

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIA EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**CARACTERIZAÇÃO DO CAOS EM SISTEMAS DINÂMICOS
ATRAVÉS DO MÉTODO SALI: Estudo Aplicado Ao Pêndulo
Amortecido Forçado**

Leonan Rodrigues Sena

Trabalho de Conclusão de Curso

Ouro Preto – MG
2023

Leonan Rodrigues Sena

**CARACTERIZAÇÃO DO CAOS EM SISTEMAS DINÂMICOS
ATRAVÉS DO MÉTODO SALI: Estudo Aplicado Ao Pêndulo
Amortecido Forçado**

Trabalho de Conclusão de
Curso apresentada ao
Departamento de Física (DEFIS),
Universidade Federal de Ouro
Preto, como parte dos requisitos
para obtenção do título de
Bacharelado em Física.

Orientador (a): Romuel Figueiredo
Machado

Ouro Preto – MG
2023



FOLHA DE APROVAÇÃO

Leonan Rodrigues Sena

Caracterização do caos em sistemas dinâmicos através do método sali: estudo aplicado ao pêndulo amortecido forçado

Monografia apresentada ao Curso de Física da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Física

Aprovada em 24 de março de 2023

Membros da banca

Dr Romuel Figueiredo Machado - Orientador- Universidade Federal de Ouro Preto
Dr Alcides V.C.Castro e Silva - Universidade Federal de Ouro Preto
Dr Thiago Escobar Colla - Universidade Federal de Ouro Preto

Romuel Figueiredo Machado, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 04/04/2023



Documento assinado eletronicamente por **Romuel Figueiredo Machado, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 04/04/2023, às 17:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0504308** e o código CRC **FA882108**.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	11
2. OBJETIVOS	12
3. METODOLOGIA OU INTRODUÇÃO TEÓRICA	13
3.1 O MAPA LOGÍSTICO.....	13
3.2 EXPOENTE DE LYAPUNOV PARA MAPA LOGÍSTICO.....	20
3.3 SEÇÃO DE POINCARÉ	23
3.4 CAOS PARA UM PÊNDULO	23
3.5 APLICAÇÃO DO EXPOENTE DE LYAPUNOV NO PÊNDULO FORÇADO E AMORTECIDO: ANÁLISE DA ESTABILIDADE DINÂMICA EM TRÊS VARIÁVEIS	34
3.6 MÉTODO SALI	40
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	44
5. CONCLUSÃO	49
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	50

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Mapa de Equação da Logística para um valor de μ fixo.	15
Figura 2 - Mapa de Equação da Logística para um valor de μ fixo.	15
Figura 3 - Mapa de Equação da Logística para um valor de μ fixo.	16
Figura 4 - Mapa de Equação da Logística para um valor de μ fixo.	16
Figura 5 - Mapa de Equação da Logística para um valor de μ fixo.	17
Figura 6 - Mapa de Equação da Logística para um valor de μ fixo.	17
Figura 7 - Diagrama de bifurcação para o mapa de Equação logística.	19
Figura 8 - Diagrama de bifurcação para o mapa de Equação logística.	19
Figura 9 - Diagrama de bifurcação para o mapa de Equação logística.	20
Figura 10 - Um pendulo amortecido forçado é acionado sobre seu pivô O.	24
Figura 11 – Ilustração bidimensional para o cálculo do expoente de Lyapunov	35
Figura 12 - Exemplo tridimensional para cálculo do expoente de Lyapunov	37
Figura 13 – Representação esquemática de dois vetores de desvio.	41
Figura 14 - Representação esquemática da evolução de dois vetores de desvio para uma órbita regular.....	42

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Gráfico do Expoente de Lyapunov	22
Gráfico 2 - Espaço de fase para o pêndulo amortecido	25
Gráfico 3 - Espaço de fase para o pêndulo amortecido forçado	26
Gráfico 4 - Espaço de fase para o pêndulo amortecido forçado.	27
Gráfico 5 - Espaço de fase para o pêndulo amortecido forçado.	27
Gráfico 6 - Velocidade angular em função tempo na presença de somente forças dissipativas.	28
Gráfico 7 - Evolução da velocidade angular no tempo para o pêndulo amortecido forçado.	29
Gráfico 8 - Evolução da velocidade angular no tempo para o pêndulo amortecido forçado.	29
Gráfico 9 - Evolução da velocidade angular no tempo para dois pêndulos amortecido e forçado com condições iniciais próximas.....	30
Gráfico 10 - Seção de Poincaré para o pêndulo forçado amortecido	31
Gráfico 11 - Seção de Poincaré para o pêndulo forçado amortecido.	31
Gráfico 12 - Seção de Poincaré para o pêndulo forçado amortecido	32
Gráfico 13 - Mapa de bifurcação para o pêndulo forçado amortecido.	33
Gráfico 14 - Cálculo dos expoentes de Lyapunov para o pêndulo forçado amortecido	38
Gráfico 15 - Cálculo dos expoentes de Lyapunov para o pêndulo forçado amortecido	39
Gráfico 16 - Cálculo dos expoentes de Lyapunov para o pêndulo forçado amortecido	39
Gráfico 17 – A evolução temporal do SALI para o pendulo amortecido forçado em uma órbita regular.....	44
Gráfico 18 - A evolução temporal do SALI para o pendulo amortecido forçado em uma órbita caótica.	45
Gráfico 19 - A evolução temporal do SALI para o pendulo amortecido forçado em uma órbita regular.....	45
Gráfico 20 - A evolução temporal do SALI para o pendulo amortecido forçado em uma órbita caótica.....	46
Gráfico 21 - A evolução temporal do SALI para o pendulo amortecido forçado para diferentes órbitas.....	47

Gráfico 22 - A evolução temporal do SALI para o pendulo amortecido forçado para diferentes órbitas e considerando $q = 3.9$	47
Gráfico 23 - A evolução temporal do SALI para o pendulo amortecido forçado para diferentes órbitas e considerando $q = 4.1$	48

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

N_d – Amplitude da força externa

g – Amplitude da força externa

dx – Diferencial de x

df^n – Derivada enésima de f

ε – Epsilon (Erro ou Precisão)

Eq. – Equação

φ – Fase do termo de acionamento

ω_d – Frequência angular da força externa

$f(x)$ – Função

∞ – Infinito

λ – Expoente de Lyapunov

lim – Limite

μ – Taxa de crescimento populacional

\rightarrow – Tende a

θ – Teta

SALI – The Smaller Alignment Index

ω – Velocidade angular

ω_0 – Velocidade angular inicial

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar o método Smaller Alignment Index (SALI) como uma ferramenta eficiente para detectar a presença de caos em sistemas dinâmicos não-lineares. Os comportamentos complicados, imprevisíveis e irregulares encontrados em muitos sistemas, como o clima, circuitos elétricos e reações químicas, são causados por não-linearidades que tornam a evolução do sistema não trivial. Em alguns casos, o caos pode ser observado em sistemas não-lineares quando determinados valores de parâmetros são atingidos. Esse comportamento é caracterizado pela sensibilidade às condições iniciais, o que torna impossível prever a evolução futura do sistema. A técnica SALI é utilizada neste trabalho para estudar o pêndulo amortecido forçado, um sistema dinâmico não-linear que apresenta comportamento caótico. O método SALI se mostrou eficiente e preciso na detecção da presença de caos nesse sistema, permitindo a quantificação do grau de caoticidade e a identificação de regimes caóticos. Conclui-se que o método SALI é uma ferramenta importante para a detecção de caos em sistemas dinâmicos não-lineares.

Palavras-chave: sistemas dinâmicos, comportamentos não-lineares, sensibilidade às condições iniciais, caos, expoente de Lyapunov, método SALI, pêndulo amortecido forçado, física.

ABSTRACT

The objective of this work is to present the Smaller Alignment Index (SALI) method as an efficient tool to detect the presence of chaos in non-linear dynamic systems. The complicated, unpredictable, and irregular behaviors found in many systems, such as weather, electrical circuits, and chemical reactions, are caused by nonlinearities that make system evolution non-trivial. In some cases, chaos can be observed in nonlinear systems when certain parameter values are reached. This behavior is characterized by sensitivity to initial conditions, which makes it impossible to predict the future evolution of the system. The SALI technique is used in this work to study the forced damped pendulum, a nonlinear dynamical system that presents chaotic behavior. The SALI method proved to be efficient and accurate in detecting the presence of chaos in this system, allowing the quantification of the degree of chaoticity and the identification of chaotic regimes. It is concluded that the SALI method is an important tool for detecting chaos in non-linear dynamic.

Keywords: chaotic systems, nonlinear dynamics, Lyapunov exponent, sensitivity to initial conditions, SALI method, forced damped pendulum.

1. INTRODUÇÃO

Existem muitos sistemas que apresentam comportamentos complicados, imprevisíveis e irregulares, como o clima, circuitos elétricos e reações químicas, tráfego de carros e até mesmo crescimento de populações. Esses comportamentos são geralmente causados por não-linearidades, que podem tornar a evolução do sistema não trivial. Em alguns casos, o caos pode ser observado em sistemas não-lineares quando determinados valores de parâmetros são atingidos. Pequenas perturbações nas condições iniciais podem levar a grandes diferenças em tempos posteriores, com trajetórias inicialmente próximas divergindo exponencialmente. Esse comportamento caótico é caracterizado pela "sensibilidade às condições iniciais" e pode ser explicado pelo expoente de Lyapunov[1].

Mesmo sistemas que podem ser modelados satisfatoriamente por equações deterministas, ou seja, sem ruídos ou incertezas explícitas, podem evoluir de maneira aparentemente aleatória e irregular na presença de caos. A incerteza nas condições iniciais, combinada com a precisão finita das medições, torna impossível prever a evolução futura do sistema[2]. Por isso, é essencial identificar os regimes caóticos da dinâmica e quantificar o grau de caoticidade para estabelecer limites dentro dos quais é possível fazer previsões.

Para estudar e compreender alguns sistemas caóticos, uma técnica eficiente e precisa para detectar a presença de caos em sistemas dinâmicos é o método SALI. Nesse sentido, utilizaremos esse método para estudar o pêndulo amortecido forçado, cujas aplicações são de extrema importância para a Física.

2. OBJETIVOS

Os objetivos deste trabalho de conclusão de curso consistem em estudar o método SALI para detecção de caos em sistemas dinâmicos, com ênfase na sua aplicação no pendulo amortecido forçado. Serão explorados aspectos teóricos do método SALI, com o objetivo de compreender sua eficiência e precisão na detecção do caos em sistemas dinâmicos.

3. METODOLOGIA OU INTRODUÇÃO TEÓRICA

3.1 O mapa logístico

O Mapa Logístico é uma representação matemática da dinâmica de uma população em crescimento. Esse modelo é essencial para entendermos o comportamento de um sistema caótico. Ele é baseado na equação logística, que descreve como a taxa de crescimento da população muda ao longo do tempo em função do tamanho da população atual. Em 1798, o economista britânico Thomas Malthus escreveu seu primeiro artigo sobre o crescimento populacional. Ele descobriu que muitas populações aumentam em uma taxa proporcional ao tamanho da população, criando assim o famoso modelo Malthusiano[3]:

$$\frac{dP}{dt} = (N - M)P \quad (1)$$

onde P é a população, N a taxa de natalidade e M a taxa de mortalidade. Podemos notar que esse modelo é linear e nos sugere um crescimento exponencial da população se $N > M$, que pode ser notado analisando a solução geral:

$$P(t) = P_0 e^{(N-M)t} \quad (2)$$

onde $P_0 = P(0)$.

É fácil perceber que esse modelo não consegue descrever corretamente a evolução de uma população para tempos longos, já que os recursos e espaços disponíveis para o sistema analisado é finito.

Em 1838, o matemático belga Pierre Verhulst propôs uma alternativa[4], sugerindo que a mortalidade seria proporcional ao quadrado da população e a equação para esse modelo seria:

$$\frac{dP}{dt} = (N - MP)P \quad (3)$$

conhecido como equação de Verhulst ou equação logística. Infelizmente, a equação de Verhulst não pode ser testada na época por conta da imprecisão do censo. Porém, em 1930, Raymond Pearl conseguiu comprová-la experimentalmente analisando uma população de moscas[5].

O modelo logístico de Raymond sugere que, para $\frac{dP}{dt} = 0$, $P = 0$, o que é trivial. Para $P = \frac{N}{P} \equiv K$, onde K é conhecida como capacidade de sustentação do meio (número de indivíduos que qualquer área pode manter com os recursos disponíveis). Portanto, podemos escrever a Eq. (3) como:

$$\frac{dP}{dt} = N\left(1 - \frac{P}{K}\right)P \quad (4)$$

Robert May [6], em 1976, tratou a equação logística como uma equação discreta, representando pela seguinte forma:

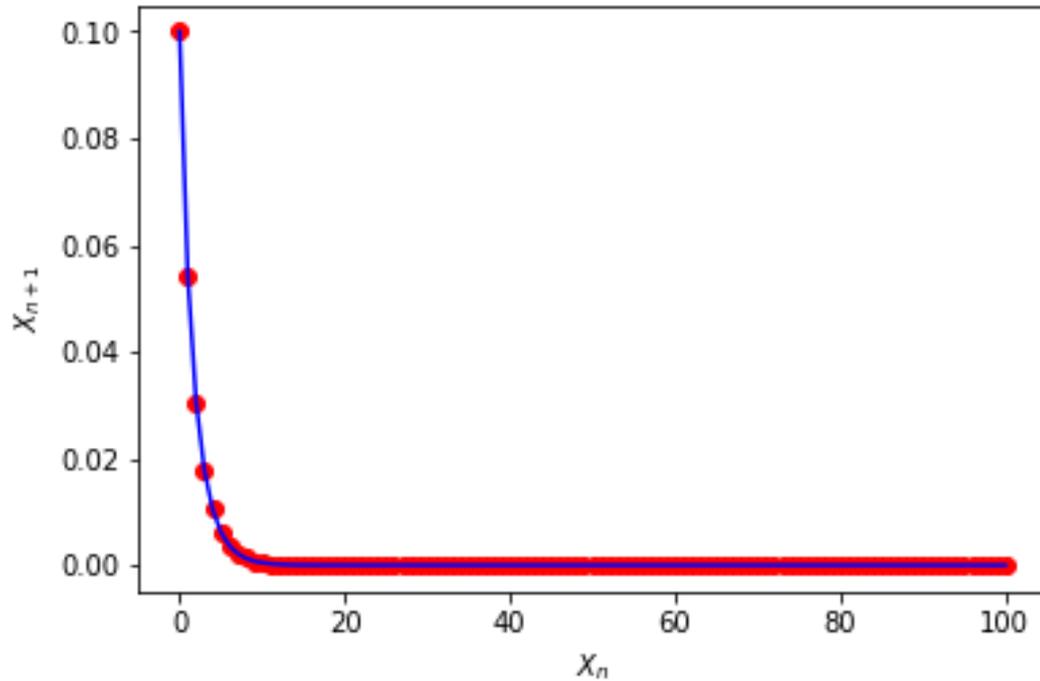
$$P_{n+1} = N\left(1 - \frac{P_n}{K}\right)P_n \quad (5)$$

e se fizemos uma simples substituição tal que, $\mu = KN$, $x_n = \frac{P_n}{K}$, iremos obter a equação logística na forma:

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n), \quad x_n \in [0,1]; \mu \in [0,4] \quad (6)$$

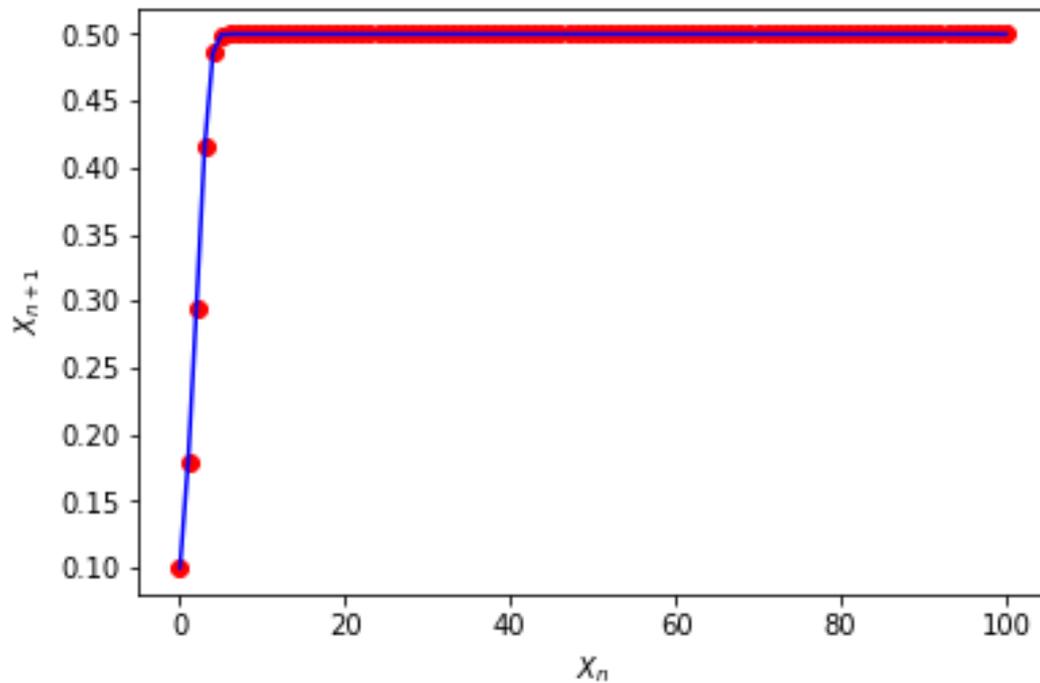
onde utilizamos n para denotar a sequência de tempo de um sistema, x_n para denotar o tamanho de uma população e μ como sendo a taxa de crescimento biológico. Observe que a densidade ou tamanho populacional x_n é um número que varia entre 0 e 1. Já a taxa de crescimento populacional tem seu valor variando em um intervalo fechado de 0 e 4 (o motivo será explicado mais adiante). Nas figuras abaixo, mostramos a dependência de x_{n+1} em relação x_n para vários valores do parâmetro μ .

Figura 1 - Mapa de Equação da Logística para um valor de μ fixo.



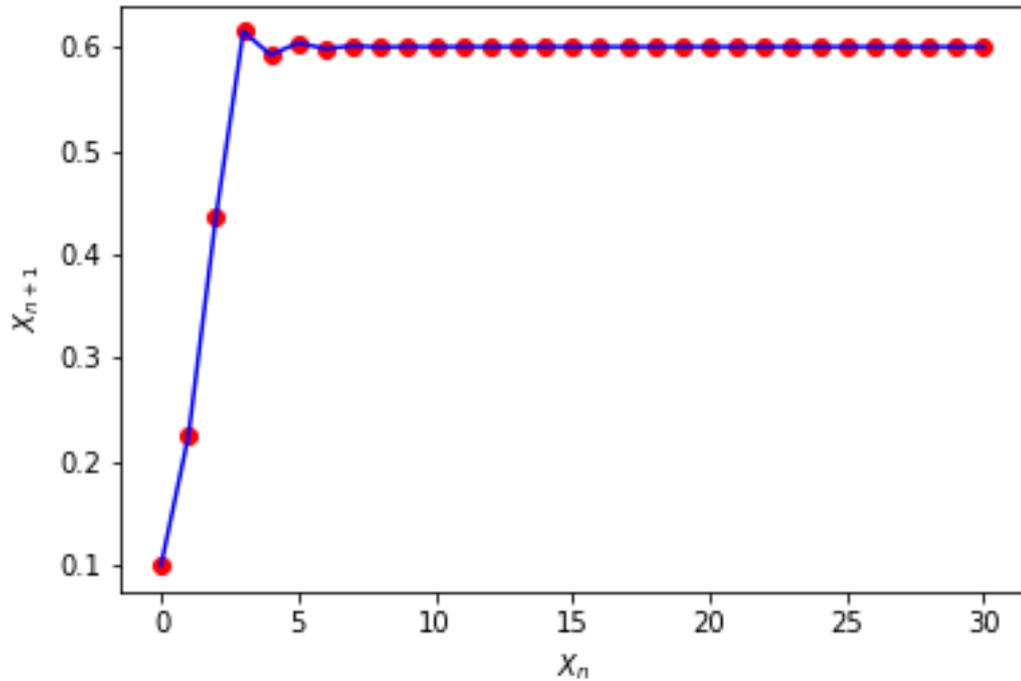
Fonte: Elaborada pelo autor. Mapa de Equação da Logística com o parâmetro $\mu = 0.6$, com 100 iterações. É possível perceber, observando o gráfico, uma extinção exponencial da população.

Figura 2 - Mapa de Equação da Logística para um valor de μ fixo.



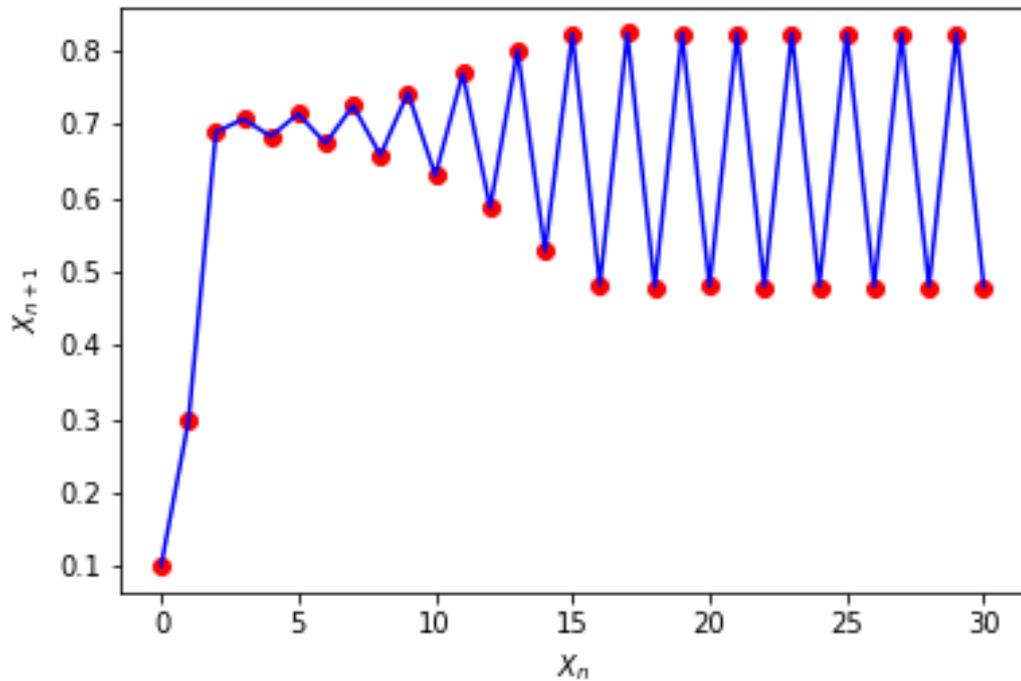
Fonte: Elaborada pelo autor. Mapa de Equação da Logística com o parâmetro $\mu = 1.2$, com 100 iterações. É possível perceber, observando o gráfico, uma estabilidade na densidade populacional do sistema.

Figura 3 - Mapa de Equação da Logística para um valor de μ fixo.



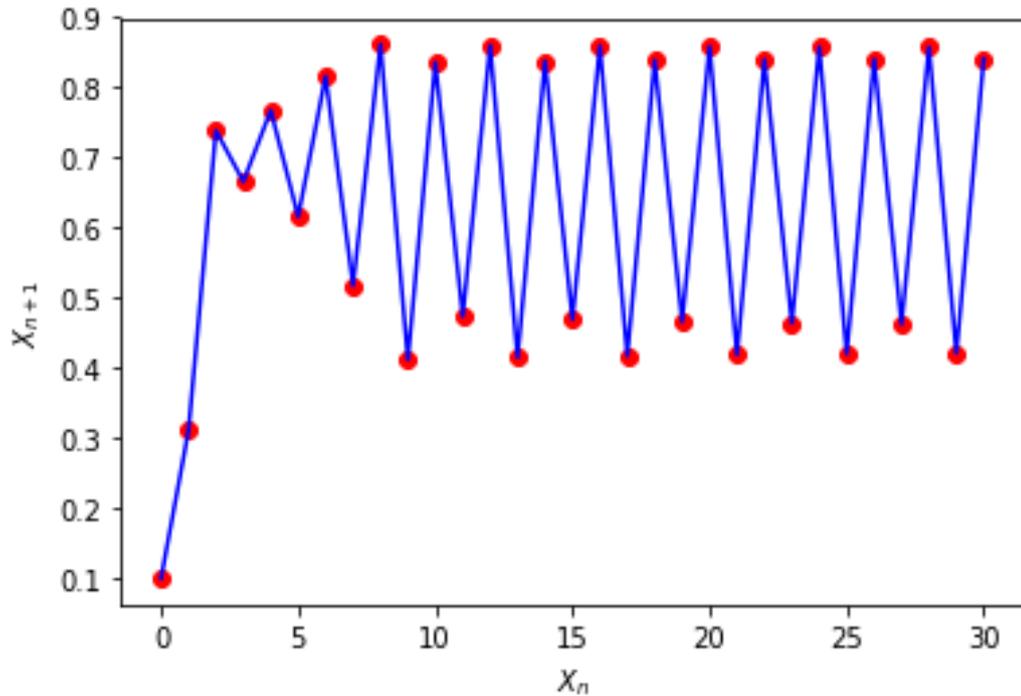
Fonte: Elaborada pelo autor. Mapa de Equação da Logística com o parâmetro $\mu = 2.2$, com 30 iterações. É possível perceber, observando o gráfico, que há uma perturbação no início até chegar na estabilidade.

Figura 4 - Mapa de Equação da Logística para um valor de μ fixo.



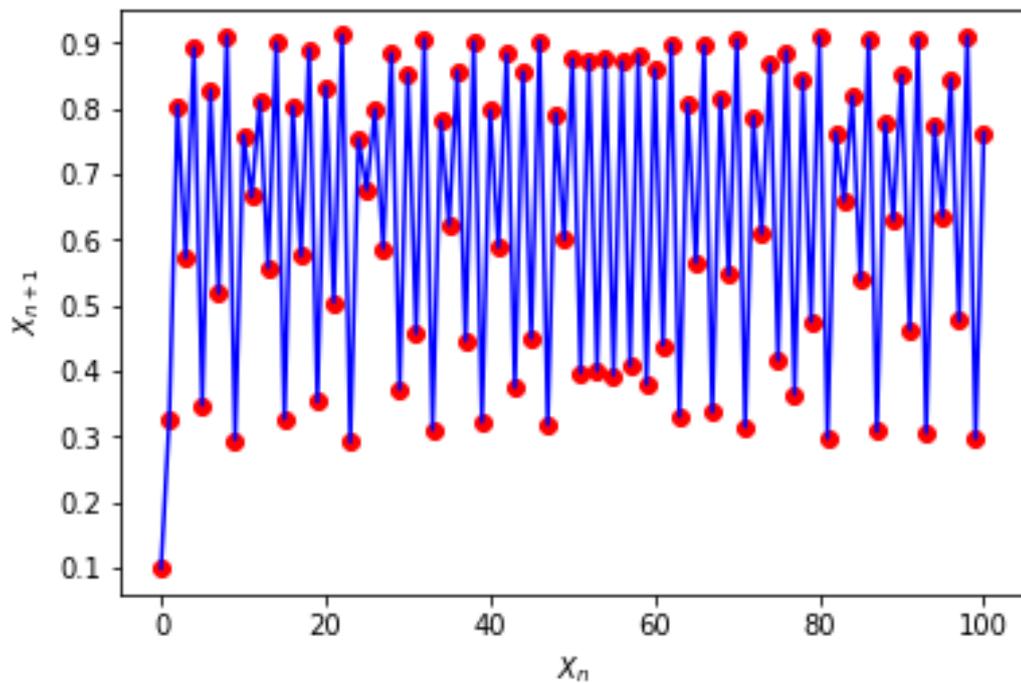
Fonte: Elaborada pelo autor. Mapa de Equação da Logística com o parâmetro $\mu = 3.3$, com 30 iterações. Note que existem dois valores para as quais x_{n+1} oscila.

Figura 5 - Mapa de Equação da Logística para um valor de μ fixo.



Fonte: Elaborada pelo autor. Mapa de Equação da Logística com o parâmetro $\mu = 3.45$, com 30 iterações. Note que existem quatro valores para as quais x_{n+1} oscila.

Figura 6 - Mapa de Equação da Logística para um valor de μ fixo.



Fonte: Elaborada pelo autor. Mapa de Equação da Logística com o parâmetro $\mu = 3.65$, com 100 iterações. Para essa taxa de crescimento, os pontos observados, oscilam de forma caótica.

A partir dos gráficos anteriores, podemos notar que a evolução temporal da população tem comportamentos qualitativamente muito diferentes, a depender do valor do parâmetro μ .

Observamos a partir da Figura 1 e Figura 2 que as populações atingem um regime estacionário. Dizemos nesse caso que o *atrator* da dinâmica é um ponto fixo, que é solução de

$$x = f(x). \quad (7)$$

Para o mapa logístico, $f(x) = \mu x(1 - x)$ e os pontos fixos são dados por $x = 0$ e $x = \left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)$.

O atrator (ponto fixo) é determinado pelo critério de estabilidade.

Seja x em uma pequena vizinhança do ponto fixo x^* . Então:

$$f(x) \approx x^* + (x - x^*)f'(x^*), \quad (8)$$

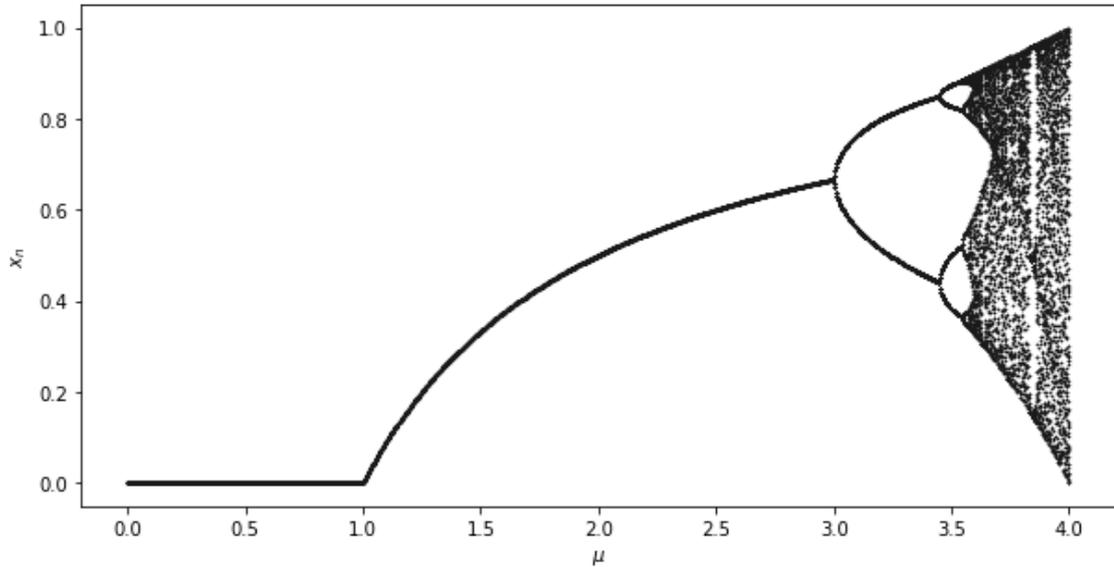
e

$$|f(x) - x^*| = |(x - x^*)||f'(x^*)|. \quad (9)$$

Se $|f'(x^*)| < 1$, dizemos que o ponto fixo x^* é estável. Se $|f'(x^*)| > 1$, o ponto é dito instável. Para o mapa logístico temos $f'(0) = \mu$ e $f'\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) = 2 - \mu$. Logo, $x^* = 0$ será estável para $|\mu| < 1$, isto é, $\mu < 1$, que é a situação mostrada na Figura 1. O outro ponto fixo será estável para $|2 - \mu| < 1$, isto é, para $1 < \mu < 3$, que corresponde à situação mostrada na Figura 2 e Figura 3. Para $\mu = 3$, $f'\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) = 1$ e o ponto fixo se torna instável. Dizemos então que estamos na presença de uma bifurcação. Esse ponto fixo é substituído por um ciclo de período 2, como é mostrado na Figura 4. Esse ciclo é estável até o parâmetro μ atingir o valor $1 + \sqrt{6}$. A partir desse ponto, o ciclo de período 2 é substituído por um ciclo de período 4, como mostrado na Figura 5. Para valores subsequentes para o parâmetro μ , teremos bifurcações que gerarão ciclos estáveis de períodos 8, 16, 32, e assim por diante. Os efeitos de duplicação progridem sistematicamente até $\mu = 3.57$. Essa é a rota de duplicação de período para o caos. Valores posteriores de μ geram tanto comportamento periódico quanto caótico, com janelas de comportamento periódico entre valores que geram comportamento caótico, como podemos constatar na Figura 7, Figura 8 e Figura 9. No intervalo $(3, 1 + \sqrt{6}]$, o equilíbrio oscila entre dois valores. Nos intervalos subsequentes, as oscilações ocorrerão entre 4, 8, 16, 32 valores, até

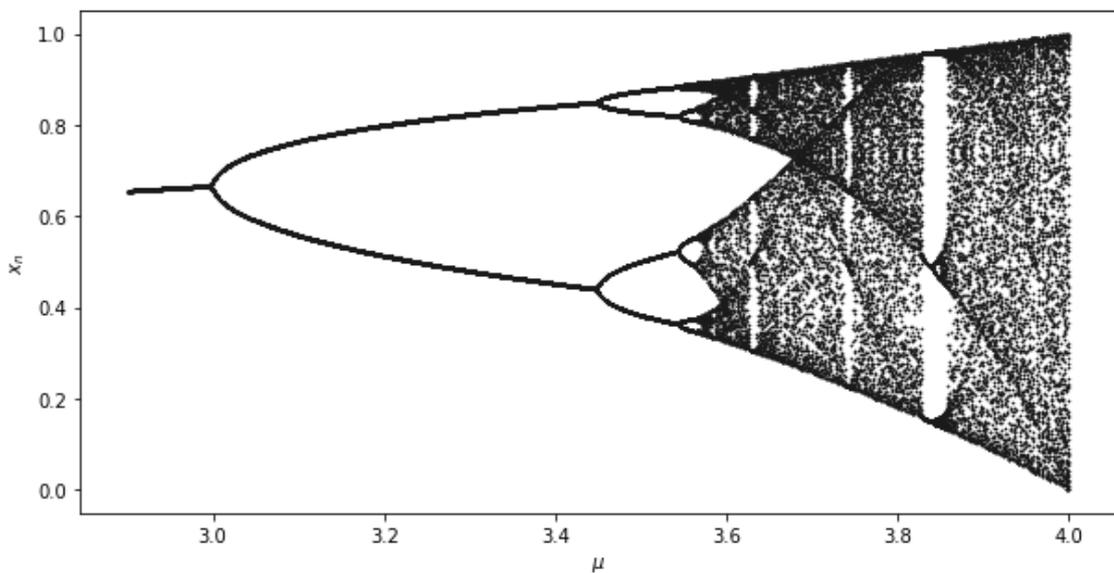
chegar em $\mu = 3.56995$, onde ocorre o caos, e esse regime se entende por $\mu = 4$, um comportamento caótico interessante ocorre ou seja, no intervalo de $[3.56995, 4]$.

Figura 7 - Diagrama de bifurcação para o mapa de Equação logística.



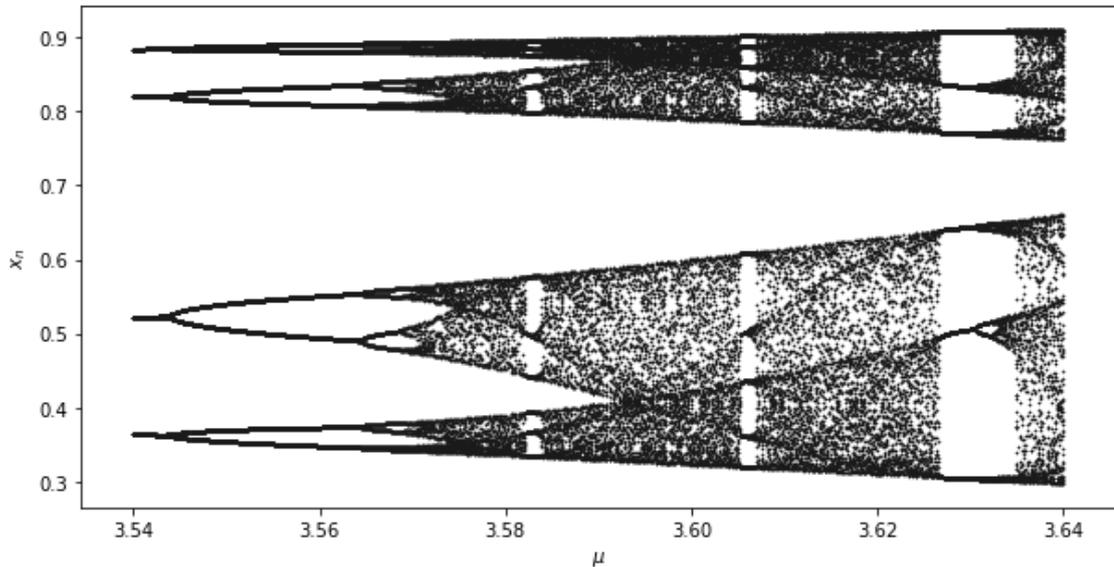
Fonte: Elaborada pelo autor. O diagrama foi feito com 1000 iterações e o parâmetro μ variando de $[0,4]$.

Figura 8 - Diagrama de bifurcação para o mapa de Equação logística.



Fonte: Elaborada pelo autor. O diagrama foi feito com 1000 iterações e o parâmetro μ variando de $[2.9, 4]$.

Figura 9 - Diagrama de bifurcação para o mapa de Equação logística.



Fonte: Elaborada pelo autor. O diagrama foi feito com 1000 iterações e o parâmetro μ variando de [3.54, 3.64].

3.2 Expoente de Lyapunov para Mapa Logístico

O expoente de Lyapunov é uma medida quantitativa da sensibilidade às condições iniciais de sistemas dinâmicos[7]. Ele foi desenvolvido pelo matemático russo Aleksandr Lyapunov no final do século XIX[8]. Há tantos expoentes de Lyapunov para um sistema específico quanto variáveis, logo, para efeitos introdutórios, iremos considerar aqui apenas uma variável, ou seja, um único expoente. Vamos considerar duas sequências (trajetórias) de valores de x_n do mapa logístico geradas com condições iniciais próximas x_0 e $x_0 + \varepsilon$. Investigaremos o que acontece com os valores de x_n para as duas sequências. Após n iterações, a diferença entre esses dois valores é aproximadamente:

$$d_n = \varepsilon e^{n\lambda}, \quad (10)$$

onde λ é o expoente de Lyapunov.

Vamos considerar um mapa unidimensional descrito por $x_{n+1} = f(x_n)$. A diferença inicial entre as duas sequências é $d_0 = \varepsilon$ e após uma iteração, teremos a diferença d_1 dada por:

$$d_1 = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) \cong \varepsilon \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} \quad (11)$$

Após n iterações, a diferença d_n será dada por:

$$d_n = f^n(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) = \varepsilon e^{n\lambda} \quad (12)$$

onde indicamos a n -ésima iteração do mapa $f(x)$ pelo n sobrescrito. Se dividirmos por ε e tomarmos os logaritmos de ambos os lados, obtemos:

$$\ln\left(\frac{f^n(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}\right) = \ln(e^{n\lambda}) = n\lambda \quad (13)$$

como ε é muito pequeno, temos para λ :

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{f^n(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x)}{dx} \right| \Big|_{x_0} \quad (14)$$

O valor de $f^n(x_0)$ é obtido pela iteração da função $f(x_0)$:

$$f^n(x_0) = f(f(\dots (f(x_0)) \dots)) \quad (15)$$

Usamos a regra da cadeia para a derivada da n -ésima iteração para obter:

$$\frac{df^n(x)}{dx} \Big|_{x_0} = \frac{df}{dx} \Big|_{x_{n-1}} \frac{df}{dx} \Big|_{x_{n-2}} \dots \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} \quad (16)$$

Considerando o limite quando $n \rightarrow \infty$, obteremos:

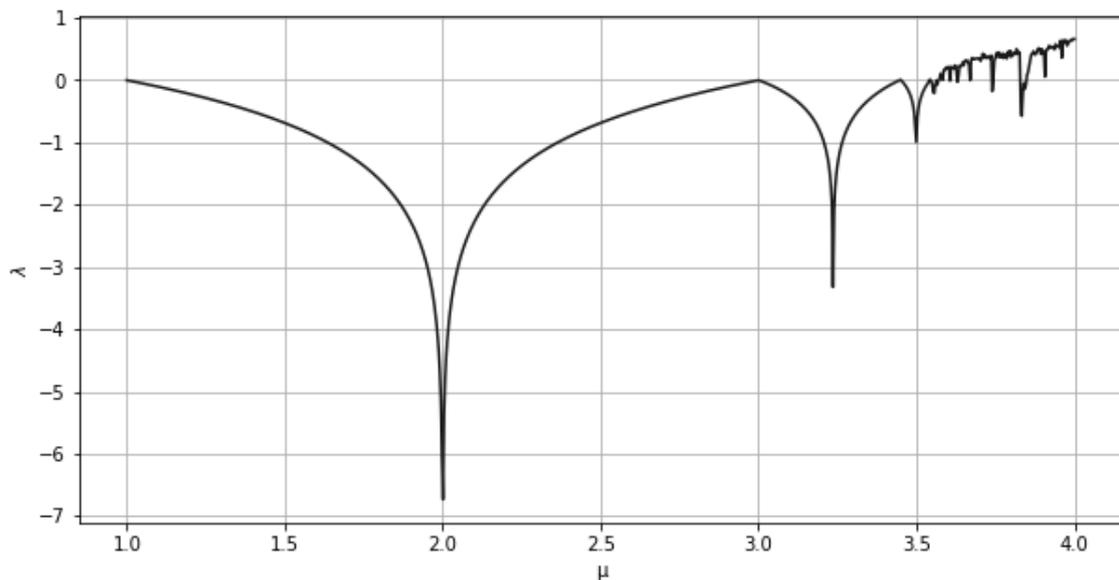
$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx} \right| \quad (17)$$

A partir da Eq. (12), podemos observar que se o valor do expoente de Lyapunov (λ) é negativo, então teremos um fator exponencial decrescente, o que implica em uma diminuição da diferença entre os valores correspondentes de x_n das duas seqüências. Por outro lado, se λ

for positivo, teremos um fator exponencial crescente, o que implica em um aumento da diferença entre os valores correspondentes de x_n das duas sequências.

Mostramos no Gráfico 1 o expoente de Lyapunov calculado de acordo com a Eq. (14) como uma função de μ para o mapa logístico. O valor de λ é zero quando ocorre a bifurcação, porque $\left|\frac{df}{dx}\right| = 1$, e a solução se torna instável. Um ponto superestável ocorre onde $\left|\frac{df}{dx}\right| = 0$, e isso implica que $\lambda = -\infty$. Ao variar nosso parâmetro μ , observamos janelas aonde $\lambda < 0$, indicando a existência de um comportamento periódico, e $\lambda > 0$, indicando a existência de um comportamento caótico. Perceba que o expoente só assume valores positivos para valores de μ próximos a 3.5, que corresponde ao valor em que o comportamento caótico surge como resultado da cascata de duplicação de período descrita anteriormente. A janela relativamente ampla, pouco acima de $\mu = 3.8$, é aparente na Figura 8 e Figura 9, e pode ser observada no Gráfico 1.

Gráfico 1 – Gráfico do Expoente de Lyapunov



Fonte: Elaborada pelo autor. Gráfico do parâmetro μ em função do expoente de Lyapunov λ para o mapa da Equação logística. Valores de $\lambda > 0$ indica o caos.

3.3 Seção de Poincaré

A seção de Poincaré é uma técnica de análise utilizada em sistemas dinâmicos para visualizar o comportamento do sistema em um espaço de estados de menor dimensão. Essa técnica foi sugerida pelo matemático francês Henri Poincaré no final do século XIX e início do século XX.

A ideia básica da seção de Poincaré é que, em muitos sistemas dinâmicos, a dinâmica pode ser reduzida a um sistema de menor dimensão, em que apenas algumas variáveis são importantes para descrever o comportamento do sistema. Por exemplo, um sistema com três graus de liberdade pode ser reduzido a um sistema com apenas duas variáveis importantes.

A seção de Poincaré envolve a escolha de um plano no espaço de estados do sistema e a observação da interseção das trajetórias do sistema com esse plano. Em outras palavras, a cada vez que uma trajetória do sistema atravessa o plano de seção, é feita uma marcação nesse ponto, o que permite visualizar a projeção do atrator no plano definido pela seção.

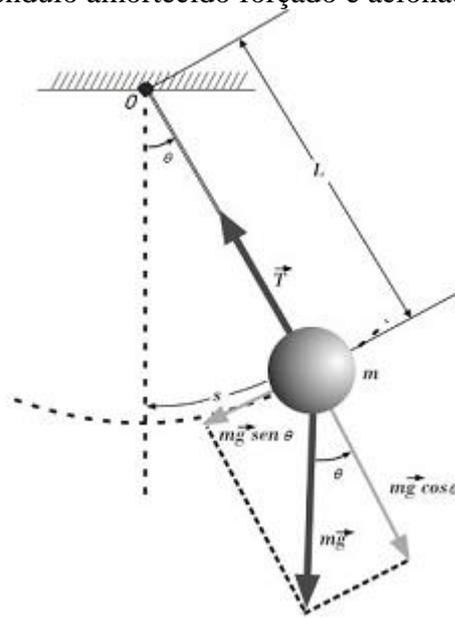
A seção de Poincaré permite visualizar o comportamento do sistema em um espaço de estados de menor dimensão e também permite identificar padrões, como órbitas periódicas e caos[].

Ela é particularmente útil para sistemas dinâmicos que possuem uma grande quantidade de graus de liberdade, pois permite reduzir a dimensão do problema e visualizar o comportamento do sistema de uma forma mais clara e compreensível. Iremos aplicar mais adiante a seção de Poincaré para o pêndulo forçado e amortecido.

3.4 Caos para um pêndulo

Vamos analisar o pendulo amortecido acionado em torno de um pivô O de uma força periódica. Considere um pêndulo simples de massa m presa a uma haste inextensível e de massa desprezível e comprimento l . O pêndulo é livre para oscilar em torno de seu ponto de suspensão, que está localizado a uma distância l . Se o pêndulo é perturbado em uma pequena quantidade angular θ , ele começará a oscilar em torno do ponto de equilíbrio, com uma frequência natural ω_0 dada por $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, onde g é a aceleração da gravidade. O aparato do pêndulo é demonstrado na Figura 10.

Figura 10 - Um pendulo amortecido forçado é acionado sobre seu pivô O.



Fonte: [10] com modificações. Ilustração do pendulo forçado amortecido que sofre uma força periódica sobre o seu pivô O.

Suponha agora que o pêndulo está sujeito a uma força externa periódica e amortecimento. A equação diferencial do movimento para o pêndulo forçado amortecido descrito pela segunda lei de Newton é:

$$ml^2\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} - mgl\sin\theta + N_d\cos\omega_d t \quad (18)$$

onde b é o coeficiente de amortecimento e N_d é o amplitude força externa de acionamento de frequência angular ω_d . Se dividirmos a Eq. (18) por ml^2 , teremos:

$$\ddot{\theta} = -\frac{b}{ml^2}\dot{\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{N_d}{ml^2}\cos\omega_d t \quad (19)$$

Rescrevendo a equação, substituindo os parâmetros adimensionais $\varphi = \omega_d t$, $q = \frac{ml^2}{b}$, $g = \frac{N_d}{ml^2\omega_0}$, e definindo o tempo adimensional $t' = \frac{t}{t_0}$ e a frequência adimensional $\omega = \frac{\omega_d}{\omega_0}$, dado que $t_0 = \frac{1}{\omega_0}$, poderemos transformar essa equação diferencial de segunda ordem em três equações diferenciais de primeira ordem, em termos de suas variáveis de estado ω , θ e φ . Obtemos então:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\omega}{q} - \sin\theta + g\cos\varphi \quad (20)$$

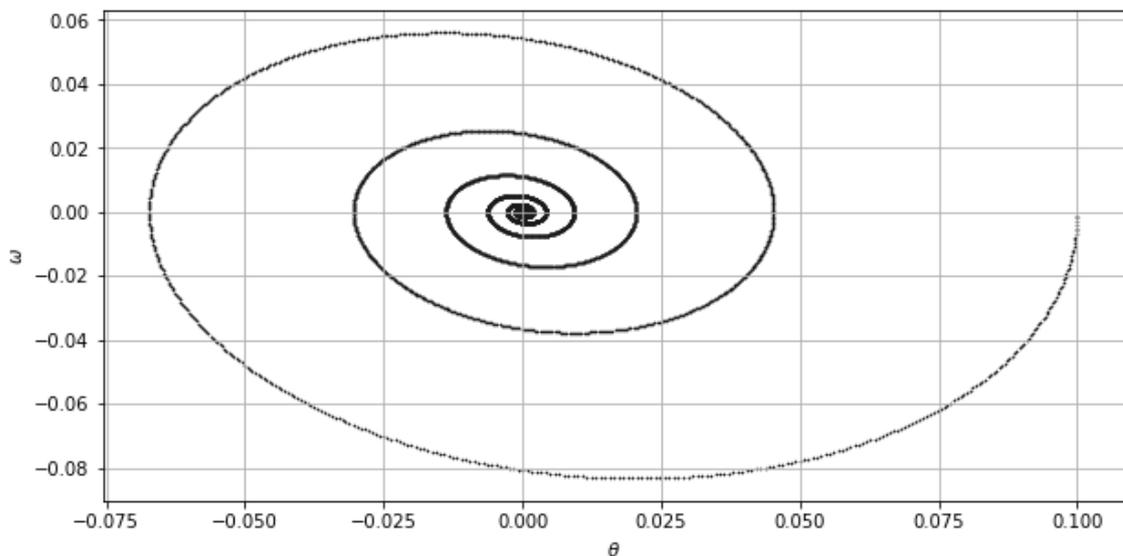
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (21)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_d \quad (22)$$

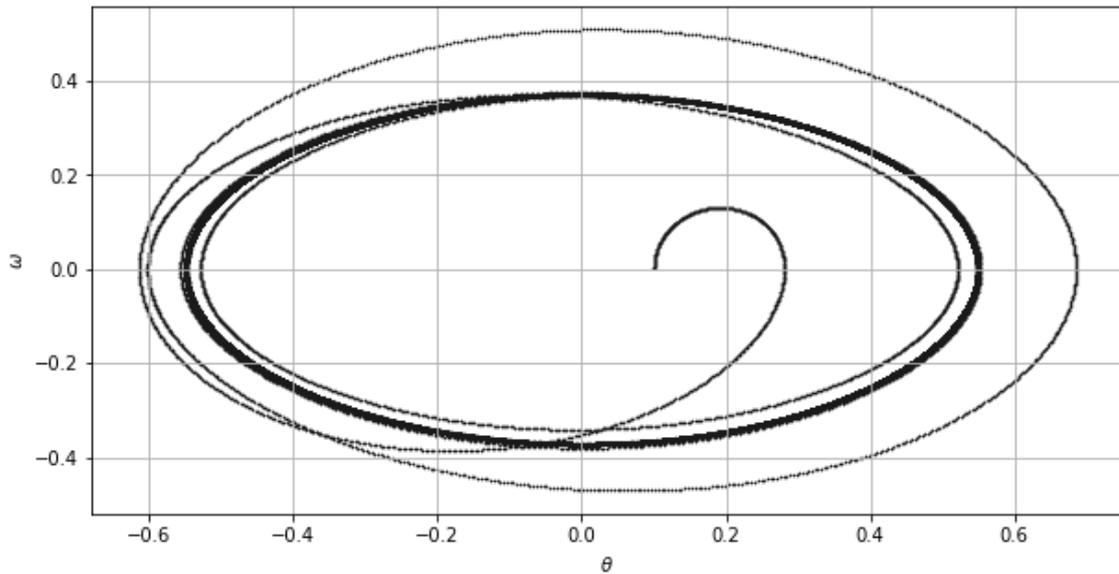
onde q é o parâmetro de amortecimento, g é a amplitude da força de amortecimento e não pode ser confundida com a aceleração gravitacional.

Essas equações satisfazem a condição necessária para o caos. A variável φ é introduzida como a fase do termo de acionamento. Vemos claramente a dependência de três variáveis (ω, θ, φ), e o $\sin\theta$ e $\cos\varphi$ no remete a um termo não linear. A emergência ou não do regime caótico depende dos parâmetros q e g . Uma sutil combinação entre a frequência de oscilação natural e a ação do termo forçante pode levar a um sistema caótico. A existência dos regimes caóticos e não-caóticos depende delicadamente dos valores dos parâmetros q , g e ω_d . Mostramos no Gráfico 2 e Gráfico 3 o espaço de fase para o pêndulo amortecido e amortecido forçado, respectivamente, obtidos a partir da solução numérica da Eq. (17) via método de Runge-Kutta.

Gráfico 2 - Espaço de fase para o pêndulo amortecido



Fonte: Elaborado pelo próprio autor. Para obter esse gráfico, utilizamos os seguintes parâmetros: $q=4$, $g=0$.

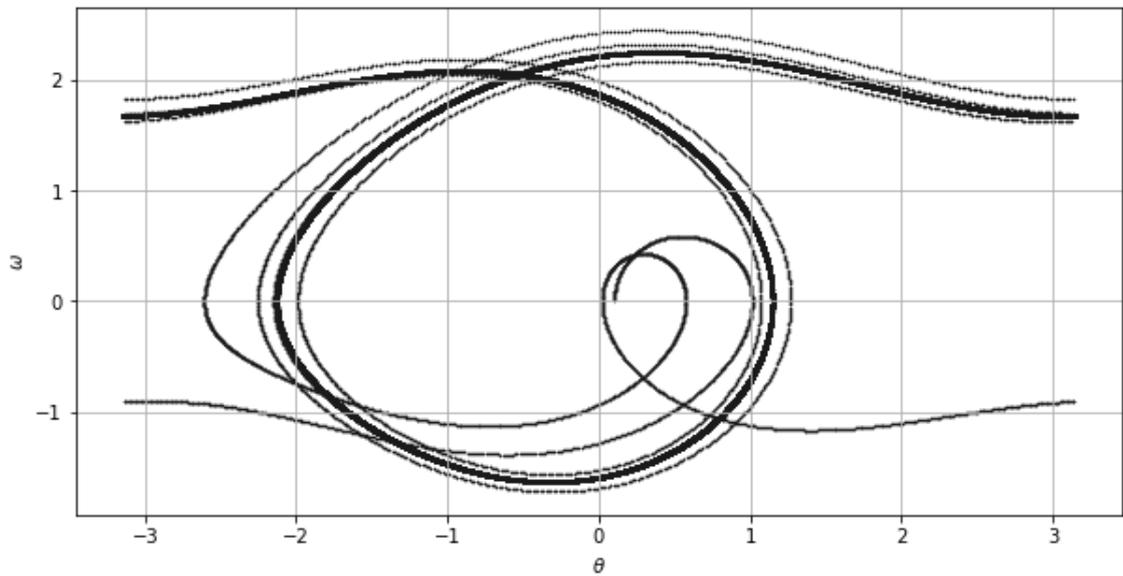
Gráfico 3 - Espaço de fase para o pêndulo amortecido forçado

Fonte: Elaborado pelo próprio autor. Para obter esse gráfico, utilizamos os seguintes parâmetros: $q=4$, $g=0.3$, $\omega_d = \frac{2}{3}$.

O espaço de fase mostrado no Gráfico 2, onde $g = 0$, recai em um sistema sem força externa aplicada, mas com um amortecimento presente. Percebe-se a evolução do estado do pêndulo após o desaparecimento dos efeitos transitórios iniciais, para um estado estacionário. Como não há força externa sendo aplicada, a equação diferencial (20) descreverá um oscilador amortecido simples. O espaço de fase para este sistema consiste em trajetórias em forma de espiral que se aproximam de um ponto chamado ponto de equilíbrio estável, localizado em $\theta = \theta' = 0$. Esse ponto representa a posição de equilíbrio do sistema, onde o pêndulo está em repouso. As trajetórias no espaço de fase correspondem a oscilações amortecidas do pêndulo, onde a amplitude e a velocidade angular diminuem ao longo do tempo devido ao efeito do amortecimento. Quanto maior o coeficiente de amortecimento, q , mais rapidamente as trajetórias se aproximam do ponto de equilíbrio estável.

Já no Gráfico 3, temos um sistema com uma força externa senoidal aplicada e um amortecimento presente. Essa órbita notória fechada é um atrator e ela é chamada de *círculo limite*. Outro regime periódico com oscilações e revoluções presentes é mostrado no Gráfico 4.

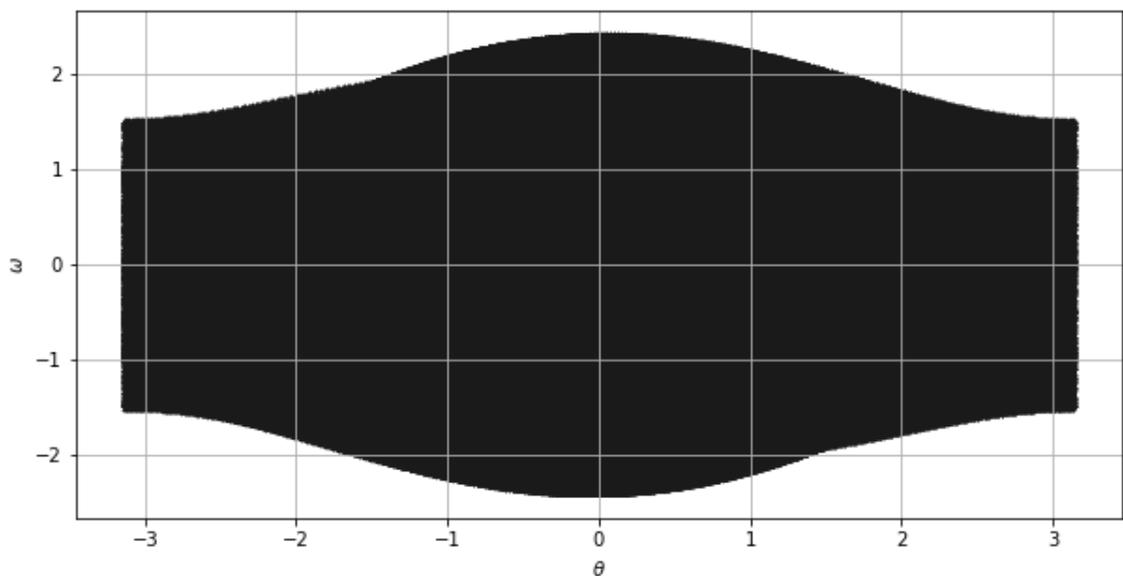
Gráfico 4 - Espaço de fase para o pêndulo amortecido forçado.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor. Para obter essa espaço de fase, utilizamos os seguintes parâmetros: $q=4$, $g=0.95$, $\omega_d = \frac{2}{3}$.

Mostramos no Gráfico 5 o espaço de fase para valores de parâmetros $q = 4$, $g = 0.8$ e $\omega_d = 2/3$. Mostraremos mais adiante que esse tipo de comportamento para o espaço de fase é gerado por uma dinâmica caótica.

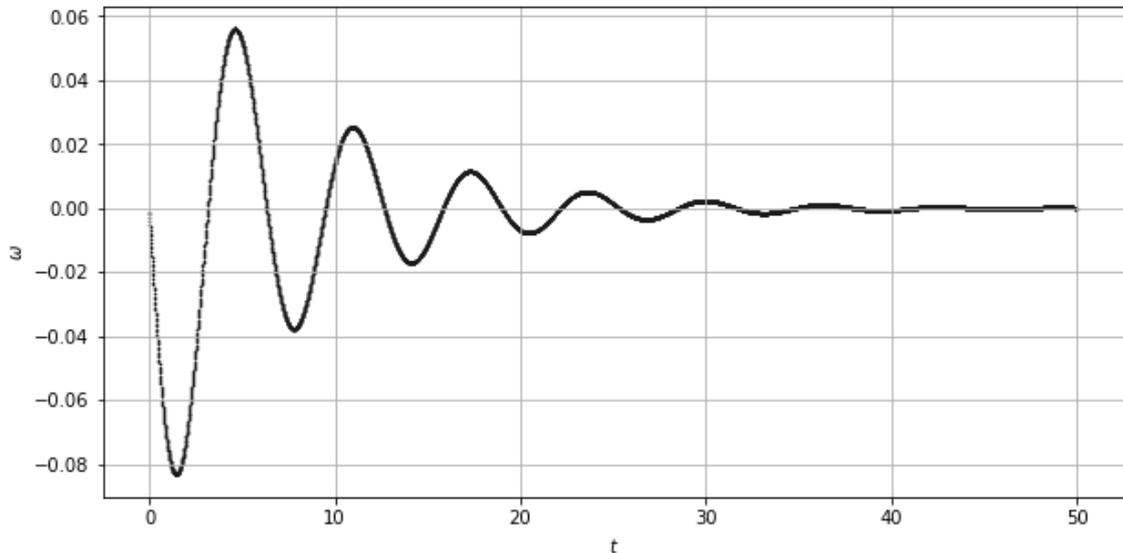
Gráfico 5 - Espaço de fase para o pêndulo amortecido forçado.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor. Para obter essa espaço de fase, utilizamos os seguintes parâmetros: $q=4$, $g=0.8$, $\omega_d = \frac{2}{3}$.

No Gráfico 6, Gráfico 7, Gráfico 8 e Gráfico 9, mostramos a velocidade angular em função do tempo para os mesmos conjuntos de parâmetros do espaço de fase.

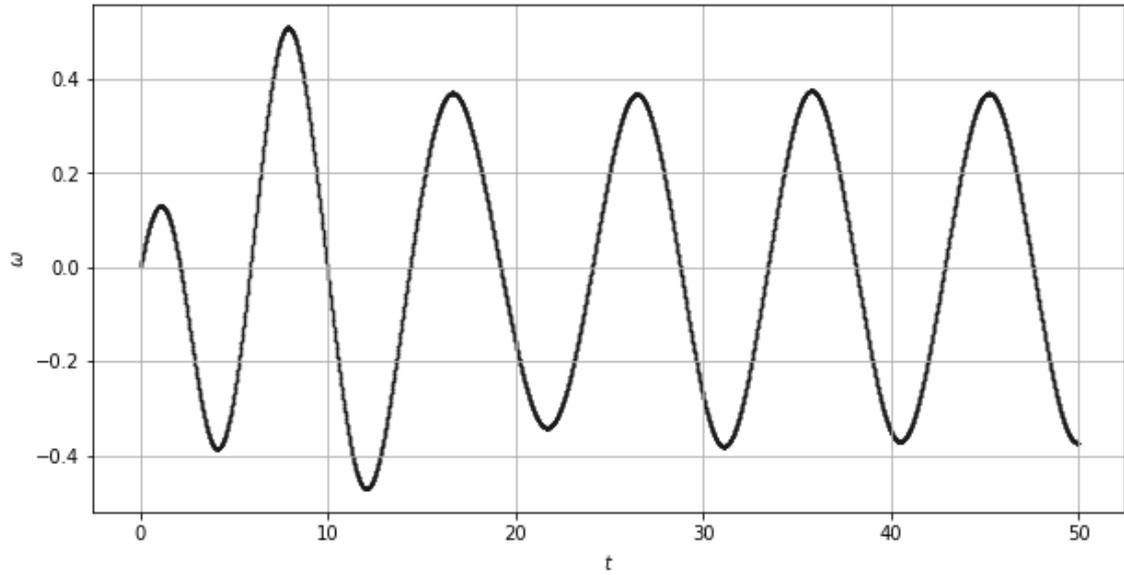
Gráfico 6 - Velocidade angular em função tempo na presença de somente forças dissipativas.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor. Podemos considerar a fricção do ar como força dissipativa, por exemplo. Para esse caso, consideramos $g=0$ e $q=4$.

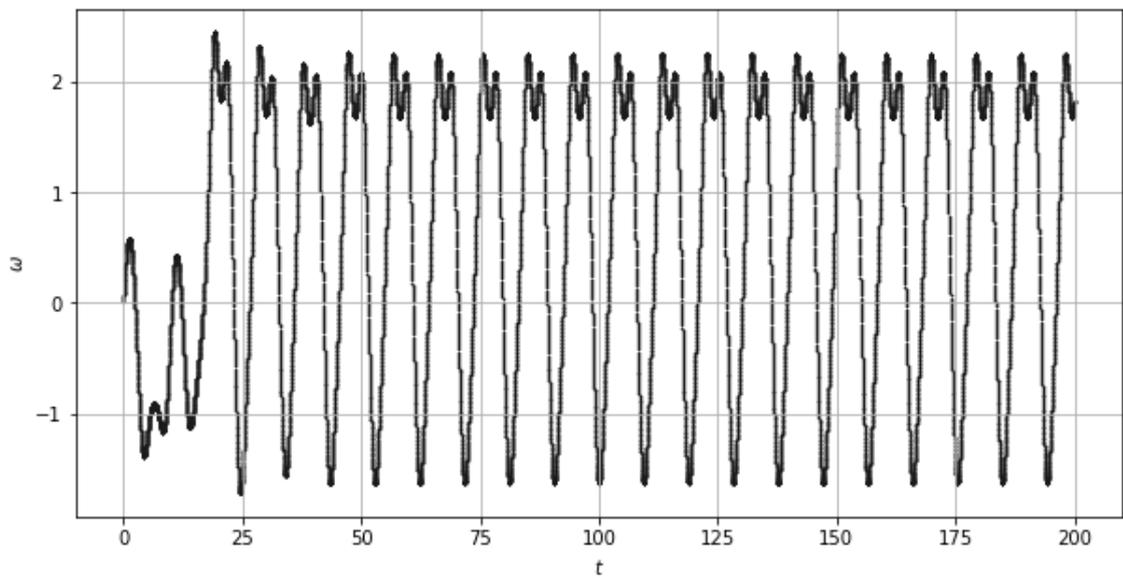
No pêndulo amortecido, $g = 0$, a velocidade angular ω diminui ao longo do tempo devido às forças dissipativas presentes no sistema, como a fricção do ar ou a resistência do material do pêndulo. Isso ocorre porque essas forças dissipativas atuam para reduzir a energia total do sistema, o que se traduz em uma redução na amplitude da oscilação e na diminuição da velocidade angular. No Gráfico 7 e Gráfico 8, ω exibe segue um comportamento periódico, após um transiente, em resposta à força externa, como observado no espaço de fase do Gráfico 3 e Gráfico 4

Gráfico 7 - Evolução da velocidade angular no tempo para o pêndulo amortecido forçado.



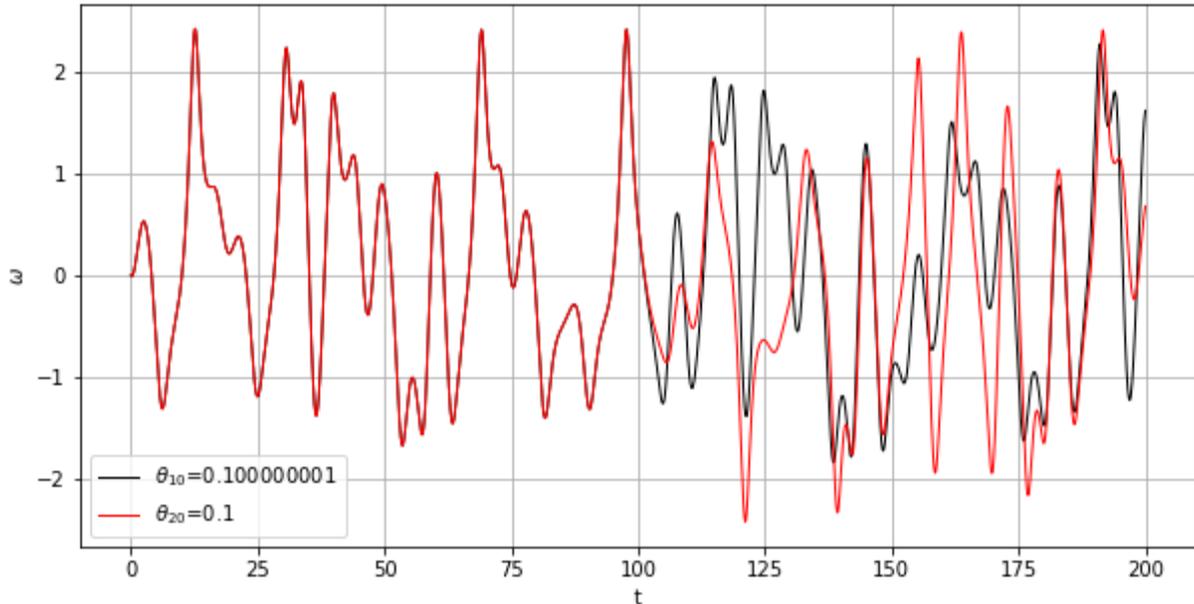
Fonte: Elaborado pelo próprio autor. Para esse caso, os valores dos parâmetros são $q=4$, $g=0.3$, $\omega_d = \frac{2}{3}$. Depois de um regime transitente, o sistema evolui para estado periódico.

Gráfico 8 - Evolução da velocidade angular no tempo para o pêndulo amortecido forçado.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor. Para esse caso, os valores dos parâmetros são $q=4$, $g=0.95$, $\omega_d = \frac{2}{3}$.

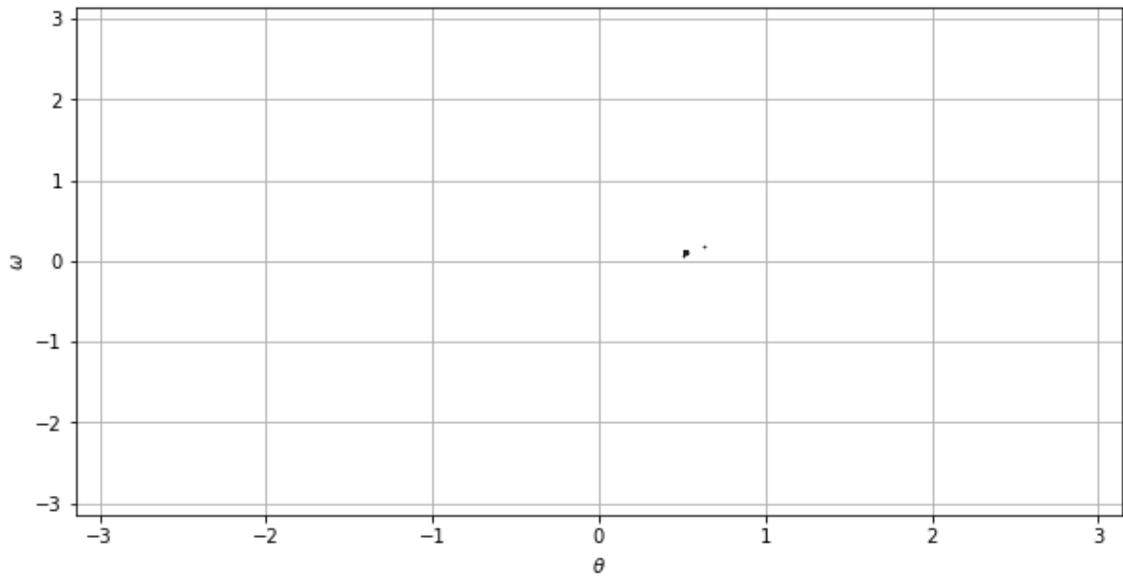
Gráfico 9 - Evolução da velocidade angular no tempo para dois pêndulos amortecido e forçado com condições iniciais próximas



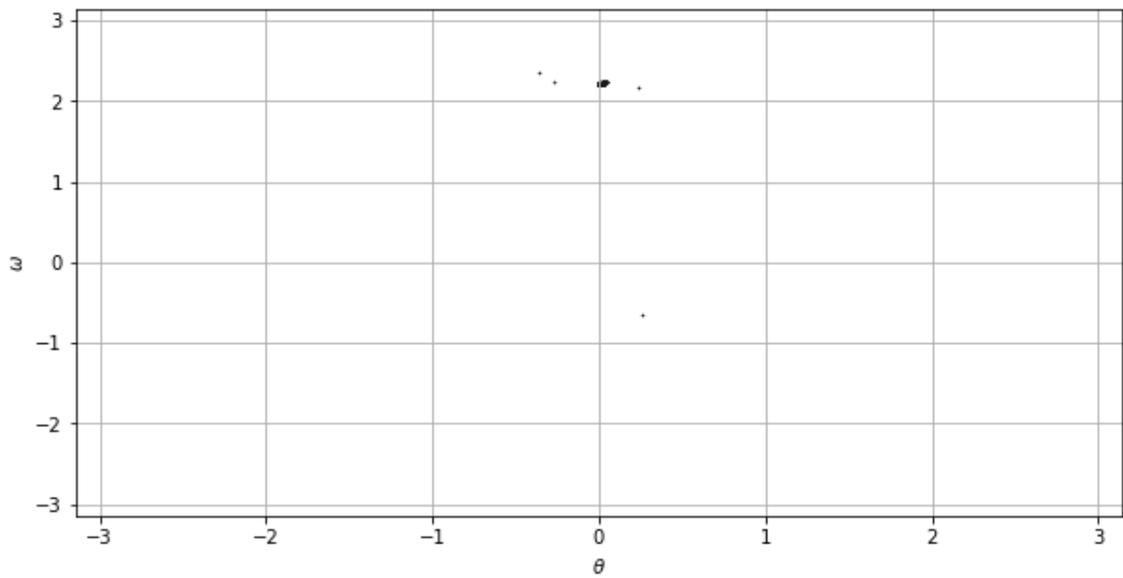
Fonte: Elaborado pelo próprio autor. Evolução temporal da velocidade angular ω para duas condições iniciais bem próxima para ângulo θ , $\theta_{10} = 0.10000001$ e $\theta_{20} = 0.1$. Os valores dos parâmetros dos dois pêndulos são $q=4$, $g=0.8$, $\omega_d = \frac{2}{3}$. Perceba que a trajetória desses dois sistemas se diferenciam conforme o tempo passa, isso nos indica que sistemas caóticos são sensíveis às condições iniciais.

No Gráfico 9, apresentamos a evolução temporal da velocidade angular de dois pêndulos forçado e amortecido, com mesmos parâmetros do Gráfico 5. A única diferença entre eles está no valor do ângulo inicial θ , que é de apenas 0,0000001, correspondente à sétima casa decimal. Seus comportamentos erráticos e sem periodicidades são evidentes. Nesse caso, podemos constatar que pequenas variações nas condições iniciais do sistema podem levar a grandes diferenças na evolução temporal de suas trajetórias.

Mostramos no Gráfico 10, no Gráfico 12 e no Gráfico 11, as seções de Poincaré para os valores de q iguais a 0.3, 0.8, 0.9, respectivamente. Os pontos gerados no gráficos a seguir correspondem a valores de θ e ω para $\varphi = 0$.

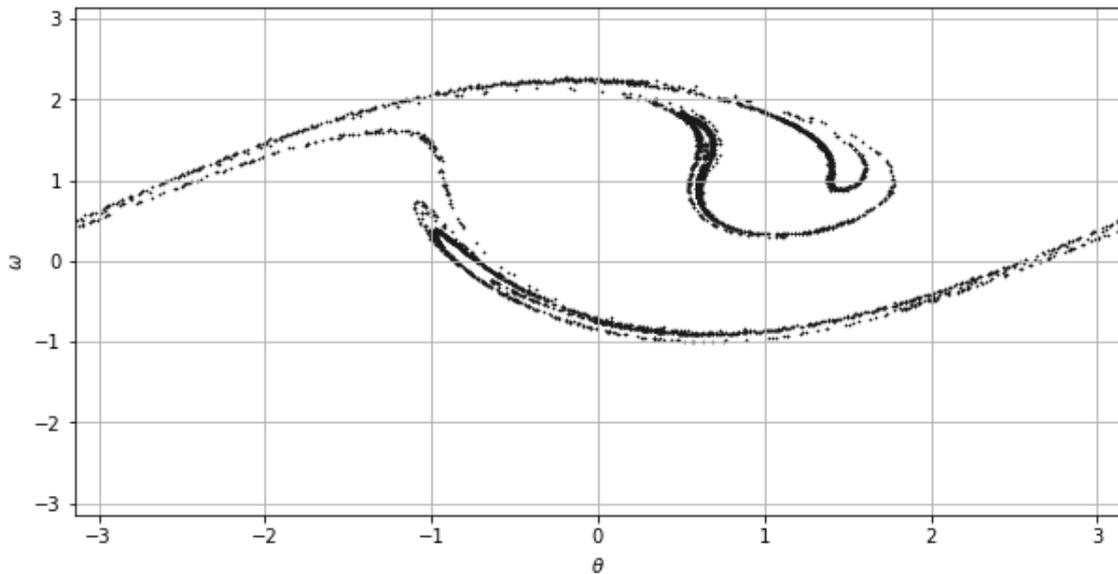
Gráfico 10 - Seção de Poincaré para o pêndulo forçado amortecido

Fonte: Elaborado pelo próprio autor. Para obter esse gráfico, utilizamos os seguintes parâmetros: $q=4$, $g = 0.3$, $\omega_d = \frac{2}{3}$, $\theta_0 = 0.1$, $\omega_0 = 0$.

Gráfico 11 - Seção de Poincaré para o pêndulo forçado amortecido.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor. Para obter esse gráfico, utilizamos os seguintes parâmetros: $q=4$, $g = 0.95$, $\omega_d = \frac{2}{3}$, $\theta_0 = 0.1$, $\omega_0 = 0$.

Gráfico 12 - Seção de Poincaré para o pêndulo forçado amortecido



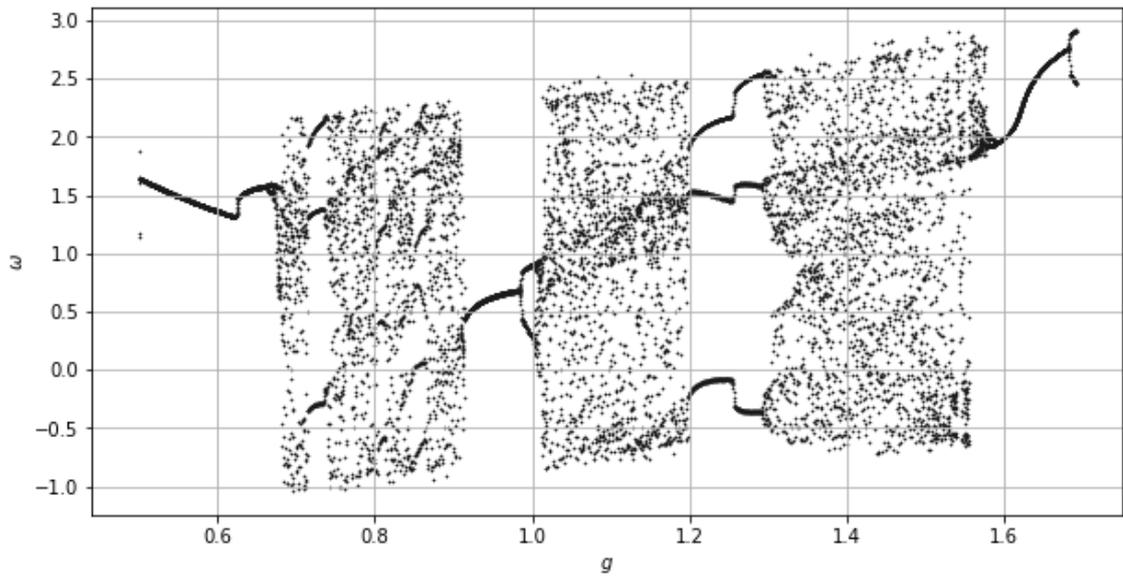
Fonte: Elaborado pelo próprio autor. Para obter esse gráfico, utilizamos os seguintes parâmetros: $q=4$, $g = 0.8$, $\omega_d = \frac{2}{3}$, $\theta_0 = 0.1$, $\omega_0 = 0$.

Para identificar se um sistema é caótico pela seção de Poincaré, é necessário examinar o padrão dos pontos no gráfico. Em um periódico, a trajetória no espaço de fase atravessa a seção sempre no mesmo ponto, como podemos constatar do Gráfico 10 e do Gráfico 11. Isso ocorre porque o sistema evolui periodicamente no espaço de fase, passando pela seção de Poincaré em intervalos regulares.

Por outro lado, em um sistema caótico, os pontos não se agrupam em uma estrutura regular, mas são distribuídos de forma aparentemente aleatória no gráfico. Isso ocorre porque o sistema apresenta um comportamento complexo e errático no espaço de fase, que leva a interseções irregulares e imprevisíveis com a seção de Poincaré, onde temos como exemplo o Gráfico 12.

Vimos até aqui que o parâmetro g (amplitude da força externa) afeta a dinâmica do sistema e pode levar o sistema a se comportar de maneira caótica. Podemos nos basear no mapa de bifurcação (Gráfico 13) para analisarmos esse parâmetro, e verificarmos para qual intervalo o valor escolhido será caótico.

Gráfico 13 - Mapa de bifurcação para o pêndulo forçado amortecido.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor. Para obter este mapa de bifurcação, utilizamos os seguintes parâmetros: $q=4$, $\omega_d=2/3$, $\theta_0 = 0$, $\omega_0 = 0.2$.

Em resumo, o parâmetro g no mapa de bifurcação do pêndulo forçado amortecido afeta a dinâmica do sistema e pode levar a intervalos de g em que o sistema se comporta de maneira caótica e não caótica à medida que este parâmetro varia.

3.5 Aplicação do Expoente de Lyapunov no Pêndulo Forçado e Amortecido: Análise da Estabilidade Dinâmica em Três Variáveis

Na seção 3.2, foi introduzida a ideia do expoente de Lyapunov e um exemplo foi dado para o mapa unidimensional. Há restrições nos expoentes para sistemas caóticos e dissipativos em espaços de dimensões superiores. Para esses sistemas, dos quais o pêndulo é um exemplo, as condições são que a soma de todos os expoentes deve ser negativa, mas pelo menos um deve ser positivo se o sistema apresentar sensibilidade às condições iniciais, que é a característica que define o comportamento caótico.

Em sistemas de dimensão superior, o cálculo dos expoentes de Lyapunov é mais desafiador do que no caso unidimensional[]. No entanto, a ideia é a mesma: medição da taxa média de divergência das trajetórias vizinhas no atrator. A direção da divergência ou convergência máxima é uma propriedade local variável no atrator. O movimento deve ser monitorado em cada ponto ao longo da trajetória.

Para determinar os expoentes de Lyapunov em 3 dimensões, iremos, primeiramente, definir os vetores de desvios \vec{w} . Os vetores de desvio são vetores que indicam a distância entre duas trajetórias próximas no espaço de fase. Eles são utilizados para calcular o expoente de Lyapunov e fornecem informações sobre a sensibilidade das trajetórias do sistema dinâmico a perturbações iniciais. Ou seja, eles permitem entender como pequenas variações nas condições iniciais afetam o comportamento futuro do sistema dinâmico.

Seja um sistema dinâmico descrito por:

$$\dot{x} = \vec{f}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (23)$$

Se fizermos $x_1 \rightarrow \theta$; $x_2 \rightarrow \omega$; $x_3 \rightarrow \varphi$, e tomando as derivadas dessas variáveis de estados, como mostrado nas equações (20), (21) e (22), podemos definir o vetor de desvio dado duas condições iniciais próximas $x'_i = x_i + w_i(t)$, sendo $w_i(t)$ vetor de desvio do estado i no tempo t :

$$\dot{x}_i = f_i(x_i + w_i(t)) \quad (24)$$

Temos então que:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot w_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \cdot w_2 + \frac{\partial f_i}{\partial x_3} \cdot w_3, \quad (25)$$

que fornece:

$$\dot{x}_i + \dot{w}_i(t) = f_i(x_i) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot w_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \cdot w_2 + \frac{\partial f_i}{\partial x_3} \cdot w_3 \quad (26)$$

Então, a equação da evolução temporal do vetor de desvio é dada por:

$$\dot{w}_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} w_j = \sum_j J_{ij} w_j. \quad (27)$$

Como a equação é linear, a solução geral para o vetor de desvio é dada por:

$$\vec{w}(t) = \sum_j \vec{c}_j e^{\lambda'_j t} \quad (28)$$

Onde os vetores \vec{c}_i são proporcionais aos autovetores da matriz jacobiana, e λ'_j são os autovalores correspondentes. Observe que os vetores de desvio tendem a se alinhar com o autovetor que tem o maior autovalor. O expoente de Lyapunov é calculado como o limite temporal da média dos valores absolutos das partes reais dos autovalores, já que as componentes da matriz jacobiana variam ao longo do tempo:

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (Re \lambda'_j) t. \quad (29)$$

Para ajudar entender melhor o expoente de Lyapunov para n dimensões, tomamos como exemplo o caso do pendulo forçado e amortecido, onde teremos 3 expoentes de Lyapunov. Vamos definir uma pequena esfera cujo centro é um ponto dado no atrator e cuja superfície consiste em pontos de fase de trajetórias próximas. À medida que o centro da esfera e seus pontos de superfície evoluem no tempo, a esfera se torna um elipsoide, com eixos principais nas direções de contração e expansão (autovetores), como podemos observar na Figura 11.

Figura 11 – Ilustração bidimensional para o cálculo do expoente de Lyapunov



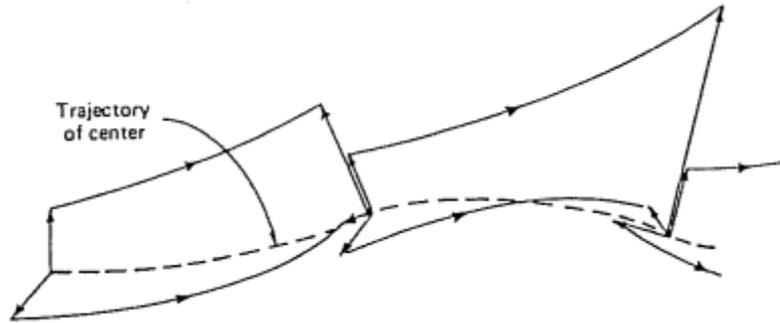
Fonte: []. A figura mostra a evolução de uma esfera de ponto inicial para um elipsóide.

As taxas médias de expansão ou contração ao longo dos eixos principais $L_i(t)$ são os expoentes de Lyapunov. Para o i -ésimo eixo principal, o expoente correspondente é definido como

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{[L_i(t)]}{[L_i(0)]}. \quad (30)$$

O cálculo dos expoentes a partir da Eq. (30) é impraticável porque os pontos iniciais próximos rapidamente divergem uns dos outros por distâncias próximas ao tamanho do atrator, o que torna o cálculo inviável para capturar as taxas locais de divergência e contração. Portanto, é necessário reduzir periodicamente ou renormalizar os vetores que conectam a superfície do elipsóide ao centro, a fim de manter o tamanho do elipsóide pequeno e garantir que seus pontos de superfície correspondam a trajetórias próximas do ponto central. Podemos renormalizar esses vetores utilizando método de Gram-Schmidt[11], que é uma técnica para transformar um conjunto de vetores linearmente independentes em um conjunto ortonormal de vetores, que pode ser útil para calcular os autovalores e autovetores da matriz de estabilidade do sistema. O método de Gram-Schmidt pode levar a problemas numéricos quando se trabalha com sistemas dinâmicos de alta dimensionalidade[] ou quando há muita flutuação nos dados de entrada. Esse processo é ilustrado na Figura 12. Os expoentes de Lyapunov são calculados como a média obtida em muitos segmentos da trajetória central.

Figura 12 - Exemplo tridimensional para cálculo do expoente de Lyapunov



Fonte: [1]. A figura mostra o reajuste do tamanho dos vetores ao longo dos eixos principais, utilizando o método de Gram-Schmidt.

Para o pêndulo, existem três expoentes de Lyapunov, já que as equações têm três variáveis e a soma dos expoentes deve ser negativa, já que o sistema é dissipativo. Um expoente corresponde à direção paralela à trajetória e não contribui para a expansão ou contração dos volumes de fase, sendo seu expoente de Lyapunov correspondente igual a zero. Os expoentes restantes são negativos ou zero em estados periódicos, enquanto no estado caótico, um expoente é positivo, indicando divergência de trajetórias.

Podemos considerar um campo vetorial f como um campo de forças que atuam sobre o sistema dinâmico. A divergência desse campo representa a taxa de dissipação de energia desse sistema. Por outro lado, os expoentes de Lyapunov medem a taxa de crescimento ou decaimento exponencial das perturbações no sistema. Essas perturbações são representadas por vetores que se afastam do vetor tangente ao espaço de fase ao longo do tempo. Logo, a relação entre a taxa de dissipação de energia e os expoentes de Lyapunov é dada pela seguinte equação:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \quad (31)$$

onde $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ é a divergência do campo de forças \vec{f} , $\sum \lambda_i$ é a soma dos expoentes de Lyapunov [9].

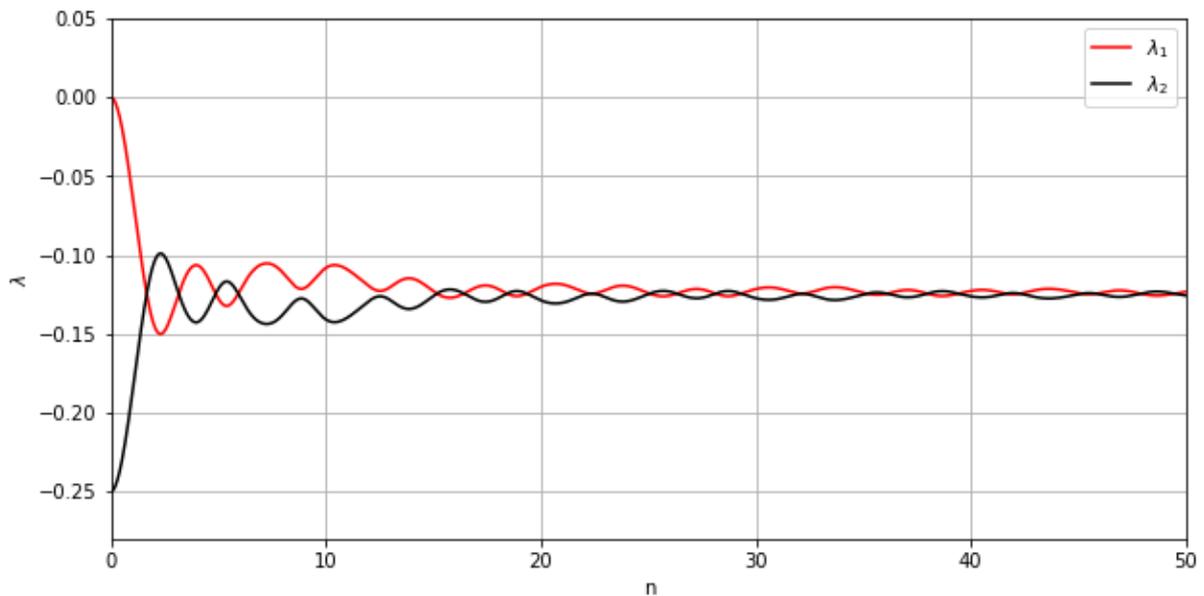
Essa equação nos mostra que a taxa de dissipação de energia do sistema está diretamente relacionada com a soma dos expoentes de Lyapunov. Quanto maior for a soma dos expoentes de Lyapunov, maior será a taxa de dissipação de energia, o que implica em um sistema mais caótico e menos previsível. Para o caso do pêndulo forçado e amortecido, considerar o campo vetorial correspondente ao sistema dinâmico definido pela equação ((24)), é válido a relação:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = -\frac{1}{q} \quad (32)$$

indicando que a taxa de dissipação é proporcional ao inverso do coeficiente de amortecimento q , o que significa que quanto menor o valor de q , maior será a taxa de dissipação.

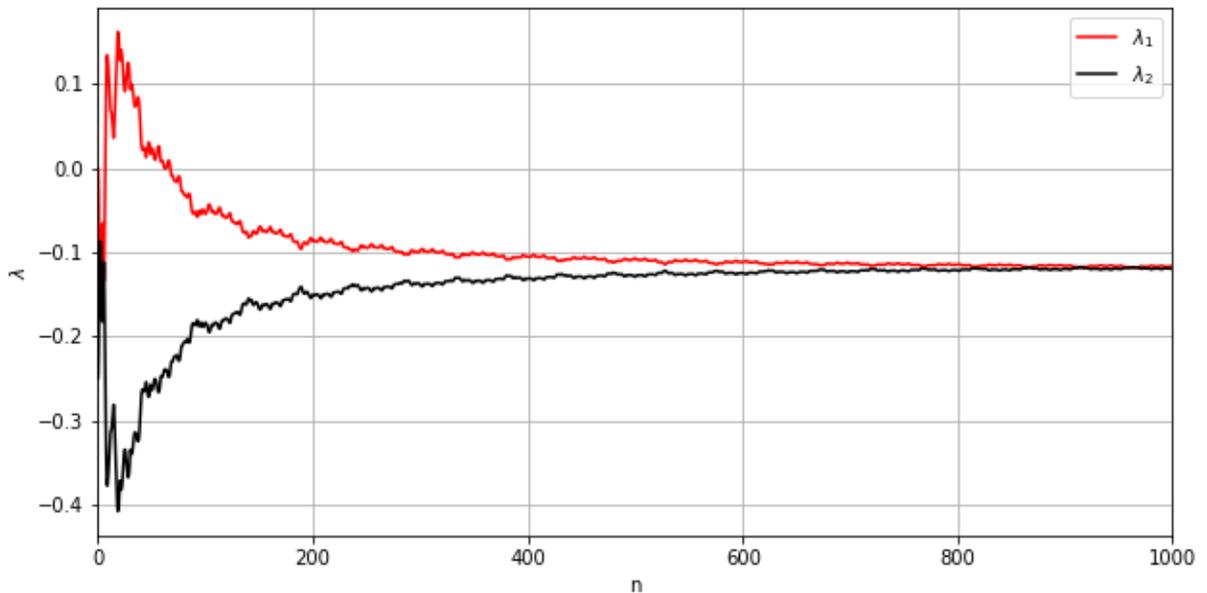
Vamos considerar os sistemas estudados na seção 3.4 para o pêndulo forçado amortecido para quatro valores de g , sendo iguais a 0.3, 0.8, 0.95 e 1.5, respectivamente. Os valores de q e ω_d são, respectivamente, 4 e $\frac{2}{3}$. Mostramos nos Gráfico 14, Gráfico 15 e Gráfico 16, os expoentes de Lyapunov para os mesmos conjuntos de parâmetros usados para gerar as seções de Poincaré mostradas anteriormente. Para o cálculo dos expoentes, utilizamos uma variação do algoritmo de Wolf[.].

Gráfico 14 - Cálculo dos expoentes de Lyapunov para o pêndulo forçado amortecido



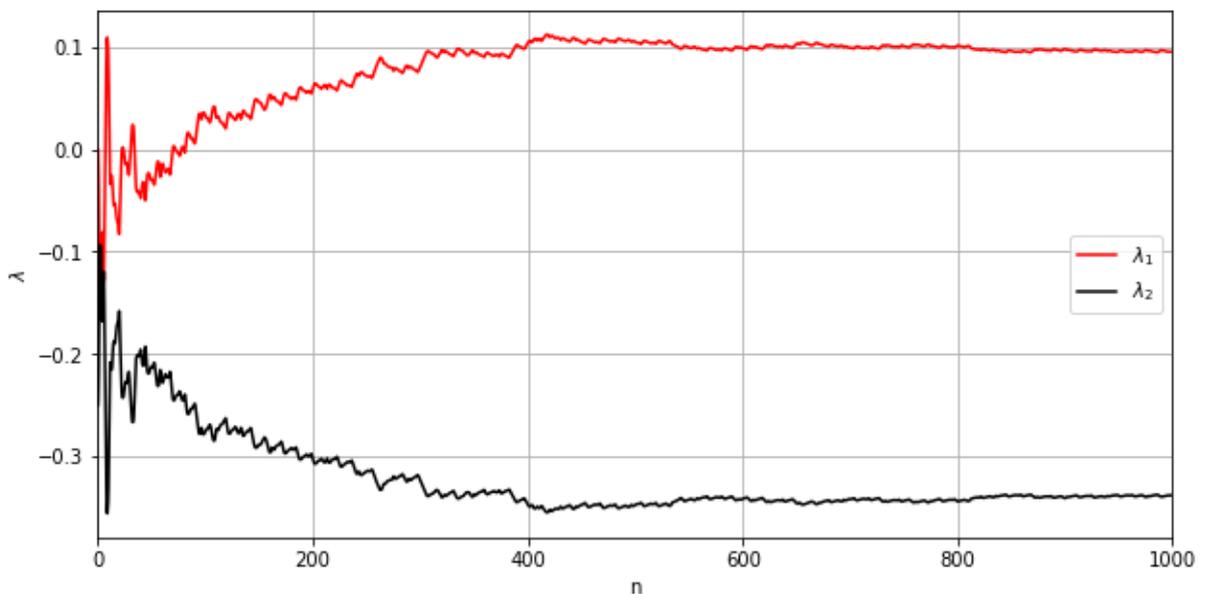
Fonte: Elaborado pelo próprio autor. Cálculo dos expoentes de Lyapunov para os valores dos parâmetros são $q = 4$, $g = 0.3$, $\omega_d = \frac{2}{3}$, com n para n iterações.

Gráfico 15 - Cálculo dos expoentes de Lyapunov para o pêndulo forçado amortecido



Fonte: Elaborado pelo próprio autor. Cálculo dos expoentes de Lyapunov para os valores dos parâmetros são $q = 4$, $g = 0.95$, $\omega_d = \frac{2}{3}$, com n para n iterações.

Gráfico 16 - Cálculo dos expoentes de Lyapunov para o pêndulo forçado amortecido



Fonte: Elaborado pelo próprio autor. Cálculo dos expoentes de Lyapunov para os valores dos parâmetros são $q = 4$, $g = 0.8$, $\omega_d = \frac{2}{3}$, com n para n iterações.

No primeiro caso, Gráfico 14, consideramos valores baixos de excitação $g = 0.3$ e um valor fixo de amortecimento, ou seja, $q = 4$. Neste caso, os dois expoentes de Lyapunov são

negativos, o que indica que as trajetórias inicialmente próximas se aproximam ao longo do tempo e o sistema apresenta comportamento regular.

No segundo sistema, Gráfico 15, aumentamos o valor da amplitude para 0.95, mantendo o valor de amortecimento constante. Observamos que ambos os expoentes se tornam assintoticamente negativos, o que indica que o sistema apresenta comportamento regular. No entanto, os valores absolutos dos expoentes são maiores do que no primeiro sistema, o que indica que as trajetórias próximas se aproximam ou se afastam mais rapidamente.

No terceiro sistema, Gráfico 16, aumentamos o valor da amplitude para 0.8, mantendo o valor de amortecimento constante. Observamos que o λ_1 se torna positivo, indicando um comportamento caótico, enquanto o λ_2 permanece negativo. A existência do expoente positivo confirma o comportamento caótico detectado via seção de Poincaré para esse conjunto de valores.

Em resumo, a análise do expoente de Lyapunov bidimensional para diferentes valores de amplitude e amortecimento no pêndulo forçado amortecido nos permite identificar diferentes comportamentos, desde regular até caótico, e entender como a dinâmica do sistema muda com a variação dos parâmetros. Podemos perceber também que, como mostrado na equação (32), a soma dos expoentes de Lyapunov é igual a razão $1/q$, exemplificando o que acontece na Figura 11.

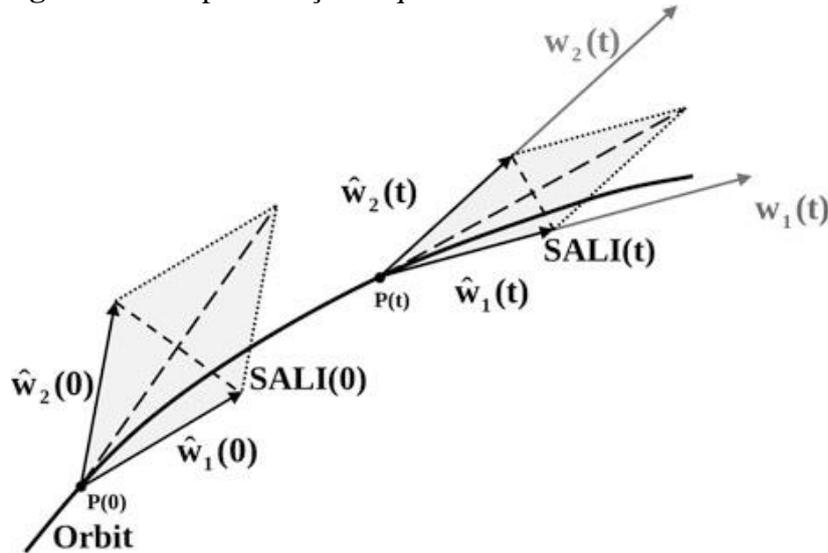
3.6 Método SALI

A ideia por trás da introdução do método SALI foi a necessidade de uma quantidade simples e facilmente computável que pudesse identificar claramente o possível alinhamento de dois vetores multidimensionais[12]. Quaisquer dois vetores de desvio, mesmos vetores calculados na equação (27), de uma órbita caótica com $\lambda_1 > \lambda_2$ são “esticados” na direção definida pelo Expoente de Lyapunov Máximo (mLE), eventualmente se alinhando na mesma ou em direções opostas. Portanto, seria muito útil desenvolver uma quantidade que pudesse indicar claramente esse alinhamento.

Como estamos interessados apenas na direção dos dois vetores de desvio e não em suas normas, podemos normalizá-los antes de verificar seu alinhamento. Esse processo também elimina o problema numérico relacionado ao crescimento da norma dos vetores, que aparece especialmente no caso de órbitas caóticas. Então, na prática, deixamos os dois vetores de desvio evoluírem sob a dinâmica do sistema, normalizando-os após um número fixo de passos de evolução para um valor de norma pré-definido. A técnica de normalização já foi comentada na

seção anterior. Para simplificar nossa apresentação, consideramos a norma euclidiana usual (denotada por $\|\cdot\|$) e normalizamos os vetores para vetores unitários. No caso de órbitas caóticas, este procedimento é esquematicamente mostrado na Figura 13, onde os dois vetores de desvio unitários inicialmente distintos $\hat{w}_1(0)$, $\hat{w}_2(0)$ convergem para a mesma direção.

Figura 13 – Representação esquemática de dois vetores de desvio.



Fonte: [12]. A legenda descreve uma representação esquemática da evolução de dois vetores de desvio e do SALI correspondente para uma órbita caótica. Os vetores de desvio iniciais $\hat{w}_1(0)$ e $\hat{w}_2(0)$ convergem para $\hat{w}_1(t)$ e $\hat{w}_2(t)$ após um tempo $t > 0$, quando a órbita atinge o ponto $P(t)$. Os valores do SALI são dados pelo comprimento das diagonais mais curtas dos paralelogramos cinza definidos pelos vetores $\hat{w}_1(0)$, $\hat{w}_2(0)$ e $\hat{w}_1(t)$, $\hat{w}_2(t)$, representados por $SALI(0)$ e $SALI(t)$, respectivamente.

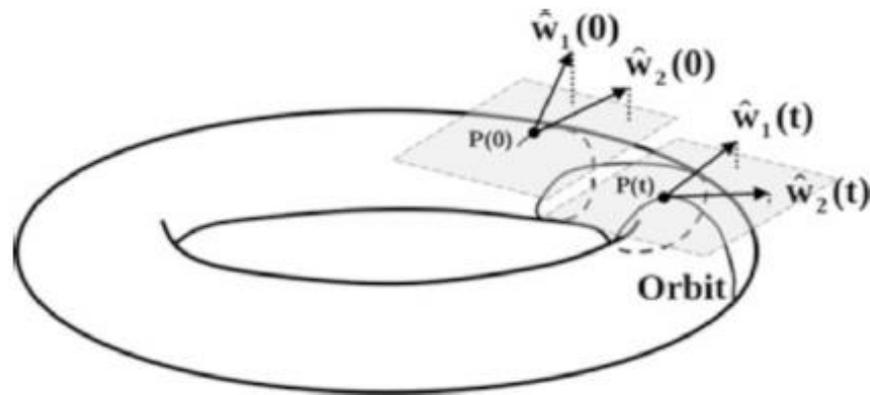
É importante enfatizar que a Figura 13 é apenas uma representação esquemática no plano dos vetores de desvio que são objetos que evoluem em espaços multidimensionais. No caso particular mostrado na Figura 13, os dois vetores unitários tendem a se alinhar, o que faz com que $\|\hat{w}_1(t) - \hat{w}_2(t)\| \rightarrow 0$ e $\|\hat{w}_1(t) + \hat{w}_2(t)\| \rightarrow 2$. O caso oposto também é possível e isso levaria os vetores a se tornarem antiparalelos, ou seja, $\|\hat{w}_1(t) + \hat{w}_2(t)\| \rightarrow 0$ e $\|\hat{w}_1(t) - \hat{w}_2(t)\| \rightarrow 2$. Para indicar o alinhamento dos vetores, é natural escolher a menor norma entre a soma e a diferença dos vetores unitários, pois a orientação particular dos vetores não é importante. Essa é a razão pela qual o SALI foi definido como o "Menor Índice de Alinhamento" (*Smaller Alignment Index*, no original em inglês), logo podemos definir:

$$SALI(t) = \min\{ \|\hat{w}_1(t) + \hat{w}_2(t)\|, \|\hat{w}_1(t) - \hat{w}_2(t)\| \} \quad (33)$$

onde $\hat{w}_i(t) = \frac{w_i}{\|w_i(t)\|}$ são vetores unitários.

Para que o método SALI seja um indicador eficaz de caos, é necessário que ele apresente comportamentos distintos para órbitas caóticas e regulares. Como já foi mencionado, o valor do SALI é igual a zero para órbitas caóticas. Já no caso de órbitas regulares, os vetores de desvio caem no espaço tangente do toro em que o movimento ocorre e geralmente possuem direções diferentes, já que não há motivo para que estejam alinhados [13, 14]. Esse comportamento é ilustrado na Figura 14. Portanto, o índice deve ser sempre diferente de zero nesse caso. Na prática, os valores do SALI exibem flutuações limitadas em torno de um número positivo constante.

Figura 14 - Representação esquemática da evolução de dois vetores de desvio para uma órbita regular.



Fonte: [12]. O movimento ocorre em um toro. Consideramos dois vetores de desvio unitários inicialmente distintos $\hat{w}_1(0)$, $\hat{w}_2(0)$ a partir do ponto $P(0)$, que não estão necessariamente no espaço tangente do toro (esse espaço é representado por um paralelogramo sombreado passando por $P(0)$). Conforme o tempo evolui, os vetores de desvio tendem a cair no espaço tangente do toro e os vetores unitários correspondentes $\hat{w}_1(t)$, $\hat{w}_2(t)$ em um determinado momento $t > 0$ estão "mais próximos" do espaço tangente atual (ou seja, o paralelogramo sombreado passando por $P(t)$), como indicam o encurtamento das linhas pontilhadas perpendiculares aos espaços tangentes a partir das bordas dos vetores de desvio. Como não há razão para o alinhamento dos dois vetores de desvio, o SALI não se tornará zero.

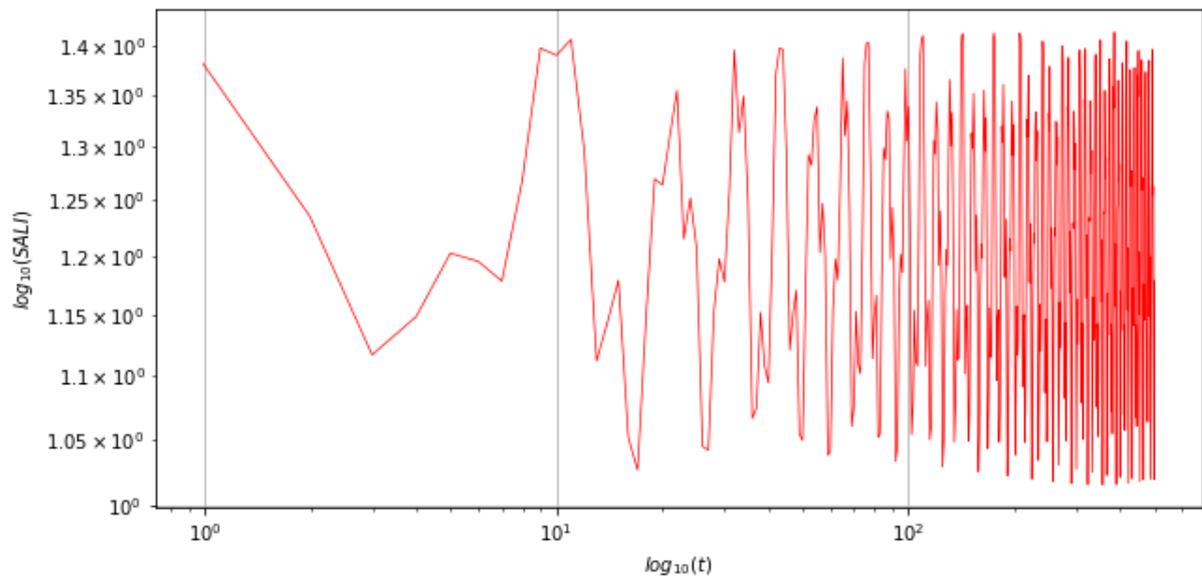
O método SALI é relativamente simples e rápido para ser calculado. O cálculo do expoente de Lyapunov, por exemplo, pode ser custoso computacionalmente, já que envolve o cálculo de diferenças infinitesimais no tempo, que crescem ou diminuem exponencialmente ao longo do tempo. Isso requer uma grande quantidade de iterações e pode ser especialmente difícil em sistemas de alta dimensionalidade. Todo esse processamento pode levar a um grande custo

computacional. Além disso, o SALI pode ser usado em sistemas de alta dimensionalidade, onde o cálculo do Expoente de Lyapunov é muitas vezes inviável.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

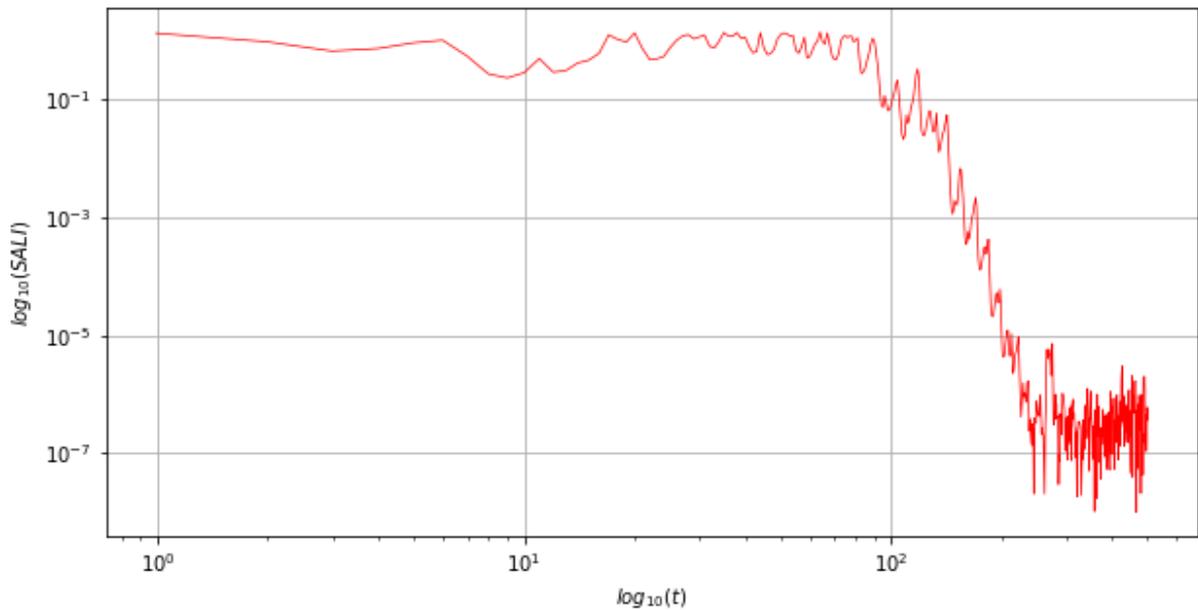
Nesta seção, apresentamos os resultados da aplicação do método SALI no estudo do pêndulo forçado amortecido. Foram gerados sete gráficos que demonstram a eficácia do método em distinguir entre órbitas caóticas e regulares.

Gráfico 17 – A evolução temporal do SALI para o pendulo amortecido forçado em uma órbita regular.



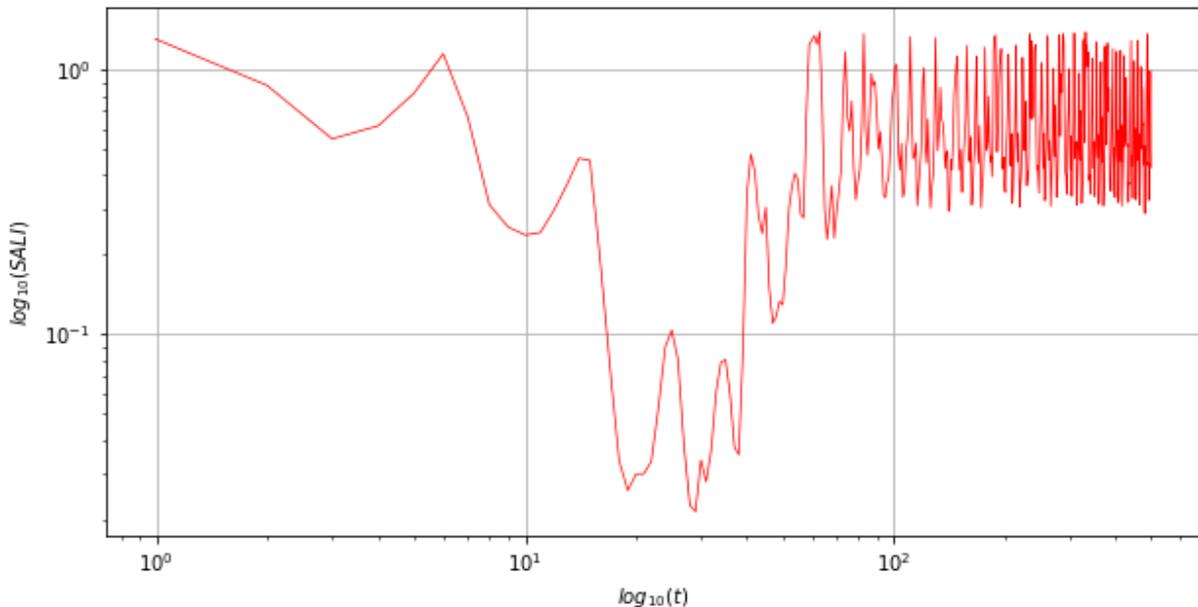
Fonte: Elaborado pelo próprio autor. O gráfico em escala loglog mostra a evolução temporal do SALI, para determinado tempo t de iteração, com os seguintes valores de parâmetros para o pendulo amortecido e forçado: $q=4$, $g=0.3$ e $\omega_d = \frac{2}{3}$. Note que a órbita para esses parâmetros é regular.

Gráfico 18 - A evolução temporal do SALI para o pendulo amortecido forçado em uma órbita caótica.



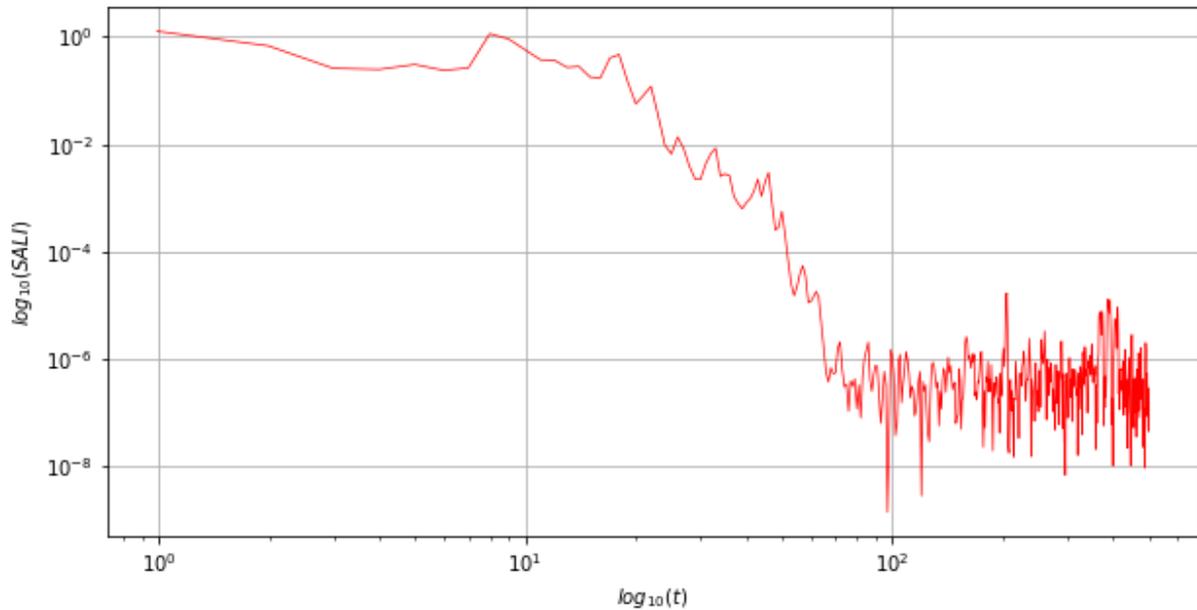
Fonte: Elaborado pelo próprio autor. O gráfico em escala loglog mostra a evolução temporal do SALI, para determinado tempo t de iteração, com os seguintes valores de parâmetros para o pendulo amortecido e forçado: $q=4$, $g=0.8$ e $\omega_d = \frac{2}{3}$. Note que a órbita para esses parâmetros é caótica.

Gráfico 19 - A evolução temporal do SALI para o pendulo amortecido forçado em uma órbita regular.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor. O gráfico em escala loglog mostra a evolução temporal do SALI, para determinado tempo t de iteração, com os seguintes valores de parâmetros para o pendulo amortecido e forçado: $q=4$, $g=0.95$ e $\omega_d = \frac{2}{3}$. Note que a órbita para esses parâmetros é regular.

Gráfico 20 - A evolução temporal do SALI para o pendulo amortecido forçado em uma órbita caótica.

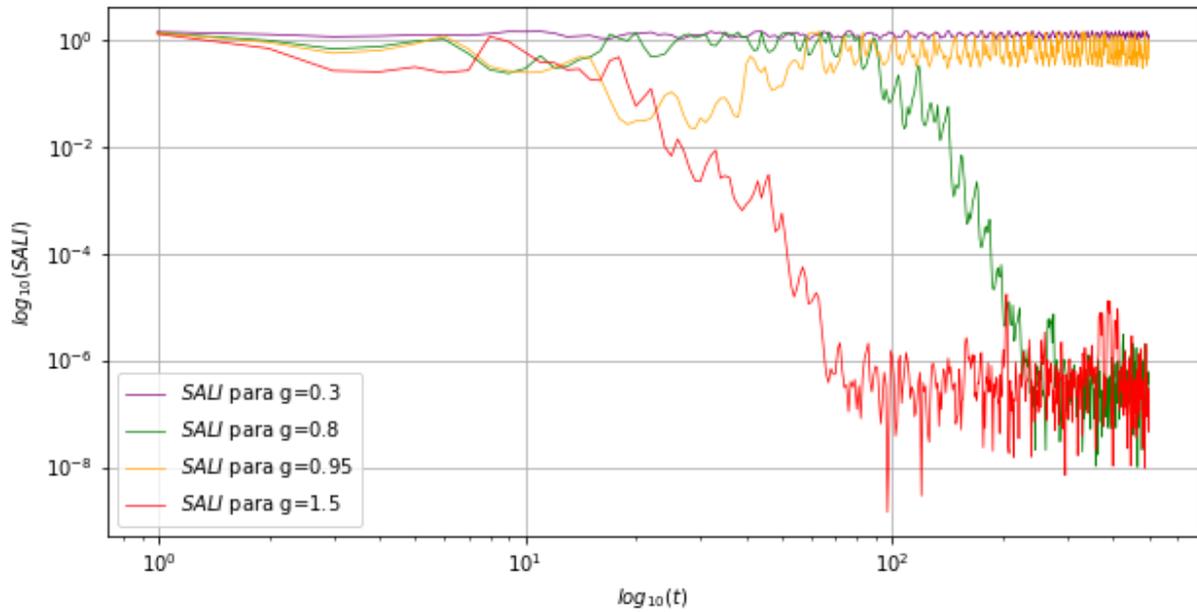


Fonte: Elaborado pelo próprio autor. O gráfico em escala loglog mostra a evolução temporal do SALI, para determinado tempo t de iteração, com os seguintes valores de parâmetros para o pendulo amortecido e forçado: $q=4$, $g=1.5$ e $\omega_d = \frac{2}{3}$. Note que a órbita para esses parâmetros é caótica.

Ao analisar os resultados obtidos a partir dos Gráficos Gráfico 21, Gráfico 22 e Gráfico 23, gerados pelo método SALI para diferentes sistemas dinâmicos, podemos perceber que o SALI é capaz de detectar com velocidade e eficácia a presença de comportamento caótico em um sistema. Em todos eles, a quantidade de tempo baixa, o que corrobora com a eficácia do método SALI em distinguir entre órbitas caóticas e regulares, e a rapidez com que ele pode detectar a presença de comportamento caótico em um sistema dinâmico.

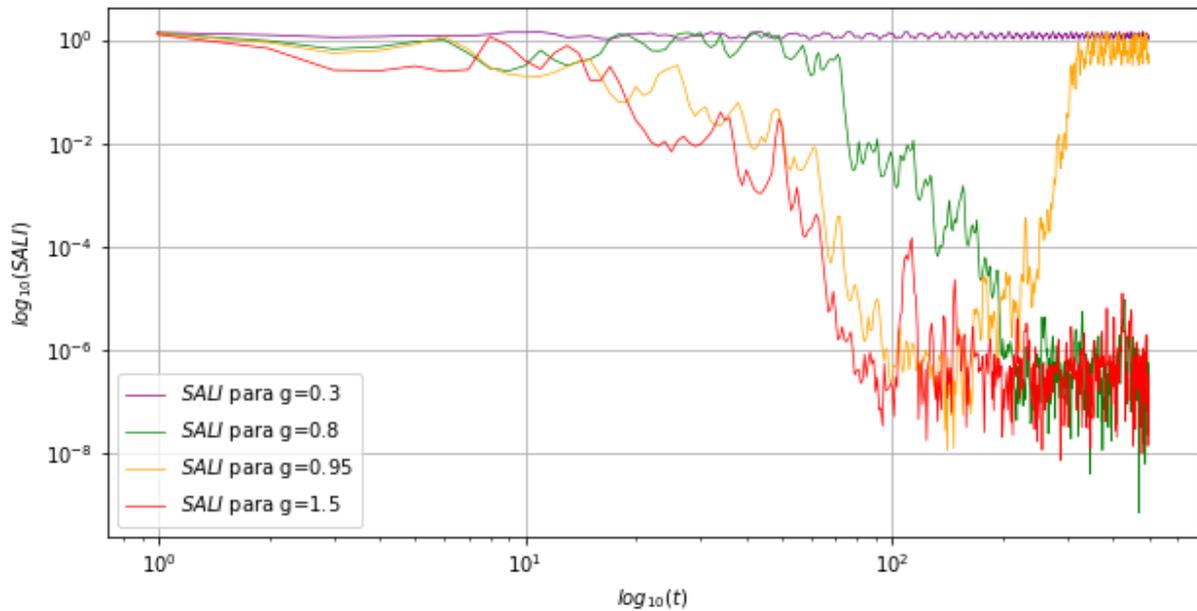
Por outro lado, o método SALI pode ser ineficaz quando as órbitas caóticas são muito próximas de órbitas regulares, visto, por exemplo, no Gráfico 22 (curva laranja), no Gráfico 23 (curva verde), a convergência da órbita é mista. Nesse caso, a diferença entre os valores do SALI para as órbitas caóticas e as órbitas regulares pode ser pequena, o que dificulta a distinção entre as duas, o que nos faz concluir que, em situações onde o sistema dinâmico é muito complexo e apresenta muitas órbitas, o método pode levar muito tempo para calcular os valores do SALI para cada órbita, o que pode ser impraticável em termos computacionais, ou seja, outras técnicas de análise de sistemas dinâmicos podem ser necessárias[12].

Gráfico 21 - A evolução temporal do SALI para o pendulo amortecido forçado para diferentes órbitas.



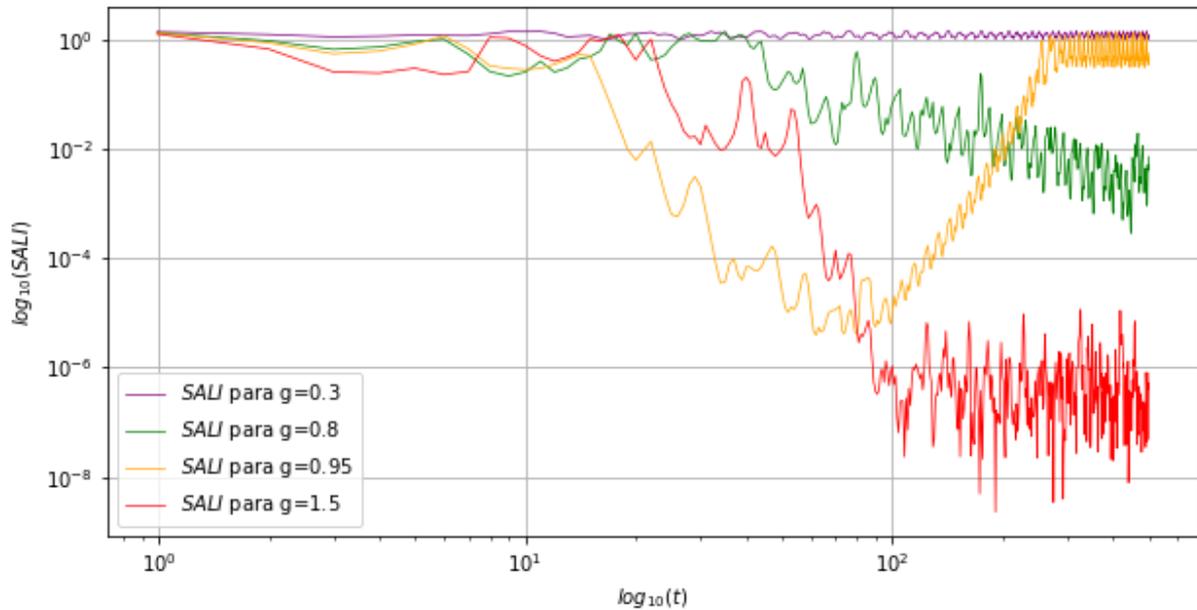
Fonte: Elaborado pelo próprio autor. O gráfico em escala loglog mostra a evolução temporal do método SALI, para determinado tempo t de iteração, com quatro valores de parâmetro g , mantendo $q=4$ e $\omega_d = \frac{2}{3}$, fixos.

Gráfico 22 - A evolução temporal do SALI para o pendulo amortecido forçado para diferentes órbitas e considerando $q = 3.9$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor. O gráfico em escala loglog mostra a evolução temporal do método SALI, para determinado tempo t de iteração, com quatro valores de parâmetro g , mantendo $q=3.9$ e $\omega_d = \frac{2}{3}$, fixos.

Gráfico 23 - A evolução temporal do SALI para o pêndulo amortecido forçado para diferentes órbitas e considerando $q = 4.1$.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor. O gráfico em escala loglog mostra a evolução temporal do método SALI, para determinado tempo t de iteração, com quatro valores de parâmetro g , mantendo $q=4.1$ e $\omega_d = \frac{2}{3}$, fixos.

De maneira geral, os resultados indicam que o método SALI é uma ferramenta promissora para a detecção de caos em sistemas dinâmicos. Os gráficos apresentados mostram claramente a diferença no comportamento do índice SALI para órbitas regulares e caóticas no sistema do pêndulo forçado amortecido. Além disso, o método SALI mostrou-se mais eficiente em relação ao cálculo do expoente de Lyapunov, apresentando menor custo computacional.

Dessa forma, conclui-se que o método SALI é uma ferramenta útil para a detecção de caos em sistemas dinâmicos de baixa dimensionalidade, sendo capaz de fornecer informações importantes sobre o comportamento das órbitas. No entanto, é importante ter em mente suas limitações e utilizá-lo de forma complementar a outras técnicas de análise dinâmica.

5. CONCLUSÃO

Com base nos resultados obtidos, concluímos que o método SALI é uma ferramenta promissora na análise de sistemas dinâmicos de baixa dimensionalidade, como o pêndulo forçado amortecido. Ele é capaz de detectar a presença de comportamento caótico e distinguir entre soluções regulares e irregulares de forma eficiente e computacionalmente menos custosa do que o método dos expoentes de Lyapunov. Além disso, o método do expoente de Lyapunov é sensível a ruídos e erros numéricos, enquanto o método SALI é mais robusto a essas perturbações.

No entanto, observamos que o método SALI apresenta algumas limitações, como a dificuldade de aplicação em sistemas de alta dimensionalidade e a sensibilidade a pequenas perturbações iniciais. Além disso, a interpretação dos resultados também pode ser desafiadora em alguns casos.

Apesar dessas limitações, o método SALI é uma ferramenta valiosa na análise de sistemas dinâmicos. Portanto, sugerimos que futuros estudos continuem a explorar suas potencialidades e limitações em diferentes contextos.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] STROGATZ, Steven H. **Nonlinear dynamics and chaos**: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. CRC Press, 2015.
- [2] GUCKENHEIMER, J.; Holmes, P. **Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields**. p. 265, Springer-Verlag, 1983.
- [3] MALTHUS, T. R. **An Essay on the Principle of Population**. London: J. Johnson, 1798. Disponível em: <http://www.esp.org/books/malthus/population/malthus.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2023.
- [4] VERHULST, P. J. F. **Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement**. Correspondence Mathématique et Physique, v. 10, p. 113-121, 1838.
- [5] PEARL, R. **Experimental studies on the duration of life. XI. The growth-rate of the housefly, *Musca domestica* L.** Journal of Experimental Zoology, v. 26, n. 1, p. 45-59, 1919.
- [6] MAY, R. M. **Simple mathematical models with very complicated dynamics**. Nature, v. 261, n. 5560, p. 459-467, 1976.
- [7] WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. **Determining Lyapunov Exponents from a Time Series**. Physica D: Nonlinear Phenomena, v. 16, n. 3, p. 285-317, 1985.
- [8] THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas**. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2018.
- [9] BAKER, G. L. **Chaotic Dynamics: An Introduction**. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.
- [10] ANDRADE, F. J. **Estudo do amortecimento do pêndulo simples**: uma proposta para aplicação em laboratório de ensino. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 33, n. 4, e4401, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1590/S1806-11172011000400011>
- [11] GALDINO, V. G. **Técnicas para estimação de expoentes de Lyapunov em sistemas dinâmicos não-lineares**. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2006.
- [12] SKOKOS, Ch.; MANOS, T. **The Smaller (SALI) and the Generalized (GALI) Alignment Indices**: Efficient Methods of Chaos Detection. ArXiv, 2014. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1412.7401>. Acesso em: 02 mar. 2023.

- [13] Skokos, Ch.; Antonopoulos, Ch.; Bountis, T.C.; Vrahatis, M.N. (2003): **How does the smaller alignment index (SALI) distinguish order from chaos?** Prog. Theor. Phys. Suppl. 150, 439–443.
- [14] Voglis, N.; Contopoulos, G.; Efthymiopoulos, C.: **Method for distinguishing between ordered and chaotic orbits in four-dimensional maps.** Phys. Rev. E 57, 372–377 (1998)