ser esse menor elemento, então

$$d(f^{m-1}(x), f^n(x)) < \varepsilon. \tag{3.17}$$

Daí, pela desigualdade triangular,

$$\varepsilon \leq d_k = d(f^m(x), f^n(x)) \leq d(f^m(x), f^{m-1}(x)) + d(f^{m-1}(x), f^n(x)) < a_m + \varepsilon < a_k + \varepsilon \tag{3.18}$$

em que usamos o fato de $m > k$ e a monotonicidade de (a_n). Logo, de (3.16) e (3.18), temos

$$\varepsilon \leq d_k < a_k + \varepsilon.$$

Daí,

$$\lim_{k \to +\infty} d_k = \varepsilon. \tag{3.19}$$

Por outro lado, pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} d_k = d(f^m(x), f^n(x)) &\leq d(f^m(x)), f^{m+1}(x)) + d(f^{m+1}(x), f^n(x)) \\ &\leq d(f^m(x), f^{m+1}(x)) + d(f^{m+1}(x), f^{n+1}(x)) + d(f^{n+1}(x), f^n(x)). \end{aligned}$$

Então, por (3.13) e (3.17), temos

$$d_k \leq a_{m+1} + \varphi(d(f^m(x), f^n(x))) + a_{n+1} < 2a_k + \varphi(d_k).$$

Logo

$$\lim_{k \to +\infty} \sup d_k < \lim_{k \to +\infty} \sup (2a_k + \varphi(d_k)) \leq \lim_{k \to +\infty} \sup \varphi(d_k) \tag{3.20}$$

Além disso, φ é semicontínua superiormente à direita, isto é,

$$\lim_{t \to t_0^+} \sup \varphi(t) \leq \varphi(t_0).$$

De (3.16) e (3.19), temos

$$\varepsilon = \lim_{k \to +\infty} \sup d_k \leq \lim_{k \to +\infty} \sup \varphi(d_k) = \varphi(\varepsilon),$$

ou seja, $\varepsilon \leq \varphi(\varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$, o que é uma contradição, pois $\varphi(t) < t$ para todo $t \in \overline{P} - \{0\}$. Portanto $(f^n(x))$ é uma sequência de Cauchy para cada $x \in M$.

Deste modo, como M é completo, temos que existe $\overline{x} \in M$ tal que $\lim_{n \to \infty} f^n(x) = \overline{x}$ para cada $x \in M$. Daí, como f é contínua, $\overline{x}$ é o único ponto fixo de f. $\square$

No próximo exemplo veremos que a condição de semicontinuidade de φ não pode ser omitida no Teorema 3.5.

Exemplo 3.3 *Seja* $X = \{x_n = n\sqrt{2} + 2^n : n \in \mathbb{Z}\}$ *um espaço com a métrica do módulo.*

Note que X *é discreto e portanto é completo. Além disso, afirmamos que para cada* $p \in P$ *(sendo* P *definida em (3.14)), com* $p \neq 0$*, existe um único par* $x_m, x_n \in X$ *tal que* $p = d(x_m, x_n)$*.*

De fato, suponha que existam j, k, m, n*, com* $j > k$ *e* $m > n$*, tais que*

$$d(x_j, x_k) = d(x_m, x_n),$$

ou seja,

$$(j-k)\sqrt{2} + 2^j - 2^k = (m-n)\sqrt{2} + 2^m - 2^n,$$

isto é,

$$2^j - 2^k - 2^m + 2^n = (m - n - j + k)\sqrt{2}. \tag{3.21}$$

Como o lado esquerdo de (3.21) é um número racional e o lado direito é irracional ou igual a 0, segue que os dois lados da igualdade (3.21) são iguais a 0. Daí, $m - n = j - k$*. Logo,* $2^j - 2^k = 2^m - 2^n$*. Em particular, para* $j = k + s$ *e* $m = n + s$ *com* $s > 0$*, tem-se que*

$$2^k(2^s - 1) = 2^n(2^s - 1)$$

ou seja, $k = n$*.*

Agora, sejam $f : X \to X$*, tal que* $f(x_n) = x_{n-1}$*, e* $\varphi : \overline{P} \to [0, \infty)$ *dada por*

$$\varphi(t) = \begin{cases} |x_{n-1} - x_{m-1}|; \ \textit{se } t = |x_n - x_m| \in P, \\ 0; \ t \in \overline{P} - P. \end{cases}$$

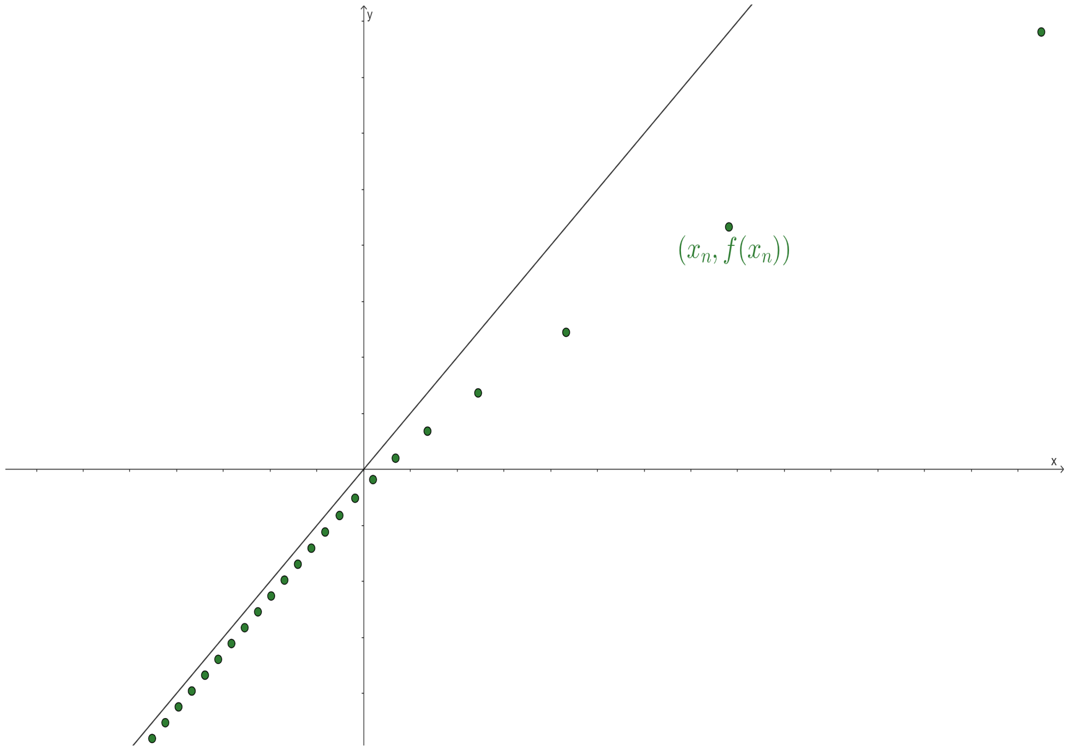

Figura 3.4: A figura representa a sequência de pontos $(x_n, f(x_n))$, com $f(x_n) = x_{n-1}$, em comparação com o gráfico da função identidade.

Temos que f é uma contração fraca. De fato, como $m > m$, então $2^m > 2^n$ e, consequentemente, $2(2^n - 2^m) < (2^n - 2^m)$. Logo

$$\begin{aligned} d(f(x_n), f(x_m)) = d(x_{n-1}, x_{m-1}) &= |x_{n-1} - x_{m-1}| \\ &= |(n-1)\sqrt{2} + 2^{n-1} - (m-1)\sqrt{2} - 2^{m-1}| \\ &= |(n-m)\sqrt{2} + 2 \cdot (2^n - 2^m)| \\ &< |(n-m)\sqrt{2} + (2^n - 2^m)| = d(x_n, x_m). \end{aligned}$$

Note que, pela definição de φ, já temos que

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y))$$

para todo $x, y \in X$. Além disso, veja que para $t \in \overline{P} - P$ e $t \in P$ temos, respectivamente, que $\varphi(t) = 0 < t$ e, sendo $t = d(x_n, x_m)$ para algum par m, n, temos

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(d(x_n, x_m)) \\ &= d(x_{n-1}, x_{m-1}) \\ &= d(f(x_n), f(x_m)) \\ &< d(x_n, x_m) = t \end{aligned}$$

em que utilizamos, na sequência, a definição de φ e o fato de f ser uma contração fraca.

Portanto, $\varphi(t) < t$ para todo $t \in \overline{P} - 0$. Com isso, temos todas as hipóteses do Teorema 3.5, a menos da semicontinuidade superior à direita. Porém, f não possui ponto fixo, pois

$$\begin{aligned} f(x_n) = f(n\sqrt{2} + 2^n) \quad &= x_{n-1} \\ &= (n-1)\sqrt{2} + 2^{n-1} \\ &\neq n\sqrt{2} + 2^n = x_n \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, isto é, $f(x) \neq x$ para todo $x \in X$.

Isto ocorre como consequência de não termos a hipótese da semicontinuidade superior à direita de φ em $\sqrt{2} \in \overline{P}$.

De fato, dados $n > m$ tem-se que

$$|x_n - x_m| = n\sqrt{2} + 2^n - m\sqrt{2} - 2^m = (n-m)\sqrt{2} + 2^n(1 - 2^{m-n}).$$

Por outro lado, como $n > m$, $m \leq n - 1$, logo

$$x_m = m\sqrt{2} + 2^m \leq (n-1)\sqrt{2} + 2^{n-1} = x_{n-1}.$$

Logo, em particular, temos que

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n-1}| \quad &= n\sqrt{2} + 2^n - (n-1)\sqrt{2} - 2^{n-1} \\ &= \sqrt{2} + 2^{n-1}(2-1) \\ &= \sqrt{2} + 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Então

$$\lim_{n \to -\infty} (\sqrt{2} + 2^{n-1}) = \sqrt{2}$$

e $\sqrt{2} \in \overline{P}$ (ver Definição 3.14). Mas $\sqrt{2} \notin P$, pois $|x_n - x_m| > \sqrt{2}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.Logo, $\sqrt{2} \in \overline{P} - P$. Assim, por definição,

$$\varphi(\sqrt{2}) = 0 < \sqrt{2} < \varphi(\sqrt{2} + 2^{n-1})$$

isto é

$$\varphi(\sqrt{2}) < \lim_{n \to -\infty} \sup \varphi(\sqrt{2} + 2^{n-1})$$

Como $\sqrt{2} + 2^{n-1} \in P$ e 2^{n-1} é arbitrariamente pequeno quando $n \to -\infty$, temos que não vale a semicontinuidade superior à direita em $\sqrt{2}$.

Veremos a seguir um exemplo do que pode acontecer ao enfraquecermos a condição $\varphi(t) < t$, admitindo $\varphi(t_0) = t_0$ para algum $t_0 \in \overline{P}$. Neste caso, podemos ter mais que um ponto fixo ou nenhum.

Exemplo 3.4 *Sejam* $X = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ *com a métrica usual,* $f_1 : X \to X$ *dada por*

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1); & x \in [1, \infty) \\ \frac{1}{2}(x-1); & x \in (-\infty, -1] \end{cases}$$

e $f_2(x) = -f_1(x)$.

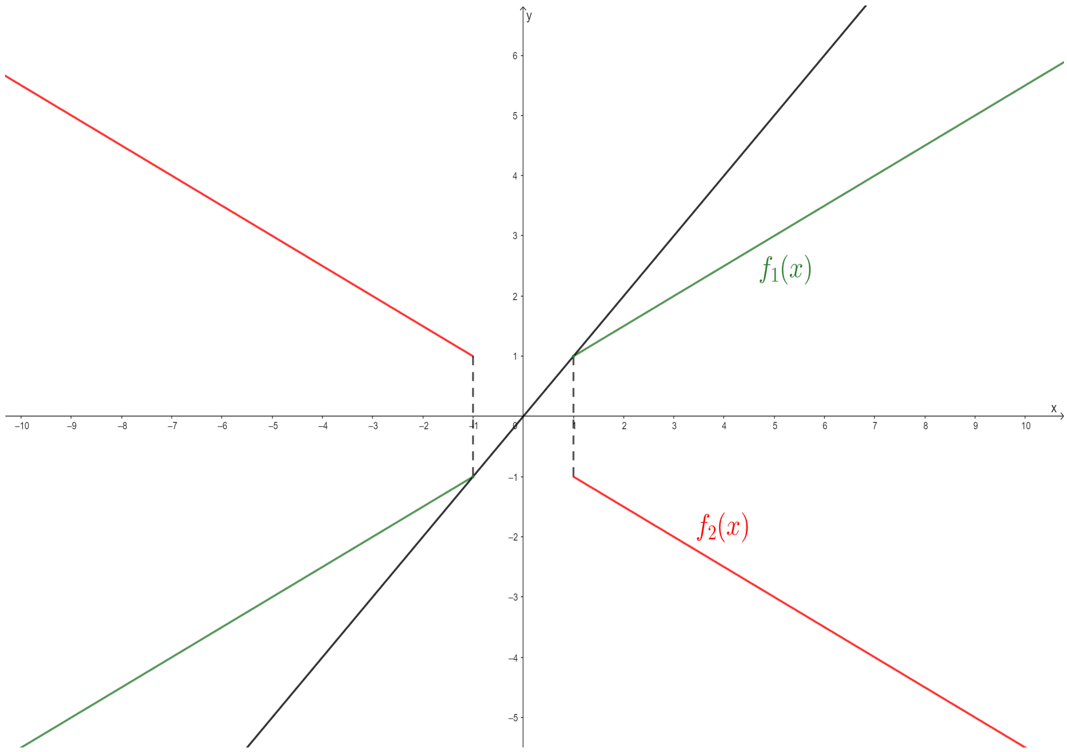

Figura 3.5: A figura representa os gráficos das funções f_1 e f_2 em relação ao gráfico da função identidade.

Note que para $x \in [1, \infty)$ *e* $y \in (-\infty, -1]$ *temos*

$$\begin{aligned} d(f_1(x), f_1(y)) &= \left| \frac{x+1}{2} - \frac{y-1}{2} \right| \\ &\leq \frac{|x-y|}{2} + 1 \\ &= \frac{d(x,y)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Já para $x, y \in [1, \infty)$ *temos*

$$\begin{aligned} d(f_1(x), f_1(y)) &= \left| \frac{x+1}{2} - \frac{y+1}{2} \right| \\ &= \frac{|x-y|}{2} \\ &= \frac{d(x,y)}{2}. \end{aligned}$$

Analogamente, para $x, y \in (-\infty, -1]$, temos

$$d(f_1(x), f_1(y)) = \frac{d(x,y)}{2}.$$

Como $f_2 = -f_1$, $d(f_1(x), f_1(y)) = d(f_2(x), f_2(y))$ para todo $x, y \in X$.

Queremos uma φ que satisfaça (3.13). Deste modo, definimos $\varphi : \overline{P} \to [0, \infty)$ dada por

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} + 1, \text{ se t} \geq 2 \\ \frac{t}{2}, \text{ se } 0 \leq \text{t} < 2. \end{cases}$$

Daí, temos que φ é contínua e crescente. Logo satisfaz a condição de ser semicontínua superiormente à direita. Porém, temos que $\varphi(2) = 2$, isto é, φ não satisfaz uma das condições do Teorema 3.5. Neste caso, temos que f_1 possui dois pontos fixos, $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$, e f_2 não possui ponto fixo.

Agora, veremos um exemplo que mostra que o Teorema 3.5 aperfeiçoa o resultado de Rakotch. Para isso, mostraremos que não existe uma função $\alpha \in F_1$ (Definição 3.1).

Exemplo 3.5 *Seja $X = [0, 1] \cup \{2, 3, 4, ...\}$ com a métrica*

$$d(x,y) = \begin{cases} |x - y|; \; x, y \in [0,1], \\ x + y; \; x \in \{2,3,4,...\} \textit{ ou } y \in \{2,3,4,...\} \end{cases}$$

Veja que X é um espaço métrico completo. De fato, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em X, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $m, n > n_0$ tem-se

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Daí, só podemos ter (x_n) constante para n suficientemente grande ou $x_n \in [0, 1]$ para todo n suficientemente grande ($[0, 1]$ é completo, então (x_n) converge em $[0, 1]$). Seja $f : X \to X$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2}; \; x \in [0,1] \\ x - 1; \; x \in \{2,3,4,...\} \end{cases}$$

Daí, para $x, y \in [0, 1]$, com $x > y$, temos $f(x), f(y) \in [0, 1]$, então

$$d(f(x), f(y)) = \left| x - \frac{x^2}{2} - y + \frac{y^2}{2} \right| = \left| (x-y)\left(1 - \frac{1}{2}(x+y)\right) \right| \leq (x-y)\left(1 - \frac{1}{2}(x-y)\right).$$

Já para $x \in \{2,3,4,...\}$ e $y \in X$, com $x > y$, temos

$$d(f(x), f(y)) = f(x) + f(y) = x - 1 + f(y) < x - 1 + y = (x + y) - 1.$$

Deste modo, definimos $\varphi : \overline{P} \to [0, \infty)$ tal que

$$\varphi(t) = \begin{cases} t - \dfrac{t^2}{2};\ t \in [0,1] \\ t - 1;\ t > 1 \end{cases}$$

Assim, $d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x,y))$. Além disso, $\varphi(t) < t$ para todo $t \in \overline{P} - \{0\}$ e φ é semicontínua superiormente à direita em X. De fato, já temos que φ é contínua para $t \in [0,1)$ e $t > 1$ e, para $t_0 = 1$, temos

$$\lim_{t \to t_0^+} \sup \varphi(t) = \lim_{t \to t_0^+} \sup(t - 1) = 0 \leq \varphi(1).$$

Logo, podemos utilizar o Teorema 3.5. Porém, não podemos utilizar o Teorema 3.3, pois não podemos obter $\alpha < 1$ da Definição 3.1.

De fato, supondo que exista $\alpha \in F_1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha(d(x,y))d(x,y), \tag{3.22}$$

então teríamos, em particular, que

$$d(f(u), 0) \leq \alpha(d(u,0))d(u,0),$$

ou seja, como $d(u,0) \neq 0$ para $u \neq 0$, segue-se que

$$\frac{d(f(u),0)}{d(u,0)} \leq \alpha(d(u,0)).$$

Por outro lado, temos que

$$\lim_{u \to \infty} \frac{d(f(u),0)}{d(u,0)} = \lim_{u \to \infty} \frac{u-1}{u} = 1.$$

Deste modo, obtemos que

$$\lim_{u \to \infty} \alpha(d(u,0)) \geq 1,$$

o que é uma contradição. Logo não existe $\alpha \in F_1$ que satisfaça (3.22).

Observação 3.5 *Considerando $x, y \in [0,1]$, uma tentativa de exibir explicitamente uma* *função $\alpha \in F_1$ no exemplo anterior seria*

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \left| x - \frac{x^2}{2} - y + \frac{y^2}{2} \right| \\ &= \left| x - y - \left(\frac{x^2 - y^2}{2} \right) \right| \\ &= \left| x - y - \left(\frac{(x+y)(x-y)}{2} \right) \right| \\ &= |x-y| \left| 1 - \frac{(x+y)}{2} \right|. \end{aligned}$$

Como $d(x,y) = |x-y|$, então uma candidata seria a função α seria

$$\beta(x,y) = \left| 1 - \frac{(x+y)}{2} \right|.$$

Porém, essa função $\beta \notin F_1$, pois, neste caso, β não depende somente da distância. Podemos observar isso para os pares $(x,y) = (0, \frac{1}{2})$ e $(x,y) = (\frac{1}{2}, 1)$, uma vez que $d(0, \frac{1}{2}) = d(\frac{1}{2}, 1) = \dfrac{1}{2}$ e $\beta(0, \frac{1}{2}) = \dfrac{3}{4} \neq \dfrac{1}{4} = \beta(\frac{1}{2}, 1)$.

No Teorema 3.5 vimos que o resultado vale para φ semicontínua superiormente à direita. A seguir, veremos que, mesmo que não tenhamos tal hipótese, ainda conseguimos um resultado de ponto fixo, incluindo a condição de o espaço ser metricamente convexo.

Teorema 3.6

Sejam M um espaço completo metricamente convexo e $f : M \to M$ que satisfaz (3.13), em que $\varphi : \overline{P} \to [0, \infty)$ é tal que $\varphi(t) < t$ para todo $t \in \overline{P} - \{0\}$. Então f tem um único ponto fixo x_0 e $f^n(x) \to x_0$ para cada $x \in M$.

Demonstração:

Seja ϕ definida como em (3.15) (vista no Lema 3.2). Assim, como φ satisfaz (3.13), tem-se que

$$\phi(t) = \sup \{ d(f(x), f(y)) : x, y \in M \text{ e } t = d(x,y) \} \leq \varphi(t) < t$$

para todo $t \in P - \{0\}$. Definimos também $\phi(t) = \varphi(t)$ para $t \in \overline{P} - P$.

Deste modo, temos que

$$d(f(x), f(y)) \leq \phi(d(x,y))$$

para todo $x, y \in M$ e $\phi(t) < t$ para todo $t \in \overline{P} - \{0\}$. Além disso, pelo Lema 3.2, ϕ é semicontínua superiormente à direita em P. Mais que isso, ϕ é semicontínua superiormente à direita em $\overline{P} - P$, pois

$$\lim_{t \to t_0+} \sup \phi(t) = \lim_{t \to t_0+} \sup \varphi(t) \leq \varphi(t_0) = \phi(t_0)$$

para $t, t_0 \in \overline{P} - P$. Logo, ϕ é semicontínua superiormente à direita em $\overline{P}$. Portanto, podemos aplicar o Teorema 3.5 para ϕ e segue-se que f possui um único ponto fixo. $\square$

Concluímos a seção com o mesmo resultado do Teorema do Ponto Fixo de Banach, valendo agora para aplicações que são contrações fracas acrescidas de certas condições necessárias. É importante salientar que, a partir do Exemplo 3.21, os resultados valem para aplicações diferentes das apresentadas na seção anterior, em que apresentamos a família de funções F_1 (ver Definição 3.1). Além disso, tais aplicações com as condições apresentadas neste capítulo, inclusive, englobam F_1. Logo, nesta seção, obtivemos mais um avanço na generalização do resultado de existência e unicidade de ponto fixo.

Veremos a seguir outro avanço nessa teoria, com resultados obtidos e publicados 42 anos após os resultados apresentados na presente seção.

3.3 Os Resultados de Vittorino Pata

Nesta seção, estudaremos um terceiro artigo acerca de resultados sobre pontos fixos, em espaços métricos. Nossa principal referência será o trabalho recente, [9] de Vittorino Pata, que apresenta contrações fracas com condições e propriedades diferentes das que já vimos nas seções anteriores. Além disso, no próximo capítulo veremos que o principal resultado obtido nessa seção é equivalente ao Teorema 3.5.

Vejamos algumas considerações iniciais:

(i) $\psi : [0, \alpha] \to [0, +\infty)$ uma função crescente que suas imagens se aproximam de 0, com continuidade, à medida que x se aproxima também de 0.

(ii) w_n uma sequência que depende de uma constante $\alpha \geq 1$ tal que

$$w_n(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \psi\left(\frac{\alpha}{k}\right).$$

Observação 3.6 *É importante ressaltar que* (w_n)*converge para* 0*. De fato, seja* $\alpha \geq 1$*,* *temos que*

$$w_n(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \psi\left(\frac{\alpha}{k}\right) = \alpha^{\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\left[\psi(\alpha) + \psi\left(\frac{\alpha}{2}\right) + ... + \psi\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right].$$

Note que

$$w_n(\alpha) \leq \alpha^{\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)\left[\psi(\alpha) + \psi\left(\frac{\alpha}{2}\right) + ... + \psi\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right],$$

pois $\frac{1}{n} \geq \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Daí, sendo* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, *temos que*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} = 0. \tag{3.23}$$

Agora, basta verificarmos se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi\left(\frac{\alpha}{k}\right) = \psi(\alpha) + \psi\left(\frac{\alpha}{2}\right) + ... + \psi\left(\frac{\alpha}{k}\right) + ...$$

é convergente. Como ψ *é convergente em* 0, *temos que, dado* $\varepsilon_n = \frac{\alpha}{2^n}$, *existe* $\delta_n > 0$ *tal que, sempre que* $x_n < \delta_n$, *obtemos* $\psi(x_n) < \varepsilon_n$. *Por outro lado, se considerarmos a sequência* (x_k) *com* $x_k = \frac{\alpha}{k}$, *podemos tomar* $k_0 > \frac{\alpha}{\varepsilon_n}$ *e isso nos dá* $x_k < \varepsilon_n$, *para todo* $k > k_0$. *Deste modo, tomando* $\delta_n = \varepsilon_n$ *para* $n > n_0$, *obtemos*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \psi\left(\frac{\alpha}{k}\right) &= \psi(\alpha) + \psi\left(\frac{\alpha}{2}\right) + ... + \psi\left(\frac{\alpha}{k_0}\right) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \psi\left(\frac{\alpha}{k}\right) \\
&< \psi(\alpha) + \psi\left(\frac{\alpha}{2}\right) + ... + \psi\left(\frac{\alpha}{k_0}\right) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\alpha}{2^k} \qquad (3.24) \\
&= \psi(\alpha) + \psi\left(\frac{\alpha}{2}\right) + ... + \psi\left(\frac{\alpha}{k_0}\right) + \frac{\alpha}{2^{k_0-1}} < +\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, de (3.23) e (3.24), a sequência (w_n) *converge para* 0.

Teorema 3.7

Sejam X *um espaço métrico completo, uma aplicação* $f : X \to X$ *e* $\Lambda \geq 0$, $\alpha \geq 1$ *e* $\beta \in [0, \alpha]$ *constantes fixadas. Dado* $x_0 \in X$, *se a desigualdade*

$$d(f(x), f(y)) \leq (1-\varepsilon)d(x,y) + \Lambda\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon)[1 + d(x,x_0) + d(y,x_0)]^{\beta} \tag{3.25}$$

for satisfeita para todo $\varepsilon \in [0,1]$ *e para todo* $x, y \in X$, *então* f *possui um único ponto fixo*

$\overline{x} \in X$. Além disso, sendo a sequência de iterações $x_n = f^n(x_0)$, tem-se

$$d(\overline{x}, f^n(x)) \leq Cw_n(\alpha)$$

para alguma constante positiva $C \leq \Lambda(1 + 4d(\overline{x}, x_0))^\beta$.

Demonstração:

Seja $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq x_0$ e consideremos as sequências

$$x_n = f^n(x_0) \text{ e } c_n = d(x_n, x_0).$$

Primeiramente, como f é uma contração fraca, temos que

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq d(x_n, x_{n-1}),$$

isto é,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}) \leq ... \leq d(x_1, x_0) = c_1.$$

Pela desigualdade triangular,

$$c_n = d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_0).$$

Logo, outra aplicação da desigualdade triangular mostra que

$$c_n \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_1) + d(x_1, x_0).$$

Daí, como $d(x_n, x_{n+1}) \leq c_1 = d(x_1, x_0)$, temos

$$c_n \leq d(f(x_n), f(x_0)) + 2c_1. \tag{3.26}$$

De (3.25), temos

$$\begin{aligned} d(f(x_n), f(x_0)) &\leq (1-\varepsilon)d(x_n, x_0) + \Lambda\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)[1 + d(x-n, x_0) + d(x_0, x_0)]^\beta \\ &= (1-\varepsilon)c_n + \Lambda\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)[1 + c_n + 0]^\beta \end{aligned} \tag{3.27}$$

De (3.26) e (3.27), temos que

$$c_n \leq (1-\varepsilon)c_n + \Lambda\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)[1 + c_n]^\beta + 2c_1$$

em que $\Lambda \geq 0$, $\alpha \geq 1$ e $\beta \leq \alpha$ são constantes arbitrárias. Daí, sendo $\beta \leq \alpha$, segue-se que

$$c_n \leq (1-\varepsilon)c_n + \Lambda\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)[1+c_n]^\alpha + 2c_1 \tag{3.28}$$

Afirmação 1: c_n é limitada.

Supondo que c_n não seja limitada e $\Lambda > 0$, podemos considerar uma subsequência (c_{n_i}) tal que

$$c_{n_i} \geq \frac{1}{\dfrac{a}{(\Lambda)^{\frac{1}{\alpha}}} - 1},$$

em que $a > (\Lambda)^{\frac{1}{\alpha}}$ é uma constante arbitrária (notemos que o termo à direita da última desigualdade é positivo). Da desigualdade anterior, obtemos

$$1 + c_{n_i} \leq \frac{ac_{n_i}}{(\Lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Daí, segue-se que

$$\begin{aligned} c_{n_i} &\leq (1-\varepsilon)c_{n_i} + \Lambda\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\left[\frac{ac_{n_i}}{(\Lambda)^{\frac{1}{\alpha}}}\right]^\alpha + 2c_1 \\ &= (1-\varepsilon)c_{n_i} + \Lambda\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)\frac{a^\alpha c_{n_i}^\alpha}{\Lambda} + 2c_1 \\ &= (1-\varepsilon)c_n + \varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)a^\alpha c_{n_i}^\alpha + 2c_1 \end{aligned}$$

Logo, podemos reescrever

$$\varepsilon c_{n_i} \leq a^\alpha\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)c_{n_i}^\alpha + 2c_1. \tag{3.29}$$

Como supusemos que (c_{n_i}) tende ao infinito, então é possível tomarmos $\varepsilon_i = \dfrac{1+2c_1}{c_{n_i}} < 1$. Substituindo ε_i em (3.29), obtemos que

$$1 + 2c_1 \leq a^\alpha(1+2c_1)^\alpha\psi(\varepsilon_i) + 2c_1.$$

Daí, segue-se que

$$1 \leq a^\alpha(1+2c_1)^\alpha\psi(\varepsilon_i)$$

o que corresponde a

$$0 < \frac{1}{a^\alpha(1+2c_1)^\alpha} \leq \psi(\varepsilon_i)$$

e, portanto,

$$0 < \frac{1}{a^\alpha(1+2c_1)^\alpha} \leq \lim_{i\to\infty}\psi(\varepsilon_i) = 0,$$

o que é um absurdo. Logo, c_n é limitada. É importante notar que caso $\Lambda = 0$ em (3.28), temos que

$$c_n \leq (1-\varepsilon)c_n + 2c_1,$$

isto é,

$$\varepsilon c_n \leq 2c_1.$$

Daí, neste caso, basta tomar $\varepsilon_i = \dfrac{4c_1}{c_{n_i}} < 1$ para n_i suficientemente grande e obtemos novamente uma contradição $4c_1 \leq 2c_1$, já que c_1 não é nulo (ou do contrário x_0 seria ponto fixo). Portanto, (c_n) é limitada e provamos o afirmado.

Antes de provarmos que (c_n) é de Cauchy, vejamos uma desigualdade que será necessária nesta prova. Consideremos, para cada n,

$$\varepsilon_n = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}. \tag{3.30}$$

Claramente ε_n tende a 0 quando n tende ao infinito.

Afirmação 2: $\varepsilon_n \leq \dfrac{\alpha}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função auxiliar $g_n : [1, \infty] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_n(\alpha) = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} - \frac{\alpha}{n+1}.$$

Temos que

$$g_n(1) = 1 - \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0 \tag{3.31}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, derivando tal função obtemos que

$$g_n'(\alpha) = -\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1}.$$

Como a função logarítima é crescente e $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = e$, então

$$-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} < \ln(e) = 1.$$

Deste modo, como $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \leq \dfrac{n}{n+1}$, obtemos

$$\begin{aligned} g_n'(\alpha) &\leq -\frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\left[\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} - 1\right] < 0. \end{aligned} \tag{3.32}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, de (3.31) e (3.32), temos que g_n é decrescente e assume valor máximo em $g_n(1) = 0$. Portanto $g_n(\alpha) \leq g_n(1) = 0$ para todo $\alpha \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, o que equivale a, $\varepsilon_n \leq \dfrac{\alpha}{n+1}$.

Afirmação 3: c_n é de Cauchy.

Sejam $m \in \mathbb{N}$ fixado e (p_n) uma sequência tal que

$$p_n = n^\alpha d(x_{n+m}, x_n).$$

Da definição da sequência (x_n), segue-se que

$$p_{n+1} = (n+1)^\alpha d(x_{n+1+m}, x_{n+1}) = (n+1)^\alpha d(f(x_{n+m}), f(x_n)).$$

Daí, por (3.25), teremos que

$$p_{n+1} \leq (n+1)^\alpha[(1-\varepsilon)d(x_{n+m}, x_n) + \Lambda\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)(1 + c_{n+m} + c_n)^\beta].$$

Como (c_n) é limitada, existe

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\Lambda(1 + c_{n+m} + c_n)^\beta\} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\Lambda(1 + 2c_n)^\beta\right\}$$

de modo que

$$p_{n+1} \leq (n+1)^\alpha[(1-\varepsilon)d(x_{n+m}, x_n) + C\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)].$$

Considerando ε_n como definido em (3.30), tal que $\varepsilon \leq \dfrac{\alpha}{n+1}$, e ψ, obtemos que

$$p_{n+1} \leq (n+1)^\alpha\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha d(x_{n+m}, x_n) + C\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^\alpha \psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)\right],$$

o que equivale a

$$\begin{aligned} p_{n+1} &\leq n^\alpha d(x_{n+m}, x_n) + C\alpha^\alpha\psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right) \\ &= p_n + C\alpha^\alpha\psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right) \\ &\leq p_{n-1} + C\alpha^\alpha\psi\left(\frac{\alpha}{n}\right) + C\alpha^\alpha\psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Logo, após n passos, obtemos que

$$p_n \leq p_0 + C\alpha^\alpha\left[\psi(\alpha) + \psi\left(\frac{\alpha}{2}\right) + ... + \psi\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right] = C\alpha^\alpha \sum_{k=1}^{n} \psi\left(\frac{\alpha}{k}\right)$$

uma vez que $p_0 = 0$. Dividindo ambos os lados por n^α temos

$$d(x_{n+m}, x_n) = \frac{p_n}{n^\alpha} \leq C\left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha \sum_{k=1}^{n} \psi\left(\frac{\alpha}{k}\right) = Cw_n(\alpha). \tag{3.33}$$

Note então que, como $w_n(\alpha)$ tende a 0 para n suficientemente grande, x_n é uma sequência de Cauchy.

Pelo fato de $(x_n) \subset X$ e X ser completo, temos $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x} \in X$. Daí,

$$d(\overline{x}, x_n) = \lim_{m\to\infty} d(x_{n+m}, x_n) \leq Cw_n(\alpha)$$

em que $x_n = f(x_{n-1})$. Então, pela continuidade de f, segue-se que

$$d(\overline{x}, f(\overline{x})) = \lim_{n\to\infty} d(\overline{x}, f(x_{n-1})) \leq \lim_{n\to\infty} Cw_n(\alpha) = 0$$

e $\overline{x}$ é ponto fixo de f.

Afirmação 4: $\overline{x}$ é o único ponto fixo.

Suponha que $y \in X$ seja um outro ponto fixo de f. Temos que

$$d(f(\overline{x}), f(y))) \leq (1-\varepsilon)d(\overline{x}, y) + \Lambda\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)[1 + d(x_n, x_0) + d(y, x_0)]^\beta.$$

Note então que teremos

$$d(\overline{x}, y) \leq (1-\varepsilon)d(\overline{x}, y) + \Lambda\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)[1 + d(x_n, x_0) + d(y, x_0)]^\beta,$$

ou seja,

$$d(\overline{x}, y) \leq \Lambda\varepsilon^\alpha\psi(\varepsilon)[1 + d(x_n, x_0) + d(y, x_0)]^\beta$$

para todo $\varepsilon \in [0, 1]$. Em particular, como $\psi(0) = 0$, para $\varepsilon = 0$ temos que

$$d(\overline{x}, y) \leq \Lambda\ 0^\alpha\psi(0)[1 + d(x_n, x_0) + d(y, x_0)]^\beta = 0.$$

Assim $d(\overline{x}, y) = 0$, isto é, $\overline{x} = y$. Portanto $\overline{x} \in X$ é o único ponto fixo de f.

Por fim, como f é uma contração fraca e $\overline{x}$ é seu ponto fixo, temos que

$$d(\overline{x}, x_n) = d(f(\overline{x}), f(x_{n-1})) \leq d(\overline{x}, x_{n-1}) \leq ... \leq d(\overline{x}, x_0).$$

Daí, pela desigualdade triangular, temos que

$$c_n = d(x_n, x_0) \leq d(x_n, \overline{x}) + d(\overline{x}, x_0) \leq d(x_0, \overline{x}) + d(\overline{x}, x_0) = 2d(\overline{x}, x_0).$$

Portanto $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda(1+2c_n)^\beta \leq \Lambda(1+4d(\overline{x}, x_0))^\beta$. $\square$

Já vimos, na seção anterior, que o resulto de Boyd-Wong aprimora o resultado de Rakotch. Seguindo com as comparações dos resultados, veremos, ainda nesta seção, um teorema que mostra que ambos os resultados são equivalentes quando X for limitado. Antes disso, apresentaremos uma observação e um lema que serão importantes para a demonstração do teorema.

Observação 3.7 *Podemos supor, sem perda de generalidade, que diam*$(X) \leq 1$. *De fato, seja X um espaço métrico limitado com a métrica $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$. Temos que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathrm{diam(X) = \sup\{d_1(x, y) : x, y \in X\} \leq k.}$$

Considerando a métrica em X , basta construirmos a aplicação $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que

$$d_2(x, y) \leq \frac{d_1(x, y)}{k}$$

para todo $x, y \in X$. Portanto, teremos que

$$\sup\{d_2(x, y) : x, y \in X\} \leq \sup\left\{\frac{d_1(x, y)}{k} : x, y \in X\right\} \leq \frac{k}{k} = 1$$

e, portanto diam$(X) \leq 1$ para a métrica d_2. É importante acrescentar que se uma sequência $(x_n) \subset X$ for de Cauchy para a métrica d_1, então (x_n) também é de Cauchy para a métrica d_2.

A partir da observação anterior, demonstraremos que os resultados de Boyd-Wong e de Vittorino Pata são equivalentes, supondo que diam$(X) \leq 1$.

Observamos que o Teorema 3.5 tem como hipótese a existência de uma função φ semicontínua superiormente à direita em $\overline{P}$. Na demonstração da equivalência, consideraremos a função

$$\sigma(r) = \sup_{s\leq r} \varphi(s). \tag{3.34}$$

Assim, temos que $\sigma(r) < r$, pois

$$\sigma(r) = \sup_{s\leq r} \varphi(s) < \sup_{s\leq r} s \leq r.$$

Além disso, σ é não decrescente e semicontínua à direita em $\overline{P}$ (definido em (3.14)), pois

$$\lim_{r\to r_0^+} \sigma(r) = \lim_{r\to r_0^+} \sup_{s\leq r} \varphi(s) = \sup_{s\leq r_0} \varphi(s) = \sigma(r_0).$$

A seguir veremos um lema que garante que conseguimos obter uma função contínua e crescente a partir de uma não decrescente e semicontínua à direita.

Lema 3.3

Seja $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ *uma função não decrescente e contínua à direita, tal que* $\sigma(t) < t$ *para todo* $t > 0$. *Então existe uma função contínua crescente* $\phi : [0,1] \to [0,1]$ *tal que*

$$\sigma(t) \leq \phi(t) < t$$

para todo $t > 0$.

Demonstração:

Afirmação 1: $\inf\limits_{t \in [a,b]} [t - \sigma(t)] > 0$ para todo $[a,b] \subset (0,1]$.

De fato, supondo que o contrário ocorra, segue-se que existe uma sequência $\{t_n\} \subset [a,b]$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} [t_n - \sigma(t_n)] = 0. \tag{3.35}$$

Porém, como o intervalo $[a,b]$ é compacto, existe $t \in [a,b]$ tal que

$$\lim_{i \to \infty} t_{n_i} = t$$

em que (t_{n_i}) é uma subsequência de (t_n). Note que gostaríamos de utilizar a continuidade à direita para chegar a uma contradição. Afirmamos que os termos da subsequência (t_{n_i}) não convergem para t pela direita. De fato, caso contrário, teríamos, por (3.35) e pela continuidade à direita de σ,

$$0 = \lim_{i \to \infty} (t_{n_i} - \sigma(t_{n_i})) = t - \sigma(t),$$

o que é uma contradição, pois $\sigma(t) < t$ para todo $t > 0$. Logo, a subsequência (t_{n_i}) converge para t pela esquerda. Daí, podemos tomar os elementos de (t_{n_i}) tais que $t_{n_i} < t$. Definindo $\varepsilon = t - \sigma(t) > 0$ e considerando n_i suficientemente grande tal que

$$t - t_{n_i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$t_{n_i} - \sigma(t_{n_i}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

obtemos que

$$\sigma(t) = t - \varepsilon = (t - t_{n_i}) + (t_{n_i} - \sigma(t_{n_i})) + \sigma(t_{n_i}) - \varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \sigma(t_{n_i}) - \varepsilon = \sigma(t_{n_i}),$$

o que é uma contradição, pois σ é crescente e $t_{n_i} < t$. Portanto, temos que

$$\inf_{t\in[a,b]}[t-\sigma(t)] > 0.$$

Afirmação 2: É possível construir uma função crescente $\phi : [0,1] \to [0,1]$ tal que $\sigma(t) \leq \phi(t) < t$.

Definimos $t_k = \dfrac{1}{2^k}$ para $k \in \mathbb{N}$ e, conforme feito anteriormente, denotamos

$$\varepsilon_k = \inf_{t\in[t_{k+1},t_k]}[t-\sigma(t)].$$

Seja $I_k = (t_{k+1}, t_k]$ e $w_{k+1} = \min\{w_k, \varepsilon_{k+1}\}$, com $\omega_0 = \varepsilon_0 \leq t_1$. Daí, temos que

$$\omega_1 = \min\{\omega_0, \varepsilon_1\} = \min\left\{\omega_0, \inf_{t\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}[t-\sigma(t)]\right\} \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\} \leq \frac{1}{4} = t_2.$$

Por indução, supondo $\omega_{n-1} \leq t_n$, segue-se que

$$\omega_n = \min\{\omega_{n-1}, \varepsilon_n\} = \min\left\{\omega_{n-1}, \inf_{t\in[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}]}[t-\sigma(t)]\right\} \leq \min\left\{\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}\right\} \leq \frac{1}{2^{n+1}} = t_{n+1}.$$

Logo $\omega_k \leq t_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Deste modo, seja $\phi_0 : [0,1] \to [0,1]$ tal que

$$\phi_0(t) = t - \omega_k$$

para todo $t \in I_k$. Neste caso, $\phi_0(t) \geq \sigma(t)$ para todo $t \in I_0$. De fato, temos que

$$\phi_0(t) = t - \inf_{s\in I_0}\{s-\sigma(s)\} = t + \sup_{s\in I_0}\{\sigma(s)-s\} > \sigma(t).$$

Como podemos visualizar na figura a seguir:

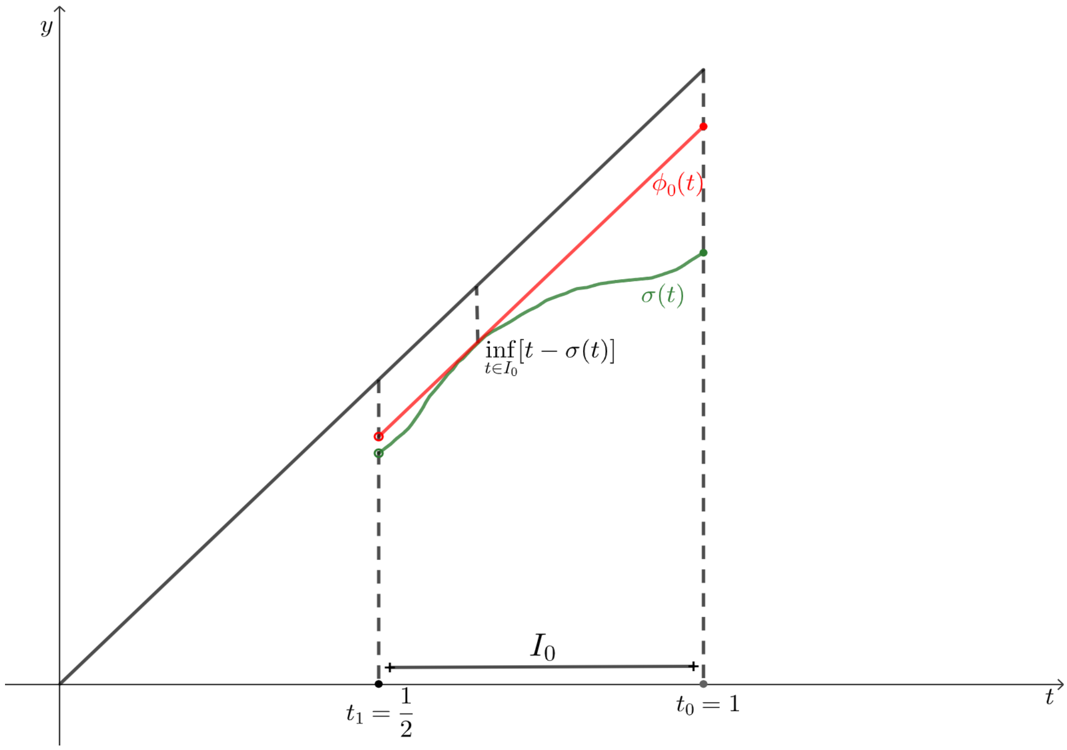

Figura 3.6: Na figura, é possível observar a construção da função ϕ_0 no intervalo I_0.

Afirmação 3: $\phi_0(t) \geq \sigma(t)$ para todo $t \in (0, 1]$.

Por indução, assumiremos que ϕ_0 definida em todos os intervalos $I_0, I_1, ..., I_n$ é tal que $\phi_0(t) \geq \sigma(t)$. Então, para todo $t \in I_{n+1}$, segue-se que

$$\phi_0(t) = t - \omega_{n+1} \geq t - \omega_n \geq \sigma(t).$$

Portanto, $\phi_0(t) \geq \sigma(t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, com

$$\phi_0(t) = t - \omega_n$$

para todo $t \in I_k$ e $\omega_n = \min\{\omega_{n-1}, \varepsilon_n\}$.

Por fim, definimos $\phi_0(0) = 0$. Note que ϕ_0 é contínua em cada intervalo I_k, mas pode ter pontos de descontinuidade entre os intervalos. Mais que isso, pode não ser crescente na passagem de um intervalo a outro. Por exemplo, podemos ter a situação da figura a seguir:

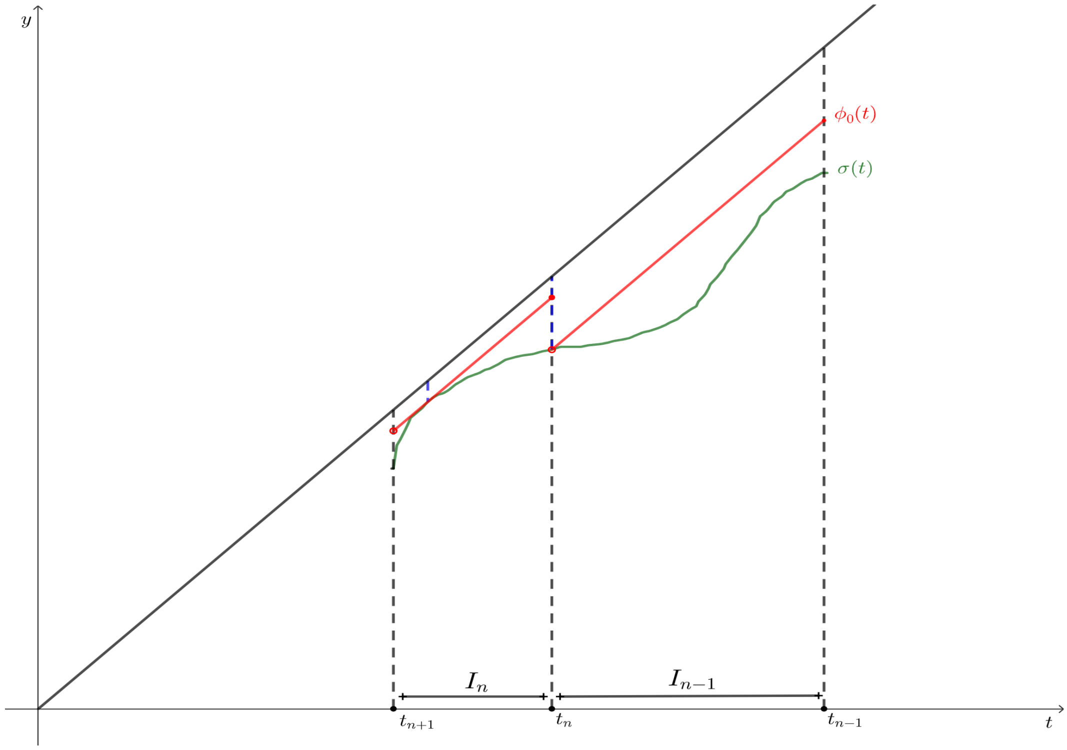

Figura 3.7: A descontinuidade ocorre em t_n, isto é, na passagem da função do intervalo I_n para o I_{n-1}.

Para evitar esses pontos de descontinuidade em que a função não é crescente, podemos considerar o segmento, $q_n(t)$, que une os pontos $(t_n, \phi_0(t_n))$ e $(t_{n-1}, \phi_0(t_{n-1}))$.

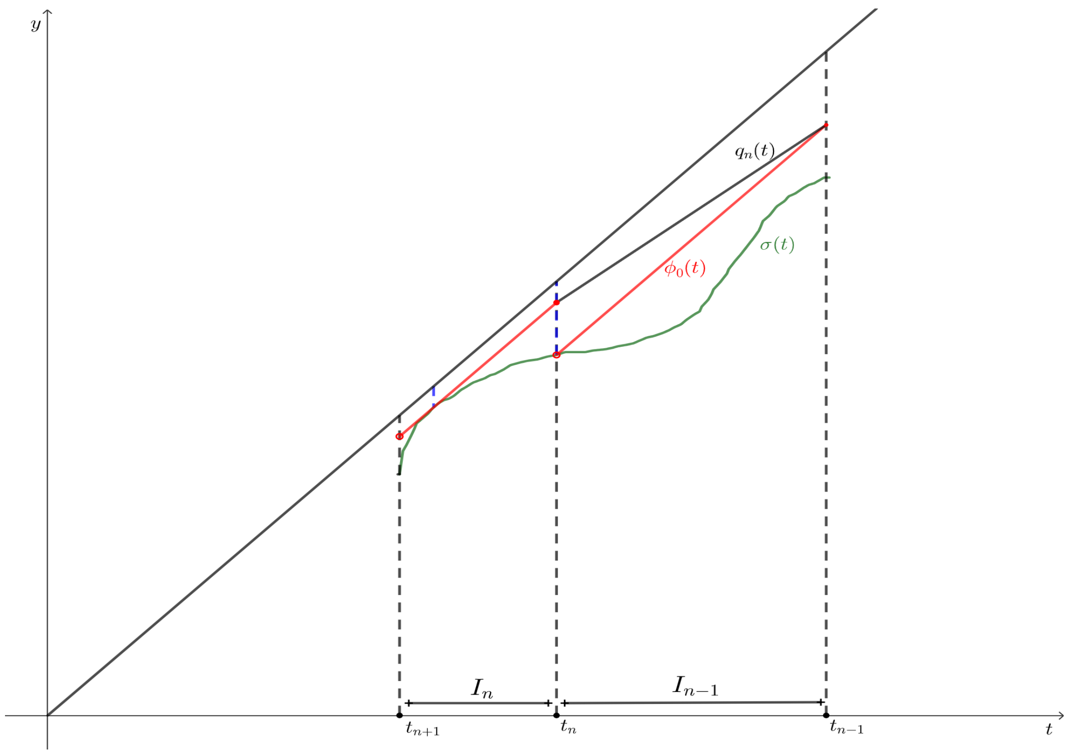

Figura 3.8: Na figura, podemos observar que o segmento q_n liga a função ϕ_0 do intervalo I_n de maneira contínua e crescente.

Deste modo, podemos definir $\phi : [0,1] \to [0,1]$ como

$$\phi(t) = \begin{cases} q_n(t), & t_n \text{ é um ponto de descontinuidade,} \\ \phi_0(t), & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Além disso, temos que $\phi_0(t_n) < t_n$ e

$$\phi_0(t_{n-1}) = t_{n-1} - \omega_{n-1} \geq t_{n-1} - t_n = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} = t_n,$$

então $q_n(t)$ é crescente para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a função ϕ é crescente e contínua em $[0,1]$. $\square$

Vejamos a seguir o gráfico de ϕ considerando t_n um ponto de descontinuidade de ϕ_0.

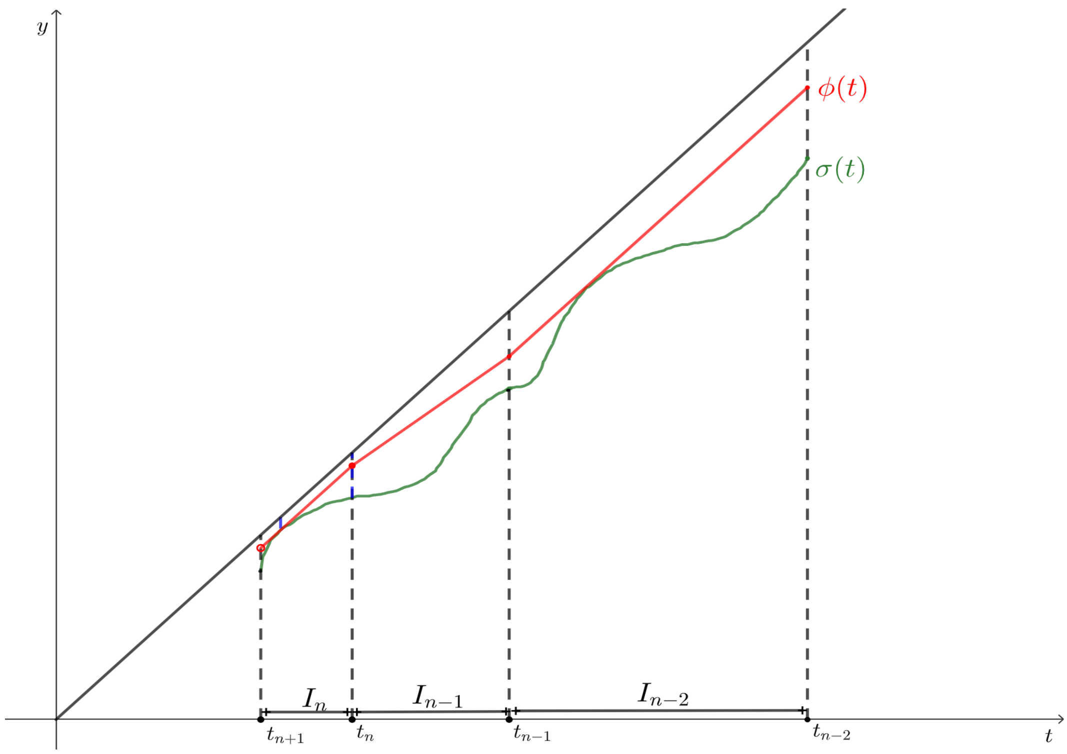

Figura 3.9: A figura mostra o gráfico da função ϕ nos intervalos I_n, I_{n-1} e I_{n-2}.

A partir do lema anterior, podemos demonstrar o teorema a seguir.

Teorema 3.8 *Se X for limitado, então os Teoremas 3.7 e 3.5 são equivalentes.*

Demonstração:

Como X é limitado, temos que existe uma constante $\overline{K}$ tal que $d(x,y) \leq \overline{K}$ para todo

$x, y \in X$. Considerando (3.25), podemos reescrever

$$d(f(x), f(y)) \leq (1-\varepsilon)d(x,y) + K\varepsilon^{\alpha}\psi(\varepsilon). \tag{3.36}$$

para todo $x, y \in X$ para algum $K \geq 0$. Como ψ é crescente, podemos tomar $\nu > 0$ suficientemente pequeno tal que ψ é bijetora sobre o intervalo $[0, \nu r]$, com $r = d(x,y)$. Deste modo, podemos definir $\phi(r) = \psi^{-1}(\nu r)$. Daí, escolhendo $\varepsilon = \phi(r)$ em (3.36), temos

$$d(f(x), f(y)) \leq [1-\phi(r)]r + K[\phi(r)]^{\alpha}\psi(\phi(r)),$$

ou seja,

$$d(f(x), f(y)) \leq r - r\phi(r)[1 - \nu K[\phi(r)]^{\alpha-1}]. \tag{3.37}$$

Como $0 \leq \phi(r) < 1$, temos que $r\phi(r) < r$ para todo $r > 0$. Além isso, temos que ϕ é contínua, pela continuidade de ψ em 0. Portanto, se definirmos $\sigma(r) := r - r\phi(r)$, isto é, pela parte direita de (3.37) para $K = 0$, obtemos uma função σ que corresponde a função do Teorema 3.5, pois $\sigma(r) = r - r\phi(r) < r$ e σ é contínua.

Reciprocamente, seja φ satisfazendo as condições do Teorema 3.5. Podemos tomar σ como em (3.34), em que σ é contínua à direita, não decrescente e tal que $\sigma(r) < r$ para $r \in [0,1]$ e

$$d(f(x), f(y)) \leq \sigma(d(x,y)), \tag{3.38}$$

Conforme observado no Lema 3.3, podemos assumir σ contínua (por simplicidade de notação, manteremos a designação σ para tal função). A partir disso, podemos construir $\mu : [0,1] \to [0, g(1)]$ dada por

$$\mu(r) = \begin{cases} r \min\limits_{x \in [r,1]} g(x), & se\ r \in (0,1] \\ 0, & se\ r = 0 \end{cases}$$

em que $g(x) = 1 - \dfrac{\sigma(x)}{x}$ com $x > 0$. Daí, como $r \in [0,1]$, temos que

$$\mu(r) \leq 1 - \frac{\sigma(r)}{r}$$

para todo $r \in [0,1]$. Sejam $x, y \in X$ distintos e $d(x,y) = r$, por (3.38), obtemos

$$d(f(x), f(y)) \leq \sigma(r) \leq r - r\mu(r) < r.$$

Assim, se $\mu(r) \geq \varepsilon$, temos que

$$d(f(x), f(y)) \leq (1-\mu(r))r \leq (1-\varepsilon)r < (1-\varepsilon)r + \varepsilon \tag{3.39}$$

mas, caso $\mu(r) < \varepsilon$, temos

$$d(f(x), f(y)) < 1 = (1-\varepsilon)r + \varepsilon r < (1-\varepsilon)r + \varepsilon\mu^{-1}(\varepsilon). \tag{3.40}$$

Note que μ foi construída bijetiva. Logo possui inversa, $\psi := \mu^{-1}$. Temos μ crescente, assumindo seu máximo em $\mu(1)$. Como $\psi(\mu(1)) = \mu^{-1}(\mu(1)) = 1$, fazemos uma extensão constante igual a 1, caso necessário. Então

$$\psi(\varepsilon) = \begin{cases} \mu^{-1}(\varepsilon), \ \textit{se } \varepsilon \leq \mu(1) \\ 1, \ \textit{se } \mu(1) > \varepsilon. \end{cases}$$

Assim, de (3.39) e (3.40), segue-se que

$$d(f(x), f(y)) \leq (1-\varepsilon)d(x, y) + \varepsilon\psi(\varepsilon),$$

ou seja, obtemos a inequação (3.25) para $\Lambda = 1, \ \alpha = 1 \ e \ \beta = 0$. □

Observação 3.8 *Mesmo que X não seja limitado, a volta do Teorema anterior ainda é válida. Seja $z \in X$ tal que $r = d(f(z), z)$ para algum $r > 0$ e consideremos a bola*

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

Seja σ a função dada por (3.34). Consideremos, para cada $r > 0$ a sequência de iterações de σ, $(\sigma^n(r))$. Note que

$$d(f^n(z), f^{n-1}(z)) \leq \sigma(d(f^{n-1}(z), f^{n-2}(z))) < d(f^{n-1}(z), f^{n-1}(z))$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, como σ é crescente, temos que $(\sigma^n(r))$ é decrescente e $(\sigma^n(r)) \subset [0, d(f(z), z)]$. Mais que isso, $(\sigma^n(r))$ é de Cauchy, pois (x_n) com $x_n = f^n(z)$ é de Cauchy. Logo, como $[0, d(f(z), z)]$ é completo, a sequência $(\sigma^n(r))$ é convergente.

Afirmação 1: *$(\sigma^n(r))$ converge para 0.*

Supondo que não convirja para 0, temos que existe $c > 0$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma^n(r) = c$. Daí, sendo σ semicontínua à direita, teremos

$$c = \lim_{n\to\infty} \sigma^{n+1}(r) = \lim_{n\to\infty} \sigma(\sigma^n(r)) = \sigma(\lim_{n\to\infty} \sigma^n(r)) = \sigma(c),$$

o que é uma contradição. Portanto, $(\sigma^n(r))$ *converge para* 0.

Afirmação 2: $f(B(x_0, 1)) \subset B(x_0, 1)$.

Como $(\sigma^n(r))$ *converge para* 0, *podemos tomar* $x_0 = f^n(z)$ *com suficientemente grande tal que*

$$d(f(x_0), x_0) \leq 1 - \sigma(1).$$

Dado $f(y) \in f(B(x_0, 1))$, *isto é,* $d(f(y), f(x_0)) \leq \sigma(d(x_0, y)) < \sigma(1)$. *Pela desigualdade triangular, segue-se que*

$$d(f(y), x_0) \leq d(f(y), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) < (1 - \sigma(1)) + \sigma(1) = 1.$$

Logo $f(y) \in B(x_0, 1)$. *Portanto* $f(B(x_0, 1)) \subset B(x_0, 1)$.

Deste modo, concluímos que para todo $z \in X$ *conseguimos obter* $x \in B(x_0, 1)$ *tal que* $x = f^n(x)$ *para* n *suficientemente grande, ou seja, a partir de um determinado* $n_0 \in \mathbb{R}$ *as imagens de* f *vão pertencer a bola* $B(x_0, 1)$. *Portanto, mesmo que* X *não seja limitado, em algum momento as imagens vão estar limitadas e segue a volta do teorema anterior.*

As observações 3.7 e 3.8 podem ser vistas como uma observação e um corolário, respectivamente, em [8].

Vejamos a seguir um exemplo em que o espaço métrico é ilimitado e a equivalência não ocorre.

Exemplo 3.6 *A função* $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ *dada por*

$$f(x) = -2 + x - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x}$$

possui um único ponto fixo $\overline{x} = 1$.

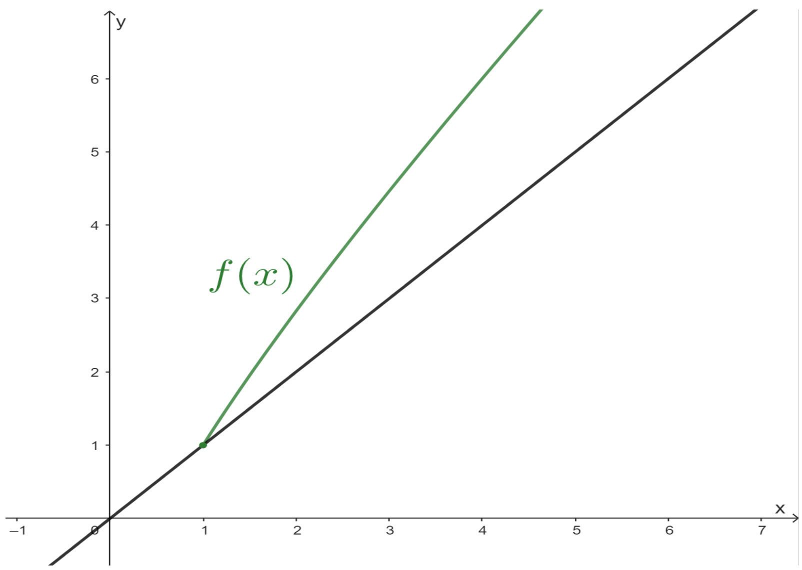

Figura 3.10: Na figura, podemos observar o único ponto fixo, $x = 1$, da função f.

Porém, f não é uma contração na vizinhança de $x = 1$ e para valores de x arbitrariamente grandes. De fato, temos

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}},$$

com $\lim_{x\to 1} f'(x) = 1$ e $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 1$. Além disso, dado $r > 0$, temos que

$$|f(x+r) - f(x)| = |-2 + x + r - 2\sqrt{x+r} + 4\sqrt[4]{x+r} + 2 - x + 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x}|.$$

Simplificando, obtemos que

$$|f(x+r) - f(x)| = |r - F(x,r)|,$$

sendo que

$$F(x,r) := 2[\sqrt{x+r} - \sqrt{x}] - 4[\sqrt[4]{x+r} - \sqrt[4]{x}].$$

Afirmação 1: *$F(x,r)$ é positiva para todo $x \geq 1$ e $r > 0$.*

De fato, temos que

$$\begin{aligned} F(x,r) &= 2[\sqrt{x+r} - \sqrt{x}] - 4[\sqrt[4]{x+r} - \sqrt[4]{x}] \\ &= 2[\sqrt{x+r} - 2\sqrt[4]{x+r}] - 2(\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x}) \\ &= 2[\sqrt{x+r} - 2\sqrt[4]{x+r} + 1] - 2 - 2[\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x} + 1] + 2 \\ &= 2[(\sqrt[4]{x+r} - 1)^2 - (\sqrt[4]{x} - 1)^2] \geq 0, \end{aligned}$$

pois $\sqrt[4]{x+r} > \sqrt[4]{x} \geq 1$ para $x \geq 1$ e $r > 0$.

Afirmação 2: *$\lim_{x\to+\infty} |r - F(x,r)| = r$.*

Basta mostrarmos que $\lim_{x\to+\infty} F(x,r) = 0$. Temos que

$$\lim_{x\to\infty} F(x,r) = \lim_{x\to\infty} 2[\sqrt{x+r} - \sqrt{x}] - 4[\sqrt[4]{x+r} - \sqrt[4]{x}].$$

Como $x + r > 1$, temos que $\sqrt[4]{x+r} \geq \sqrt[4]{x}$. Logo, segue-se que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}(2\sqrt{x+r} - 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x+r} + 4\sqrt[4]{x}) &\leq \lim_{x\to+\infty}(2\sqrt{x+r} - 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} - 4\sqrt[4]{x}) \\ &= \lim_{x\to+\infty} 2(\sqrt{x+r} - \sqrt{x}) \\ &= \lim_{x\to+\infty} 2\frac{(\sqrt{x+r} - \sqrt{x})(\sqrt{x+r} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+r} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2r}{\sqrt{x+r} + \sqrt{x}} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} F(x,r) \leq 0,$$

isto é, $\lim_{x\to+\infty} F(x,r) = 0.$

Deste modo, note que se assumirmos que exista σ *que satisfaça as hipóteses do Teorema 3.5 teremos que*

$$\sigma(r) \geq |f(x+r) - f(x)| = |r - F(x,r)|$$

e, para x *suficientemente grande, obtemos*

$$r > \sigma(r) \geq \lim_{x\to\infty} [r - F(x,r)] > r,$$

o que é uma contradição. Logo não podemos aplicar o Teorema 3.5. Porém, podemos aplicar o Teorema 3.7, o que mostraremos em sequência.

Afirmação 3: $F(x,r) - \varepsilon r + \varepsilon^2 (2x+r)^{\frac{3}{2}} \geq 0.$

Sejam $r > 0$ *fixado,* $\varepsilon \in [0,1]$ *e as função auxiliar* $g_r : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$g_r(x) = F(x,r) - \varepsilon r + \varepsilon^2 (2x+r)^{\frac{3}{2}}.$$

Por um lado, temos que

$$\begin{aligned} g_r'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+r}} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{(x+r)^{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} + 3\varepsilon^2\sqrt{2x+r} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left(1+\frac{r}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right) + \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}\left(1 - \left(1+\frac{r}{x}\right)^{-\frac{3}{4}}\right) + 3\varepsilon^2\sqrt{2x+r}. \end{aligned}$$

Daí, como $\sqrt{x} \leq (x)^{\frac{3}{4}}$ *para* $x \geq 1$*, então*

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}.$$

Logo, sendo $3\varepsilon^2\sqrt{2x+r} \geq 0$*, segue-se que*

$$g_r'(x) \geq \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}\left(\left(1+\frac{r}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1+\frac{r}{x}\right)^{-\frac{3}{4}}\right) \geq 0,$$

isto é, g_r *é crescente. Resta mostrarmos que* $g_r(1) \geq 0$ *para obtermos que* $g_r(x) \geq 0$ *para todo* $x \geq 1$*. Para isso, consideremos, para cada* $r > 0$*, a função auxiliar* $h_r : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$h_r(\varepsilon) = -\varepsilon r + \varepsilon^2 (2+r)^{\frac{3}{2}}.$$

Temos que h_r *atinge seu valor mínimo em* $\varepsilon_r = \frac{r}{2(2+r)^{\frac{3}{2}}}$, *pois*

$$h_r'\left(\frac{r}{2(2+r)^{\frac{3}{2}}}\right) = -r + 2 \cdot \frac{r}{2(2+r)^{\frac{3}{2}}}(2+r)^{\frac{3}{2}} = 0$$

e

$$h_r''(\varepsilon) = 2(2+r)^{\frac{3}{2}} > 0.$$

Além disso, $h_r(0) = 0$, $h_r(1) = -r + (2+r)^{\frac{3}{2}} \geq 0$ *para cada* $r > 0$. *Observe que*

$$g_r(1) = F(1,r) + h_r(\varepsilon).$$

Daí, obtemos que

$$g_r(1) = 2[\sqrt{1+r} - 1] - 4[\sqrt[4]{1+r} - 1] - \varepsilon r + \varepsilon^2 (2+r)^{\frac{3}{2}}.$$

Note que $h_r(\varepsilon) \geq h_r(\varepsilon_r)$, *para* $x = 1$. *Logo*

$$\begin{aligned} g_r(1) &\geq 2[\sqrt{1+r} - 1] - 4[\sqrt[4]{1+r} - 1] - \frac{r}{2(2+r)^{\frac{3}{2}}} \cdot r + \left(\frac{r}{2(2+r)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 (2+r)^{\frac{3}{2}} \\ &= 2[\sqrt{1+r} - 1] - 4[\sqrt[4]{1+r} - 1] + \frac{r^2}{2(2+r)^{\frac{3}{2}}}\left[-1 + \frac{(2+r)^{\frac{3}{2}}}{2(2+r)^{\frac{3}{2}}}\right] \\ &= 2[\sqrt{1+r} - 1] - 4[\sqrt[4]{1+r} - 1] - \frac{r^2}{4(2+r)^{\frac{3}{2}}} \geq 0, \end{aligned}$$

o que pode ser visto na figura a seguir.

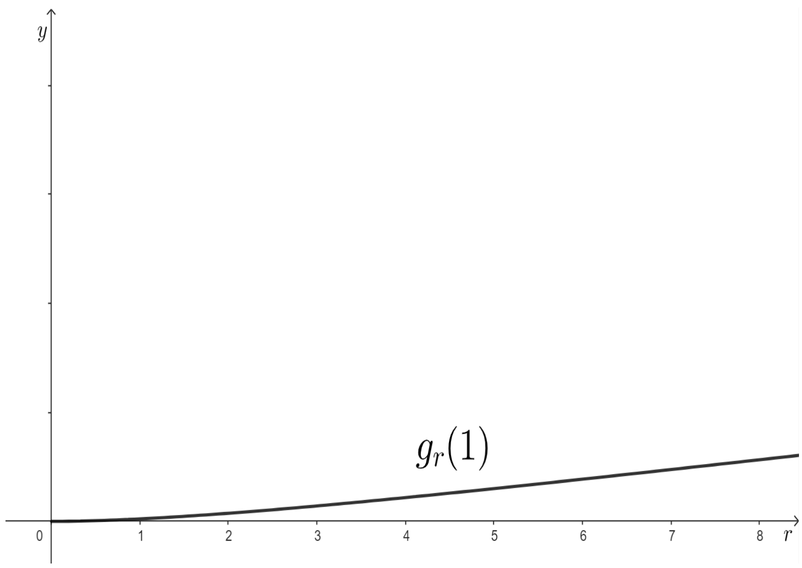

Figura 3.11: A figura representa os valores de $g_r(1)$ em função de r.

Como g_r *é crescente e* $x \geq 1$*, temos que* $g_r(x) \geq g_r(1)$*, isto é,*

$$F(x,r) - \varepsilon r + \varepsilon^2(2x+r)^{\frac{3}{2}} \geq g_r(1) \geq 0.$$

Portanto, para todo $\varepsilon \in [0,1]$*, temos que*

$$|f(x+r)-f(x)| = r - F(x,r) \leq (1-\varepsilon)r + \varepsilon^2(2x+r)^{\frac{3}{2}} \leq (1-\varepsilon)r + \varepsilon^2(2x+r+1)^{\frac{3}{2}}, \quad (3.41)$$

ou seja, f *satisfaz (3.25) com* $\Lambda = 1$*,* $\alpha = \frac{3}{2}$*,* $\beta = \frac{3}{2}$ *e* $\psi(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$*.*

É importante ressaltar que $[1, +\infty]$ é um espaço métrico completo. Portanto, no exemplo anterior, é possível observar que existem casos em que o Teorema 3.7, que vimos na presente seção, vale, mas o Teorema 3.5 não vale. Deste modo, por serem equivalentes quando o domínio é limitado e pela Observação 3.8, a contração fraca de Vittorino Pata apresenta hipóteses mais fracas em relação a de Boyd-Wong.

No próximo capítulo, ainda veremos que, no compacto, essas diferentes noções de contração fraca são equivalentes à "original", vista na Definição 2.5.

Capítulo 4

Contrações fracas em Espaços Métricos Compactos e suas Equivalências

Neste capítulo, serão vistas as equivalências dos três diferentes casos de contração fraca. Teremos como base o resultado apresentado por V. Pata e L. Fornari em [5]. Vale lembrar que já apresentamos uma equivalência em Espaço Métrico limitado no capítulo anterior. Deste modo, considerando X um espaço métrico completo e limitado (com $\operatorname{diam}(X) \leq 1$) e uma aplicação $f : X \to X$, temos as seguintes noções de contração:

(i) f contração fraca usual:

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \ \forall x \neq y \in X.$$

(ii) f contração de Boyd-Wong:

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y)) \ \forall x, y \in X,$$

em que $\varphi : [0, 1] \to [0, \infty)$ é contínua e $\varphi(t) < t$ para $t > 0$ (trocamos a condição de ser semicontínua superiormente à direita por ser contínua, pois, durante a demonstração da equivalência, conseguimos garantir a continuidade de φ).

(iii) f ε-contração:

$$d(f(x), f(y)) \leq (1 - \varepsilon)d(x, y) + \varepsilon\psi(\varepsilon) \ \forall x, y \in X, \ \varepsilon \in [0, 1]$$

para $\psi : [0, 1] \to [0, \infty)$ contínua e crescente, com $\psi(0) = 0$.

Note que se (ii) ou (iii) ocorrem, então (i) também ocorre.

De fato, se vale (ii), então

$$d(f(x), f(y)) \leq \psi(d(x, y)) < d(x, y)$$

e, tomando $\varepsilon \to 0$, em (iii), segue-se que

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$$

para todo $x \neq y \in X$. Veremos a seguir que conseguimos garantir a existência de um único ponto fixo para essas diferentes noções de contração, como já visto nos Teoremas 3.5 e 3.7.

Teorema 4.1

Seja X um espaço métrico completo. Se tivermos uma aplicação $f : X \to X$ satisfazendo (ii) *ou* (iii)*, então f possui um único ponto fixo, o qual pode ser obtido através da sequência de iterações $x_n = f(x_{n-1})$.*

Demonstração:

Se (ii) for válida, segue o resultado do Teorema 3.5. Já para (iii), segue o do Teorema 3.7. □

Observação 4.1 *Além disso, segue o mesmo resultado do Teorema 4.1 para* (i) *com X um espaço métrico compacto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Edelstein, que enunciaremos novamente a seguir. Sua demonstração pode ser vista em [1].*

Teorema 4.2 (Teorema do Ponto Fixo de Edelstein)

Seja X um espaço métrico compacto. Se $f : X \to X$ é uma contração fraca, isto é, vale

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$ com $x \neq y$, então f possui um único ponto fixo.

Isso nos motiva a comparar as diferentes noções de contração fraca em espaços métricos compactos.

Deste modo, a seguir mostraremos que, para um caso particular de espaço métrico, isto é, no caso em que o espaço métrico for compacto, essas três noções coincidem. Para isso, faremos uso do Lema 3.3 durante a demonstração.

Teorema 4.3 *Se X é um espaço métrico compacto, então (*i), (ii) e (iii) são equivalentes.

Demonstração:

Já mostramos que (ii) é euivalente a (iii). De fato, provamos que a equivalência é válida em espaços limitados. Mas, pelo Teorema 2.2, se o espaço X é compacto, então é limitado. Portanto segue a equivalência para espaços métricos compactos.

As demonstrações das implicações de (ii) em (i) e (iii) em (i) são triviais e foram comentadas neste capítulo.

Basta mostrarmos que se temos (i), então temos (ii).

Para isso, definimos uma função não decrescente $\sigma : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por

$$\sigma(t) = \sup_{d(x,y)\leq t} d(f(x), f(y)).$$

Afirmação 1: Para cada $t > 0$, existem $x, y \in X$ tais que

$$d(x, y) \leq t \; e \; \sigma(t) = d(f(x), f(y)).$$

De fato, pela definição da função σ, isto é, do sup das distâncias das imagens, temos que existem sequências $(x_n), (y_n) \subset X$, com $d(x_n, y_n) \leq t$, de modo que

$$\lim_{n\to+\infty} d(f(x_n), f(y_n)) = \sigma(t).$$

Daí, por X ser compacto, (x_n) e (y_n) admitem subsequência convergente, ou seja,

$$\lim_{i\to+\infty} x_{n_i} = x \in X \; e \; \lim_{i\to+\infty} y_{n_i} = y \in X.$$

Considerando tais sequências, temos que

$$\sigma(t) = d(f(x), f(y)),$$

pois tanto f, quanto a aplicação d (distância), são contínuas (a demonstração de que d é contínua pode ser vista em [?]). Portanto, para cada $t > 0$ fixado, podemos assumir $\sigma(t) = d(f(x), f(y))$ com $x, y \in X$.

Afirmação 2: $\sigma(t) < t$ para todo $t > 0$.

Pela afirmação anterior, podemos tomar $\sigma(t) = d(f(x), f(y))$ para $x, y \in X$. Daí, como f é contração fraca, segue-se que

$$\sigma(t) = d(f(x), f(y)) < d(x, y) \leq t.$$

Portanto, $\sigma(t) < t$ para todo $t > 0$.

Afirmação 3: σ é contínua à direita.

De fato, sejam $t \geq 0$ fixado e uma sequência (ε_n) com $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Novamente, temos que existem $u_n, v_n \in X$, com $d(u_n, v_n) \leq t + \varepsilon_n$, tais que

$$\sigma(t + \varepsilon_n) = d(f(u_n), f(v_n)).$$

Pela compacidade de X, (u_n) e (v_n) possuem subsequências tais que

$$\lim_{i\to+\infty} u_{n_i} = u \in X \ e \ \lim_{i\to+\infty} v_{n_i} = v \in X.$$

Como σ é não decrescente, temos que

$$\sigma(t) \leq \sigma(t + \varepsilon_n).$$

Note que temos

$$\lim_{i\to+\infty} d(u_{n_i}, v_{n_i}) \leq t + \varepsilon_{n_i}.$$

Daí, como $\varepsilon_n \to 0$, segue-se que $d(u, v) \leq t$. Logo, pela afirmação 1, temos que

$$\lim_{i\to+\infty} \sigma(t + \varepsilon_{n_i}) = d(f(u), f(v)).$$

Por outro lado, pela definição de σ, temos que

$$d(f(u), f(v)) \leq \sigma(t).$$

Assim, obtemos que $\lim\limits_{i\to+\infty} \sigma(t + \varepsilon_{n_i}) = \sigma(t)$. Portanto σ é contínua à direita.

Deste modo, σ satisfaz todas as condições do Lema 3.35. Portanto, existe $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ contínua crescente tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \sigma(t) \leq \phi(t) < t$$

para todo $t > 0$ e $x, y \in X$, e ϕ claramente satisfaz as propriedades de (ii). $\square$

Vale a pena relembrarmos que, pelo Teorema 2.1, a condição de o espaço métrico ser completo é mais fraca do que ser compacto. Portanto, a partir desse último teorema, o qual apresenta as equivalências entre as três noções, podemos observar que o Teorema 3.5 (Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong) e o Teorema 3.7 (Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata) generalizam o Teorema 4.2 (Teorema do Ponto Fixo de Edelstein).

Capítulo 5

Considerações Finais

Estudamos diversos resultados relativos à Teoria de Ponto Fixo. Nestes trabalhos, podemos observar a importância dos conceitos de sequência e convergência quando se trata de garantir a existência de ponto fixo, uma vez que as novas hipóteses acrescidas por Rakotch, Boyd-Wong e Pata para enfraquecer a condição de ser uma contração se mostraram capazes de garantir, em todos os casos, que a sequência de iterações da função é uma sequência de Cauchy.

Apesar de não ter sido o foco do trabalho, o fato de utilizarmos sequências e convergência nas demonstrações para obtenção de ponto fixo mostra como essa teoria pode ser bastante aplicável por meio de algoritimos computacionais. Neste ponto, é notório o quanto a Teoria de Ponto Fixo é importante tanto para teoria matemática quanto para outras áreas.

Pensando na aplicabilidade da Teoria de Ponto Fixo, o presente trabalho se torna importante por abranger diversos resultados, considerando seus avanços, que podem ser utilizados como fortes ferramentas quando não se puder garantir existência de ponto fixo pelos teoremas clássicos.

Além disso, do ponto de vista teórico, a partir das demonstrações de equivalências e exemplos realizados neste trabalho, concluímos que os resultados vistos em [3, **?**] e [11] são generalizações do Teorema do Ponto Fixo de Banach, isto é, apresentam um escopo ainda maior de aplicações para as quais conseguimos garantir existência e unicidade de ponto fixo. Mais que isso, pela forma como foi conduzido o texto, pode-se observar como esses resultados foram sendo obtidos a partir dos anteriores e as vantagens que cada um tinha em relação ao anterior.

Por fim, ressaltamos que foram apresentados resultados presentes em artigos relativamente recentes, o que nos induz a pensarmos nas diversas implicações que ainda poderão ser obtidas a partir deles.

Referências Bibliográficas

[1] BARATA, J. C. A. **Curso de Física-Matemática**. Notas de aula, Universidade de São Paulo. Acessado em 07 de dezembro de 2023. Disponível em: `http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/notas_de_aula.html` Citado 2 vezes nas páginas 34 e 76.

[2] BLUMENTHAL, L. M. **Theory and Applications of Distance Geometry**. Chelsea Publishing Company, 2 ed., New York, 1953. Citado na página 44.

[3] BOYD, D. W. Boyd and Wong, J. S. **On Nonlinear Contractions**. Proc. Amer. Math. Soc. 20, 458–464, 1969. Citado 6 vezes nas páginas 5, 6, 7, 8, 43 e 79.

[4] BUCUR, A. **About Applications of the Fixed Point Theory**. De Gruyter Academic Publishing, v. 22, n, 1, 13-17, 2017. Citado na página 7.

[5] FORNARI, L. and PATA, V. **A Note On Weak Contractions In Compact Metric Spaces**, 2019. Citado na página 75.

[6] LIMA, E. L. **Análise Real. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária - IMPA**. Análise Real. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária - IMPA, 2004. v. 1, . Citado 2 vezes nas páginas 7 e 9.

[7] LIMA, E. L. **Espaços Métricos. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA**. Espaços Métricos. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 22.

[8] OLIVEIRA, D. M. **Enfraquecendo a hipótese de contração do Teorema do Ponto Fixo de Banach**. 2019. 57 f. Monografia (Graduação em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 70.

[9] PATA, V. **A Fixed Point Theorem in Metric Spaces**. Journal Fixed Point Theory Appl. 10, 299–305, 2011. Disponível em: `https://doi.org/10.1007/s11784-011-0060-1` Citado 5 vezes nas páginas 5, 6, 7, 8 e 55.

[10] PEREIRA, R. O. **A Equivalência entre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Valor Intermediário**. Revista de Matemática, v. 5, n. 2, 108-119, 2018. Citado na página 19.

[11] RAKOTCH, E. **A Note On Contractive Mappings**. Proc. Amer. Math. Soc. 13, 459-465, 1962. Citado 6 vezes nas páginas 5, 6, 7, 8, 33 e 79.