

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO

MARINA OLIVEIRA LIMA  
Orientador: Rodrigo César Pedrosa Silva  
Coorientador: Rafael Bambirra Pereira

**MAXIMIZANDO RETORNOS E MINIMIZANDO RISCOS:  
OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO DE AÇÕES COM REDES LSTM**

Ouro Preto, MG  
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO

MARINA OLIVEIRA LIMA

**MAXIMIZANDO RETORNOS E MINIMIZANDO RISCOS:  
OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO DE AÇÕES COM REDES LSTM**

Monografia apresentada ao Curso de Ciência da Computação da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Ciência da Computação.

**Orientador:** Rodrigo César Pedrosa Silva

**Coorientador:** Rafael Bambirra Pereira

Ouro Preto, MG  
2023

## SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

L732m Lima, Marina Oliveira.

Maximizando retornos e minimizando riscos [manuscrito]: otimização de portfólio de ações com redes LSTM. / Marina Oliveira Lima. - 2023. 33 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo César Pedrosa Silva.

Coorientador: Me. Rafael Bambirra Pereira.

Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Ciência da Computação .

1. Otimização de portfólio. 2. Redes neurais LSTM. 3. Análise de risco e retorno. 4. Mercado financeiro. 5. Previsão de preços de ações. I. Silva, Rodrigo César Pedrosa. II. Pereira, Rafael Bambirra. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 004

Bibliotecário(a) Responsável: Luciana De Oliveira - SIAPE: 1.937.800



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
REITORIA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Marina Oliveira Lima**

### **Maximizando retornos e minimizando riscos: otimização de portfólio de ações com redes LSTM**

Monografia apresentada ao Curso de Ciência da Computação da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação

Aprovada em 17 de Agosto de 2023.

#### Membros da banca

Rodrigo César Pedrosa Silva (Orientador) - Doutor - Universidade Federal de Ouro Preto  
Rafael Bambirra (Coorientador) - Mestre - Universidade Federal de Minas Gerais  
Andre Luyde (Examinador) - Mestre - Universidade Federal de Ouro Preto  
Mateus Coelho Silva (Examinador) - Doutor - Universidade Federal de Ouro Preto

Rodrigo César Pedrosa Silva, Orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 17/08/2023.



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Cesar Pedrosa Silva, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 25/08/2023, às 11:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0577006** e o código CRC **9E87E511**.

*Dedico este trabalho aos meus pais, que são minha inspiração diária de força e resiliência.*

"A good portfolio is more than a long list of good stocks and bonds. It is a balanced whole, providing the investor with protections and opportunities with respect to a wide range of contingencies."– Harry Markowitz

# Resumo

Este estudo tem como objetivo geral avaliar o desempenho de um portfólio composto por cinco ativos relevantes listados na Bovespa, utilizando os preços das ações previstos por um modelo de rede neural e comparando-os com um portfólio otimizado com base nos preços reais das ações. A análise se baseia nos princípios da otimização de portfólio de investimentos, em especial o Modelo de Markowitz, e busca investigar como a incorporação de previsões de preços pode afetar o comportamento do portfólio. Além disso, o este trabalho busca contribuir para o avanço dos métodos computacionais aplicados à otimização de portfólios, proporcionando novos insights e conhecimentos na área de análise de investimentos.

**Palavras-chave:** Otimização de portfólio. Redes neurais LSTM. Análise de risco e retorno. Mercado financeiro. Previsão de preços de ações.

# Abstract

This study aims to assess the performance of a portfolio composed of five relevant assets listed on Bovespa, using stock prices forecasted by a neural network model and comparing them with a portfolio optimized based on real stock prices. The analysis is grounded in the principles of investment portfolio optimization, particularly the Markowitz Model, and seeks to investigate how incorporating price forecasts can impact portfolio behavior. The study aims to contribute to the advancement of computational methods applied to portfolio optimization, providing new insights and knowledge in the field of investment analysis.

**Keywords:** Portfolio optimization. LSTM neural networks. Risk and return analysis. Financial market. Stock price forecasting.

# Lista de Ilustrações

Figura 4.1 – Fluxograma da simulação . . . . .	14
Figura 5.1 – Preço histórico de fechamento ajustado dos ativos . . . . .	18
Figura 5.2 – Retorno acumulado dos ativos ao longo do tempo . . . . .	18
Figura 5.3 – Modelo de Previsão para Petrobras . . . . .	20
Figura 5.4 – Modelo de Previsão para Vale . . . . .	20
Figura 5.5 – Modelo de Previsão para Itaú . . . . .	21
Figura 5.6 – Modelo de Previsão para Ambev . . . . .	21
Figura 5.7 – Modelo de Previsão para Magazine Luiza . . . . .	22
Figura 5.8 – Retorno e risco dos Portfólios Otimizados . . . . .	23
Figura 5.9 – Portfólios ótimos baseados nas escolhas otimizadas para dados histórico . . . . .	25
Figura 5.10–Portfólios ótimos baseados nas escolhas otimizadas para dados previstos . . . . .	25
Figura 5.11–Portfólios ótimos analisados nos dados do último ano . . . . .	27

# Lista de Tabelas

Tabela 5.1 – RMSE dos ativos . . . . .	19
Tabela 5.2 – Risco e retorno dos portfólios iniciais . . . . .	23
Tabela 5.3 – Risco e retorno dos portfólios ótimos . . . . .	24
Tabela 5.4 – Alocação dos ativos nos portfólios ótimos . . . . .	24
Tabela 5.5 – Alocação dos ativos nos portfólios ótimos para cada conjunto de dados . . .	26
Tabela 5.6 – Risco e retorno dos portfólios ótimos analisados nos dados do último ano . .	27

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Justificativa e Objetivos	2
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>4</b>
2.1	Otimização de Portfólios	4
2.2	Previsão de Preços dos Ativos	5
<b>3</b>	<b>Fundamentos</b>	<b>8</b>
3.1	O Problema da Otimização de Portfólios	8
3.2	Otimização SLSQP	10
3.3	LSTM para Previsão de Preços de Ativos	11
<b>4</b>	<b>Projeto Experimental</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>18</b>
5.1	Validação do Modelo LSTM	19
5.2	Otimização do Portfólio	22
5.3	Comparação entre a otimização com dados históricos e a otimização com previsões	24
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>29</b>
6.1	Conclusão	29
6.2	Trabalhos Futuros	29
	<b>Referências</b>	<b>31</b>

# 1 Introdução

Investir no mercado financeiro é uma tarefa desafiadora, ainda mais no que se refere a ativos de renda variável. Por conta da alta instabilidade do mercado, as operações de compra e venda de ações apresentam alta volatilidade, deixando os investidores expostos ao risco. Além de não existir a garantia de retorno, existe a possibilidade de perda do valor investido. Por isso, muitos investidores tentam prever o mercado, além de buscar uma forma de otimizar seus investimentos (SILVA; LACERDA, 2014).

A otimização de um portfólio de ações é o processo de seleção da melhor distribuição de ativos para determinado objetivo. De acordo com o perfil de cada tipo de investidor, o objetivo pode variar da maximização do retorno esperado até a minimização do risco financeiro. Visando lucro independente do clima de mercado e a minimização de perdas durante recessões econômicas, a seleção adequada de títulos para investimento financeiro é fundamental. A estratégia mais comum para essa seleção é a construção de um portfólio composto por diferentes títulos, objetivando a distribuição do risco (KALAYCI; ERTENLICE; AKBAY, 2019).

Para otimizar a construção de um portfólio de investimentos, é comum que investidores utilizem ferramentas de análise de dados para prever os preços de mercado e, com isso, tomar decisões mais informadas sobre quais ativos incluir em sua carteira. Uma técnica de análise de dados que tem se mostrado eficiente na previsão de preços de mercado é o uso de Redes Neurais Artificiais, em particular, as redes LSTM (*Long Short-Term Memory*). Liu et al. (2019) e Mehtab, Sen e Dutta (2020) afirmam que essa técnica tem se mostrado eficiente por ser capaz de analisar grandes quantidades de dados históricos, identificar padrões e tendências e, a partir disso, prever com razoável precisão os preços futuros de ativos de renda variável. Dessa forma, investidores podem tomar decisões mais fundamentadas e melhorar o desempenho de suas carteiras.

Albuquerque, Kalatzis e Toledo (2009) dizem que o processo da escolha de portfólios é um problema clássico da área financeira, onde a busca por uma aplicação em um mercado de ações se dá de forma a obter um bom compromisso entre o retorno e o risco da carteira do investidor. Para Silva (2011) a construção de um portfólio de investimentos é uma das decisões financeiras mais importantes para um investidor e uma boa seleção de ativos para compô-lo pode representar uma vantagem competitiva.

É preciso entender que risco para um portfólio não é igual à média do risco dos ativos individuais pertencentes a ele. Diferente do retorno, que é calculado pela média ou média ponderada dos retornos destes ativos, o risco é sobre o quão volátil eles são. Se o portfólio é composto por mais de um ativo, a correlação entre eles deve ser considerada. A vantagem da diversificação está no fato de ser possível obter um risco menor do que um ativo com o menor risco do portfólio (ILMANEN; SAYOOD, 2002).

## 1.1 Justificativa e Objetivos

A gestão de portfólios de investimentos é uma tarefa desafiadora e de grande interesse na área financeira, envolvendo a análise da relação entre retorno e risco e a seleção de ativos que maximizem o retorno esperado e minimizem a exposição a riscos.

Estudos relacionados à gestão de portfólios podem beneficiar os investidores na tomada de decisão, por meio da análise da relação entre retorno e risco e do desenvolvimento de ferramentas que auxiliem nessa análise. De acordo com [Pereira et al. \(2020\)](#), a pesquisa de seleção de portfólios continua sendo relevante e impactante na atualidade. Nesse sentido, este trabalho busca contribuir para o desenvolvimento e o conhecimento de métodos computacionais voltados à otimização de portfólios.

Investir em ativos financeiros, especialmente em ações, é uma tarefa desafiadora devido à alta volatilidade do mercado e à possibilidade de perda do capital investido. Com isso, muitos investidores buscam prever o comportamento do mercado para otimizar seus investimentos e maximizar seus lucros. O uso de técnicas de aprendizado de máquina, como LSTM, tem se mostrado eficaz na previsão dos preços de ativos financeiros, incluindo ações do mercado brasileiro ([MESQUITA; OLIVEIRA; PEREIRA, 2020](#)).

Nesse contexto, a previsão dos preços de ativos financeiros pode auxiliar os investidores a tomarem decisões informadas sobre a compra e venda de ativos. A contribuição deste estudo reside na análise do mercado financeiro brasileiro, com foco na otimização de portfólios e na previsão de preços de ativos.

A literatura existente já destaca a importância da otimização de portfólios e da previsão de preços, com estudos que exploram diversas técnicas, desde modelos clássicos até o uso de redes neurais LSTM. No entanto, há uma lacuna quando se trata da aplicação dessas técnicas no contexto específico do mercado brasileiro, especialmente em relação à comparação da otimização de dados reais com dados previstos.

O Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa) é o indicador mais importante do desempenho médio das cotações de ações do mercado brasileiro ([B3, 2017](#)). Por meio da análise de dados históricos de retornos mensais desse índice, o presente trabalho visa avaliar o comportamento de uma carteira composta por cinco ativos relevantes listados na Bovespa. Os estudos analisados destacam os avanços alcançados na aplicação de técnicas de otimização de portfólios e previsão de preços usando redes neurais LSTM em outros mercados. Portanto, este estudo tem como objetivo preencher essa lacuna e contribuir para o conhecimento do mercado financeiro do Brasil.

Para otimizar a carteira, será utilizado o conceito de Fronteira Eficiente proposto por Harry Markowitz na década de 1950. A Fronteira Eficiente busca maximizar o retorno esperado ao mesmo tempo em que minimiza o risco por meio da diversificação da carteira ([REIS, 2020](#)). Será realizada uma análise comparativa, na qual avaliaremos o desempenho das carteiras ótimas

geradas a partir da otimização de dados históricos e aquelas criadas ao incorporar dados previstos aos dados históricos. A comparação será baseada nos dados reais do período considerado para a previsão.

Essa análise permitirá avaliar a eficácia da previsão de preços como uma ferramenta para maximização de lucros e minimização de riscos no mercado financeiro brasileiro, fornecendo informações valiosas para os investidores e aprimorando as estratégias de investimento no contexto local.

## 2 Revisão Bibliográfica

### 2.1 Otimização de Portfólios

A Otimização de Portfólio consiste em determinar um conjunto de ativos e seus respectivos pesos de participação no portfólio, de forma que o investidor seja satisfeito quanto à combinação entre retorno e risco (MILHOMEM; DANTAS, 2022). Diante desse problema, Markowitz provocou uma mudança radical na análise do problema de portfólios, através do modelo de Média Variância (MV) (MARKOWITZ, 1952), que foi apresentado como um exemplo clássico na gestão de portfólios. Embora existam muitas extensões e desenvolvimentos feitos a partir do trabalho de Markowitz, este modelo ainda é amplamente utilizado (IVANOVA; DOSPATLIEV, 2017).

O modelo de Markowitz utiliza a covariância como medida de risco e esse foi o ponto de partida para as finanças quantitativas, iniciando a Teoria Moderna de Portfólio (KALAYCI; ERTENLICE; AKBAY, 2019). Neto (2010) contribuiu para a Teoria Moderna de Portfólio afirmando que o risco de um ativo medido individualmente é diferente de seu risco dentro do portfólio, uma vez que o risco do portfólio é medido não só pela combinação individual dos ativos, mas também pela sua correlação. Ativos com correlação negativa, por exemplo, diminuem o risco do portfólio. Essa afirmação de Neto (2010) é relevante para o mercado financeiro e influencia a maneira como os investidores avaliam o risco de seus portfólios.

Nesse contexto, a resolução de problemas com múltiplos objetivos se torna relevante. O método épsilon-restrito se destaca como uma abordagem eficaz para priorizar objetivos (FAN et al., 2016). Esse método envolve otimizar um dos objetivos enquanto se mantém as restrições dos demais, resultando em um conjunto de soluções que refletem um compromisso entre os diferentes objetivos considerados. Essa abordagem é fundamentada em uma técnica heurística que utiliza refinamentos iterativos para aprimorar continuamente os resultados obtidos. Em essência, o método épsilon-restrito proporciona uma estratégia valiosa para lidar com problemas multiobjetivos, permitindo uma análise mais clara das relações de compromisso entre os diversos critérios.

Além disso, Sharpe (1966) desenvolveu o Índice de Sharpe, um indicador crucial para medir a relação entre retorno e risco de um investimento. Através deste índice é possível calcular o quanto o retorno de um portfólio pode compensar o risco assumido, medindo quanto um investimento está rendendo em relação a uma taxa livre de risco. Além de considerar o retorno, ele também leva em conta o risco (ou volatilidade) da aplicação, permitindo combinar ambos os conceitos em um único número. O indicador possibilita que o investidor compare diferentes fundos para escolher o melhor em relação ao risco e retorno (SUBATHRA, 2022).

Diversos estudos têm explorado a otimização de portfólios nos últimos anos, com o

objetivo de maximizar o retorno e minimizar o risco. O modelo de Markowitz foi um dos primeiros a abordar essa questão, mas muitos outros modelos foram propostos desde então. Por exemplo, [Hellström \(2001\)](#) propôs uma nova formulação para a seleção de portfólios, que ranqueia as ações de acordo com o retorno e o índice de Sharpe. Os resultados mostraram que essa abordagem superou o índice de mercado utilizado como comparativo.

Outros pesquisadores, como [Kalayci, Ertenlice e Akbay \(2019\)](#), têm explorado o tema da otimização de portfólios, buscando novas restrições, objetivos e soluções que abordem as deficiências do modelo inicial de Markowitz. De fato, pesquisadores de diversas áreas, como ciência da computação e matemática, têm se envolvido nessa área de pesquisa, aproveitando o aumento do poder computacional.

Um exemplo de estudo recente sobre a otimização de portfólios é o trabalho de ([AMARAL et al., 2020](#)). Nesse estudo, os autores buscaram otimizar a escolha de ações do Ibovespa para a constituição de um portfólio, aplicando dois modelos com restrições diferentes: um que visa otimizar o retorno sobre o risco, com a técnica de Programação Linear (PL), e outro que objetiva a maximização em si, com Programação Não Linear (PNL). Os resultados mostraram que, embora o modelo baseado em PNL tenha obtido um rendimento abaixo, mas próximo ao encontrado pelo modelo com PL, ele teve o risco associado reduzido através de uma maior diversificação do portfólio.

[Silva \(2011\)](#) analisou o impacto de diferentes métodos de estimativa de retorno e risco, além dos custos transacionais e a frequência de revisão de carteiras, objetivando a maximização de retorno, com restrição de risco. Pela implementação de um simulador que analisa de forma automática e quantitativa os dados históricos dos ativos, combinando os modelos analisados, o autor aponta que o clássico modelo de Markowitz é eficaz para controle de risco, não tendo diferença significativa para os diferentes métodos.

No âmbito da otimização de portfólios, a utilização do algoritmo *Sequential Least Squares Programming* (SLSQP) tem ganhado destaque devido à sua capacidade de lidar com restrições lineares e não-lineares. [Baudiš \(2014\)](#) conduziu uma análise comparativa entre seis métodos de minimização oferecidos pela biblioteca *SciPy*, concluindo que o SLSQP apresenta eficiência notável para diversas funções, inclusive aquelas utilizadas neste trabalho. Pesquisas mais recentes, exemplificadas pelo estudo de [Hu \(2023\)](#), reforçam a eficácia do SLSQP na busca por soluções ótimas, abordando tanto a alocação de ativos quanto as funções objetivas de risco e retorno. Esses estudos corroboram a robustez e utilidade dessa abordagem algorítmica na otimização de portfólios de investimentos.

## 2.2 Previsão de Preços dos Ativos

Outro aspecto importante na otimização de portfólios é a previsão de preços de ativos. Com o avanço tecnológico, novas técnicas de previsão vêm sendo desenvolvidas e testadas. Um

exemplo é o uso de redes neurais artificiais, como a arquitetura LSTM, que tem sido utilizada para prever preços de ações (ZHANG et al., 2019). As LSTMs são capazes de modelar dependências de longo prazo, lidar com dados de alta dimensionalidade e resolver problemas de natureza não-linear (WU et al., 2021), tornando-as uma opção interessante para a previsão de preços de ativos.

Estudos têm demonstrado que a LSTM apresenta um desempenho superior em relação a outras técnicas de previsão dos preços de ações. Por exemplo, Bagul et al. (2022) utilizou a arquitetura LSTM para prever os preços de ações do índice SSE 50 da Bolsa de Valores de Xangai e mostrou que a LSTM superou os modelos ARIMA (modelo Auto-Regressivo de Médias Móveis) e redes neurais *feedforward* em termos de MAE (Erro Médio Absoluto), MSE (Erro Quadrático Médio) e  $R^2$  (coeficiente de determinação). Dhawan e Aggrawal (2022) também destacou que a técnica apresentou um desempenho consistente em diferentes horizontes de previsão, além de ser capaz de modelar as características dinâmicas e não-lineares dos dados de preços.

Outro estudo, realizado por Kim, Kim e Lee (2020), utilizou a LSTM para prever os preços de ações de empresas dos setores de tecnologia e saúde. O estudo também comparou a LSTM com outros modelos de previsão e mostrou que a LSTM apresentou um desempenho superior em termos de MAE e  $R^2$ . Além disso, o estudo mostrou que a LSTM foi capaz de modelar as relações não-lineares entre as variáveis de entrada e os preços das ações, além de apresentar um desempenho estável em diferentes períodos de tempo.

Um estudo de Zahara, Ilmiddaviq et al. (2020) apresentou uma análise comparativa de diferentes algoritmos de otimização para modelos LSTM na previsão do Índice de Preços ao Consumidor (CPI) na Indonésia. Os resultados indicam que o algoritmo Nadam apresenta melhor desempenho em termos de precisão na previsão do valor do CPI em relação aos outros algoritmos de otimização.

O algoritmo Nadam é uma extensão do algoritmo Adam (*Adaptive Movement Estimation*), que combina o método de gradiente descendente estocástico com adaptação de taxa de aprendizado. Além disso, ele também incorpora o método de gradiente acelerado de Nesterov (NAG), o que acelera a convergência do algoritmo. Dessa forma, o uso de Nadam pode contribuir para uma melhor convergência da rede e, conseqüentemente, para uma melhor precisão das previsões de preço (ZAHARA; ILMIDDAVIQ et al., 2020).

Além das técnicas de previsão utilizadas, outro aspecto importante a ser considerado é a escolha do tamanho da janela de dados. A janela de dados é um período de tempo que é utilizado para treinar o modelo de previsão, e a escolha do tamanho da janela pode afetar significativamente o desempenho do modelo (KEELAWAT et al., 2021).

Em conclusão, a análise dessa bibliografia ressalta a relevância da otimização de portfólios e da previsão de preços de ativos no contexto do mercado financeiro. Diversas abordagens e técnicas têm sido exploradas para maximizar o retorno e minimizar o risco dos investimentos,

desde o clássico modelo de Markowitz até o uso de redes neurais LSTM.

Os estudos mencionados demonstram avanços significativos na compreensão e aplicação dessas técnicas, com resultados promissores em termos de desempenho e capacidade de modelar as características dinâmicas e não-lineares dos dados financeiros. No entanto, há a necessidade de investigar questões específicas para o mercado brasileiro, como a comparação entre otimização de portfólios com dados reais e dados previstos em comparação ao que realmente aconteceu. Essas investigações podem fornecer *insights* valiosos sobre o desempenho e a aplicabilidade das técnicas no contexto brasileiro, levando a estratégias de investimento mais eficientes e rentáveis.

## 3 Fundamentos

### 3.1 O Problema da Otimização de Portfólios

De acordo com (GUO, 2022), Markowitz é uma das principais referências para se compreender o processo de determinação de um portfólio ótimo. Através do modelo de Média Variância ele apresenta o retorno esperado como medida de desempenho do portfólio e a variância como medida de risco. O modelo de composição de portfólios de Markowitz consiste na otimização de duas funções objetivos, sendo a primeira delas referente à maximização do retorno esperado e a segunda a minimização do risco, medido pela volatilidade do portfólio, sujeitas às restrições de que a alocação de cada ativo deve estar entre 0 e 1 e todo orçamento disponível deve ser alocado nos ativos.

O modelo de Markowitz é formulado como:

$$\max \bar{R} = \sum_{i=1}^N X_i \bar{R}_i, \quad (3.1)$$

$$\min \sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (X_i X_j \sigma_{ij}), \quad (3.2)$$

sujeitos à:

$$0 \leq X_i \leq 1; \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1. \quad (3.4)$$

onde  $N$  é o número de ativos considerados,  $X_i$  é a participação (em porcentagem) do ativo  $i$  no portfólio,  $\bar{R}_i$  é o retorno esperado do ativo  $i$ ,  $\sigma_{ij}$  é a covariância entre o ativo  $i$  e o ativo  $j$ .

As restrições 3.3 e 3.4 indicam que a alocação de cada ativo deve estar entre 0 e 1 e que todo orçamento disponível deverá ser alocado nos ativos.

A variância  $\sigma^2$  é calculada por meio da covariância das séries de retorno  $\sigma_{ij}$  entre todos os pares de ativos que compõem este portfólio. Essa covariância é estimada usando o histórico de retornos dos ativos durante um período específico  $T$ :

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^T \frac{(R_{ik} - \bar{R}_i)(R_{jk} - \bar{R}_j)}{T}, \quad (3.5)$$

onde  $\bar{R}_i$  e  $\bar{R}_j$  são a média de retorno para os ativos  $i$  e  $j$ , respectivamente, e  $R_{ik}$  o retorno do ativo  $i$  no período  $k$ .

Outra medida relevante para este trabalho é o Índice de Sharpe, que pode ser medido como expresso na equação (3.6):

$$\max S_P = \frac{\bar{R} - R_f}{\sigma^2}, \quad (3.6)$$

em que  $R_f$  é a taxa livre de risco.

Em (ELTON et al., 2009) vemos o índice de Sharpe como padrão para analisar a relação entre retorno e risco de carteiras de investimento. Este índice mede quanto um investimento está rendendo em relação a uma taxa livre de risco, possibilitando comparar investimentos com diferentes riscos. É observado que quanto maior o valor de Sharpe, melhor a relação entre o retorno e o risco.

Conforme (KALAYCI; ERTENLICE; AKBAY, 2019), o modelo de MV também pode ser reescrito para maximizar o retorno para um determinado nível de risco. Um portfólio obtido resolvendo o modelo (3.2), levando em consideração o risco mínimo para um determinado nível de retorno, ou um retorno máximo para um determinado nível de risco, é chamado de portfólio eficiente. No entanto, para encontrar um portfólio eficiente, é necessário conhecer o nível de risco que o investidor pode suportar, ou o retorno desejado definido pelo investidor, o que pode ser um problema para casos do mundo real. Com isso, os pesquisadores transformaram o modelo multiobjetivo em um modelo de objetivo único, visando encontrar o portfólio eficiente entre várias combinações de ativos no espaço de solução, combinando todos os objetivos de uma vez.

O modelo de composição de portfólios de Markowitz é um modelo multiobjetivo e pode ser adaptado para um modelo de objetivo único pela minimização da função objetivo de risco, considerando um retorno satisfatório como restrição (ZHANG; LI; GUO, 2018).

$$\min \sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (X_i X_j \sigma_{ij}), \quad (3.7)$$

sujeito à:

$$\sum_{i=1}^N X_i \bar{R}_i \geq \varepsilon, \quad (3.8)$$

$$0 \leq X_i \leq 1; \quad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1. \quad (3.10)$$

sendo  $\varepsilon$  o limite inferior para o retorno.

Através da variação do  $\varepsilon$  temos a construção da fronteira eficiente, onde temos o valor mínimo de risco para cada retorno definido.

A otimização do objetivo mais importante, sujeito às restrições dos outros objetivos, é conhecido como método épsilon restrito (JÚNIOR, 2016). Para otimizar as funções de risco, retorno e Sharpe, foi utilizada a técnica *Sequential Least Squares Programming* (SLSQP), que será apresentada na sessão seguinte.

## 3.2 Otimização SLSQP

O SLSQP é um método de otimização não-linear utilizado para encontrar soluções em restrições lineares e não-lineares. Este método é adequado para problemas de otimização de portfólios, pois considera as restrições impostas pela alocação de ativos e o orçamento disponível (ASANGA et al., 2014). Ele é uma técnica iterativa que utiliza a informação sobre as derivadas parciais das funções objetivos para encontrar um ponto de mínimo ou máximo.

O método SLSQP utiliza uma estratégia de atualização de aproximação quadrática da função objetivo e restrições a cada iteração, garantindo que as soluções sejam obtidas dentro das restrições. Isso é realizado por meio de um conjunto de multiplicadores de Lagrange, que são usados para modificar a função objetivo e as restrições, tornando o problema original solucionável (BYRD et al., 1995).

O algoritmo SLSQP pode ser dividido em três etapas principais:

1. Aproximação quadrática das funções: Para encontrar um ponto inicial, é utilizado um modelo de aproximação quadrática que leva em consideração as derivadas parciais da função objetivo e das restrições em relação a esse ponto inicial  $x_0$ . Essa etapa pode ser representada pela seguinte formulação:

$$\min f(x) \quad (3.11)$$

sujeito à:

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.12)$$

$$h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (3.13)$$

2. Resolução do subproblema quadrático: Um subproblema quadrático é resolvido para determinar a direção de descida em relação à função objetivo  $f(x)$ , sujeita às restrições lineares e não-lineares. Essa etapa pode ser representada pela seguinte formulação:

$$\min q(x) = \frac{1}{2}x^T Bx + c^T x \quad (3.14)$$

sujeito à:

$$g_i(x)Ax \leq b \quad (3.15)$$

$$A_{eq}x = b_{eq} \quad (3.16)$$

onde  $B$  é uma matriz simétrica definida positiva,  $c$  é um vetor de constantes,  $A$  e  $A_{eq}$  são matrizes de restrições lineares,  $b$  e  $b_{eq}$  são vetores de limites para as restrições lineares.

3. Atualização do ponto: Com base na direção de descida encontrada na etapa anterior, é calculado um novo ponto  $x$  usando um tamanho de passo adequado. Essa atualização pode ser representada pela seguinte fórmula:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha \cdot p^{(k)} \quad (3.17)$$

onde  $x^{(k)}$  é o ponto atual,  $\alpha$  é o tamanho de passo, e  $p^{(k)}$  é a direção de descida encontrada no subproblema quadrático.

Essas etapas do algoritmo permitem a otimização de portfólios, considerando tanto as restrições quanto as funções objetivo de risco, retorno e Sharpe. Esse método é eficiente na busca de soluções ótimas para problemas não-lineares e é amplamente utilizado em estudos de otimização de portfólio (BAILEY; PRADO, 2013).

### 3.3 LSTM para Previsão de Preços de Ativos

Além da otimização de portfólio, outra técnica comumente utilizada no mercado financeiro é a previsão de preços por meio de redes neurais. A previsão de preços de ações é uma técnica crucial para investidores que desejam otimizar seus portfólios e reduzir riscos. A análise de dados históricos de preços de ações é utilizada para prever o comportamento futuro do mercado de ações, permitindo que investidores tomem decisões mais informadas e eficazes sobre seus investimentos.

O modelo *Long Short-Term Memory* (LSTM) é uma rede neural recorrente que tem sido amplamente utilizada na previsão de preços de ações. O modelo foi introduzido por Hochreiter e Schmidhuber (1997) como uma extensão da rede neural recorrente (RNN) tradicional, que tinha dificuldades em lidar com problemas de longo prazo de dependência temporal. O LSTM foi projetado especificamente para lidar com esses problemas, permitindo que informações relevantes do passado fossem armazenadas e acessadas quando necessário. Matematicamente, o modelo LSTM pode ser representado da seguinte forma:

Dado uma sequência de entrada  $X = (x_1, x_2, \dots, x_T)$ , o modelo LSTM produz uma sequência de saída  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_T)$  por meio das equações:

$$h_t = k_W(h_{t-1}, x_t) \quad (3.18)$$

$$y_t = g_V(h_t) \quad (3.19)$$

onde  $h_t$  representa o estado interno da célula de memória no tempo  $t$ ,  $k_W$  é a função de transição da célula de memória que atualiza o estado interno com base na entrada  $x_t$  e no estado anterior  $h_{t-1}$ , e  $g_V$  é a função de saída que produz a saída  $y_t$  a partir do estado interno  $h_t$ .

A função de transição da célula de memória é composta por três portas: a porta de entrada  $v_t$ , a porta de esquecimento  $e_t$  e a porta de saída  $o_t$ . Cada porta é controlada por uma rede neural *feedforward* que produz um valor entre 0 e 1, que representa a importância de cada informação.

As equações para as portas são dadas por:

$$v_t = \sigma(W_v x_t + U_v h_{t-1} + d_v) \quad (3.20)$$

$$e_t = \sigma(W_e x_t + U_e h_{t-1} + d_e) \quad (3.21)$$

$$o_t = \sigma(W_o x_t + U_o h_{t-1} + d_o) \quad (3.22)$$

onde  $W_v, W_e, W_o, U_v, U_e, U_o$  são os pesos das conexões neurais e  $d_v, d_e, d_o$  são os termos de polarização. A função  $\sigma$  é a função sigmóide.

Além disso, a célula de memória mantém um estado de célula  $c_t$ , que é atualizado pela porta de entrada e pela porta de esquecimento. A equação para o estado de célula é dada por:

$$c_t = e_t \odot c_{t-1} + v_t \odot \tanh(W_c x_t + U_c h_{t-1} + d_c) \quad (3.23)$$

onde  $\odot$  representa a multiplicação elemento a elemento e  $\tanh$  é a função tangente hiperbólica.

Dessa forma, a célula de memória é capaz de aprender quais informações devem ser armazenadas no estado de célula e quais devem ser descartadas, permitindo o aprendizado de dependências de longo prazo em sequências de dados.

Para criar uma série temporal com os preços históricos da ação, é necessário coletar dados de preços de ações em intervalos regulares ao longo do tempo. Esses dados são organizados em uma série temporal, onde cada ponto de dados representa o preço da ação em um determinado momento. Em seguida, a série temporal é dividida em janelas de tempo, que são conjuntos contíguos de pontos de dados. A janela de tempo determina quantos períodos anteriores são considerados como entrada para prever o próximo período.

Antes de alimentar a série temporal no modelo LSTM, é importante realizar pré-processamento dos dados. Isso pode incluir normalização dos dados para que todos os valores estejam na mesma escala, bem como transformação dos dados para torná-los mais adequados para o treinamento da rede LSTM.

A série temporal é então dividida em conjuntos de treinamento e teste, sendo que o conjunto de treinamento é utilizado para treinar o modelo LSTM, enquanto o conjunto de teste é utilizado para avaliar a capacidade do modelo de generalizar as previsões para dados não vistos durante o treinamento.

Durante o treinamento, o modelo LSTM é alimentado com a série temporal pré-processada e a rede aprende a reconhecer padrões nos dados históricos. Esses padrões são usados para fazer previsões futuras. Uma metodologia comum para validar a precisão de previsões feitas por modelos de séries temporais é usar a Raiz do Erro Médio Quadrático (RMSE), que mede a diferença entre os valores reais e os valores previstos pelo modelo.

O RMSE é definido como a raiz quadrada da média dos quadrados das diferenças entre os valores reais e previstos, como indicado na equação (3.24).

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (3.24)$$

onde  $y_i$  é o valor real na posição  $i$ ,  $\hat{y}_i$  é o valor previsto na posição  $i$  e  $n$  é o número total de observações na série temporal. Um RMSE menor indica que o modelo tem uma melhor precisão na previsão (HYNDMAN; ATHANASOPOULOS, 2018).

## 4 Projeto Experimental

Baseado nos conceitos previamente apresentados, foi desenvolvido um algoritmo em Python, utilizando a API *Keras*<sup>1</sup> e o *TensorFlow*<sup>2</sup> para construir um modelo de rede neural para prever os dados históricos de ações, também foi utilizada a biblioteca *SciPy*<sup>3</sup> para otimizar o portfólio. O objetivo deste trabalho é avaliar os resultados da otimização, considerando tanto os dados históricos quanto as previsões feitas pela rede neural. A figura 4.1 apresenta o fluxo do algoritmo desenvolvido.

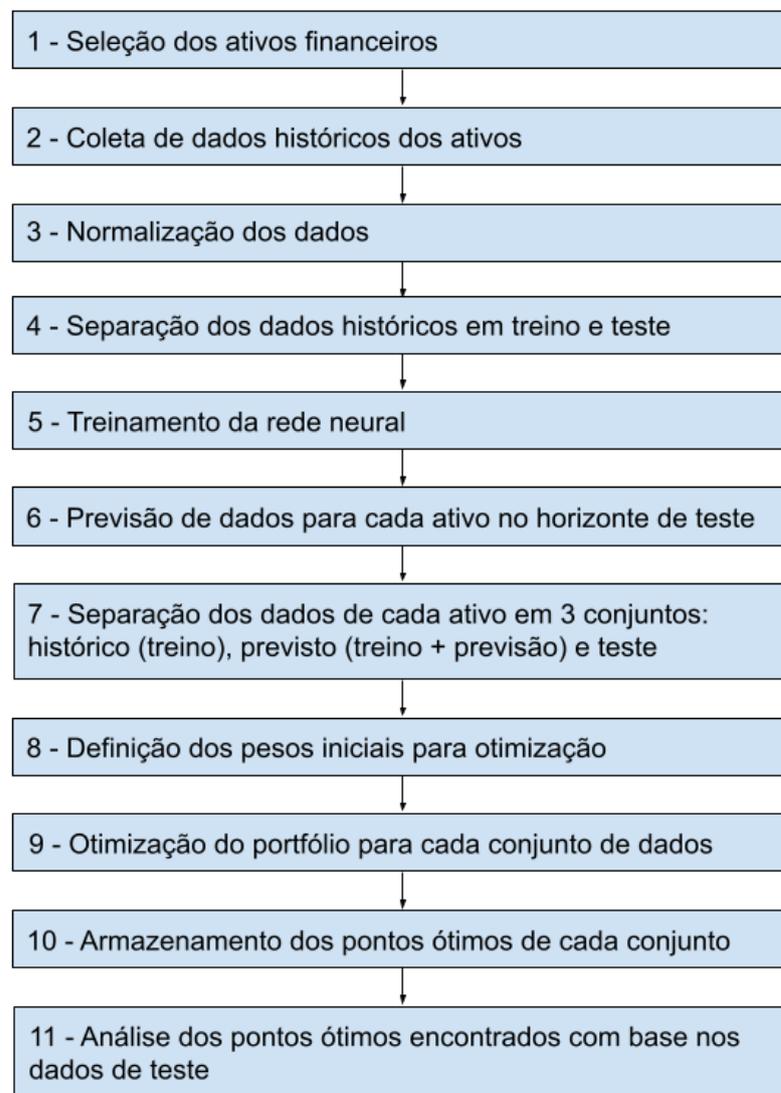


Figura 4.1 – Fluxograma da simulação

<sup>1</sup> <https://keras.io>

<sup>2</sup> <https://www.tensorflow.org/>

<sup>3</sup> <https://scipy.org>.

Para realizar a análise, foram selecionados cinco ativos negociados na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa). A escolha foi feita com base na liquidez das ações nos últimos 10 anos, além da diferença de atuação de cada empresa, levando em conta a diversificação como um princípio fundamental para o controle de risco. As empresas escolhidas para compor a análise foram:

- Petrobras (PETR3): Uma das maiores empresas do setor de energia do Brasil, atuando na exploração, produção, refino e distribuição de petróleo e gás.
- Vale (VALE3): Uma das maiores empresas de mineração do mundo e também a maior produtora de minério de ferro, níquel e pelotas. Além disso, atua como operadora logística no Brasil.
- Itaú Unibanco (ITUB4): O maior conglomerado financeiro do hemisfério sul e um dos maiores bancos do Brasil, oferecendo uma ampla gama de serviços financeiros, como serviços bancários, seguros, previdência privada e gestão de ativos.
- Ambev (ABEV3): A maior cervejaria da América Latina, sendo líder de mercado em mais de dez países.
- Magazine Luiza (MGLU3): Também conhecida como Magalu, é uma das principais varejistas do Brasil, com forte presença no comércio eletrônico.

Após a escolha das ações para construção da carteira de investimentos, seus dados históricos foram extraídos, com uma frequência semanal, do *Yahoo Finance*<sup>4</sup>, que é uma plataforma que disponibiliza informações de preços e volumes de negociação de ativos financeiros. Foram extraídos o preço de fechamento ajustado semanalmente de cada ação entre 31/10/2017 à 30/04/2023.

O próximo passo consistiu na implementação da rede neural LSTM, utilizando os preços de fechamento das ações para prever preços futuros. Esse tipo de rede é capaz de aprender sequências de dados temporais e fazer previsões com base em padrões encontrados nos dados de entrada. O código incluiu métodos para definir o conjunto de treinamento e teste, treinar a rede e avaliar o modelo.

A etapa inicial na aplicação do modelo LSTM é criar uma série temporal com os preços históricos da ação. A série temporal é então dividida em janelas de tempo, onde cada janela de tempo é composta por um número fixo de períodos anteriores. Por exemplo, se a variação da janela for de 4 semanas, isso significa que os dados serão agregados em um intervalo de 4 semanas para cada ponto de dados. Se a variação da janela for de 1 semana, os dados serão agregados semanalmente. No experimento aqui descrito, foi utilizada uma janela de 20 semanas.

---

<sup>4</sup> <https://finance.yahoo.com>.

Após a divisão da série temporal em janelas de tempo, o conjunto de dados foi normalizado, utilizando a função *MinMaxScaler*<sup>5</sup> e foi dividido em um conjunto de treinamento e um conjunto de teste. O conjunto de treinamento corresponde a 82% dos dados e o conjunto de teste corresponde aos 18% restantes, aproximadamente 4 anos e meio de dados de treino e 1 ano de teste. Durante o treinamento, a rede aprende a reconhecer padrões nos dados históricos e usa esses padrões para fazer previsões futuras.

O modelo implementado possui duas camadas com 100 unidades cada, seguido por uma camada densa com 25 unidades e uma camada de saída densa com uma única unidade. O modelo é treinado usando o método de otimização Nadam para ajustar os parâmetros da rede neural e sua precisão é avaliada utilizando o RMSE com os dados de teste.

Após o treinamento, o modelo foi utilizado para prever novos dados para o horizonte de teste. Uma função cascata foi implementada para a previsão dos dados, de modo que cada dado novo previsto fosse incorporado à base utilizada para a previsão do próximo dado.

Inicialmente, o conjunto de dados históricos era constituído por 287 semanas. Após a separação dos dados, restaram 236 semanas para o conjunto de treino e 51 semanas para o conjunto de teste. As previsões foram realizadas para o mesmo horizonte do conjunto de testes, ou seja, para um período de 51 semanas.

Após a previsão, separamos nossos dados em 3 conjuntos:

- Dados Histórico: composto pelas 236 semanas de dados de treino
- Dados Previstos: composto pelas 236 semanas de dados de treino e 51 semanas de dados previstos, totalizando 287 semanas de dados
- Dados de teste: composto pelas 51 semanas do último ano

Para essa comparação, foi realizada a otimização do portfólio considerando os dados históricos e os dados previstos pelo modelo. A otimização para encontrar os pontos ótimos e a fronteira eficiente é feita com a função *optimize*<sup>6</sup>, que recebe uma função objetivo do que deve ser otimizado, além das restrições e limites a serem considerados.

O primeiro passo para otimização pelo SciPy é a definição da função objetivo, e uma limitação encontrada na função *optimize* é não existir a possibilidade de maximizar o objetivo, como por exemplo, quando queremos maximizar a receita. Para resolver essa limitação, a função objetivo foi modificada para seu negativo, ou seja, minimizando o negativo da receita, encontramos seu retorno máximo.

O cálculo do retorno, risco e índice de Sharpe é feito considerando 52 semanas de negociações no mercado por ano (conhecidos como pregões). O risco é calculado como expresso

<sup>5</sup> <https://scikit-learn.org/stable/>

<sup>6</sup> <https://scipy.org>

na equação (3.2), partindo da matriz de covariância dos ativos. O retorno é calculado pela média ponderada dos retornos das ações individuais (3.1). E para o índice de Sharpe (3.6), é considerando como taxa livre de risco o retorno acumulado da taxa Selic do último ano.

Para encontrar os pontos ótimos, foram implementadas as funções de otimizar o retorno e o Sharpe máximo, além de otimizar o risco, buscando seu valor mínimo. Para construção da fronteira eficiente foi utilizada a função de otimização do risco, com a função de retorno máximo como restrição conforme a (3.10). Toda otimização foi feita utilizando o método SLSQP.

A parte principal da otimização se encontra na construção da fronteira eficiente, que começa a partir da definição do nível de restrição epsilon para o retorno. Para cada nível é feita a otimização da minimização do risco, partindo de um ponto inicial de alocação das ações, enquanto o risco mínimo não é encontrado, uma nova alocação é testada. O problema finaliza ao encontrar o risco mínimo para cada nível épsilon de retorno.

A simulação foi finalizada com a otimização do portfólio com os dados de teste, onde se levou em consideração o desempenho dos pontos ótimos gerados pelos outros dois conjuntos de dados no último ano. Através desta otimização final, foi possível avaliar uma decisão que poderia ter sido tomada 51 semanas atrás, contemplando a escolha entre utilizar apenas os dados históricos ou incorporar uma previsão das próximas 51 semanas aos dados históricos existentes. Posteriormente, os resultados dessa decisão foram comparados com o que efetivamente ocorreu no último ano.

## 5 Resultados

Nesta seção, apresentaremos os resultados da análise do desempenho do portfólio composto pelos cinco ativos escolhidos e definidos no capítulo anterior. O objetivo deste estudo foi avaliar o desempenho dos portfólios ótimos gerados pelos dados históricos de retornos semanais do Índice Bovespa, bem como comparar os resultados com aqueles obtidos a partir de preços previstos por um modelo de rede neural.

Na figura 5.1 podemos ver o comportamento do preço dessas ações ao longo do tempo, onde é possível destacar o preço mais alto da Vale, principalmente após 2020, em relação às outras, além de sua alta volatilidade.

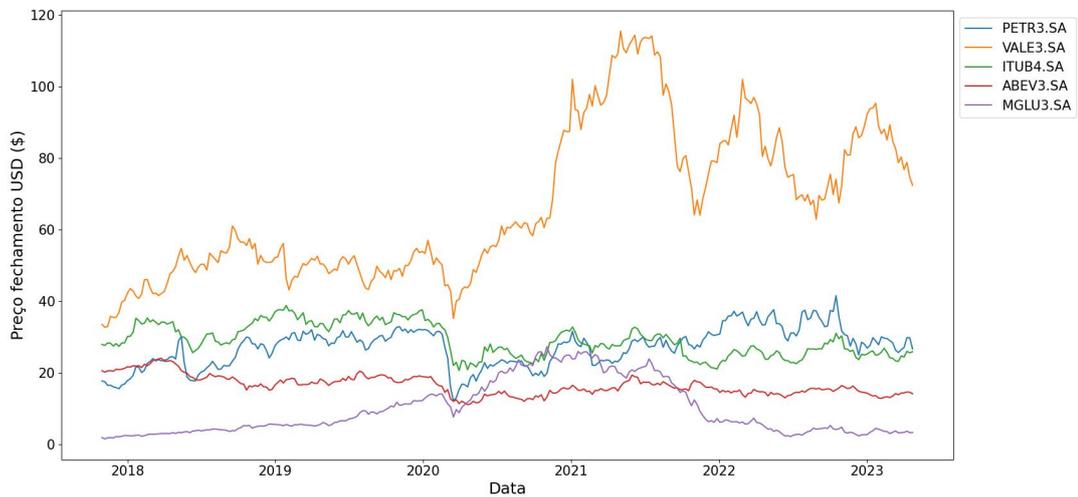


Figura 5.1 – Preço histórico de fechamento ajustado dos ativos

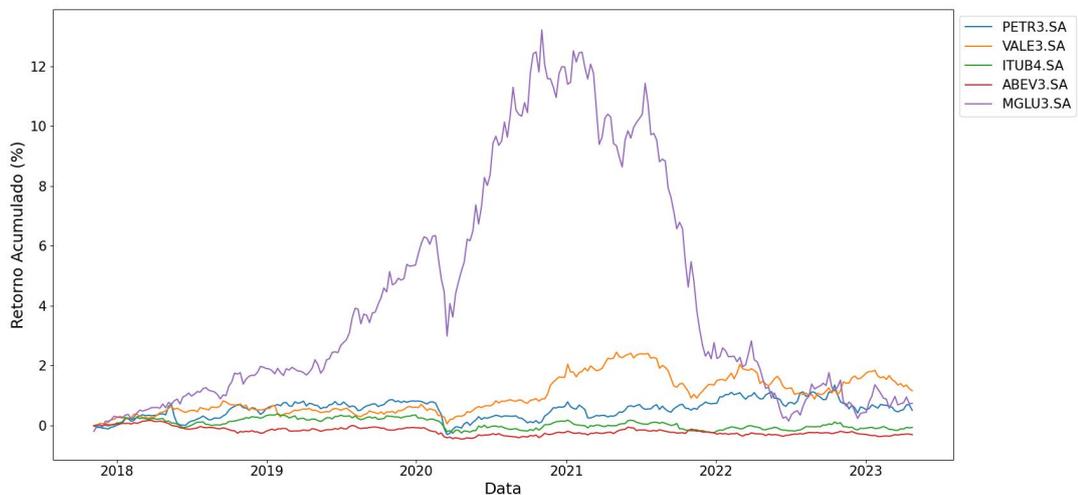


Figura 5.2 – Retorno acumulado dos ativos ao longo do tempo

O gráfico 5.2 destaca a variação considerável do retorno acumulado da Magazine Luiza durante o período analisado. É observado um movimento de ascensão seguido por uma subsequente descida, retornando quase ao ponto de partida.

Após análise inicial dos dados históricos, utilizamos uma rede neural do tipo LSTM para prever esses dados.

## 5.1 Validação do Modelo LSTM

É importante ressaltar que a análise do desempenho da rede neural foi realizada individualmente para cada ativo do portfólio. Ou seja, foram geradas previsões individualmente para cada ativo e calculados os valores do RMSE correspondentes. Isso permite avaliar a precisão das previsões para cada ativo de forma isolada e identificar se algum ativo apresentou um desempenho melhor ou pior em relação aos demais. Dessa forma, é possível fazer uma análise mais completa e detalhada do desempenho do modelo para cada ativo do portfólio.

Na tabela 5.1 temos os resultados da previsão, medidos pelo RMSE, para cada ativo do portfólio.

Tabela 5.1 – RMSE dos ativos

Petrobras	Vale	Itaú	Ambev	Magalu
6,663	0,698	0,082	1,508	9,696

O RMSE mede a diferença entre os valores previstos e os valores reais. Quanto menor o RMSE, melhor é o desempenho do modelo de previsão. Nesse caso, valores baixos de RMSE indicam uma previsão mais precisa e próxima dos valores reais do ativo. Isso indica que o modelo está fazendo previsões mais precisas e tem um melhor desempenho em capturar os padrões e as dependências dos dados.

Podemos observar que os valores de RMSE variam para cada ativo. Isso indica que o desempenho do modelo de previsão pode variar dependendo das características específicas do ativo que está sendo analisado. Essa análise pode ser complementada pelos gráficos de previsão para cada ativo, apresentados a baixo.

Pela análise dos gráficos, é possível afirmar que o modelo LSTM se mostrou útil para prever os preços das ações, com diferentes níveis de precisão para cada ativo. A Petrobras e a Magazine Luiza tiveram previsões menos precisas, enquanto a Vale e o Itaú obtiveram previsões relativamente boas, indicando que o modelo conseguiu capturar bem os padrões de seus comportamentos.

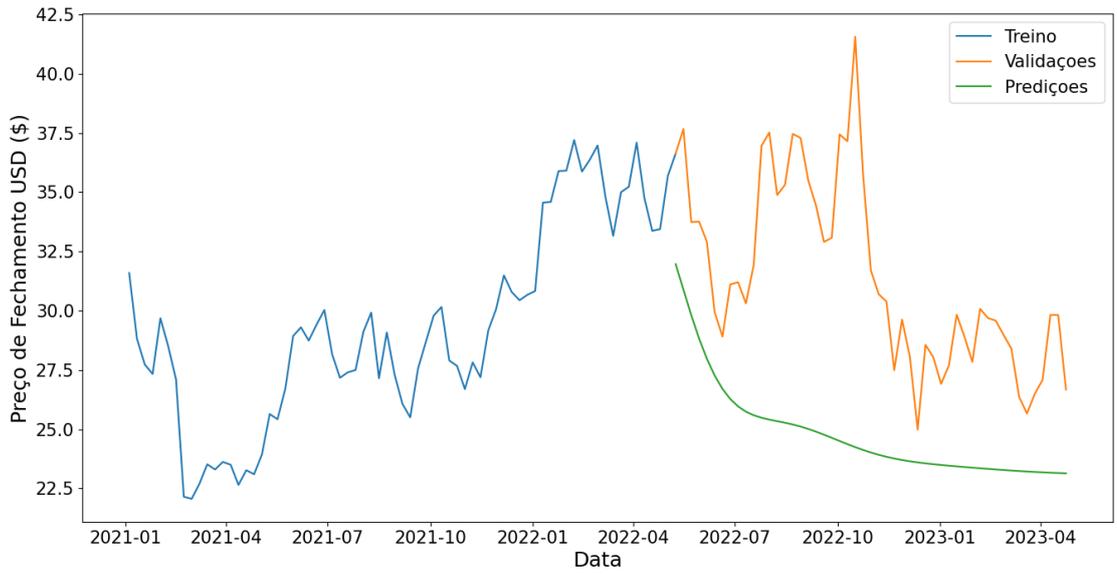


Figura 5.3 – Modelo de Previsão para Petrobras

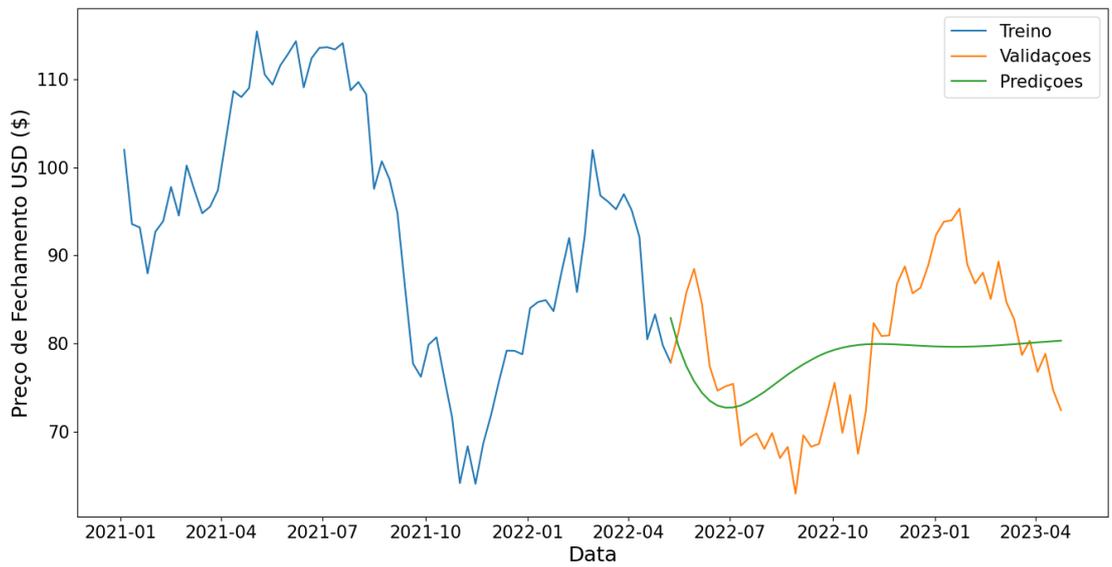


Figura 5.4 – Modelo de Previsão para Vale

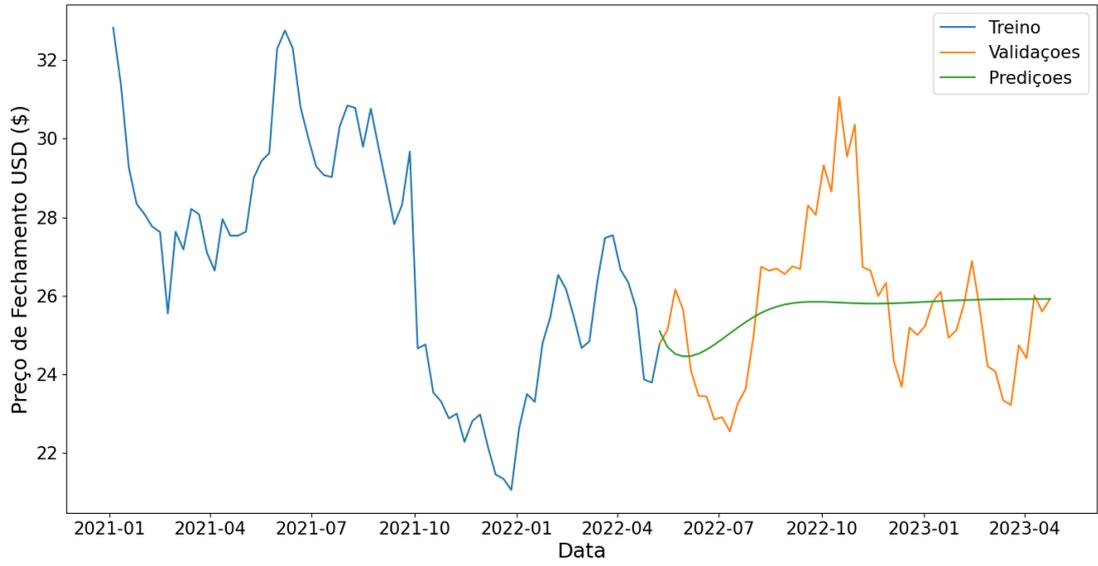


Figura 5.5 – Modelo de Previsão para Itaú

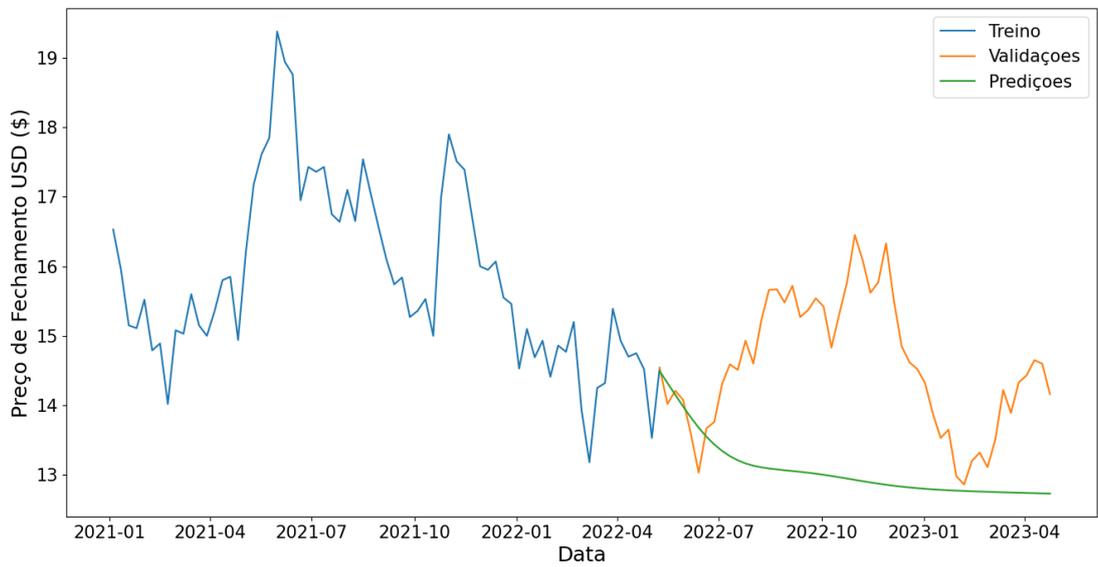


Figura 5.6 – Modelo de Previsão para Ambev

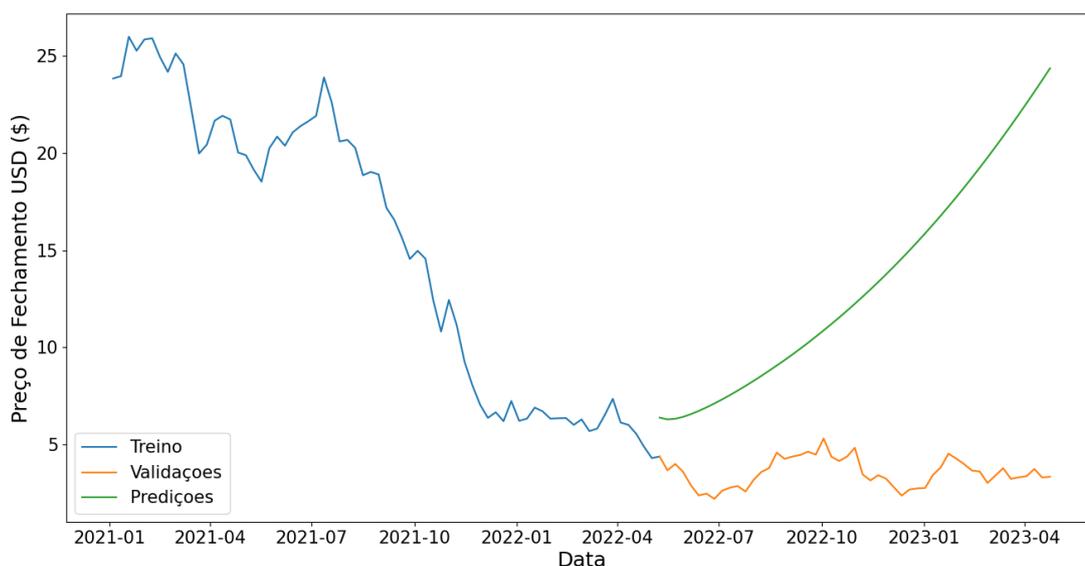


Figura 5.7 – Modelo de Previsão para Magazine Luiza

## 5.2 Otimização do Portfólio

Após a extração dos dados históricos e construção do modelo LSTM para previsão dos dados, foi feita a otimização, tanto para o portfólio com os dados históricos completos, que será apresentado em seguida, quanto com os dados obtidos por cada conjunto de dados separados previamente, a fim de comparações dos resultados com a previsão, o que será apresentado na sessão seguinte.

O portfólio é composto por 5 ações, e a primeira decisão feita para otimização é como o orçamento deve ser alocado entre elas. Considerando um orçamento total de 100%, foi atribuído um peso para cada ação, de forma que a soma deles seja 1. O valor dos pesos representa a parte do orçamento que será alocada para a ação específica. Inicialmente, o peso de 0,2 (20%) foi atribuído para cada ação, de forma que o orçamento disponível fosse alocado igualmente entre as 5 ações analisadas. Essa alocação inicial ocorre devido a exigência da função de otimização, explicitada anteriormente.

Também foram gerados 5 portfólios, com cada ação compondo individualmente 100% dele. Para cada portfólio gerado, é analisado seu retorno, risco e índice de Sharpe, todos calculados de forma anual. A relação entre retorno e risco desses 6 primeiros portfólios pode ser observada na tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Risco e retorno dos portfólios iniciais

Portfólio	Retorno (%)	Risco (%)	Índice de Sharpe
Inicial	13,690	26,549	0,464
Petrobras	18,245	45,567	0,370
Vale	20,125	34,920	0,537
Itaú	3,699	31,805	0,073
Ambev	-2,496	29,405	-0,132
Magalu	28,875	61,152	0,450

O risco é associado à volatilidade do ativo (neste caso, ação) e, quando um portfólio é composto por mais de uma ação, a correlação entre esses pares deve ser considerada. A otimização da alocação pode ser observada no fato de que é possível obter um portfólio diversificado, com risco menor do que uma ação com o menor risco em seu portfólio.

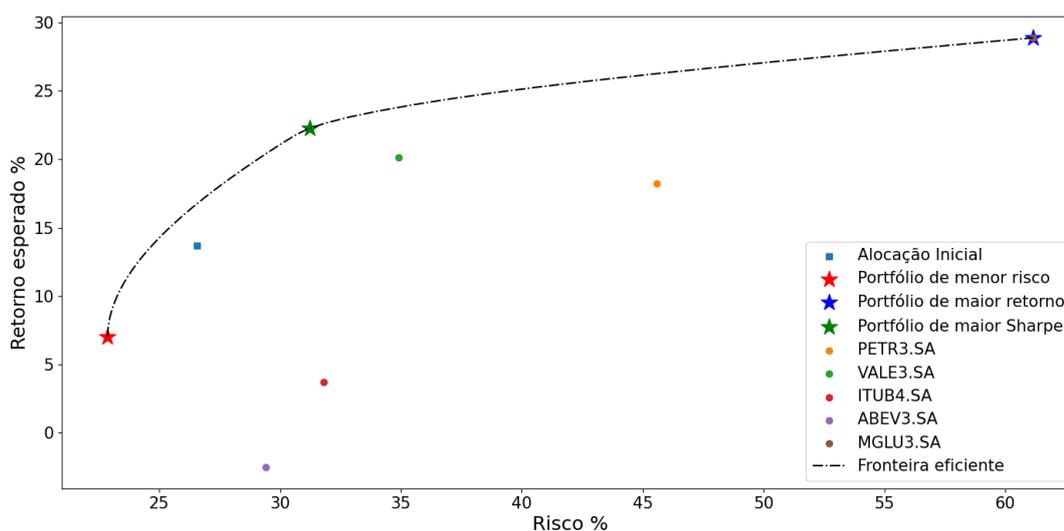


Figura 5.8 – Retorno e risco dos Portfólios Otimizados

A linha pontilhada apresentada no gráfico 5.8 é a fronteira eficiente, o que indica que os pontos ao longo da linha representam o menor risco para um determinado retorno. Todos os outros pontos (portfólios) que aparecerem abaixo da fronteira retornarão maiores riscos para os mesmos retornos, logo, partindo de um mesmo retorno esperado, não faz sentido assumir um risco extra.

A fronteira eficiente foi calculada a partir da função que define uma lista de retornos variando entre o menor valor encontrado pela minimização de risco e o maior através da função de maximização de retorno. Através dessa lista de "retornos alvo", a função calcula o portfólio eficiente para cada um, gerando assim, pontos para a fronteira eficiente.

Pela tabela 5.2 e pela figura 5.8, é observado que a ação com menor risco é a Ambev, com 29,405%, e seu retorno é negativo em -2,496%. Mas, através da otimização do portfólio, dividindo a alocação do orçamento entre a 4 das 5 ações, conforme indicado na tabela 5.4, é possível alcançar um portfólio com 22,867% de risco e um retorno positivo de 7,006%, como mostrado na tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Risco e retorno dos portfólios ótimos

Portfólio	Retorno (%)	Risco (%)	Índice de Sharpe
Maior Sharpe	22,258	31,216	0,669
Menor Risco	7,006	22,867	0,246
Maior Retorno	28,875	61,152	0,450

Na tabela 5.4, é possível observar a alocação do orçamento em cada cenário analisado na tabela 5.3. É notável que a alocação predominante no portfólio de menor risco é direcionada à Ambev, o que se mostra coerente, considerando que esta é a ação associada ao menor risco.

Tabela 5.4 – Alocação dos ativos nos portfólios ótimos

	Petrobras (%)	Vale (%)	Itaú (%)	Ambev (%)	Magalu (%)
Maior Sharpe	15,288	57,042	0,000	0,000	27,670
Menor Risco	0,000	31,414	24,638	41,174	2,773
Maior Retorno	0,000	0,000	0,000	0,000	100,000

A posição com maior Sharpe é aquela que possui o melhor retorno ajustado em relação ao risco, mas é uma posição onde é necessário abrir mão de um ponto mais estável em vista de um maior retorno.

Através da otimização do portfólio com base nos dados históricos, foi possível encontrar pontos ótimos que oferecem diferentes níveis de risco e retorno. A fronteira eficiente mostra a relação entre risco e retorno, permitindo ao investidor escolher o ponto ótimo que melhor se adequa ao seu perfil.

### 5.3 Comparação entre a otimização com dados históricos e a otimização com previsões

Toda a análise do portfólio foi feita com o conjunto completo de dados históricos, conforme apresentado na seção acima, bem como para os portfólios com os três conjuntos de dados apresentados no capítulo anterior. Nesta seção, apresentaremos os resultados dos portfólios para cada um desses conjuntos e analisaremos a relação dos resultados com o que realmente aconteceu nas últimas 51 semanas.

A partir daqui, os "dados históricos" se referem ao conjunto de dados históricos com dados de até 51 semanas atrás, e o "conjunto de dados previstos" se refere ao conjunto composto

por esses dados históricos acrescidos de 51 semanas previstas. O objetivo deste experimento foi simular uma decisão feita há 51 semanas atrás, quando os dados históricos das últimas 51 semanas ainda não existiam, e analisar a diferença do resultado após essas 51 semanas.

Utilizando a análise clássica, considerando apenas os dados históricos, para encontrar nossos portfólios ótimos, obtivemos os resultados apresentados no gráfico 5.9. E, ao acrescentar a previsão de 51 semanas, encontramos os portfólios ótimos apresentados no gráfico 5.10.

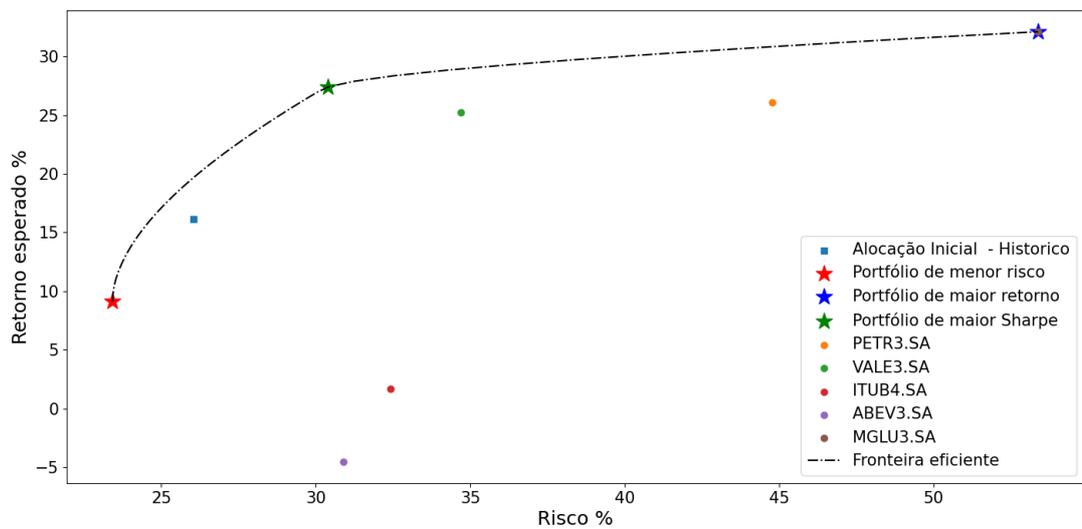


Figura 5.9 – Portfólios ótimos baseados nas escolhas otimizadas para dados histórico

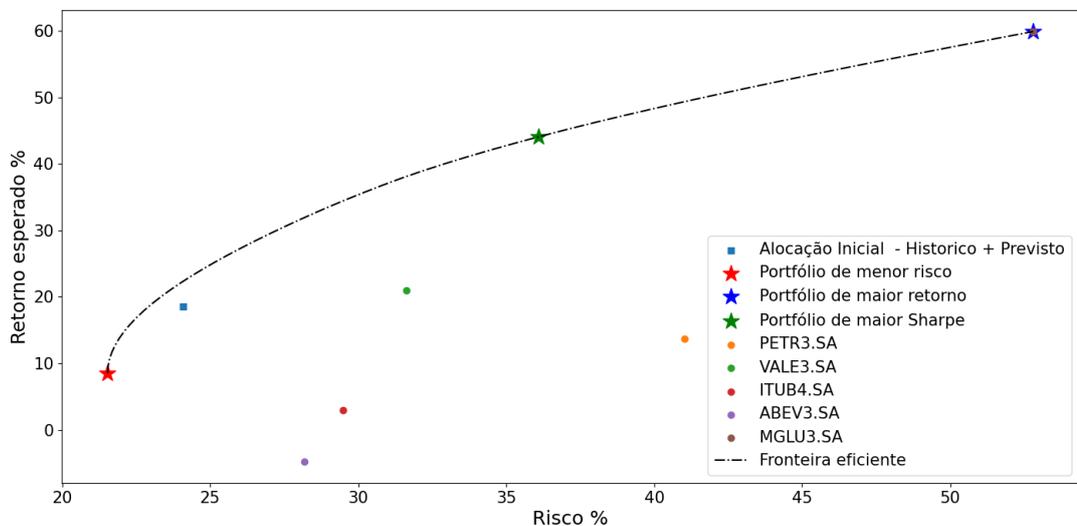


Figura 5.10 – Portfólios ótimos baseados nas escolhas otimizadas para dados previstos

Os dois gráficos acima não podem ser comparados entre eles, por representarem horizontes distintos, mas eles são construídos para escolha dos pontos ótimos para esses dois conjuntos de dados, e a alocação de cada portfólio nestes pontos podem ser observadas na tabela 5.5.

Para avaliar o desempenho dessas estratégias, foram simuladas todas essas alocações nos dados reais do último ano. Desta forma, conseguimos avaliar qual foi o desempenho das decisões tomadas há 51 semanas, e qual estratégia se saiu melhor, a análise clássica, ou adicionar a previsão para a tomada de decisão.

Ao comparar as alocações ótimas dos ativos com base nos dados históricos e na combinação dos dados históricos com as previsões do modelo LSTM, notamos diferenças significativas, principalmente no portfólio de Maior Sharpe. Isso indica que ao incorporar previsões no processo de tomada de decisão, o investidor pode chegar a uma alocação diferente dos ativos para alcançar um melhor equilíbrio entre retorno e risco.

Tabela 5.5 – Alocação dos ativos nos portfólios ótimos para cada conjunto de dados

	Petrobras (%)	Vale (%)	Itaú (%)	Ambev (%)	Magalu (%)
Maior Sharpe   Último ano	0,000	0,000	100,000	0,000	0,000
Menor Risco   Último ano	4,836	13,964	18,311	62,889	0,000
Maior Retorno   Último ano	0,000	0,000	0,000	0,000	100,000
Maior Sharpe   Histórico	20,785	50,576	0,000	0,000	28,640
Menor Risco   Histórico	0,000	32,479	23,817	36,840	6,864
Maior Retorno   Histórico	0,000	0,000	0,000	0,000	100,000
Maior Sharpe   Previsto	0,028	40,564	0,000	0,000	59,407
Menor Risco   Previsto	0,000	33,328	24,782	37,534	4,356
Maior Retorno   Previsto	0,000	0,000	0,000	0,000	100,000

Observando a tabela de alocação dos ativos nos pontos ótimos, é possível notar que a alocação no portfólio de Maior Sharpe foi drasticamente alterada entre os cenários. No caso do portfólio de Maior Sharpe baseado apenas nos dados do último ano, houve uma alocação exclusiva de 100% em um único ativo (Itaú), enquanto a combinação com as previsões resultou em uma alocação diversificada entre Vale (40,564%) e Magalu (59,407%).

Para o portfólio de Menor Risco, tivemos uma leve variação na alocação dos ativos, no entanto, essas alterações não tiveram grande impacto no resultado final. Já no portfólio de Maior Retorno, a alocação permaneceu inalterada em ambos os cenários, com 100% dos ativos alocados em Magalu, coincidindo com a decisão que seria feita baseada nos dados do último ano.

O gráfico 5.11 mostra os resultados em relação à fronteira eficiente com os dados do último ano. Além disso, a tabela complementar 5.6 fornece os valores de retorno, risco e Índice de Sharpe para cada um dos portfólios analisados nos três cenários: baseado apenas nos dados reais do último ano, baseado apenas nos dados históricos, e a combinação dos dados históricos com as previsões.

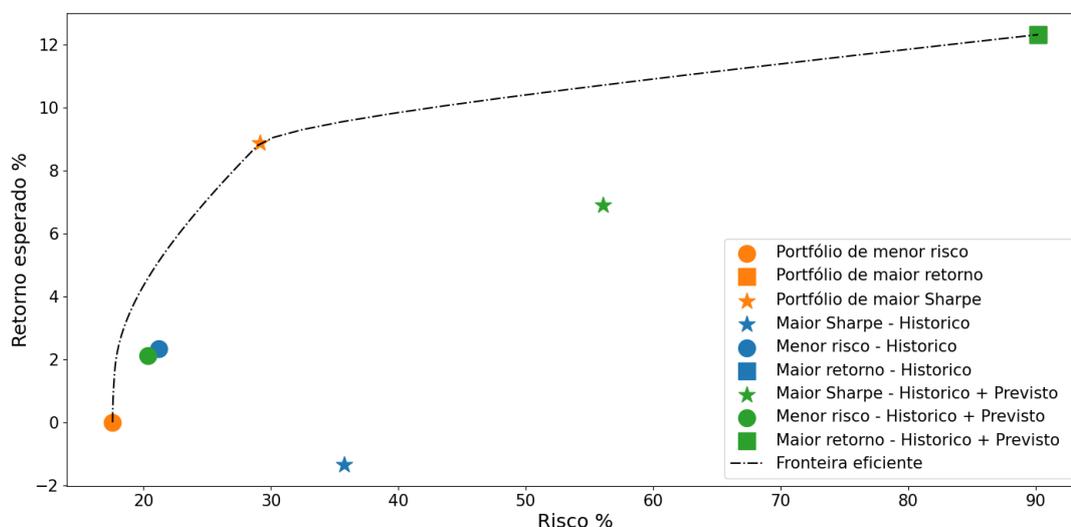


Figura 5.11 – Portfólios ótimos analisados nos dados do último ano

Ao observar o gráfico 5.11, é possível notar que os pontos ótimos baseados nos dados previstos estão mais próximos da fronteira eficiente em comparação com os pontos ótimos baseados apenas nos dados históricos. Isso sugere que incorporar previsões em um modelo de otimização pode ser benéfico para melhorar os resultados no longo prazo. Além disso, observamos que para os dados históricos, o ponto de maior Sharpe acabou dominado pelo ponto de menor risco, diferente do que acontece com os dados previstos.

Tabela 5.6 – Risco e retorno dos portfólios ótimos analisados nos dados do último ano

Portfólio	Retorno (%)	Risco (%)	Índice de Sharpe
Maior Sharpe   Último ano	8,869	29,126	0,257
Menor Risco   Último ano	0,000	17,580	-0,078
Maior Retorno   Último ano	12,323	90,196	0,121
Maior Sharpe   Histórico	-1,346	35,760	-0,076
Menor Risco   Histórico	2,347	21,187	0,046
Maior Retorno   Histórico	12,323	90,196	0,121
Maior Sharpe   Previsto	6,892	56,072	0,098
Menor Risco   Previsto	2,109	20,366	0,036
Maior Retorno   Previsto	12,323	90,196	0,121

Quando analisamos os resultados individualmente, vemos que para os portfólios de maior retorno não tivemos diferença, o que era esperado, uma vez que a alocação entre eles é igual. Para os portfólios de menor risco, apesar das diferenças de alocação em relação ao que realmente aconteceu, os resultados não apresentaram diferenças significativas. Mas para os portfólios de maior Sharpe, a combinação de Histórico com Previsão apresentou um retorno mais otimista

(6,892%) em relação ao histórico (-1,346%) e também teve um Índice de Sharpe positivo (0,098) enquanto o histórico teve um Índice de Sharpe negativo (-0,076). No entanto, a combinação de Histórico com Previsão também resultou em um risco mais elevado (56,072%) em comparação com o histórico (35,760%). Portanto, a combinação de Histórico com Previsão apresentou um melhor Índice de Sharpe, mas também aumentou o risco do portfólio em relação ao histórico.

Com base nessa análise, podemos concluir que a combinação de Histórico com Previsão apresentou um melhor Índice de Sharpe para o portfólio de Maior Sharpe, mas também aumentou o risco do portfólio em relação ao histórico. Para o portfólio de Menor Risco e Maior Retorno, não houve diferença significativa entre as duas abordagens. A escolha entre o histórico e a combinação de Histórico com Previsão dependerá dos objetivos e tolerância ao risco do investidor.

# 6 Considerações Finais

## 6.1 Conclusão

No mercado financeiro, a construção de um portfólio rentável e com risco controlado é um desafio constante para os investidores, especialmente diante da instabilidade do mercado. Neste contexto, a otimização de portfólios desempenha um papel fundamental ao oferecer métodos e ferramentas para a tomada de decisões embasadas e eficientes.

Neste trabalho foi apresentado os conceitos de otimização de portfólios, além do desenvolvimento de um algoritmo que buscasse uma alocação de ações onde a relação entre o retorno e o risco fosse maximizada, baseando no clássico modelo de Markowitz. Como pode ser observado na seção de Resultados, o algoritmo foi capaz de encontrar três portfólios ótimos para cada conjunto de dados, além de apresentar a fronteira eficiente que se apresenta como uma ótima ferramenta para análise de outros portfólios. Deve ser levado em consideração que os resultados obtidos servem apenas para auxiliar e nortear as decisões de um investidor, não sendo recomendado para usar na tomada de decisão, uma vez que o perfil do investidor e seus objetivos não são considerados para análise.

Além disso, foi utilizada a previsão de dados por meio do modelo LSTM, e, apesar de não ter apresentado resultados perfeitos, se mostrou mais eficaz do que a utilização apenas dos dados históricos. A inclusão das previsões permitiu que os pontos ótimos dos portfólios se aproximassem mais da fronteira eficiente, sugerindo que essa abordagem pode melhorar a alocação de ativos, resultando em portfólios mais eficientes em termos de risco e retorno.

É fundamental lembrar que previsões de mercado são incertas, e embora o modelo LSTM tenha sido útil para gerar previsões, essas ainda estão sujeitas a erros e imprecisões. Além disso, a otimização de portfólio é um processo complexo que depende de muitos fatores, e os resultados podem variar de acordo com as configurações do modelo e as premissas adotadas.

## 6.2 Trabalhos Futuros

Com base nos resultados e descobertas apresentados neste trabalho, existem diversas oportunidades para aprimorar e expandir a abordagem de otimização de portfólios com previsão LSTM. Algumas direções promissoras para trabalhos futuros são discutidas a seguir.

Uma das principais áreas de aprimoramento é a melhoria do modelo LSTM utilizado para previsão de retornos de ações. Embora o modelo tenha apresentado resultados mais promissores do que a simples utilização de dados históricos, ainda é possível explorar técnicas para otimizar sua performance. Isso pode envolver a utilização de arquiteturas mais avançadas, a investigação

de técnicas de regularização e o pré-processamento adequado dos dados para melhorar a qualidade das previsões. Além disso, considerar a inclusão de outras informações relevantes, como notícias financeiras ou indicadores macroeconômicos, pode enriquecer o modelo e aprimorar sua capacidade de previsão.

Para validar a robustez dos resultados, é recomendado realizar análises e testes em diferentes períodos de tempo. O desempenho do modelo pode variar em diferentes cenários econômicos e ciclos de mercado, e, portanto, é importante validar sua eficácia em várias janelas temporais. A utilização de dados históricos de diferentes períodos pode fornecer uma visão mais completa do desempenho do modelo em diferentes condições de mercado.

Além de investir na previsão mais precisa dos retornos, explorar a inclusão de fatores fundamentais das empresas como variáveis adicionais no processo de otimização pode enriquecer a análise do portfólio. Fatores como relação preço/lucro, margem líquida, entre outros, podem complementar a análise técnica e melhorar a seleção de ações para o portfólio. A combinação de análise fundamentalista com técnicas de aprendizado de máquina pode fornecer uma visão mais abrangente e robusta do mercado.

Por fim, ao aplicar o modelo de otimização de portfólios em cenários do mundo real, é importante considerar restrições e custos adicionais que os investidores enfrentam. Introduzir no modelo de otimização restrições, como limites de exposição a setores específicos, restrições de capital ou custos de transação, torna o processo mais realista e aplicável para situações reais de investimento.

# Referências

- ALBUQUERQUE, G. U.; KALATZIS, A. E.; TOLEDO, F. M. Um estudo sobre ponderação de cenários para o problema de portfólio de ações. 2009.
- AMARAL, J. V. S. do; LEAL, G. dos S.; OLIVEIRA, G. F. de; MONTEVECHI, J. A. B.; BALESTRASSI, P. P. Otimização de portfólio de ações do ibovespa: Uma comparação entre métodos de programação linear e programação não linear. 2020.
- ASANGA, S.; ASIMIT, A.; BADESCU, A.; HABERMAN, S. Portfolio optimization under solvency constraints: a dynamical approach. *North American Actuarial Journal*, Taylor & Francis, v. 18, n. 3, p. 394–416, 2014.
- B3. 2017. <[https://www.b3.com.br/pt\\_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/ibovespa.htm](https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/ibovespa.htm)>. Acesso em 24 de maio de 2022.
- BAGUL, J.; WARKHADE, P.; GANGWAL, T.; MANGAONKAR, N. Arima vs lstm algorithm—a comparative study based on stock market prediction. In: IEEE. *2022 5th International Conference on Advances in Science and Technology (ICAST)*. [S.l.], 2022. p. 49–53.
- BAILEY, D. H.; PRADO, M. L. de. An open-source implementation of the critical-line algorithm for portfolio optimization. *Algorithms*, MDPI, v. 6, n. 1, p. 169–196, 2013.
- BAUDIŠ, P. Cocopf: An algorithm portfolio framework. Dept. of Cybernetics, Czech Technical University, 2014.
- BYRD, R. H.; LU, P.; NOCEDAL, J.; ZHU, C. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 16, n. 5, p. 1190–1208, 1995.
- DHAWAN, M.; AGRAWAL, T. State-of-the-art vs prominent models: An empirical analysis of various neural networks on stock market prediction. In: . [S.l.: s.n.], 2022.
- ELTON, E. J.; GRUBER, M. J.; BROWN, S. J.; GOETZMANN, W. N. *Modern portfolio theory and investment analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.
- FAN, Z.; LI, H.; WEI, C.; LI, W.; HUANG, H.; CAI, X.; CAI, Z. An improved epsilon constraint handling method embedded in moea/d for constrained multi-objective optimization problems. *2016 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*, p. 1–8, 2016.
- GUO, Q. Review of research on markowitz model in portfolios. In: ATLANTIS PRESS. *2022 7th International Conference on Social Sciences and Economic Development (ICSSSED 2022)*. [S.l.], 2022. p. 786–790.
- HELLSTRÖM, T. Optimizing the sharpe ratio for a rank based trading system. In: SPRINGER. *Portuguese Conference on Artificial Intelligence*. [S.l.], 2001. p. 130–141.
- HOCHREITER, S.; SCHMIDHUBER, J. Long short-term memory. *Neural computation*, MIT Press, v. 9, n. 8, p. 1735–1780, 1997.
- HU, Y. A heuristic approach to forecasting and selection of a portfolio with extra high dimensions. *Mathematics*, MDPI, v. 11, n. 6, p. 1513, 2023.

- HYNDMAN, R. J.; ATHANASOPOULOS, G. *Forecasting: Principles and Practice*. [S.l.]: OTexts, 2018.
- ILMANEN, A.; SAYOOD, R. Quantitative forecasting models and active diversification for international bonds. *The Journal of Fixed Income*, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 12, n. 3, p. 40–51, 2002.
- IVANOVA, M.; DOSPATLIEV, L. Application of markowitz portfolio optimization on bulgarian stock market from 2013 to 2016. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, v. 117, n. 2, p. 291–307, 2017.
- JÚNIOR, G. P. Uma abordagem multiobjetivo para o problema de sequenciamento e alocação de trabalhadores. *Gestão & Produção*, SciELO Brasil, v. 23, p. 132–145, 2016.
- KALAYCI, C.; ERTENLICE, O.; AKBAY, M. A comprehensive review of deterministic models and applications for mean-variance portfolio optimization. *Expert Systems with Applications*, v. 125, 02 2019.
- KEELAWAT, P.; THAMMASAN, N.; NUMAO, M.; KIJSIRIKUL, B. A comparative study of window size and channel arrangement on eeg-emotion recognition using deep cnn. *Sensors*, MDPI, v. 21, n. 5, p. 1678, 2021.
- KIM, E. J.; KIM, S. H.; LEE, D. Y. Stock price prediction using lstm, rnn and cnn-sliding window model. *Applied Sciences*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 10, n. 22, p. 8156, 2020.
- LIU, J.; CHAO, F.; LIN, Y.-C.; LIN, C.-M. Stock prices prediction using deep learning models. *ArXiv*, abs/1909.12227, 2019.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952. Disponível em: <<https://EconPapers.repec.org/RePEc:bla:jfinan:v:7:y:1952:i:1:p:77-91>>.
- MEHTAB, S.; SEN, J.; DUTTA, A. Stock price prediction using machine learning and lstm-based deep learning models. *ArXiv*, abs/2009.10819, 2020.
- MESQUITA, C. M.; OLIVEIRA, R. A. de; PEREIRA, A. M. Combining an lstm neural network with the variance ratio test for time series prediction and operation on the brazilian stock market. *2020 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*, p. 1–8, 2020.
- MILHOMEM, D. A.; DANTAS, M. J. P. Analysis of new approaches used in portfolio optimization: A systematic literature review. *Evolutionary and Memetic Computing for Project Portfolio Selection and Scheduling*, Springer, p. 125–157, 2022.
- NETO, A. A. *Mercado financeiro*. 9. ed.. ed. São Paulo: Atlas, 2010.
- PEREIRA, M. V. L. et al. Encolhimento da matriz de covariâncias e índices de incerteza: a utilização do bootstrap na seleção de portfólios. Universidade Federal de Minas Gerais, 2020.
- REIS, T. Fronteira eficiente: conheça a teoria de risco de harry markowitz. *Suno*, 2020. Disponível em: <<https://www.suno.com.br/artigos/fronteira-eficiente/>>.
- SHARPE, W. F. Mutual fund performance. *The Journal of business*, JSTOR, v. 39, n. 1, p. 119–138, 1966.

- SILVA, A. H. C.; LACERDA, W. S. Intelligent system for portfolio selection. *IEEE Latin America Transactions*, v. 12, n. 8, p. 1545–1552, 2014.
- SILVA, T. A. *ESTUDO EXPERIMENTAL DE TÉCNICAS PARA OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2011.
- SUBATHRA, D. R. Maximizing the returns while minimizing the risk using sharpe's ratio. *International Journal of Scientific Research in Science and Technology*, 2022.
- WU, Z.; RINCON, D.; LUO, J.; CHRISTOFIDES, P. D. Machine learning modeling and predictive control of nonlinear processes using noisy data. *AIChE Journal*, Wiley Online Library, v. 67, n. 4, p. e17164, 2021.
- ZAHARA, S.; ILMIDDAVIQ, M. et al. Consumer price index prediction using long short term memory (lstm) based cloud computing. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2020. v. 1456, n. 1, p. 012022.
- ZHANG, Y.; LI, X.; GUO, S. Portfolio selection problems with markowitz's mean–variance framework: a review of literature. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Springer, v. 17, n. 2, p. 125–158, 2018.
- ZHANG, Z.; ZHANG, S.; CHEN, X.; HU, J. A survey on deep learning for big data. *Information Fusion*, Elsevier, v. 42, p. 146–157, 2019.