



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO



VITOR SOUZA QUINTÃO

UM ESTUDO EXPERIMENTAL SOBRE O CUSTO COMPUTACIONAL DO
PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DA MOVIMENTAÇÃO DO CARRO TRIPPER

JOÃO MONLEVADE

2023

VITOR SOUZA QUINTÃO

UM ESTUDO EXPERIMENTAL SOBRE O CUSTO COMPUTACIONAL DO PROBLEMA
DE OTIMIZAÇÃO DA MOVIMENTAÇÃO DO CARRO TRIPPER

Trabalho de Conclusão de curso apresentado à
Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos
requisitos para obtenção do título de Bacharel em
Engenharia de Produção pelo Instituto de Ciências
Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro
Preto.

Orientadora: Professora Mônica do Amaral

JOÃO MONLEVADE

2023

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

Q79e Quintão, Vitor Souza.
Um estudo experimental sobre o custo computacional do problema de otimização da movimentação do carro tripper. [manuscrito] / Vitor Souza Quintão. - 2023.
64 f.: il.: , gráf., tab..

Orientadora: Profa. Dra. Mônica do Amaral.
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Graduação em Engenharia de Produção .

1. Complexidade computacional. 2. Manuseio e transporte de materiais. 3. Otimização matemática. 4. Pesquisa operacional. 5. Silos. I. Amaral, Mônica do. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 519.8

Bibliotecário(a) Responsável: Flavia Reis - CRB6-2431



FOLHA DE APROVAÇÃO

Vitor Souza Quintão

Um estudo experimental sobre o custo computacional do problema de otimização da movimentação do carro tripper

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia de Produção da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Produção

Aprovada em 4 de Setembro de 2023

Membros da banca

Dra. Mônica do Amaral - Orientadora (Universidade Federal de Ouro Preto)
MSc. Eduardo Sanches da Silva Filho - Coorientador (Universidade Federal de São Carlos)
Dr. Alexandre Xavier Martins (Universidade Federal de Ouro Preto)
Dr. Thiago Augusto de Oliveira Silva (Universidade Federal de Ouro Preto)

Mônica do Amaral, orientadora do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 22/09/2023



Documento assinado eletronicamente por **Monica do Amaral, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 22/09/2023, às 18:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0593985** e o código CRC **C2BACD89**.

AGRADECIMENTOS

Uma sensação de dever cumprido e a gratidão por Deus ter iluminado a minha caminhada até aqui. Hoje agradeço àqueles que contribuíram e sonharam direta ou indiretamente para a realização deste objetivo.

Aos meus queridos familiares, que acompanharam toda a minha trajetória e me deram incentivos suficientes para chegar até o final, minha eterna gratidão. Em especial aos meus pais, Ildon e Shirlei, que foram minha base de sustentação no processo de construção da minha personalidade e me conduziram até esta vitória. Aos meus amigos Carlos, Francis, moradores das repúblicas Alcatraz e Tokaia, que tornavam os ambientes mais alegres, compartilhavam das incertezas e inseguranças da vida e foram abrigo em momentos de necessidade. A Inova Consultoria Júnior, Embraterr Terraplenagem e ArcelorMittal, por proporcionarem oportunidades essenciais para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Agradeço a Mônica, pelas orientações e parceria para a construção deste trabalho, pois você foi essencial para eu chegar até aqui. Agradeço à Universidade Federal de Ouro Preto, por ter sido minha segunda casa e por todos os seus colaboradores, os quais foram dedicados em transferir os conhecimentos da área da engenharia de produção e no âmbito pessoal.

Aos demais aqui não relatados, mas não menos importantes, meu muito obrigado!

“A resposta certa, não importa nada: o essencial é que
as perguntas estejam certas”.

(Mário Quintana)

RESUMO

O beneficiamento de minério garante uma melhor qualidade dos materiais e durante seu processo é utilizado o carro *tripper* para transporte do material e alimentação dos silos de armazenagem. Este trabalho aborda a aplicação de novos testes em modelos de otimização já elaborados para o problema de movimentação do carro *tripper*, de forma a avaliar o comportamento dos resultados e a influência do aumento de períodos e silos na complexidade de resolução dos modelos. Foram realizados 2250 testes, sendo divididos entre 15 instâncias de 4 e 15 instâncias de 6 silos, 3 modelos e 25 períodos diferentes iniciando em 20 períodos até 500 períodos com um intervalo de 20 em 20 períodos. O comportamento dos resultados foi avaliado de acordo com o tempo de processamento gasto para obtenção da solução de cada modelo por período. Os resultados obtidos comprovaram que o aumento do número de períodos e silos influenciam em uma maior complexidade computacional, ou seja, maiores tempos de processamento. As instâncias foram clusterizadas de acordo com a sua complexidade, em que instâncias com estouro de memória nos 3 modelos foram consideradas as mais difíceis. Além disso, com este trabalho foi possível identificar que para encontrar melhor relação estatística entre os dados é necessário a realização de mais testes, como por exemplo com mais períodos.

Palavras-chave: Pesquisa operacional, *tripper*, mineração.

ABSTRACT

The processing of ore guarantees a better quality of the materials and during the process a tripper car is used to transport the material and feed the storage silos. This work approaches the application of new tests in optimization models already elaborated for the tripper car movement problem, in order to evaluate the behavior of the results and the influence of the increase of periods and silos in the complexity of resolution of the models. 2250 tests were performed, being divided between 15 instances of 4 and 15 instances of 6 silos, 3 models and 25 different periods starting in 20 periods up to 500 periods with an interval of 20 in 20 periods. The behavior of the results was evaluated according to the processing time spent to obtain the solution for each model per period. The results obtained proved that the increase in the number of periods and silos influence a greater computational complexity, that is, longer processing times. Instances were clustered according to their complexity, in which instances with memory overflow in the 3 models were considered the most difficult. In addition, with this work it was possible to identify that to find a better statistical relationship between the data, it is necessary to carry out more tests, such as with more periods.

Keywords: Operational research, tripper, mining.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Objetivos	11
1.1.1	Objetivo geral	11
1.1.2	Objetivos específicos	11
1.2	Justificativa	12
1.3	Estrutura do trabalho	12
2	METODOLOGIA	13
3	REVISÃO DE LITERATURA	14
3.1	Política de Caldas (2018)	14
3.2	Política de Pedrosa (2019)	15
3.3	Políticas de Silva Filho (2021)	15
3.3.1	Minimização da diferença dos níveis.....	15
3.3.2	Minimização das movimentações do carro <i>tripper</i>	16
3.4	Políticas de Reis (2022)	17
3.4.1	Minimização do nível máximo a cada período	17
3.4.2	Minimização do nível máximo em todos os períodos	17
3.4.3	Minimização do nível máximo e maximização do nível mínimo em todos os períodos.....	18
3.4.4	Minimização do nível máximo e maximização do nível mínimo em todos os períodos com minimização de movimentos do carro <i>tripper</i>	18
3.5	Abordagem de programação dinâmica	19
4	RESULTADOS COMPUTACIONAIS	20
4.1	Comportamento gráfico das instâncias com quatro silos	20
4.2	Comportamento gráfico das instâncias com seis silos	29
4.3	Ajuste de curvas	38
4.3.1	Modelo de Pedrosa.....	38
4.3.2	Modelo de Reis2	42
4.3.2	Modelo de Reis3	43
4.4	Clusterização dos testes	44
4.4.1	Instâncias com 4 silos	45

4.4.1.1	Fáceis	45
4.4.1.2	Médias	47
4.4.1.3	Difíceis	49
4.4.2	Instâncias com 6 silos.....	51
4.4.2.1	Fáceis	51
4.4.2.2	Médias	54
4.4.2.3	Difíceis	56
4.5	Característica das instâncias.....	58
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61

1 INTRODUÇÃO

A mineração é um dos setores fundamentais na economia dos países, pois contribui positivamente na qualidade de vida tanto da sociedade atual quanto das gerações futuras. No Brasil não é diferente e de acordo com o IBRAM (2022), em 2021, o setor mineral do país ultrapassou R\$310 bilhões em faturamento, o que na balança comercial equivale a aproximadamente 70% do saldo total brasileiro. Segundo dados publicados pelo IPEA (2022), em 2021 foram gerados mais de 15 mil empregos no setor extrativo mineral. Por estes e outros motivos é de suma importância que haja estímulos na produção e exportação do setor.

Entre os produtos exportados pelo Brasil, o minério de ferro é destaque, sendo que em 2021 ocupou cerca de 96% da exportação do setor, 357,7 milhões de toneladas de um total de 372,5 (IBRAM,2022). O alto volume exportado é reflexo da abundância de reservas de minério de ferro no território brasileiro, sendo o 2º país em milhões de toneladas, ficando atrás apenas da Austrália, juntamente com a qualidade do minério brasileiro, o qual apresenta teor médio de ferro de 55,2% conforme publicado pelo BNDES (2014).

Um dos processos realizados para melhorar a qualidade do minério é o beneficiamento, que apresenta diversas etapas, conforme pode ser visto na Figura 1. Em resumo, o beneficiamento consiste em aumentar o teor médio do mineral desejado e minimizar a presença de materiais contaminantes, refletindo assim em maior aceitação do produto no mercado.

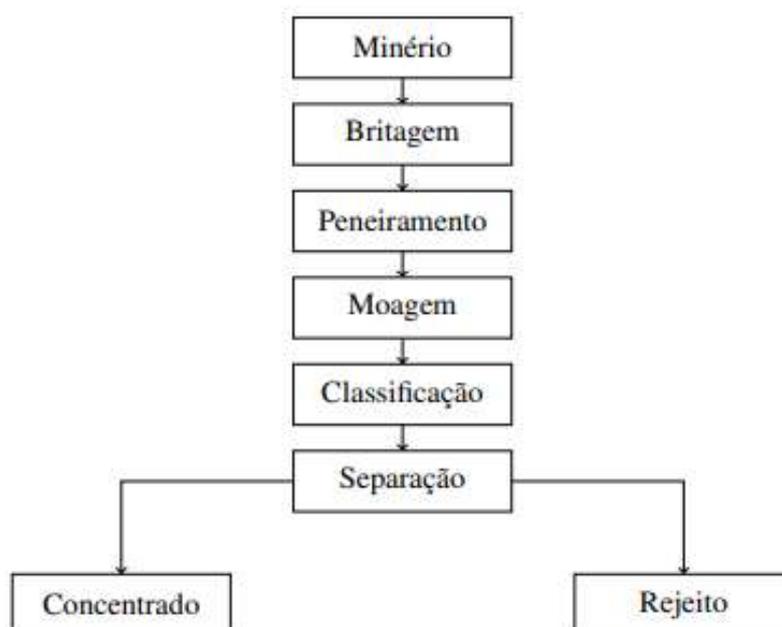


Figura 1 - Fluxograma simplificado ilustrando uma planta de beneficiamento mineral. Fonte: Caldas (2018)

Durante o processo de beneficiamento é imprescindível a estocagem adequada do

minério. Em uma planta de beneficiamento a seco, por exemplo, o minério pode ser estocado em tanques, pilhas ou silos, dependendo da natureza do material processado e das características particulares do processo vinculado ao armazenamento (CALDAS, 2018).

Os silos geralmente são utilizados na armazenagem intermediária do minério, em que seu volume é menor e fica estocado por um pequeno período de tempo até ser enviado para a etapa posterior (PEDROSA, 2019). Ainda segundo Pedrosa (2019), para o armazenamento do minério em silos utilizam-se correias transportadoras, que garantem o transporte durante o processo de beneficiamento.

Ao sair dos silos, o minério é despejado em alimentadores, que têm a função de distribuí-lo nas etapas sequenciais, e devem ser proporcionais no quesito de quantidades, ou seja, o número de alimentadores deve ser igual ao número de divisões em um silo (SILVA FILHO, 2021). Para a alimentação do minério nas divisões dos silos é utilizado o “*tripper*”, equipamento que funciona como um desviador acoplado sobre os trilhos e se movimenta ao longo de uma correia a partir do acionamento dos motores elétricos ligados às rodas (PEDROSA, 2019).

Tanto a movimentação do carro *tripper* quanto seu posicionamento sobre os compartimentos nos quais este descarrega material, geralmente não seguem uma política de despacho que contribuem para uma estratégia de produção, ou seja, acontecem de forma aleatória ou através de uma programação simples (BOYER, 2010).

Na Figura 2 é possível observar um sistema silo-*tripper* de um processo de peneiramento a seco, em que o retângulo pontilhado com duas rodas representa o carro *tripper*, que está sobre o silo e distribui o minério nos quatro compartimentos. Ao final de cada silo, têm-se os alimentadores, que têm por função de receber o minério e despejá-lo sobre as peneiras, ilustradas por triângulos na cor cinza, que, por sua vez, cuidam da separação do material desejado.

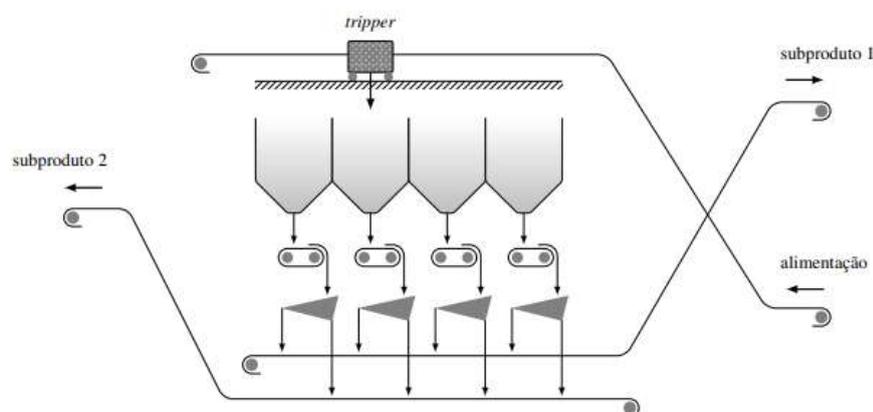


Figura 2 - Sistema Silo-*Tripper* peneiramento a seco. Fonte: Caldas (2018)

Segundo Caldas (2018), o *tripper* é posicionado através de ações humanas, ou seja, o

operador baseado em sua experiência determina a melhor posição para o *tripper* durante o processo de forma a garantir que o silo nem fique vazio, diminuindo a produtividade, nem transborde, desperdiçando material. Em outras palavras, o processo está suscetível a falhas em caso de falta de treinamento/experiência do operador ou demais fatores humanos, o que se torna um risco e abre espaço para automatizações e proposição de melhorias.

1.1 Objetivos

A seguir, são apresentados o objetivo geral da realização deste estudo e o desdobramento em objetivos específicos que conduziram o trabalho.

1.1.1 Objetivo geral

Avaliar o comportamento computacional das instâncias equilibradas propostas por Pedrosa (2019) nos modelos de otimização da movimentação do carro *tripper*, criados por Pedrosa (2019) e Reis (2022), com o aumento do número de períodos de planejamento.

1.1.2 Objetivos específicos

- Considerando as políticas de Pedrosa, Reis2 e Reis3, que apresentaram menor complexidade computacional no trabalho de Reis (2022), avaliar o comportamento computacional do problema de otimização da movimentação do carro *tripper* em relação ao aumento do número de períodos de planejamento;
- Estabelecer a relação do número de períodos de planejamento em relação ao aumento do número de silos no aumento da complexidade computacional dessas políticas, no que diz respeito ao tempo necessário para a prova de otimalidade usando o *software* CPLEX 11.1;
- Analisar, de acordo os parâmetros das instâncias equilibradas propostas por Pedrosa (2019), padrões que possam ser utilizados na identificação de instâncias que exijam menor ou maior esforço computacional até a prova de otimalidade, considerando as políticas de Pedrosa, Reis2 e Reis3;
- Classificar as instâncias propostas por Pedrosa (2019), de acordo com os parâmetros de entrada e os tempos necessários até a prova de otimalidade, que possam guiar a

ampliação da biblioteca de instâncias disponíveis para teste desses modelos.

1.2 Justificativa do trabalho

O problema de otimização da movimentação do carro *tripper* é um problema recente na literatura, ainda tendo sido pouco explorado. Várias políticas e metaheurísticas para a resolução do problema já foram propostas. No entanto, apenas Pedrosa (2019) propôs um conjunto de instâncias para a realização de testes com esses modelos, considerando variações entre 4, 6, 9 e 15 silos e 20, 40 ou 60 períodos de planejamento. Os testes realizados por Reis (2022) apontam que apenas três das políticas propostas possuem complexidade computacional que permita a resolução das instâncias propostas por Pedrosa (2019). Essas três políticas, que são a de Pedrosa, Reis2 e Reis3, apresentaram comportamento aproximadamente linear para os tempos de resolução com instâncias de até 60 períodos. Porém, nenhum dos modelos foi testado para instâncias com maior número de períodos, muito embora os trabalhos de Silva Filho (2021) e Reis (2022) mostrem claramente a complexidade exponencial que ocorre com o aumento do número de silos em todas as políticas já formuladas.

1.5 Estrutura do trabalho

O presente trabalho está organizado em cinco capítulos. O Capítulo 1 apresenta uma breve introdução e contextualização do problema a ser abordado, assim como os objetivos pretendidos e justificativa do estudo. No Capítulo 2, discute-se a metodologia utilizada para a elaboração da pesquisa. O Capítulo 3 apresenta a revisão da literatura relacionada ao trabalho. O Capítulo 4 contém os resultados computacionais. Por fim, no Capítulo 5, apresentam-se as considerações finais do trabalho, bem como perspectivas para trabalhos futuros.

2 METODOLOGIA

O estudo pode ser classificado como uma pesquisa empírica descritiva, pois está voltado à análise de modelos quantitativos, com o objetivo de descrever comportamentos dos mesmos, em especial, em relação à complexidade computacional. Para tanto, são realizados experimentos que precisam ser analisados por um viés estatístico (MORABITO e PUREZA, 2018).

O protocolo de pesquisa seguido foi baseado nas seguintes fases:

- **Definição das políticas a serem testadas:** devido aos resultados e conclusões dos trabalhos de Silva Filho (2021) e Reis (2022), as políticas selecionadas, de menor complexidade computacional, foram as de Pedrosa (2019) e de Reis2 e Reis3 (REIS,2022), pois assim, seria possível realizar um maior número de testes até a obtenção e prova de otimalidade das soluções ótimas. Foi utilizado o *software* CPLEX 11.1, sem limite de tempos de processamento e com as configurações *default*;
- **Coleta e análise de dados:** foram utilizadas apenas as instâncias equilibradas propostas por Pedrosa (2019). Cada uma das instâncias teve o número de períodos variado de 20 em 20 períodos, até 500 períodos, independentemente do número de períodos proposto originalmente para cada instância. O conjunto de instâncias equilibradas de Pedrosa (2019) possui 60 instâncias, divididas entre 4, 6, 9 e 15 silos e 20, 40 e 60 períodos de planejamento. Testando cada uma delas para 25 horizontes distintos, seria obter 1.500 testes para cada política. Com 3 políticas testadas, seriam 4.500 testes computacionais;
- **Análise dos comportamentos computacionais dos modelos em relação aos tempos de processamento:** Essa etapa teve como objetivo verificar se o comportamento exponencial pode ser observado com 500 períodos de planejamento para as políticas testadas. Em segundo lugar, essa etapa teve por objetivo verificar se o aumento do número de silos causa maior ou menor impacto que o aumento do número de períodos de planejamento nos tempos de processamento das políticas utilizadas;
- **Análise dos tempos de processamento de acordo com os parâmetros de entrada:** essa etapa buscou *clusterizar* as instâncias, de acordo com o grau de complexidade de resolução, para cada política testada, com o objetivo principal de entender os efeitos dos parâmetros de entrada nos tempos de processamento até a obtenção da solução ótima. Como objetivo secundário, essa análise busca subsidiar a criação de novas instâncias, proporcionando maior variabilidade no conjunto de instâncias disponíveis para testes dos modelos formulados para o problema de otimização da movimentação do carro *tripper*.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Em termos de modelagem de programação inteira mista, foram criadas até o presente momento, 8 diferentes políticas de otimização da movimentação do carro *tripper*, todas baseadas no problema de sequenciamento em uma máquina (CALDAS, 2018) e com o horizonte de planejamento discretizado em períodos.

3.1 Política de Caldas (2018)

A política de Caldas (2018) surgiu após a percepção de que no processo de movimentação do carro *tripper* seria possível monitorar e controlar melhor as variáveis. Em resumo, trata sobre a maximização da soma dos menores níveis dos silos em cada intervalo de tempo

Na primeira etapa da modelagem foram definidos alguns dados de entradas, sendo eles:

- **Conjuntos:**
 - **T:** períodos de tempo;
 - **P:** silos.
- **Parâmetros:**
 - **n:** número de silos;
 - **I_i:** nível inicial dos silos;
 - **l_{maxi}:** nível máximo de atingimento dos silos;
 - **l_{min}:** nível mínimo de atingimento dos silos;
 - **q:** massa de minério que o *tripper* descarrega no silo (unidade de tempo);
 - **Q:** massa de minério que o silo descarrega para as etapas posteriores (unidade de tempo);
 - **K:** volume esvaziado pelo silo (unidade de tempo);
 - **p:** primeira posição do *tripper*;

Para complementar o problema também definiu-se as variáveis de decisão, as quais são:

- **X:** posição do *tripper*;
- **A:** folga no nível mínimo;
- **B:** folga de nível máximo;
- **L:** nível dos silos;
- **Z:** Auxiliar da função objetivo para absorver o resultado do menor nível.

A partir daí, baseado no princípio de MinMax de Rich & Knight (1991), foi proposto o modelo de Caldas, o qual segue abaixo:

$$\max \sum_{j \in T} Z_j - \sum_{i \in P, j \in T} A_{i,j} - \sum_{i \in P, j \in T} B_{i,j} \quad (3.1)$$

S.a.:

$$Z_j \leq L_{i,j}, j \in T, i \in P \quad (3.2)$$

$$\sum_{i \in P} x_{i,j} = 1, \forall j \in T \quad (3.3)$$

$$X_{i,j} \leq X_{i-1,j-1} + X_{i,i-1} + X_{i+1,j-1}, \forall i \in [2, n - 1], j \in [2, t] \quad (3.4)$$

$$X_{1,j} \leq X_{1,j-1} + X_{2,j-1}, \forall j \in [2, t] \quad (3.5)$$

$$X_{n,j} \leq X_{n,j-1} + X_{n-1,j-1}, \forall j \in [2, t] \quad (3.6)$$

$$X_{p,1} = 1 \quad (3.7)$$

$$L_{i,1} = L_i, \forall i \in T \quad (3.8)$$

$$A_{i,j} = \Delta A_{i,j} + A_{i-1,j}, \forall i \in P, j \in T \quad (3.9)$$

$$\Delta A_{i,1} = 0, \forall i \in P \quad (3.10)$$

$$B_{i,j} = \Delta B_{i,j} + B_{i-1,j}, \forall i \in P, j \in T \quad (3.11)$$

$$\Delta B_{i,1} = 0, \forall i \in P \quad (3.12)$$

$$L_{i,j+1} = L_{i,j} + K_i(q \cdot X_{i,j} - Q_i) + \Delta A_{i,j+1} - \Delta B_{i,j+1}, \forall i \in P, j \in [1, t - 1] \quad (3.13)$$

$$l_{min} \leq L_{i,j} \leq l_{max}, \forall i \in P, j \in T \quad (3.14)$$

A equação (3.1) representa a função objetivo do problema, que tem como objetivo maximizar o valor do menor nível dos silos a cada intervalo de tempo através da variável \mathbf{Z} . Quanto as restrições do modelo, a (3.2) implica que \mathbf{Z} receba o valor do nível do silo mais vazio a cada intervalo de tempo. A (3.3) implica que o *tripper* ocupará apenas uma posição a cada intervalo de tempo.

As restrições de (3.4) a (3.6) estão relacionadas aos deslocamentos do *tripper*, em que a primeira trata-se de posições intermediárias partindo da segunda posição até a penúltima e as demais, nesta ordem, tratam-se da primeira e última posição. A (3.7) define a primeira posição do *tripper*.

Os níveis iniciais dos silos são configurados pela restrição (3.8) e a partir do segundo intervalo de tempo passam a ser definidos pela (3.13). Já a restrição (3.14) garante que os níveis dos silos estejam entre o limite máximo e mínimo. As restrições representadas de (3.9) a (3.12) apresentam os domínios das variáveis de folga **A** e **B**, as quais funcionam como reguladores para que não haja esvaziamento total ou transbordo nos silos.

3.2 Política de Pedrosa (2019)

Pedrosa (2019), por sua vez, decidiu maximizar o menor nível dos silos durante todo o período de tempo e, devido a isso, modificou no modelo de Caldas (2018) a variável **Z**, que ao invés de ser um vetor passou a ser uma variável escalar que, desta forma, consegue armazenar o valor do nível do silo que estiver mais vazio em cem por cento do tempo.

Sendo assim, as restrições de (3.3) a (3.14) continuam a fazer parte do modelo, porém é necessário alterar a (3.1) para a (3.15) de forma que o menor nível dos silos seja maximizado em todo o tempo e a (3.2) para a (3.16) que garante ao recebimento do menor nível pela variável **Z**.

$$\max Z - \sum_{i \in P, j \in T} A_{i,j} - \sum_{i \in P, j \in T} B_{i,j} \quad (3.15)$$

S.a.:

$$Z \leq L_{i,j}, j \in T, i \in P \quad (3.16)$$

Após a modificação do modelo, foram realizados diversos testes com as mesmas instâncias tanto no modelo de Pedrosa (2019) quanto de Caldas (2018) de forma a concluir que apesar do tempo de processamento ter sido menor em seu modelo ainda haveria risco de paradas de linha sendo devido à falta de minério ou ao enchimento de um volume maior que a capacidade dos silos.

3.3 Política de Silva Filho (2021)

3.3.1 Minimização da diferença dos níveis

Essa política surgiu com o intuito de se equilibrar o volume armazenado nos silos em cada intervalo de tempo, ou seja, conforme definido por Silva Filho (2021) pretendia-se minimizar as diferenças entre os níveis mais altos e baixos dos silos.

Para a execução do modelo dessa forma foi substituído a variável **Z** de Caldas (2018) por

três novas, sendo $Z_{min,j}$ e $Z_{max,j}$ as auxiliares que recebem o valor dos silos de menor e maior nível a cada período e estão representadas pelas restrições (3.18) e (3.19), respectivamente, e dif_j que armazena a diferença do valor entre os silos de maior e menor nível a cada período e é representada pela restrição (3.20).

Por fim, o modelo também continua possuindo as restrições de (3.3) a (3.14), mas há a substituição da função objetivo para a equação (3.17) e o acréscimo da restrição (3.21) para representar o domínio das novas variáveis.

$$\min \sum_{j \in T} Dif_j - \sum_{i \in P, j \in T} A_{i,j} - \sum_{i \in P, j \in T} B_{i,j} \quad (3.17)$$

S.a.:

$$Z_{min,j} \leq L_{i,j}, j \in T, i \in P \quad (3.18)$$

$$Z_{max,j} \leq L_{i,j}, j \in T, i \in P \quad (3.19)$$

$$dif_j = Z_{max,j} - Z_{min,j}, j \in T \quad (3.20)$$

$$Z_{min,j}, Z_{max,j}, dif_j \in R_+, j \in T \quad (3.21)$$

3.3.2 Minimização das movimentações do carro *tripper*

Já essa política surgiu com o intuito de minimizar o número de movimentos que o carro *tripper* faz ao longo de todo o processo de abastecimento dos silos, ou seja, com isso visa-se a economia de energia (SILVA FILHO, 2021).

Para a execução do modelo, a variável Z definida por Caldas (2018) dá lugar a variável Y , a qual armazena a quantidade de movimentos do carro *tripper* durante todo o processo. Com isso, surge a nova função objetivo em (3.22), a restrição (3.23) que armazena a quantidade de movimentos do carro e a (3.24) que define o domínio da nova variável. Além dessas, mantém-se as variáveis do modelo original de Caldas (2018) de (3.3) a (3.14).

$$\min \sum_{j \in T} Y_j - \sum_{i \in P, j \in T} A_{i,j} - \sum_{i \in P, j \in T} B_{i,j} \quad (3.22)$$

S.a.:

$$Y_j \geq X_{i,j} - X_{i,j+1}, j \in T, i \in P; j \geq 2 \quad (3.23)$$

$$Y_j \in \{0,1\}, j \in T \quad (3.24)$$

Após a definição do modelo de Silva Filho (2021) diversos testes foram realizados e comparados com os modelos de Caldas (2018) e Pedrosa (2019) e concluiu-se que o modelo de Pedrosa (2019) é o mais eficiente quando levado em consideração apenas tempo de processamento, porém o de Caldas (2018) e o de minimização da diferença dos níveis proposto por Silva Filho (2021) são mais viáveis quando considerado que o equilíbrio dos níveis dos silos é importante para o processo, evitando assim faltas ou excessos.

3.4 Política de Reis (2022)

3.4.1 Minimização do nível máximo a cada período

A ideia desta política surgiu a partir do modelo de Caldas (2018) em que pretendia-se controlar o comportamento dos níveis dos silos a cada período. Reis (2022) percebeu que a proposta de Caldas (2018) levava em consideração apenas a redução do risco de esvaziamento dos silos, ou seja, ainda não levava em consideração a possibilidade de transbordo caso houvesse um enchimento em excesso.

Dado isso, o objetivo passou a ser minimizar o somatório dos níveis máximos ao invés de maximizar o somatório dos níveis mínimos, resultando assim na nova função objetivo (3.25). Nela, foi necessário trocar a variável Z_j pela variável ZZ_j , a qual armazena o nível máximo dos silos a cada intervalo de tempo.

O modelo continua possuindo as restrições de (3.3) a (3.14) e surgem as restrições (3.26) e (3.27), em que a primeira garante que a variável ZZ_j receba o valor do maior nível a cada intervalo de tempo e a última representa o domínio desta variável.

$$\min \sum_{j \in T} ZZ_j + \sum_{i \in P, j \in T} A_{i,j} + \sum_{i \in P, j \in T} B_{i,j} \quad (3.25)$$

S.a.:

$$ZZ_j \geq L_{i,j}, i \in P, j \in T \quad (3.26)$$

$$ZZ_j \geq 0, j \in T \quad (3.27)$$

3.4.2 Minimização do nível máximo em todos os períodos

Esta política se baseou no modelo de Pedrosa (2019), porém assim como no primeiro modelo de Reis (2022), o objetivo passa a ser minimizar o maior nível dos silos durante todo o

tempo de forma a evitar que eles transbordem.

Neste modelo a variável Z de Caldas (2018) passa a ser ZZ , a qual receberá o maior nível dos silos durante todo o tempo e é definida pela restrição (3.29) assim como seu domínio pela (3.30). A função objetivo passa a ser a (3.28) de modo a garantir os resultados esperados.

$$\min ZZ + \sum_{i \in P, j \in T} A_{i,j} + \sum_{i \in P, j \in T} B_{i,j} \quad (3.28)$$

S.a.:

$$ZZ \geq L_{i,j}, i \in P, j \in T \quad (3.29)$$

$$ZZ \geq 0, j \in T \quad (3.30)$$

3.4.3 Minimização do nível máximo e maximização do nível mínimo em todos os períodos

Esta política por sua vez surgiu com o objetivo de tratar dois problemas de uma única vez, sendo a diminuição do maior nível e aumento do menor nível, ou seja, a junção do modelo de Pedrosa (2019) com o segundo modelo definido por Reis (2022).

Para ser executado, o problema mantém as restrições de (3.2) a (3.14), em que Z armazena o menor nível dos silos em todos os períodos e ZZ armazena o maior nível. Além disso, são acrescentadas a função (3.31) que retornará o duplo objetivo requerido e reutilizado as restrições (3.29) e (3.30) definidos na segunda política de Reis (2022).

$$\max Z - ZZ + \sum_{i \in P, j \in T} A_{i,j} + \sum_{i \in P, j \in T} B_{i,j} \quad (3.31)$$

3.4.4 Minimização do nível máximo e maximização do nível mínimo em todos os períodos com minimização de movimentos do carro *tripper*

Essa política surgiu com a ideia de utilizar o terceiro modelo definido por Reis (2022) com o segundo modelo elaborado por Silva Filho (2021), ou seja, uma política com o intuito de evitar transbordos por excesso e esvaziamentos dos silos por completo com o mínimo de movimentações do carro *tripper*, o que garante um menor gasto de energia.

Em resumo, utilizou-se o modelo de Silva Filho (2021) com algumas modificações, onde utiliza-se as variáveis Z e ZZ para armazenamento do menor e maior nível em todo o tempo, respectivamente. Com isso, mantém-se as restrições de (3.3) a (3.14) definidas por Caldas (2018)

e as restrições (3.16) e (3.17), (3.23) e (3.24), (3.29) e (3.30), as quais tratam-se dos armazenamentos de cada variável (\mathbf{Y} , \mathbf{Z} e \mathbf{ZZ}) e seus respectivos domínios.

Para garantir que o problema resultasse as informações esperadas modificou-se a função objetivo para (3.32).

$$\min Z - ZZ + \sum_{i \in P, j \in T} A_{i,j} + \sum_{i \in P, j \in T} B_{i,j} + \sum_{i \in P, j \in T} Y_{i,j} \quad (3.32)$$

3.5 Abordagem de programação dinâmica

A programação dinâmica é uma técnica fundamental na pesquisa operacional, usada para resolver problemas complexos de otimização. Ela envolve dividir um problema em subproblemas menores e resolver cada um deles de forma recursiva como definido por Powell (2007). No problema de movimentação do carro *tripper*, a abordagem de programação dinâmica tem o objetivo de otimizar a sequência de movimentos, levando em conta as informações anteriores para tomar decisões melhores e mais contextualizadas. Isso tende a resultar em uma movimentação mais eficiente do carro e em economia de energia.

Neste contexto, temos o trabalho de Morais (2019), que abordou com a programação dinâmica o problema de movimentação do carro *tripper* e utilizou o processo de decisão de Markov (MDP – Markov Decision Process), o qual teve suas etapas mapeadas por Pellegrini e Wainer (2007) além de defini-lo como um modelo que descreve como tomar decisões sequenciais em um ambiente incerto, em que as decisões subsequentes dependem apenas do estado atual do sistema, ou seja, desconsideram as decisões anteriores, além de que há a possibilidade de algum agente interferir periodicamente um sistema executando ações.

O modelo proposto por Morais (2019) readequou o problema definido por Caldas (2018) afim de adotar um horizonte de tempo infinito e teve resultados pertinentes em relação ao tempo de execução e valores das folgas. Porém Mayra (2021) verificou que o comportamento do nível dos silos na abordagem de Morais (2019) não ficou dentro do esperado, o que gerou variabilidades e extrapolação de limites.

A partir daí, Mayra (2021) desenvolveu um novo método para resolução do problema definido por Caldas (2018) também através do processo de decisão de Markov com auxílio de um algoritmo de aproximação da programação dinâmica. Ela dividiu o problema em duas frentes, sendo o primeiro determinístico, que foi baseado no modelo definido por Morais (2019), e o segundo estocástico, cujo objetivo consiste em determinar a sequência de movimentos ótimos assim como as suas durações minimizando as folgas.

4 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Nesta seção são apresentados resultados referentes ao comportamento gráfico dos tempos de processamento das instâncias, de modo a avaliar a complexidade de resolução dos testes com o aumento do número de períodos ou silos. E também uma análise de clusterização das instâncias de acordo com seu grau de dificuldade de resolução, relacionando-se características dos parâmetros de entrada aos tempos de processamento das políticas estudadas.

Para a realização dos testes, os modelos foram implementados em AMPL com a resolução através do CPLEX 11.1. O *hardware* utilizado trata-se de um notebook com 8 GB de memória RAM, sistema operacional Microsoft Windows 11 e processador Intel Core i3 1005G1 com velocidade de 1,2 GHz.

Ao partir do pressuposto dos trabalhos anteriores em que os resultados das políticas de Pedrosa (2019) e da segunda e terceira política de Reis (2022) apresentam tendência de linearidade e aparentemente menor complexidade que o demais modelos, com testes de 20, 40 e 60 períodos, conforme discutido por Reis (2022), foram realizados novos testes aumentando a quantidade de períodos.

Os testes foram completados com as instâncias equilibradas de 4 e 6 silos propostas por Pedrosa (2019), sendo que cada instância foi testada 25 vezes em um intervalo de 20 a 500 períodos, com uma variação de 20 em 20 períodos. Para as instâncias com 9 silos, não foi possível obter uma quantidade suficiente de testes para a realização das análises, pois houve estouro de memória sem obtenção de solução viável para a grande maioria dos testes.

A nomenclatura das instâncias seguiu o mesmo padrão definido por Pedrosa (2019) para os sistemas de 4 a 6 silos, mas com o aumento do número de períodos testados. Dessa forma, os testes apresentam um número a mais que os referenciados nos trabalhos de Pedrosa (2019), que se refere ao número de períodos em que a instância foi testada, independente do número de períodos em que ela foi criada. Por exemplo, o teste “4_20_1_400” indica que a instância de número 1, proposta por Pedrosa com 4 silos e 20 períodos foi testada para 400 períodos.

4.1 Comportamento gráfico das instâncias com quatro silos

A Tabela 1 exemplifica a forma como foram variados os testes da instância 4_20_1 para posterior construção de seu gráfico. É válido ressaltar que o “*” indica que houve estouro de memória no modelo a partir do período em que começa a aparecer, ou seja, a partir desse

momento, não se encontram mais soluções ótimas para os modelos dos quais o “*” está relacionado.

Instância 4_20_1			
Períodos	Pedrosa	Reis2	Reis3
20	0,0220	0,0240	0,0350
40	0,167	0,031	0,176
60	0,259	0,057	0,277
80	0,474	0,095	0,441
100	0,796	0,328	0,814
120	0,938	0,605	0,612
140	1,280	0,908	1,246
160	1,185	*	0,925
180	1,179	*	0,968
200	1,662	*	1,946
220	3,021	*	2,337
240	6,329	*	2,577
260	3,589	*	3,824
280	5,652	*	4,036
300	3,589	*	5,645
320	5,337	*	9,707
340	5,709	*	8,571
360	6,519	*	5,334
380	5,072	*	6,261
400	6,849	*	7,377
420	4,111	*	7,441
440	10,915	*	8,499
460	5,131	*	4,423
480	5,425	*	8,454
500	5,117	*	4,596

Tabela 1 - Tempo de execução em segundos dos modelos - Instância 4_20_1

A Figura 3 ilustra os dados presentes na Tabela 1, em que é possível observar um comportamento similar de linearidade nos períodos iniciais entre os modelos de Pedrosa, Reis2 e Reis3, porém Reis2 estoura a memória a partir de 160 períodos, enquanto Pedrosa e Reis3 assumem aleatoriedade com tendência de aumento do tempo de processamento à medida que o número de períodos fica maior. Isso indica que para a instância 4_20_1, tem-se uma maior complexidade de resolução para Reis2 ao se comparar com as demais políticas.

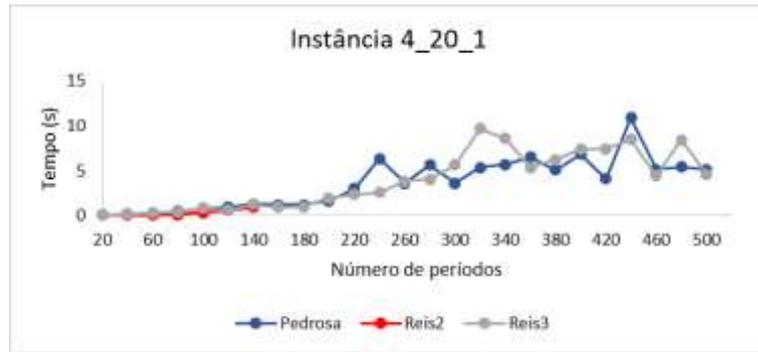


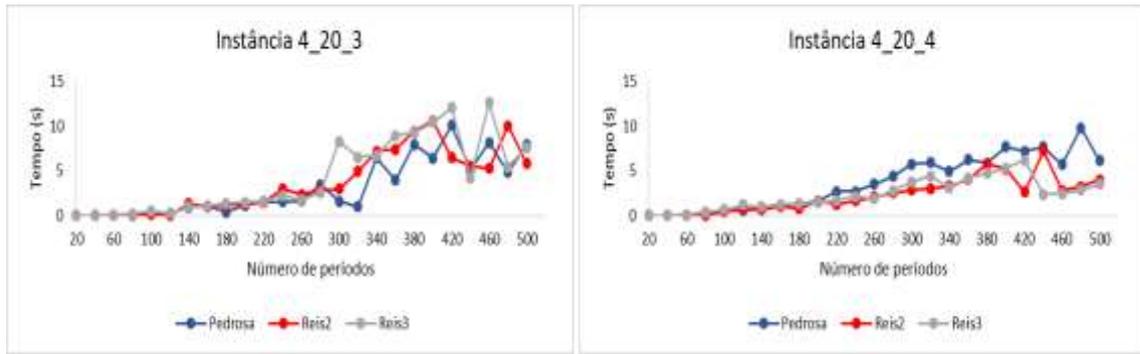
Figura 3 - Comportamento da instância 4_20_1

A Figura 4 apresenta o comportamento da instância 4_20_2, em que é possível observar que a instância apresentou alta complexidade de resolução para as três políticas, uma vez que todas estouraram a memória para vários testes. Além disso, ainda é possível afirmar que Pedrosa apresentou maior complexidade que os demais modelos, uma vez que teve o estouro de memória a partir de 180 períodos enquanto Reis2 e Reis3 estouraram memória a partir de 320 períodos. Por fim, observa-se que Reis3 apresentou o maior tempo de processamento da instância com 180 períodos, o que além de indicar uma complexidade de tomada de decisão também pode indicar uma forte relação com o modelo de Pedrosa, uma vez que o objetivo de Pedrosa também é contemplado no objetivo de Reis3.



Figura 4 - Comportamento da instância 4_20_2

Ao analisar as instâncias 4_20_3 e 4_20_4, na Figura 5, percebe-se um comportamento parecido nos três modelos, assim como na instância 4_20_1, em que apesar de serem mais lineares nos períodos iniciais assumem certa aleatoriedade com o aumento do número de períodos, como também há uma tendência de aumento do tempo de processamento, ou seja, uma maior complexidade de resolução.



(a) 4_20_3 (b) 4_20_4
 Figura 5 - Comportamento das instâncias 4_20_3 e 4_20_4

Os resultados obtidos para a instância 4_20_5, representada pela Figura 6, também apresentou comportamento parecido nos três modelos, assim como aleatoriedade em parte dos períodos, porém, aparentemente, a partir de 420 períodos, quando se observa uma tendência de linearidade dos tempos de processamento. Também é possível observar que Reis3 teve maior dificuldade pra encontrar uma solução ótima com 340 períodos uma vez que foi seu maior tempo de processamento, assim como entre os outros dois modelos.

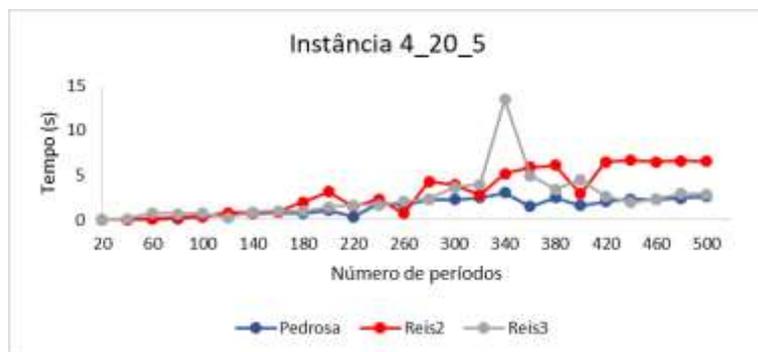
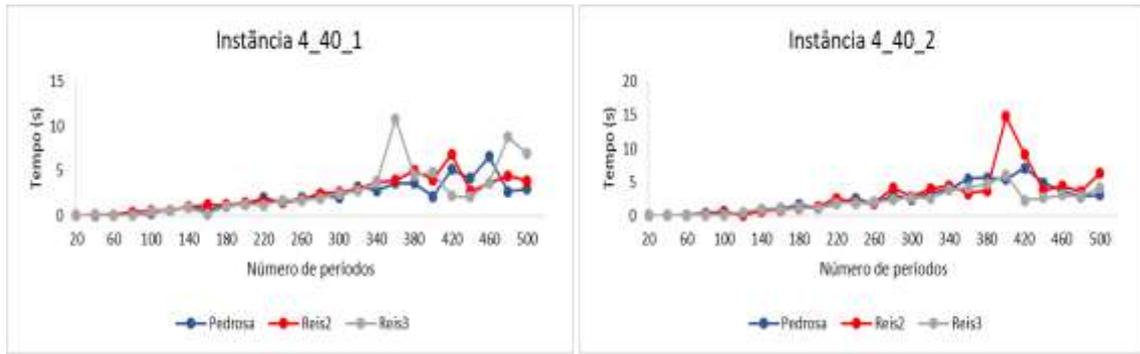


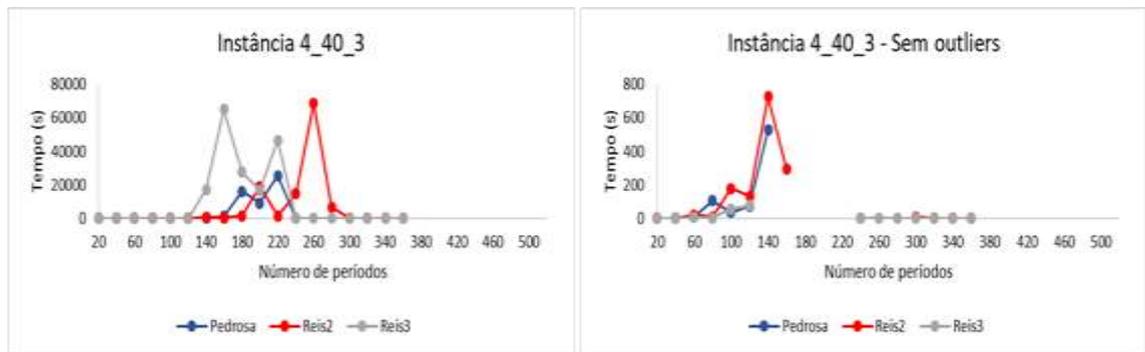
Figura 6 - Comportamento da instância 4_20_5

Nas instâncias 4_40_1 e 4_40_2 é perceptível um comportamento mais linear nos períodos iniciais, mas há uma tendência de aleatoriedade e maior complexidade de resolução com um maior número de períodos assim como alguns testes já apresentados. Outra observação importante é que a instância 4_40_1 apresenta o pico de tempo de processamento em Reis3 com 360 períodos enquanto na 4_40_2 o pico foi em Reis2 com 400 períodos, como é possível observar na Figura 7.



(a) 4_40_1 (b) 4_40_2
 Figura 7 - Comportamento das instâncias 4_40_1 e 4_40_2

A Figura 8 representa a instância 4_40_3, que também possui uma alta complexidade de resolução, assim como na instância 4_20_2, pois há o estouro de memória nos três modelos. Devido aos valores *outliers* acima de 22 segundos, fica difícil a visualização do momento do estouro no gráfico da esquerda, porém ao retirá-los da base essa dificuldade é reduzida como pode ser visto pelo gráfico da direita.



(a) Resultado completo (b) Sem *outliers*
 Figura 8 - Comportamento da instância 4_40_3 com e sem *outliers*

Ainda sobre a instância 4_40_3, com o auxílio da Tabela 2, é perceptível que Pedrosa apresenta estouro de memória antes dos demais modelos, a partir de 260 períodos, enquanto em Reis2 e Reis3 ocorre o estouro a partir de 380 períodos. Além disso, os tempos de processamento em alguns casos foram muito altos, ultrapassando 19 horas de processamento, ao se comparar com as demais instâncias até então apresentadas, já desconsiderando a instância 4_20_2 que apresentou padrões similares.

Instância 4_40_3			
Períodos	Pedrosa	Reis2	Reis3
20	0,187	0,172	0,154
40	1,919	1,524	1,539
60	8,908	22,877	5,762
80	104,711	10,035	5,054
100	36,588	179,428	56,305
120	73,828	132,638	77,412
140	526,075	725,440	17418,990
160	1260,893	295,421	64933,918
180	16223,857	1670,946	27565,288
200	9060,595	18982,311	16825,404
220	25594,755	1424,596	46569,358
240	1,680	14736,826	1,742
260	*	68666,618	2,697
280	*	6896,549	0,999
300	*	8,615	0,800
320	*	0,141	0,134
340	*	0,128	0,104
360	*	0,095	0,082
380	*	*	*
400	*	*	*
420	*	*	*
440	*	*	*
460	*	*	*
480	*	*	*
500	*	*	*

Tabela 2 - Tempo de execução em segundos dos modelos - Instância 4_40_3

A instância 4_40_4 também representa um comportamento parecido nos três modelos. Há tendência de aumento do tempo de processamento com o maior número de períodos assim como aumento da aleatoriedade. Também é possível observar pela Figura 9 que Pedrosa e Reis2 tiveram seus picos de tempo de processamento próximos a 14 segundos, sendo com 420 e 480 períodos, respectivamente.

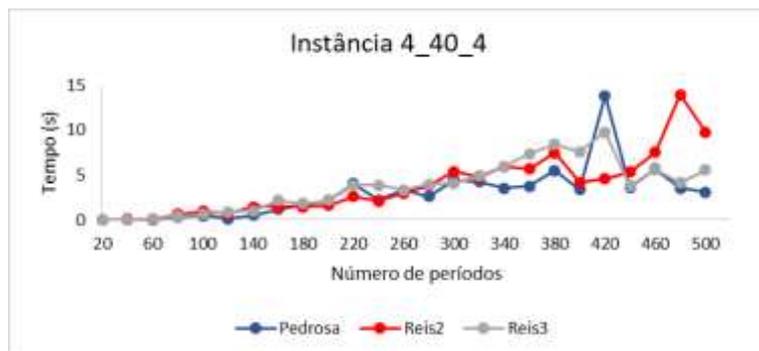


Figura 9 - Comportamento da instância 4_40_4

A instância 4_40_5, ilustrada na Figura 10, apresenta bastante linearidade nos períodos iniciais, mas a partir de 320 períodos começa a apresentar aleatoriedade no modelo de Pedrosa seguido por Reis2 a partir de 360 períodos e por fim Reis3 de 440 períodos em diante. Também se observa que Reis3 tem o pico de tempo de processamento da instância com 500 períodos, o que indica uma maior complexidade de resolução com esta quantidade de períodos.

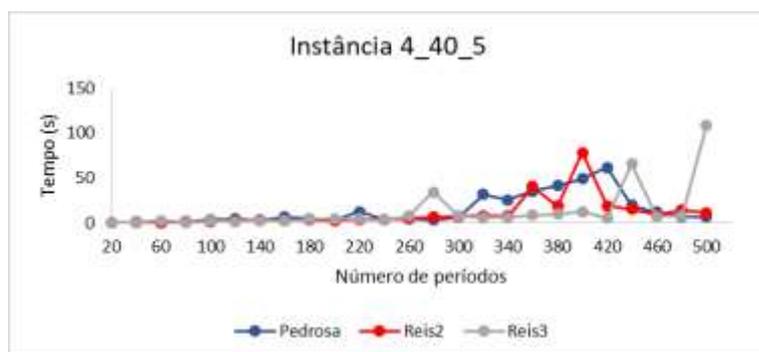


Figura 10 - Comportamento da instância 4_40_5

Analisando o comportamento na instância 4_60_1 com o auxílio da Figura 11, percebe-se que há maior linearidade nos tempos de processamento de Pedrosa e Reis2 em todos os períodos enquanto Reis3 inicia com um comportamento linear, porém a aleatoriedade se sobrepõe com o aumento do número de períodos do mesmo modo que o tempo de processamento também tende a aumentar.

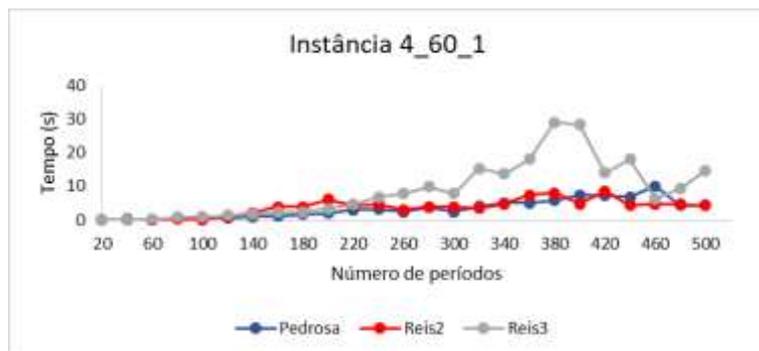


Figura 11 - Comportamento da instância 4_60_1

A Figura 12 apresenta a instância 4_60_2 que possui um padrão de crescimento semelhante para os três modelos, e assim como na maioria das instâncias apresentadas até o momento, há um início mais linearizado, mas com o aumento dos períodos, este comportamento vai se tornando aleatório.

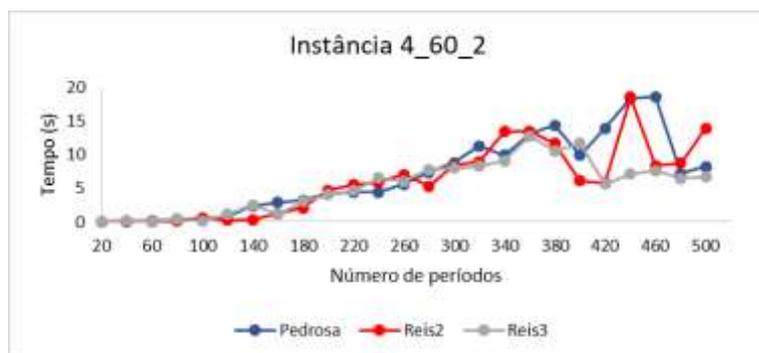


Figura 12 - Comportamento da instância 4_60_2

Já na instância 4_60_3, mostrada na Figura 13, é possível identificar que os modelos de Reis2 e Reis3 apresentam linearidade em quase todos os períodos quando se comparado com Pedrosa, que, a partir de 280 períodos, assume um comportamento bem aleatório. Pedrosa também possui o maior tempo de processamento de todos os testes da instância, próximo de 16 segundos, em 440 períodos.

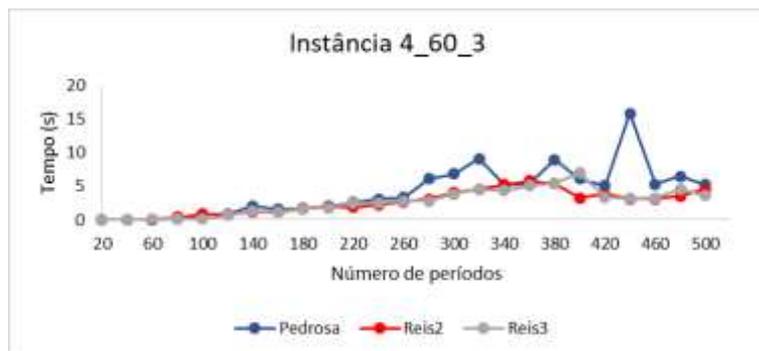


Figura 13 - Comportamento da instância 4_60_3

A instância 4_60_4 apresenta linearidade em todos os três modelos até 400 períodos, sendo que a partir de 420 períodos Reis3 passa a se comportar mais aleatoriamente seguido levemente por Pedrosa e Reis2 a partir de 440 períodos, o que pode ser avaliado pela Figura 14.

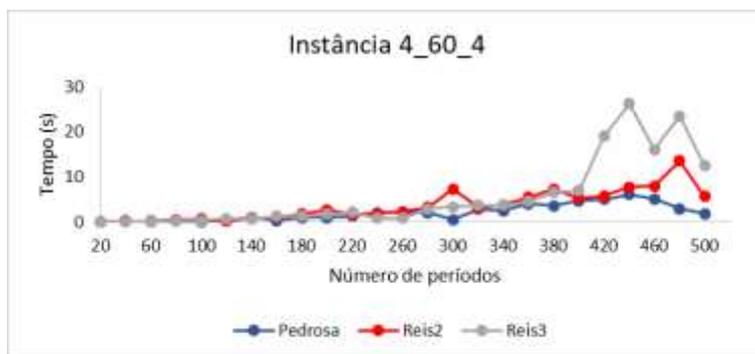
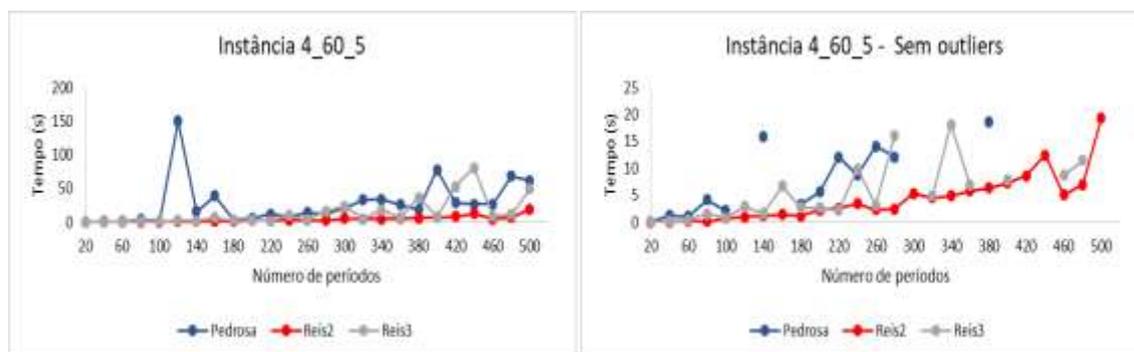


Figura 14 - Comportamento da instância 4_60_4

A instância 4_60_5 também foi dividida nos dois gráficos da Figura 15 para melhor identificação do comportamento das curvas, sendo que o da esquerda contemplou todos os resultados dos testes e o da direita desconsiderou os tempos acima de 21 segundos. A partir disso, foi percebido que esta instância também tende a possuir um aumento da complexidade à medida que o número de períodos se torna maior.



(a) Resultado completo

(b) Sem outliers

Figura 15 - Comportamento da instância 4_60_5 com e sem outliers

Os testes realizados com até 500 períodos foram suficientes para observar o comportamento aleatório e com tempos de processamento crescentes para as políticas de Pedrosa, Reis2 e Reis3, o que não tinha sido observado até então, com os resultados discutidos por Reis (2022). Sendo assim, mesmo para instâncias com apenas 4 silos, foi possível verificar empiricamente o comportamento NP-difícil dessas políticas.

Apenas 3 instâncias não tiveram as suas baterias de testes completadas, que foram 4_20_1, 4_20_2 e 4_40_3, sendo essas consideradas instâncias mais difíceis. Ao se comparar as escalas dos gráficos para cada uma das instâncias com baterias de testes completos, observa-se que a grande maioria dos testes foi realizada em até 40 segundos de processamento, independente do número de períodos de planejamento. De forma geral, pode-se afirmar que, na prática, esses seriam sistemas fáceis de serem geridos pelo uso dos modelos estudados nesse trabalho. Apenas 2 instâncias tiveram tempos de processamento observados acima dessa escala. As instâncias 4_40_5 e 4_60_5, que apresentaram tempos de processamento máximos de até 4 minutos.

4.2 Comportamento gráfico das instâncias com seis silos

Ao avaliar a instância 6_20_1 na Figura 16, é identificado um comportamento de linearidade nos primeiros períodos e de maior aleatoriedade com tendência de aumento dos tempos de processamento nos maiores períodos, assim como pôde ser visto em quase todos os testes com as instâncias de quatro silos. Nesta instância, Pedrosa assumiu o pico do tempo de processamento no teste com 500 períodos, seguido de Reis2 com 480 períodos.

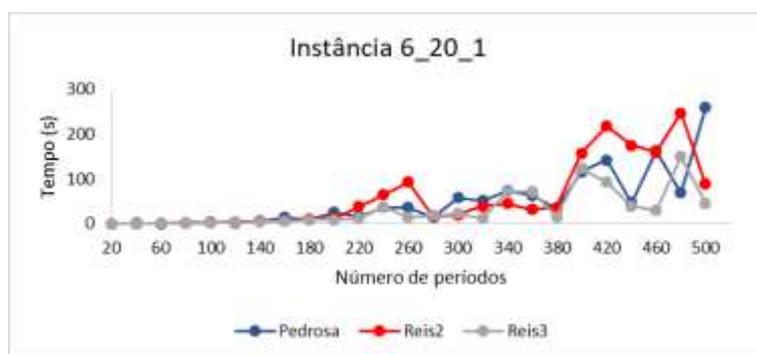
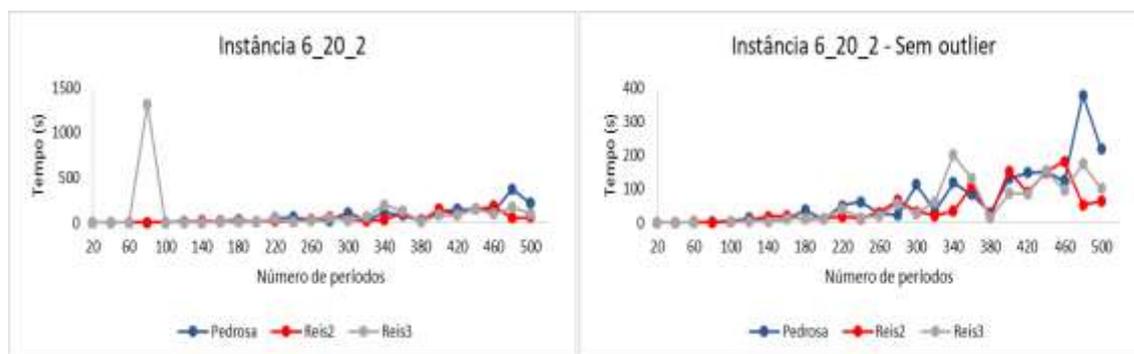


Figura 16 - Comportamento da instância 6_20_1

Para analisar a instância 6_20_2, foi necessário ajustar a base de dados com a retirada do tempo de processamento no modelo de Reis3 com 80 períodos, uma vez que ele é um *outlier* alto e influencia significativamente o eixo do tempo, o que dificulta a leitura do comportamento

gráfico. Devido a isso, na Figura 17 é possível observar do lado esquerdo o gráfico sem quaisquer modificações na base de dados e, na direita, o mesmo gráfico desconsiderando tempos acima de 1000 segundos, o qual facilita a identificação da tendência de aumento do tempo de processamento à medida que os períodos também aumentam, da mesma maneira que em 6_20_1.



(a) Resultado completo (b) Sem outlier
Figura 17 - Comportamento da instância 6_20_2 com e sem outlier

A Figura 18 representa a instância 6_20_3, em que houve estouro de memória nos três modelos, a partir de 480 períodos de planejamento. Entre todos os testes de seis silos ela foi a única em que os três modelos não conseguiram rodar em 100% dos períodos, o que indica uma complexidade maior frente aos demais testes. De maneira geral, apesar do estouro, ela apresenta um comportamento inicial de linearidade e também tende a ser mais aleatória e demorada a partir do momento em que os períodos aumentam, tal como se observou nas duas instâncias apresentadas anteriormente.



Figura 18 - Comportamento da instância 6_20_3

A Figura 19 mostra o comportamento da instância 6_20_4 que, também como as demais, tende a demorar mais para encontrar seus resultados a partir do momento em que os períodos ficam maiores. É perceptível que Pedrosa e Reis3 tiveram mais dificuldades de resolução frente

a Reis2 dado que na maioria dos períodos os tempos de processamento foram sobrepostos. Além disso, percebe-se que o maior tempo gasto para se obter uma solução ótima para a instância pertence ao modelo de Reis3 no teste com quinhentos períodos.

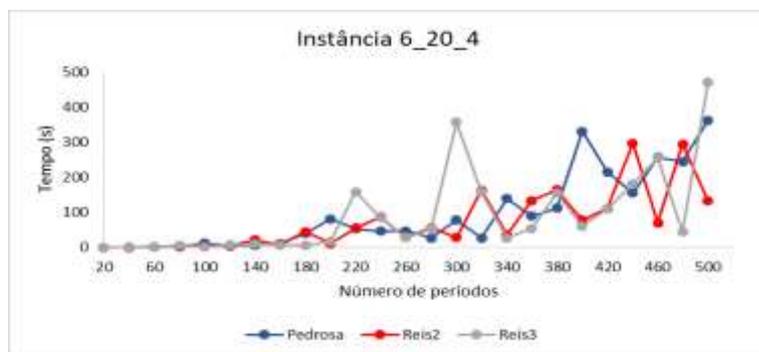


Figura 19 - Comportamento da instância 6_20_4

A instância 6_20_5 ilustrada na Figura 20 demonstra a sua linearidade com baixo tempo de processamento nos primeiros períodos enquanto a partir de 200 períodos há a tendência de aumento do tempo para encontrar a solução ótima dos modelos. Nesta instância Reis2 apresentou o maior tempo de processamento no teste com 480 períodos.

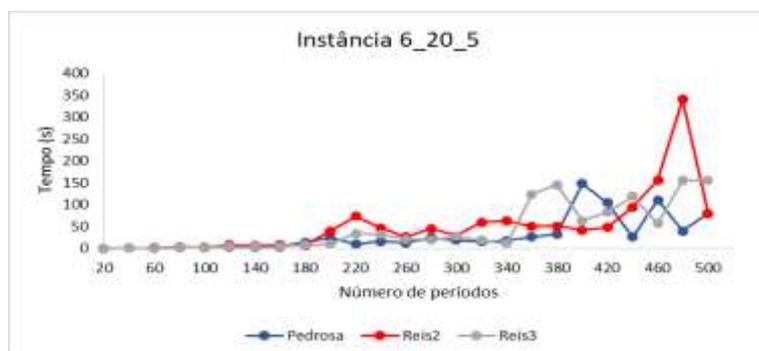


Figura 20 - Comportamento da instância 6_20_5

Na instância 6_40_1 também é possível notar o padrão de comportamento de linearidade nos períodos iniciais e de aleatoriedade com aumento do tempo de processamento nos períodos maiores, sendo este aumento mais suave em Pedrosa seguido de Reis3 e Reis2, nessa ordem. Além disso, é notável na Figura 21 que o modelo de Reis2 possui o maior tempo de processamento entre os três modelos, porém desta vez no teste com 500 períodos.

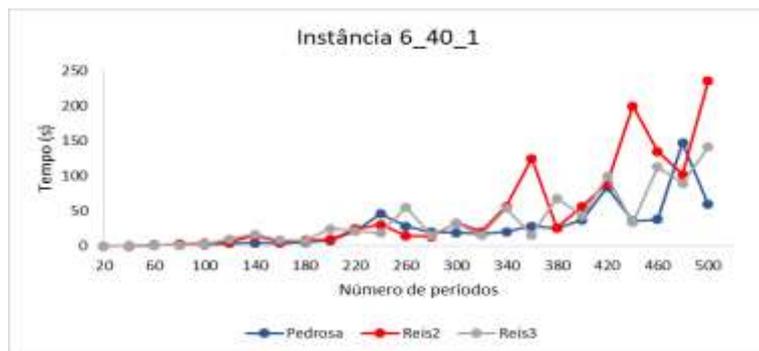


Figura 21 - Comportamento da instância 6_40_1

O modelo de Pedrosa apresentou maior complexidade computacional para a instância 6_40_2, pois já nos primeiros períodos, foram observados altos tempos de processamento e o estouro de memória ocorreu a partir de 200 períodos de planejamento. Inclusive, dado o seu alto tempo de processamento, é difícil avaliar o comportamento gráfico para comparar os três modelos vide a Figura 22.

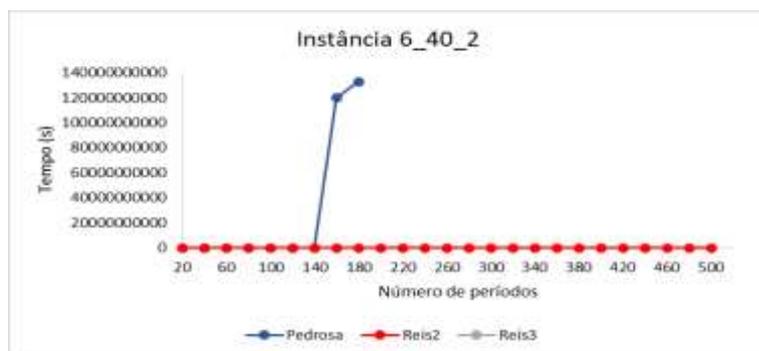


Figura 22 - Comportamento da instância 6_40_2

Ao analisar a Figura 23, que contempla a instância 6_40_3, é perceptível que os tempos são lineares e baixos nos primeiros períodos e a partir de 320 períodos começam a ficar aleatórios e com tendência de aumento. Nesta instância Reis3 atingiu o pico de tempo de resolução com 480 períodos.

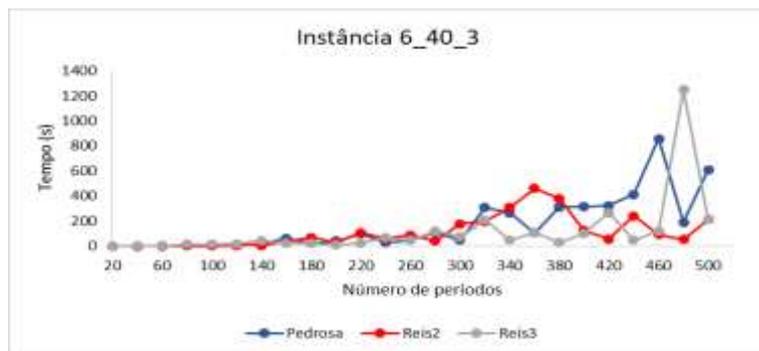
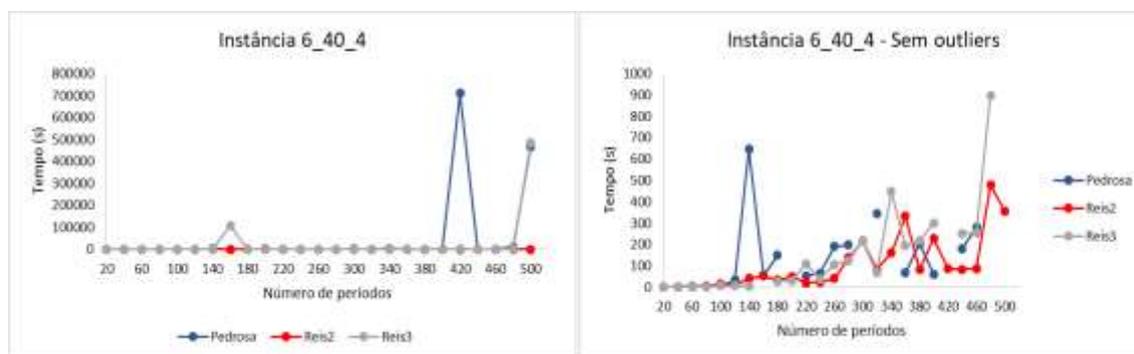


Figura 23 - Comportamento da instância 6_40_3

No gráfico da Figura 24, tem-se a instância 6_40_4, que precisou ser analisada com e sem *outliers*, dada a sua dificuldade de leitura, considerando todos os resultados. Na esquerda, tem-se a representação dos testes com todos os tempos de resolução e na direita foram desconsiderados os tempos de processamento acima de 1000 segundos. Após a retirada dos *outliers*, fica evidente que também há um comportamento parecido com as demais instâncias, em que o começo é linear e com o aumento dos períodos a dificuldade de resolução tende a ser mais aleatória e demorada.



(a) Resultado completo

(b) Sem *outliers*

Figura 24 - Comportamento da instância 6_40_4 com e sem *outliers*

A instância 6_40_5 também apresentou o comportamento parecido com as demais, sendo que a linearidade nos primeiros períodos e aumento nos demais é mais sutil em Pedrosa e Reis2 e mais acentuado em Reis3. O gráfico da Figura 25 demonstra essa particularidade e é visível que os picos de tempo nos três modelos se deram com 500 períodos, o que demonstra maior complexidade de resolução no momento.

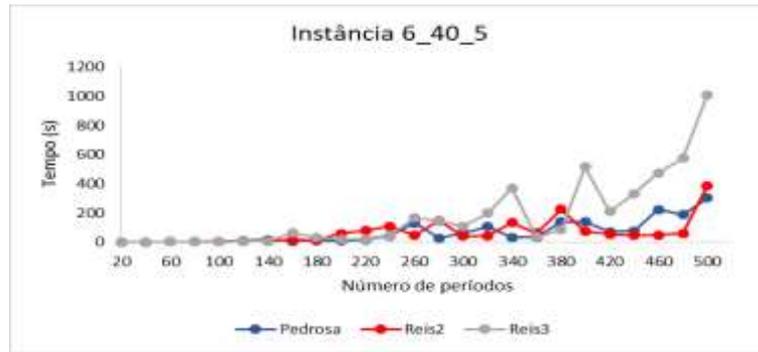


Figura 25 - Comportamento da instância 6_40_5

Pelo gráfico da Figura 26 é visível que Pedrosa se mostra mais complexo que os demais modelos a partir de 320 períodos, dada seus tempos de processamento. Quanto ao comportamento em geral, até 300 períodos se mostra linear para Pedrosa e para Reis2 e Reis3 até 360, porém a partir desses pontos se tornam mais aleatórios para seus respectivos modelos.

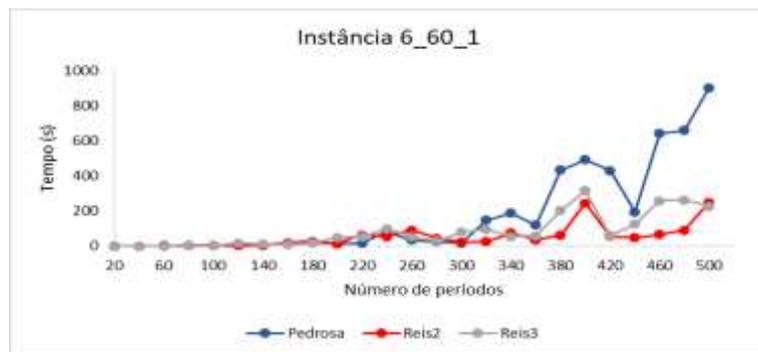
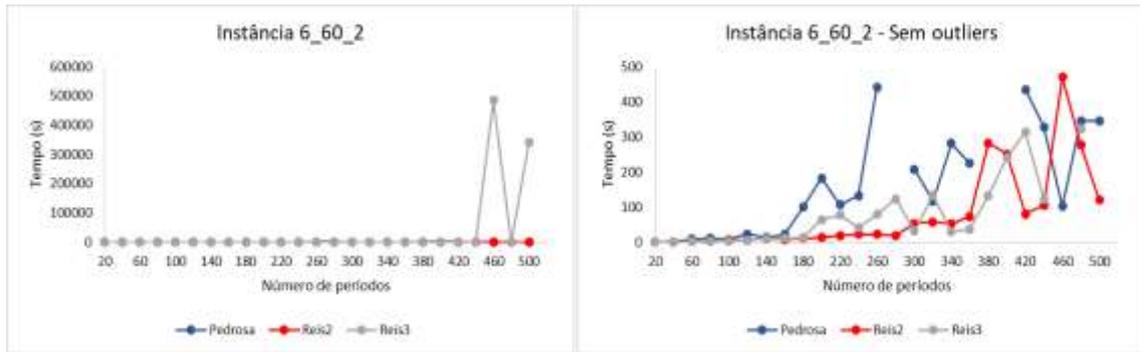


Figura 26 - Comportamento da instância 6_60_1

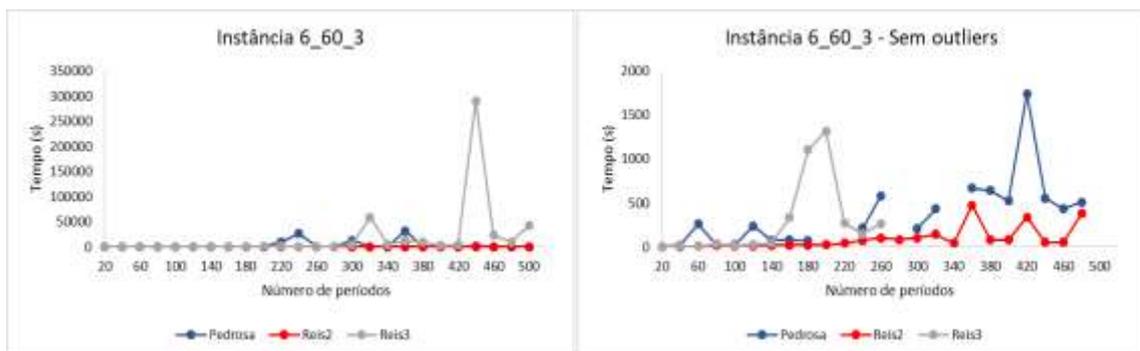
Os modelos de Pedrosa e Reis3 na instância 6_60_2 tiveram alguns tempos de processamento muito maiores que Reis2 em determinados períodos, o que torna a leitura do gráfico difícil. Para facilitar o entendimento de como as curvas se comportam, foram retirados os tempos de processamento que estavam acima de 500 segundos. O gráfico da direita da Figura 27 desconsidera os *outliers*, enquanto o da esquerda contém todos os dados de tempo para resolução dos modelos. O gráfico da esquerda mostra com destaque os picos de processamento em Reis3 com 460 e 500 períodos, nesta ordem, o que mostra maior complexidade de resolução.



(a) Resultado completo (b) Sem outliers
 Figura 27 - Comportamento da instância 6_60_2 com e sem outliers

O modelo de Reis3 também ganha destaque na instância 6_60_3, assim como na instância 6_60_2, como pode ser visto no gráfico da esquerda da Figura 28. Devido aos seus altos tempos de processamento, que dificultam o entendimento do comportamento dos tempos de resolução no gráfico da esquerda, principalmente devido ao teste com 440 períodos. Mas além desse, foram retirados todos os tempos maiores que 5200 segundos, de forma a garantir uma melhor visualização das curvas.

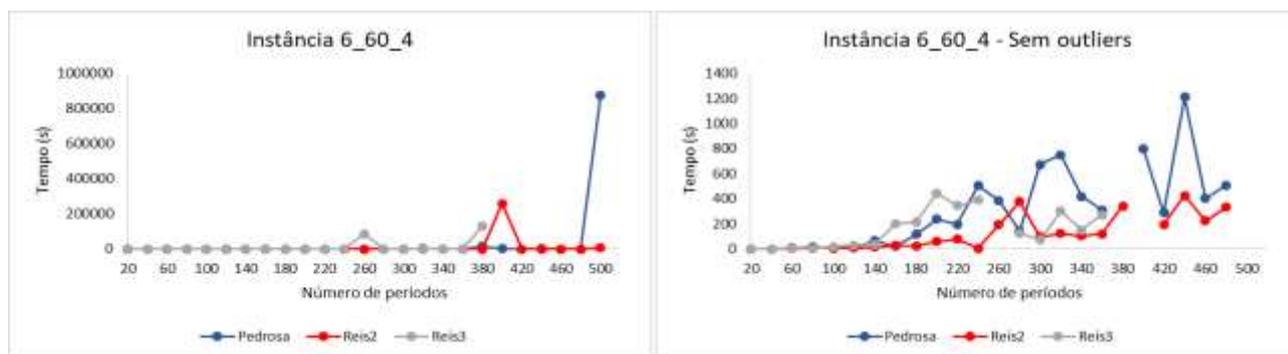
Assim como nas instâncias anteriores, temos um comportamento mais linear com um menor número de períodos e bem aleatório com tendência de aumento com o acréscimo de períodos de processamento. Neste caso em questão, Reis3 se mostrou muito mais complexo que os demais uma vez que fora, desconsiderados dos resultados todos os seus testes a partir de 300 períodos.



(a) Resultado completo (b) Sem outliers
 Figura 28 - Comportamento da instância 6_60_3 com e sem outliers

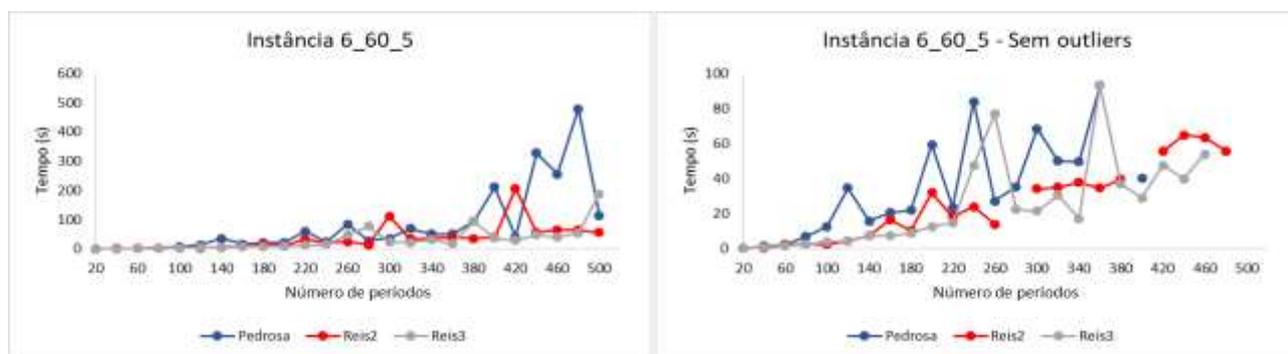
A instância 6_60_5 apresentou um contexto diferente das demais instâncias, pois teve o estouro de memória apenas no modelo de Reis3 a partir de 400 períodos como pode ser visto no gráfico da esquerda da Figura 29, o que mostra sua maior complexidade frente aos demais.

Quanto ao pico de tempo de processamento, nesta instância, foi assumido por Pedrosa com 500 períodos, que se tornou um *outlier*, devido à sua influência bem significativa. Para facilitar a identificação do comportamento dos modelos nos testes, foram retirados todos os tempos de processamento acima de 5500 segundos, o que resultou no gráfico da direita.



(a) Resultado completo (b) Sem *outliers*
 Figura 29 - Comportamento da instância 6_60_4 com e sem *outliers*

A instância 6_60_5 também permitiu a repartição dos gráficos para melhor avaliação do comportamento, dados os tempos considerados como *outliers*, sendo que na esquerda da Figura 30, tem-se o gráfico considerando todos os dados de tempo e, na direita, o gráfico sem *outliers*. Desta forma, foi possível identificar que o pico de processamento se deu em Pedrosa com 480 períodos, como esse mesmo modelo teve maior dificuldade de resolução na maioria dos períodos. Além disso, é visível a aleatoriedade e tendência do aumento do tempo de processamento com um maior dos períodos.



(a) Resultado completo (b) Sem *outliers*
 Figura 30 - Comportamento da instância 6_60_5 com e sem *outliers*

É possível notar que há um aumento da complexidade de resolução em instâncias de mesmo porte ao serem submetidas em testes com um maior número de períodos. Nos testes realizados por Reis (2022) a instância 6_20_4, por exemplo, assumiu os tempos de 0,06 segundos

para o modelo de Pedrosa, 0,03 segundos para Reis2 e 0,03 segundos para Reis3 enquanto nos testes realizados neste trabalho temos tempos de processamento de até 18176 vezes maior como pode ser observado no modelo de Pedrosa com 500 períodos da Tabela 3.

Instância 6_20_4			
Períodos	Pedrosa	Reis2	Reis3
20	0,082	0,071	0,138
40	0,847	0,299	0,514
60	1,815	1,203	1,093
80	2,242	3,944	6,634
100	11,965	3,282	2,529
120	4,251	5,999	7,857
140	6,400	21,206	9,649
160	11,386	7,770	6,140
180	39,089	45,698	5,342
200	81,858	11,545	18,252
220	53,651	55,480	158,395
240	46,538	87,048	84,778
260	47,975	27,942	28,223
280	27,216	57,038	53,226
300	77,973	28,020	357,782
320	26,978	163,149	157,931
340	139,089	36,661	26,870
360	89,792	133,379	54,061
380	112,377	165,113	155,588
400	332,035	77,824	61,307
420	216,188	111,503	109,783
440	155,263	297,256	182,015
460	257,958	70,426	255,100
480	245,050	295,357	45,158
500	363,525	133,056	472,867
Média	94,062	73,611	90,449

Tabela 3 - Tempo de execução em segundos dos modelos - Instância 6_20_4

Observando-se, novamente, as escalas de tempos de processamento para as instâncias de 6 silos, observa-se que 10 das quinze instâncias tiveram seus testes solucionados em até 1.500 segundos de processamento. Dessas 10 instâncias, 6 tiveram seu maior tempo de processamento em até 600 segundos. Quando se comparam as escalas dos tempos de processamento dos testes com instâncias de 4 para 6 silos, é possível observar que as instâncias de 6 silos apresentam complexidade computacional superior, não sendo possível resolver a grande maioria dos testes

em até 4 minutos, como as instâncias de 4 silos. É preciso esperar 25 minutos, considerando-se apenas as instâncias que tiveram todos os seus testes resolvidos.

4.3 Ajuste de curvas

De modo geral, é notável que com o aumento dos períodos, tanto nas instâncias com 4 ou 6 silos, o tempo de processamento tende a ser maior. Outra observação importante é que a complexidade de resolução das instâncias com 6 silos é maior que as de 4 silos, o que pode ser comprovado pelos tempos de processamento em que a média de tempos para 6 silos foi cerca de 4527 segundos, já desconsiderando os testes em que houve estouro de memória, enquanto para 4 silos no mesmo contexto a média ficou em aproximadamente 5 segundos. Em outras palavras, pela média dos tempos, os testes com 6 silos foram 905 vezes mais demorados que os de 4 silos.

O estudo de Reis (2022) sugeriu linearidade dos tempos de processamento, ao comparar os resultados de Pedrosa, Reis2 e Reis3, com testes de 20, 40 e 60 períodos. Essa linearidade realmente existe quando testados em um menor número de períodos de processamento, assim como foi feito em seus testes de Reis (2022). Porém, conforme visto anteriormente neste trabalho, existe um momento em que a aleatoriedade supera a linearidade na maioria dos testes, dado o aumento dos períodos, assim como os tempos de processamento tendem a ser maiores.

Esta aleatoriedade com tendência de aumento leva a uma ideia de comportamento exponencial, o que pode ser observado com o ajuste de curvas exponencial dos modelos de Pedrosa, Reis2 e Reis3 com 4 e 6 silos. Para os casos de 4 silos, em que os tempos de processamento são muito baixos e a variação também é pequena, também foi realizado o ajuste linear, uma vez que o ajuste exponencial não se adequou muito bem aos dados.

4.3.1 Modelo de Pedrosa

O ajuste de curva do modelo de Pedrosa é representado pela Figura 31, em que é difícil identificar as curvas devido os *outliers* das médias de tempo de processamento, encontrados principalmente nos testes com 6 silos em 160, 180, 420 e 500 períodos, os quais podem ser melhor identificados pela Tabela 4.



Figura 31 - Ajuste exponencial de curvas para o modelo de Pedrosa com 4 e 6 silos

Pedrosa - Resultado Completo		
Períodos	Média de tempo 4 silos	Média de tempo 6 silos
20	0,040	0,121
40	0,569	0,649
60	212,034	4,458
80	7,807	34,055
100	6,875	111,071
120	106,690	141,106
140	608,374	482,527
160	701,648	800000022,244
180	1160,511	8866666706,614
200	649,138	132,080
220	1831,863	764,547
240	3,254	1972,504
260	3,877	125,322
280	4,458	168,082
300	5,306	1133,311
320	9,031	167,792
340	8,629	354,317
360	9,196	2387,092
380	9,888	1454,960
400	14,504	272,960
420	13,175	50893,209
440	10,159	356,797
460	8,800	289,909
480	9,806	1051,024
500	9,143	103769,947

Tabela 4 - Tempo médio de execução dos testes por período – Modelo de Pedrosa

Esta tabela apresenta todos os tempos médios de processamento do modelo de Pedrosa por período tanto para 4 quanto para 6 silos, que foi utilizada para elaboração do gráfico da Figura

31. Quanto aos resultados dos ajustes de curvas exponenciais na Figura 31, o fato do R-quadrado ser inferior a zero, tanto para 4 silos com resultado de -0,408 quanto para 6 silos com resultado de -0,119, indica que o modelo estatístico não se ajustou bem aos resultados. O motivo é a influência dos *outliers*, como também pelo baixo número de instâncias que foram testadas, de forma que não é possível chegar a uma conclusão mais assertiva em relação a real tendência de comportamento dos resultados.

Para exemplificar, foram desconsiderados todos os *outliers* para 4 e 6 silos, que resultou nos resultados da Tabela 5, que foram utilizados como base para a construção do gráfico da Figura 32. Com isso, foi obtido um R-quadrado positivo, sendo de 0,4522 para 4 silos e 0,289 para 6 silos, que apesar de positivos, ainda são baixos, ou seja, devido à quantidade de instâncias ainda serem poucas, não foi possível alcançar bons resultados ao ajustar exponencialmente as curvas.



Figura 32 - Ajuste exponencial de curvas para o modelo de Pedrosa com 4 e 6 silos sem *outliers*

Pedrosa - Sem outliers		
Períodos	Média de tempo 4 silos	Média de tempo 6 silos
20	0,040	0,121
40	0,569	0,649
60	0,781	4,458
80	7,807	34,055
100	6,875	111,071
120	12,277	141,106
140	2,377	482,527
160	4,484	23,833
180	1,792	42,801
200	2,103	132,080
220	3,948	764,547
240	3,254	1972,504
260	3,877	125,322
280	4,458	168,082

300	5,306	1133,311
320	9,031	167,792
340	8,629	354,317
360	9,196	2387,092
380	9,888	1454,960
400	14,504	272,960
420	13,175	211,913
440	10,159	356,797
460	8,800	289,909
480	9,806	1051,024
500	9,143	352,712

Tabela 5 - Tempo médio de execução dos testes por período – Modelo de Pedrosa sem *outliers*

Ainda para o modelo de Pedrosa, para facilitar a visualização dos ajustes exponenciais das curvas desconsiderando os *outliers*, foram construídos gráficos separando os testes com 4 e 6 silos, como é ilustrado pelas Figuras 33 e 34, respectivamente. No caso de 4 silos, foi acrescentado o ajuste linear no mesmo gráfico, uma vez que o ajuste exponencial não foi suficiente, dado o baixo número de testes e variações entre os tempos.

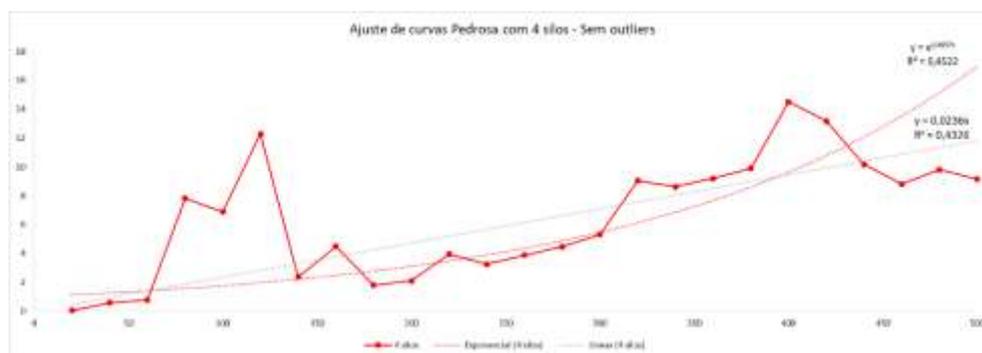


Figura 33 - Ajuste exponencial e linear de curvas para o modelo de Pedrosa com 4 silos sem *outliers*

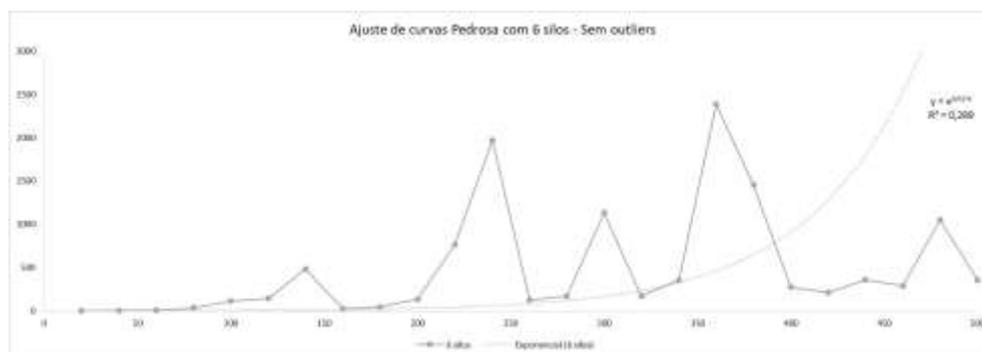


Figura 34 - Ajuste exponencial de curvas para o modelo de Pedrosa com 6 silos sem *outliers*

4.3.2 Modelo de Reis2

O modelo de Reis2 tem seu ajuste de curvas exponenciais para 4 e 6 silos ilustrados pela Figura 35. Os testes com 4 silos resultaram em um R-quadrado de -0,615, o que indica que não houve um bom ajuste estatístico dos resultados, enquanto para 6 silos o resultado foi de 0,7457, o que demonstra uma melhor relação estatística dos dados, mesmo existindo *outliers*.



Figura 35 - Ajuste exponencial de curvas para o modelo de Reis2 com 4 e 6 silos

Neste modelo também houve algumas médias consideradas como *outliers*, o que dificulta a visualização das curvas no gráfico. Deste modo, para facilitar a visualização do ajuste exponencial das curvas, os gráficos de 4 e 6 silos foram separados e estão representados pelas Figuras 36 e 37, nesta ordem. Os tempos *outliers*, que tinham grande influência nas médias, foram desconsiderados, o que refletiu em um aumento do R-quadrado para ambos os casos. Esse aumento indica maior grau de confiança e relação entre os dados, principalmente para 6 silos visto que apresenta um resultado de 83%, que define uma forte relação entre os dados utilizados.

Para o gráfico de 4 silos sem *outliers*, foi acrescentado o ajuste linear, porém o mesmo resultou em um valor negativo, ou seja, a relação entre os dados não existiu.

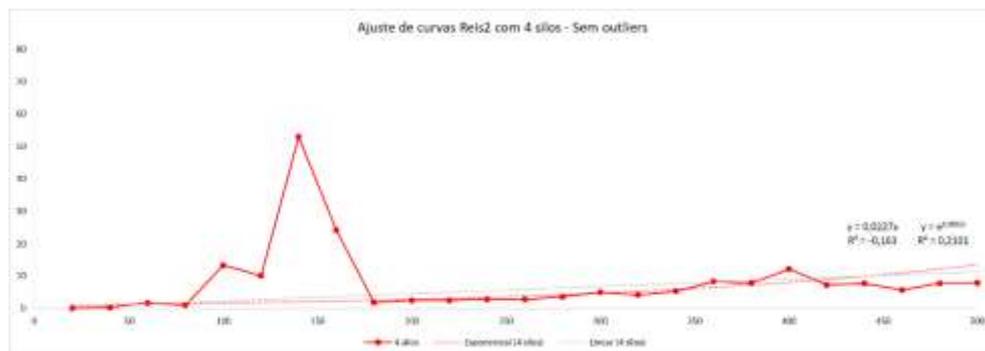


Figura 36 - Ajuste exponencial e linear de curvas para o modelo de Reis2 com 4 silos sem *outliers*

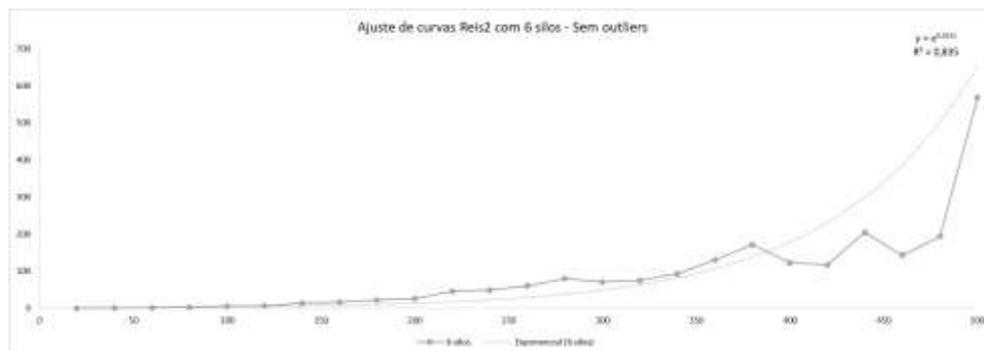


Figura 37 - Ajuste exponencial de curvas para o modelo de Reis2 com 6 silos sem *outliers*

4.3.3 Modelo de Reis3

O modelo de Reis3 foi ajustado exponencialmente assim como os demais, no qual percebem-se resultados de R-quadrado próximos do modelo de Reis2, em que 4 silos obteve um resultado negativo de -0,689, indicando baixo ajuste estatístico dos resultados, enquanto para 6 silos, o resultado foi positivo de 0,6786, mesmo havendo médias *outliers* discrepantes em alguns períodos. Estes resultados podem ser observados na Figura 38.



Figura 38 - Ajuste exponencial de curvas para o modelo de Reis3 com 4 e 6 silos

Da mesma maneira que nos dois modelos anteriores, para que o ajuste de curvas fique mais visual, os gráficos para 4 e 6 silos foram divididos, sendo representados pelas Figuras 39 e 40, respectivamente. Ademais, também foram desconsiderados os tempos *outliers* das médias e realizado o ajuste linear para o gráfico de 4 silos. O R-quadrado do ajuste exponencial aumenta, porém ainda não há uma forte relação entre os resultados, seja para 4 ou 6 silos.

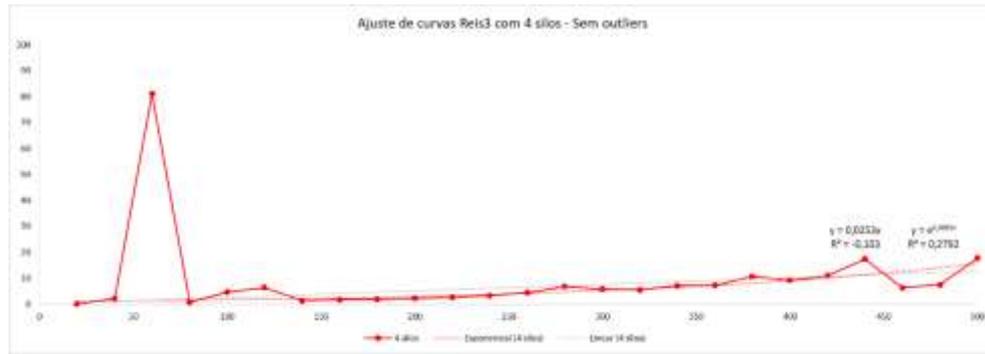


Figura 39 - Ajuste exponencial e linear de curvas para o modelo de Reis3 com 4 silos sem *outliers*

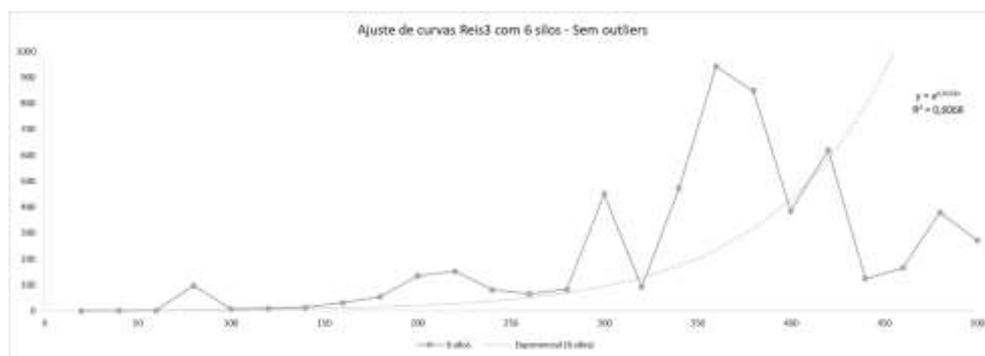


Figura 40 - Ajuste exponencial de curvas para o modelo de Reis3 com 6 silos sem *outliers*

Em resumo, estes testes só puderam ser realizados para os modelos de Pedrosa, Reis2 e Reis3, pois tiveram o comportamento computacional avaliados com tendência dentro do conjunto de testes realizados por Reis (2022), enquanto os demais modelos estouraram a memória nos testes com até 60 períodos.

Com isso, é válido ressaltar que o aumento do número de períodos realmente influencia diretamente no tempo em que os modelos são resolvidos. Neste trabalho em questão, com todos os testes e ajustes de curvas realizados, fica evidente que nos 3 modelos testados, houve comportamentos similares de aumento da complexidade computacional, com tendência de serem exponenciais, com o aumento do número de silos e de períodos, como era esperado para modelos considerados NP-difíceis.

As instâncias de 9 e 15 silos, por exemplo, não foram consideradas neste trabalho devido à alta complexidade computacional apresentadas, o que as impediu de executar os testes em tempo hábil.

4.4 Clusterização dos testes

Cada teste realizado apresenta a sua própria particularidade, mas ainda assim é possível agrupá-los de acordo com o grau de complexidade encontrado para resolução dos problemas. Sendo assim, as instâncias foram particionadas em 3 *clusters*, sendo instâncias fáceis, instâncias médias e instâncias difíceis, em que o grau de complexidade foi definido a partir do tempo de processamento dos testes. Além disso, há a necessidade de se dividir a *clusterização* para 4 e 6 silos, dadas as discrepâncias nos tempos de processamento.

4.4.1 Instâncias com 4 silos

4.4.1.1 Fáceis

O agrupamento das instâncias fáceis se dá pelas instâncias que apresentaram o menor grau de complexidade de resolução, ou seja, aquelas que foram executadas em um menor tempo. Sendo assim, considerando o tempo médio de processamento de todas as instâncias de 4 silos, foram definidas como fáceis todas aquelas que tiveram um tempo de processamento médio menor que 4 segundos e não tiveram modelos que estouraram a memória. Nessa ocasião, têm-se as instâncias da Tabela 6, que contempla a instância e seu respectivo tempo de processamento médio em ordem crescente.

4 silos - Fáceis	
Instância	Tempo de processamento médio (s)
4_20_5	2,319
4_40_1	2,322
4_40_2	2,553
4_20_4	2,789
4_60_3	3,115
4_40_4	3,457
4_20_3	3,650
4_60_4	3,712

Tabela 6 - Instâncias de 4 silos com tempo médio até 4 segundos e sem estouro de memória

Ainda sobre o agrupamento de instâncias fáceis, é possível separá-las por modelo. A Tabela 7 contempla as instâncias fáceis para o modelo de Pedrosa, seguido pela Tabela 8 que

apresenta as instâncias fáceis para o modelo de Reis2 e, por fim, a Tabela 9 que representa as instâncias fáceis para o modelo de Reis3. Ambas desconsideraram as instâncias onde houve estouro de memória durante o processamento dos testes.

Pedrosa - 4 silos - Fáceis	
Instância	Tempo de processamento médio (s)
4_20_5	1,437
4_60_4	1,999
4_40_1	2,075
4_40_2	2,524
4_40_4	2,934
4_20_3	3,057
4_60_1	3,328
4_20_1	3,613
4_20_4	3,711

Tabela 7 - Instâncias de 4 silos com tempo médio menor que 4 segundos para o modelo de Pedrosa

Reis2 - 4 silos - Fáceis	
Instância	Tempo de processamento médio (s)
4_20_4	2,296
4_40_1	2,325
4_60_3	2,577
4_40_2	3,037
4_20_5	3,072
4_60_4	3,580
4_20_3	3,626
4_60_1	3,707
4_40_4	3,779

Tabela 8 - Instâncias de 4 silos com tempo médio menor que 4 segundos para o modelo de Reis2

Reis3 - 4 silos - Fáceis	
Instância	Tempo de processamento médio (s)
4_40_2	2,100
4_20_4	2,360
4_20_5	2,449
4_40_1	2,567
4_60_3	2,625
4_40_4	3,658

Tabela 9 - Instâncias de 4 silos com tempo médio menor que 4 segundos para o modelo de Reis3

Após o agrupamento das instâncias fáceis por modelo, ainda é possível identificar pela Tabela 10 quais instâncias se repetem em todos os modelos com tempo de processamento menor que 4 segundos. Também é válido ressaltar que todas elas foram contempladas anteriormente no primeiro agrupamento por média de tempo de processamento de todos os modelos em instâncias de 4 silos da Tabela 6.

4 silos – Fáceis recorrentes		
Modelo	Instância	Tempo de processamento médio (s)
Reis2	4_20_4	2,296
Reis3	4_20_4	2,360
Pedrosa	4_20_4	3,711
Pedrosa	4_20_5	1,437
Reis3	4_20_5	2,449
Reis2	4_20_5	3,072
Pedrosa	4_40_1	2,075
Reis2	4_40_1	2,325
Reis3	4_40_1	2,567
Reis3	4_40_2	2,100
Pedrosa	4_40_2	2,524
Reis2	4_40_2	3,037
Pedrosa	4_40_4	2,934
Reis3	4_40_4	3,658
Reis2	4_40_4	3,779

Tabela 10 - Instâncias de 4 silos com tempo médio menor que 4 segundos para todos os modelos

4.4.1.2 Médias

Para o agrupamento das instâncias com dificuldade média de resolução para o contexto com 4 silos, foi definido que os tempos de processamento devem estar entre 4 e 8 segundos. Seguindo a linha das instâncias fáceis, primeiro foram identificadas de forma geral todas as instâncias que possuem um tempo de processamento médio entre o período definido. Com isso, foi elaborada a Tabela 11, que contempla estas instâncias ordenadas de forma crescente.

4 silos - Médias

Instância	Tempo de processamento médio (s)
4_60_1	5,243
4_60_2	6,023

Tabela 11 - Instâncias de 4 silos com tempo médio entre 4 e 8 segundos sem estouro de memória

Outro ponto válido de ressaltar é que as duas instâncias sinalizadas na tabela acima apresentam nível mínimo e máximo iniciais próximos e conseqüentemente as amplitudes, assim como, neste caso, a média dos valores dos níveis iniciais também são próximas, como é possível observar na Tabela 12.

4 silos - Médias

Níveis iniciais dos silos

Instância	Silo 1	Silo 2	Silo 3	Silo 4	Média	Nível mais baixo	Nível mais alto	Amplitude
4_60_1	47	58	91	27	56	27	91	64
4_60_2	81	23	56	58	55	23	81	58

Tabela 12 – Informações dos níveis dos silos das instâncias 4_60_1 e 4_60_2

Também foram realizados os agrupamentos por modelo de Pedrosa, Reis2 e Reis3, nesta ordem, pelas Tabelas 13, 14 e 15, respectivamente.

Pedrosa - 4 silos - Médias

Instância	Tempo de processamento médio (s)
4_60_3	4,142
4_60_2	6,792

Tabela 13 - Instâncias de 4 silos com tempo médio entre 4 e 8 segundos para o modelo de Pedrosa

Reis2 - 4 silos - Médias

Instância	Tempo de processamento médio (s)
4_60_5	4,223
4_60_2	6,018

Tabela 14 - Instâncias de 4 silos com tempo médio entre 4 e 8 segundos para o modelo de Reis2

Reis3 - 4 silos - Médias	
Instância	Tempo de processamento médio (s)
4_20_3	4,266
4_60_2	5,259
4_60_4	5,556

Tabela 15 - Instâncias de 4 silos com tempo médio entre 4 e 8 segundos para o modelo de Reis3

No cenário de média dificuldade só tivemos a recorrência da instância 4_60_2, fato evidenciado pela Tabela 16.

4 silos - Média recorrente		
Modelo	Instância	Tempo de processamento médio (s)
Reis3	4_60_2	5,259
Reis2	4_60_2	6,018
Pedrosa	4_60_2	6,792

Tabela 16 - Instância de 4 silos com tempo médio entre 4 e 8 segundos para todos os modelos

4.4.1.3 Difíceis

As instâncias foram agrupadas como difíceis a partir do momento em que obtiveram tempo de processamento maior que 8 segundos ou houve estouro de memória em algum dos modelos testados. Além disso, também foram ordenadas de forma crescente, sendo que nas instâncias onde houve estouro de memória, que possuem o tempo de processamento sinalizado por “*”, foi definido como mais difícil aquelas com estouro de memória a partir dos menores períodos. Sendo assim, a Tabela 17 contempla a média de tempos de todas as instâncias difíceis.

4 silos - Difíceis	
Instância	Tempo de processamento médio (s)
4_40_5	12,209
4_60_5	15,331
4_40_3	*
4_20_2	*

Tabela 17 - Instâncias de 4 silos com tempo médio maior que 8 segundos ou com estouro de memória

Neste caso em questão a instância 4_40_3 é caracterizada como mais fácil que a instância

4_20_2 uma vez que teve estouro de memória a partir de 260 períodos para Pedrosa e 380 períodos para Reis2 e Reis3 enquanto na instância 4_20_2 o estouro em Pedrosa se deu a partir de 180 períodos e Reis2 e Reis3 a partir de 320 períodos.

Ademais, foi verificado que as instâncias 4_20_2, 4_40_3 e 4_40_5 apresentam as menores amplitudes nos níveis de todas as instâncias de 4 silos testadas, o que pode significar um fator de complexidade para a resolução dos modelos dado que há uma exigência de maior rapidez na tomada de decisão para cumprimento dos objetivos iniciais. Um fato interessante é que a instância 4_40_3 apresenta os níveis iniciais de todos os silos iguais, o que aparentemente aumenta a sua complexidade dado a inexistência de amplitude entre níveis.

Já a instância 4_60_5, apesar de não possuir uma amplitude pequena, ainda apresenta uma média dos níveis iniciais baixa quando comparada com as demais instâncias de 4 silos.

As informações dos níveis podem ser vistas pela Tabela 18.

4 silos - Difíceis								
Níveis iniciais dos silos								
Instância	Silo 1	Silo 2	Silo 3	Silo 4	Média	Nível mais baixo	Nível mais alto	Amplitude
4_20_2	10	4	7	12	8	4	12	8
4_40_3	50	50	50	50	50	50	50	0
4_40_5	9	44	15	6	19	6	44	38
4_60_5	10	73	28	12	31	10	73	63

Tabela 18 - Informações dos níveis dos silos das instâncias 4_20_2, 4_40_3, 4_40_5 e 4_60_5

Os agrupamentos por modelo também foram realizados conforme pode ser observado nas Tabelas 19 a 21, as quais também foram ordenadas de forma crescente e respeitaram a ordem do estouro de memória.

Pedrosa - 4 silos - Difíceis	
Instância	Tempo de processamento médio (s)
4_40_5	13,795
4_60_5	27,679
4_40_3	*
4_20_2	*

Tabela 19 - Instâncias de 4 silos com tempo médio maior que 8 segundos ou com estouro no modelo de Pedrosa

Reis2 - 4 silos - Difíceis	
Instância	Tempo de processamento médio (s)
4_40_5	10,407
4_40_3	*
4_20_2	*
4_20_1	*

Tabela 20 - Instâncias de 4 silos com tempo médio maior que 8 segundos ou com estouro no modelo de Reis2

Reis3 - 4 silos - Difíceis	
Instância	Tempo de processamento médio (s)
4_60_1	8,695
4_40_5	12,426
4_60_5	14,091
4_40_3	*
4_20_2	*

Tabela 21 - Instâncias de 4 silos com tempo médio maior que 8 segundos ou com estouro no modelo de Reis3

Assim como nos demais *clusters*, também foi possível agrupar as instâncias que apresentaram recorrência nos três modelos, as quais podem ser observadas pela Tabela 22.

4 silos - Difíceis recorrentes		
Modelo	Instância	Tempo de processamento médio (s)
Reis2	4_20_2	*
Reis3	4_20_2	*
Pedrosa	4_20_2	*
Reis2	4_40_3	*
Reis3	4_40_3	*
Pedrosa	4_40_3	*
Reis2	4_40_5	10,407
Reis3	4_40_5	12,426
Pedrosa	4_40_5	13,795

Tabela 22 - Instância de 4 silos com tempo maior que 8 segundos ou com estouro de memória

4.4.2 Instâncias com 6 silos

4.4.2.1 Fáceis

Assim como nas instâncias de 4 silos, tem-se o primeiro agrupamento das instâncias

fáceis considerando o tempo médio de processamento das instâncias em que não houve estouro de memória em nenhum dos modelos, sendo que foram consideradas fáceis aquelas com tempo de processamento menor que 70 segundos.

A Tabela 23 contempla as instâncias de 6 silos consideradas como de menor complexidade, ordenadas de forma crescente com o seu respectivo tempo de processamento, ou seja, da menos complexa para a mais complexa dentro do cluster das instâncias fáceis.

6 silos - Fáceis	
Instância	Tempo de processamento médio (s)
6_40_1	37,037
6_20_5	41,642
6_20_1	46,688
6_60_5	49,105
6_20_2	73,543

Tabela 23 - Instâncias de 6 silos com tempo médio menor que 70 segundos e sem estouro de memória

Ao avaliar as instâncias fáceis de 6 silos percebe-se que ambas apresentam média dos níveis iniciais próximas, assim como suas amplitudes, o que pode exemplificar os padrões parecidos de comportamento em relação aos tempos de processamento e consequentemente sua complexidade.

As informações dos níveis dos silos estão contempladas na Tabela 24.

6 silos - Fáceis										
Níveis iniciais dos silos										
Instância	Silo 1	Silo 2	Silo 3	Silo 4	Silo 5	Silo 6	Média	Nível mais baixo	Nível mais alto	Amplitude
6_20_1	80	20	7	15	45	32	33	7	80	73
6_20_2	90	20	55	30	70	10	46	10	90	80
6_20_5	10	20	30	40	50	60	35	10	60	50
6_40_1	34	61	11	4	4	78	32	4	78	74
6_60_5	56	58	14	26	22	86	44	14	86	72

Tabela 24 - Informações dos níveis dos silos das instâncias 6_20_1, 6_20_2, 6_20_5, 6_40_1 e 6_60_5

As instâncias de 6 silos consideradas como fáceis também foram agrupadas por modelo, as quais estão explicitadas pelas Tabelas 25 a 27.

Pedrosa - 6 silos - Fáceis	
Instância	Tempo de processamento médio (s)

6_40_1	26,612
6_20_5	29,456
6_20_1	49,612
6_40_5	65,686

Tabela 255 - Instâncias de 6 silos com tempo médio menor que 70 segundos para o modelo de Pedrosa

Reis2 - 6 silos - Fáceis

Instância	Tempo de processamento médio (s)
6_60_5	35,026
6_20_2	44,353
6_40_1	48,699
6_20_5	51,293
6_60_1	52,512
6_20_1	58,877
6_40_5	66,521

Tabela 26 - Instâncias de 6 silos com tempo médio menor que 70 segundos para o modelo de Reis2

Reis3 - 6 silos - Fáceis

Instância	Tempo de processamento médio (s)
6_60_5	30,788
6_20_1	31,576
6_40_1	35,799
6_20_5	44,175

Tabela 27 - Instâncias de 6 silos com tempo médio menor que 70 segundos para o modelo de Reis3

As instâncias que foram agrupadas como fáceis de forma recorrente podem ser visualizadas na Tabela 28.

6 silos - Fáceis recorrentes

Modelo	Instância	Tempo de processamento médio (s)
Reis3	6_20_1	31,576
Pedrosa	6_20_1	49,612
Reis2	6_20_1	58,877
Pedrosa	6_20_5	29,456
Reis3	6_20_5	44,175
Reis2	6_20_5	51,293
Pedrosa	6_40_1	26,612
Reis3	6_40_1	35,799

4.4.2.2 Médias

As instâncias de 6 silos foram classificadas com complexidade média com tempos a partir de 70 segundos e menores que 180 segundos. Sendo assim, na Tabela 29, é possível verificar quais instâncias se enquadram nesse *cluster*, já desconsiderando aquelas em que houve estouro de memória.

6 silos - Médias	
Instância	Tempo de processamento médio (s)
6_20_2	73,543
6_20_4	86,041
6_40_5	102,982
6_60_1	105,318
6_40_3	130,800

Tabela 29 - Instâncias de 6 silos com tempo maior que 70 ou menor que 180 segundos

As instâncias de 6 silos classificadas com nível médio de dificuldade também apresentam média dos níveis iniciais dos silos e amplitudes próximas conforme pode ser visto na Tabela 30. Esse fator implica em um padrão de comportamento entre as instâncias ao se tratar do tempo de processamento.

6 silos - Médias										
Níveis iniciais dos silos										
Instância	Silo 1	Silo 2	Silo 3	Silo 4	Silo 5	Silo 6	Média	Nível mais baixo	Nível mais alto	Amplitude
6_20_2	90	20	55	30	70	10	46	10	90	80
6_20_4	77	13	23	5	63	15	33	5	77	72
6_40_3	22	90	70	60	76	16	56	16	90	74
6_40_5	12	8	15	19	79	74	35	8	79	71
6_60_1	64	53	59	88	41	33	56	33	88	55

Tabela 260 - Informações dos níveis dos silos das instâncias 6_20_2, 6_20_4, 6_40_3, 6_40_5 e 6_60_1

Para cada modelo também foram definidos os *clusters* de instâncias com dificuldade média, conforme pode ser visto pelas Tabelas 31 a 33.

Pedrosa - 6 silos - Médias

Instância	Tempo de processamento médio (s)
6_60_5	81,501
6_20_4	94,062
6_40_3	167,619
6_60_1	179,345

Tabela 271 - Instâncias de 6 silos com tempo maior que 70 ou menor que 1880 segundos no modelo de Pedrosa

Reis2 - 6 silos - Médias

Instância	Tempo de processamento médio (s)
6_20_4	73,611
6_60_2	78,640
6_60_3	87,321
6_40_2	103,289
6_40_4	105,476
6_40_3	109,874

Tabela 282 - Instâncias de 6 silos com tempo maior que 70 ou menor que 1880 segundos no modelo de Reis2

Reis3 - 6 silos - Médias

Instância	Tempo de processamento médio (s)
6_60_1	84,098
6_20_4	90,449
6_20_2	105,043
6_40_3	114,908
6_40_5	176,738

Tabela 293 - Instâncias de 6 silos com tempo maior que 70 ou menor que 180 segundos no modelo de Reis3

As instâncias que tiveram aparição recorrente na complexidade definida como média são explicitadas pela Tabela 34.

6 silos - Médias recorrentes

Modelo	Instância	Tempo de processamento médio (s)
Reis2	6_20_4	73,611
Reis3	6_20_4	90,449

Pedrosa	6_20_4	94,062
Reis2	6_40_3	109,874
Reis3	6_40_3	114,908
Pedrosa	6_40_3	167,619

Tabela 304 - Instância de 6 silos com tempo maior que 70 ou menor que 180 segundos e sem estouro de memória

4.4.2.3 Difíceis

A classificação das instâncias difíceis com 6 silos se deu pelas instâncias com tempo de processamento médio maior que 180 segundos ou em que houve estouro de memória ao menos em um dos modelos. A Tabela 35 representa a visão geral das instâncias mais difíceis, em que segue a ordem crescente por nível de complexidade.

6 silos - Difíceis	
Instância	Tempo de processamento médio (s)
6_60_3	7478,570
6_60_2	11137,789
6_40_4	23982,636
6_60_4	*
6_40_2	*
6_20_3	*

Tabela 315 - Instâncias de 6 silos com tempo maior que 180 segundos ou com estouro de memória

As instâncias difíceis também tiveram os seus agrupamentos por modelos, os quais são representados pelas Tabelas 36 a 38.

Pedrosa - 6 silos - Difíceis	
Instância	Tempo de processamento médio (s)
6_60_2	272,317
6_60_3	3564,390
6_60_4	36004,468
6_40_4	47849,130
6_20_3	*
6_40_2	*

Tabela 326 - Instâncias de 6 silos com tempo maior que 180 segundos ou com estouro no modelo de Pedrosa

Uma observação importante é que ao comparar a ordem de dificuldade das instâncias

entre o modelo de Pedrosa da Tabela 32 e a visão geral da Tabela 31 é que as instâncias que tiveram estouro de memória se invertem no ordenamento, visto que na instância 6_20_3 Pedrosa tem estouro de memória apenas a partir de 480 períodos enquanto na 6_40_2 o seu estouro começa com 200 períodos de planejamento.

Reis2 - 6 silos - Difíceis	
Instância	Tempo de processamento médio (s)
6_60_4	10667,162
6_20_3	*

Tabela 337 - Instâncias de 6 silos com tempo maior que 180 segundos ou com estouro no modelo de Reis2

Reis3 - 6 silos - Difíceis	
Instância	Tempo de processamento médio (s)
6_40_2	-
6_20_3	*
6_60_4	*

Tabela 348 - Instâncias de 6 silos com tempo maior que 180 segundos ou com estouro no modelo de Reis3

Apenas 2 instâncias difíceis tiveram aparição recorrente nos três modelos conforme pode ser visto pela Tabela 39.

6 silos - Difíceis recorrentes		
Modelo	Instância	Tempo de processamento médio (s)
Pedrosa	6_20_3	*
Reis2	6_20_3	*
Reis3	6_20_3	*
Reis2	6_60_4	10667,1618
Pedrosa	6_60_4	36004,468
Reis3	6_60_4	*

Tabela 39 - Instância de 6 silos com tempo maior que 180 ou com estouro de memória

Ao comparar todos os testes realizados neste trabalho para os modelos de Pedrosa, Reis2 e Reis3 com os testes realizados por Reis (2022), percebe-se o aumento de complexidade com um maior número de períodos, visto que nenhuma das instâncias apresentou estouro de memória no trabalho de Reis (2022) para estes modelos, enquanto nos novos testes ocorreu estouro de

memória nos três modelos nas instâncias 4_20_2, 4_40_3 e 6_20_3 e estouro de memória em um dos modelos nas instâncias 4_20_1, 6_40_2 e 6-40_4. Além dessas, foram observados aumentos consideráveis nos tempos de processamento de instâncias em que não houve estouro de memória.

4.5 Características das instâncias

As instâncias equilibradas criadas por Pedrosa (2019) para 4 e 6 silos podem ser avaliadas de acordo com as suas características para identificação de padrões existentes. Com isso, é possível verificar se há espaços para criação de instâncias com características até então não abordadas ou abordadas com menor frequência.

As instâncias equilibradas de 4 silos definidas por Pedrosa (2019), na sua grande maioria, possuem amplitudes mais altas, acima de 54, o que torna possível a criação de novas instâncias com amplitudes menores e médias para avaliar o comportamento e realizar comparações com as instâncias até então existentes.

Conforme evidenciado na Tabela 40, apenas as instâncias 4_20_2 e 4_40_3 apresentam amplitudes mais baixas, sendo as únicas que tiveram estouro de memória nos 3 modelos testados para 4 silos. Este fato possibilita a criação de novas instâncias com menores amplitudes, o que permite validar a existência ou não de um padrão de comportamento e aumento do custo computacional para resolução destes tipos de instâncias.

Instâncias equilibradas de 4 silos							
Instância	Silo 1	Silo 2	Silo 3	Silo 4	Nível mais baixo	Nível mais alto	Amplitude
4_20_1	32	93	31	75	31	93	62
4_20_2	10	4	7	12	4	12	8
4_20_3	49	13	71	49	13	71	58
4_20_4	98	79	62	14	14	98	84
4_20_5	80	20	7	15	7	80	73
4_40_1	74	3	33	69	3	74	71
4_40_2	93	71	71	18	18	93	75
4_40_3	50	50	50	50	50	50	0
4_40_4	72	18	58	49	18	72	54
4_40_5	9	44	15	6	6	44	38
4_60_1	47	58	91	27	27	91	64
4_60_2	81	23	56	58	23	81	58
4_60_3	76	97	89	18	18	97	79
4_60_4	15	35	88	72	15	88	73

4_60_5 10 73 28 12 10 73 63

Tabela 40 – Instâncias equilibradas de 4 silos definidas por Pedrosa (2019)

Já as instâncias equilibradas de 6 silos presentes na Tabela 41 apresentam apenas amplitudes altas, ou seja, também há possibilidade de criar novas instâncias com amplitudes baixas e médias para identificar novos comportamentos e comparar com as instâncias de amplitude alta. Neste caso, a criação de instâncias com amplitudes baixas deve influenciar no mapeamento de novos padrões de comportamento dos testes.

Além disso, algumas instâncias de 6 silos apresentam valores de amplitudes repetidos, como as instâncias 6_40_1, 6_40_2 e 6_40_3 com valor de amplitude igual a 74, as instâncias 6_20_4 e 6_60_5 com amplitude de 72 e as instâncias 6_60_1 e 6_60_2 com valor de amplitude de 55. Dessa forma, também é válido ter uma maior variação e não repetição nas diferenças entre os maiores e menores níveis para alcance de novos resultados.

Instâncias equilibradas de 6 silos									
Instância	Silo 1	Silo 2	Silo 3	Silo 4	Silo 5	Silo 6	Nível mais baixo	Nível mais alto	Amplitude
6_20_1	80	20	7	15	45	32	7	80	73
6_20_2	90	20	55	30	70	10	10	90	80
6_20_3	61	15	33	5	40	35	5	61	56
6_20_4	77	13	23	5	63	15	5	77	72
6_20_5	10	20	30	40	50	60	10	60	50
6_40_1	34	61	11	4	4	78	4	78	74
6_40_2	22	90	70	60	76	16	16	90	74
6_40_3	22	90	70	60	76	16	16	90	74
6_40_4	11	53	75	13	55	46	11	75	64
6_40_5	12	8	15	19	79	74	8	79	71
6_60_1	64	53	59	88	41	33	33	88	55
6_60_2	55	41	96	44	84	75	41	96	55
6_60_3	50	47	72	98	38	38	38	98	60
6_60_4	90	89	60	66	91	80	60	91	31
6_60_5	56	58	14	26	22	86	14	86	72

Tabela 41 - Instâncias equilibradas de 6 silos definidas por Pedrosa (2019)

Em suma, há espaço para execução de testes em instâncias com menor amplitude, assim como aumento do número de instâncias em todos os conjuntos de instâncias de 4 e 6 silos como foi mencionado em outros momentos neste trabalho. A realização de testes com estes novos parâmetros e/ou maior número de instâncias tende a gerar melhor confiabilidade nas análises e resultados uma vez que engloba um cenário mais robusto em termos de quantidade e variabilidade de instâncias.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo testar alguns dos modelos já existentes na literatura sobre o problema de movimentação do carro *tripper*, dados os espaços de abordagem que ainda existem, conforme foi evidenciado algumas oportunidades por Reis (2022) e demais autores sobre o tema, além de estar ligado à área da mineração, setor essencial na economia mundial.

Pedrosa (2019) formulou um modelo para maximizar o menor nível dos silos durante todo o período de tempo modificando parte do modelo de Caldas (2018), enquanto Reis (2022) optou por minimizar o nível máximo dos silos em todos os períodos em seu segundo modelo e realizar a junção do modelo de Pedrosa (2019) e de seu segundo modelo em um terceiro modelo, o qual surgiu para minimizar o maior nível e maximizar o menor nível em todos os períodos.

Todos esses três modelos foram testados no trabalho de Reis (2022) com as instâncias equilibradas de 4 e 6 silos definidas por Pedrosa (2019) em cenários com 20, 40 e 60 períodos, resultando ao todo em 240 testes, divididos em 5 instâncias para cada um dos 2 níveis de silos e 3 períodos diferentes nos 8 modelos abordados. O intuito dos testes foi realizar a comparação dos tempos de processamento dos modelos e identificar aqueles com maior complexidade de resolução.

A partir dos resultados dos testes propostos por Reis (2022) observou-se que os modelos de Pedrosa, Reis2 e Reis3 não tiveram estouro de memória em nenhum dos testes e que o comportamento computacional apresentava certa tendência de linearidade. Sendo assim, este trabalho propôs novos testes dos três modelos com o aumento do número de períodos de planejamento, a fim de estudar melhor os comportamentos e limites de cada modelo.

Por meio dos novos testes realizados, foi possível identificar a influência de um maior número de períodos no tempo de processamento dos modelos, visto que nos testes iniciais de Reis (2022) para 4 e 6 silos, o maior tempo de processamento foi de 10,09 segundos obtido por Reis3 ao executar a instância 4_40_3, enquanto no trabalho atual essa mesma instância teve tempos de processamento muito maiores em alguns períodos e por fim estourou a memória em ambos os modelos, sendo que Pedrosa estourou a partir de 240 períodos, e Reis2 e Reis3 a partir de 380 períodos.

Além disso, ao comparar os testes com instâncias de 4 e 6 silos também foi comprovado que há um aumento da complexidade computacional com um maior número de silos, visto que os tempos de processamento passam a ser muito maiores. Como exemplo, pela média de tempo gasto em todos os testes, já desconsiderando os resultados com estouro de memória, as instâncias

de 6 silos demoraram cerca de 905 vezes mais tempo que as instâncias de 4 silos para se obter uma solução final. Ou seja, o aumento do número de períodos pode tornar o processo de tomada de decisão mais complexo e dificultar o uso de abordagens exatas para esse fim.

Em relação ao ajuste de curvas, foi possível observar o comportamento de modelos NP-difíceis, muito embora o número de testes realizados não tenha sido suficiente para garantir a aderência das curvas exponenciais ajustadas. O melhor resultado encontrado foi o R-quadrado de 0,835 para o modelo de Reis2 com instâncias de 6 silos, mas desconsiderando os *outliers* das médias, o que reforça a necessidade de aumentar o número de testes, em especial, com maior variabilidade da biblioteca de instâncias.

A clusterização dos testes mostra que os mais complexos são aqueles que estouram a memória em todos os modelos, que neste trabalho são identificados pelas instâncias 4_20_2, 4_40_3 e 6_20_3, seguidas por instâncias que possuem um tempo de processamento muito acima da média que as demais ou que tiveram estouro de memória em pelo menos um dos modelos. Até então, a literatura sobre o tema não tinha explorado essa vertente, não havendo nenhuma análise prévia da dificuldade de solução de um problema com base nas características das instâncias. Curiosamente, a instância com todos os silos em nível médio, de 50, não foi totalmente resolvida para a bateria de testes de nenhuma das políticas consideradas.

Como sugestão para trabalhos futuros, indica-se um aprofundamento do estudo de características já descritas e ainda não descritas na biblioteca de instâncias de Pedrosa, no que diz respeito aos níveis iniciais dos silos e a posição inicial do *tripper*, pois essas variações se mostraram importantes, influenciando diretamente nos tempos de processamento das políticas consideradas. Também seria interessante criar um conjunto maior de instâncias, para possibilitar a melhor aderência em análises estatísticas futuras, quanto ao comportamento das políticas testadas, das demais políticas existentes e de outras políticas que venham a ser formuladas. Em termos de aprofundamento do estudo já realizado, sugere-se uma análise das árvores de *branch-and-cut* dos testes, a fim de identificar dificuldades para obtenção e prova de soluções ótimas, bem como a criação de desigualdades válidas que possam reduzir os tempos de processamento.

REFERÊNCIAS

BOYER, S. A. *SCADA: Supervisory Control and Data Acquisition*. Ed.: International Society of Automation, 2010.

CALDAS, F. N. *Proposta para a solução do problema de movimentação de tripper*. Monografia (Dissertação de Mestrado em Ciência da Computação) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2018.

CARVALHO, P. S. L. de, et al. *Minério de ferro*. BNDES Setorial, Rio de Janeiro, n. 39, p. 197-233, 2014. Disponível em: < <https://web.bndes.gov.br/bib/jspui/handle/1408/4802>>. Acesso em: 15 de março de 2023.

Instituto Brasileiro de Mineração - IBRAM. *Relatório Anual de Atividades Janeiro a Dezembro 2021*, 2022.

Instituto Brasileiro de Mineração - IBRAM. *Infográfico Mineração em Números 2021*, 2022.

Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada - IPEA. *Evolução macroeconômica do setor extrativo mineral brasileiro no período 2018-2021: uma análise comparativa entre o período pré-pandêmico e o da pandemia da Covid-19*. Número 57 - Nota de Conjuntura 5 - 4 ° Trimestre de 2022, 2022.

MORAIS, B. S. d. *Problema de movimentação de tripper abordado por programação dinâmica*. Monografia (Dissertação de conclusão do curso de Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Ouro Preto, João Monlevade, 2019.

MORABITO, R.; PUREZA, V. M. M. Modelagem e simulação. In: Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações. 3 ed. Coordenação Paulo Augusto Cauchick-Miguel. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018.

PEDROSA, L. d. O. M. *Problema de movimentação do carro tripper - comparação de novas políticas*. Monografia (Dissertação de conclusão do curso de Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Ouro Preto, João Monlevade, 2019.

REIS, Y. M. *Novas políticas para o problema de otimização da Movimentação do carro tripper: considerações a respeito do Transbordo dos silos e economia de energia*. Monografia (Dissertação de conclusão do curso de Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Ouro Preto, João Monlevade, 2022.

SILVA FILHO, E. S. d. *Modelos matemáticos e métodos heurísticos para a otimização da movimentação de tripper*. Monografia (Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Ouro Preto, João Monlevade, 2021.