

Gregory Matheus Pereira de Moraes

**O ENFOQUE LYAPUNOV PARA
ENCONTRAR EQUILÍBRIOS DE NASH**

MARIANA-MG

2022

Gregory Matheus Pereira de Moraes

O ENFOQUE LYAPUNOV PARA ENCONTRAR EQUILÍBRIOS DE NASH

Dissertação apresentada ao curso de graduação em Ciências Econômicas da Universidade Federal de Ouro Preto, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Universidade Federal de Ouro Preto-UFOP
Instituto de Ciências Sociais Aplicadas-ICSA
Departamento de Ciências Econômicas-DEECO

Orientador: Martin Harry Vargas Barrenechea

MARIANA-MG

2022

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

M827e Moraes, Gregory Matheus Pereira De.
O Enfoque Lyapunov para Encontrar equilíbrio de Nash. [manuscrito] /
Gregory Matheus Pereira De Moraes. - 2022.
53 f.: il.: gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Martin Harry Vargas Barrenechea.
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.
Instituto de Ciências Sociais Aplicadas. Graduação em Ciências
Econômicas .

1. Método de estudo. 2. Modelos matemáticos. 3. Teoria dos Jogos. I.
Barrenechea, Martin Harry Vargas. II. Universidade Federal de Ouro
Preto. III. Título.

CDU 519.83

Bibliotecário(a) Responsável: Essevalter De Sousa-Bibliotecário Coordenador
CBICSA/SISBIN/UFOP-CRB6a1407



FOLHA DE APROVAÇÃO

Gregory Matheus Pereira de Moraes

O enfoque Lyapunov para encontrar equilíbrios de Nash

Monografia apresentada ao Curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Ciências Econômicas

Aprovada em 25 de outubro de 2022

Membros da banca

Prof. Dr. - Martin Harry Vargas Barrenechea (Orientador) - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. - Carlos Eduardo da Gama Torres - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. - Victor Maia Senna Delgado - Universidade Federal de Ouro Preto

Prof. Dr. Martin Harry Vargas Barrenechea, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 29/10/2022



Documento assinado eletronicamente por **Martin Harry Vargas Barrenechea, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 29/10/2022, às 10:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0419363** e o código CRC **DD86B746**.

Agradecimentos

Aos meus pais, Maria Luiza e Wilian Moraes, que sempre me apoiaram e me incentivaram a estudar. Às minhas avós, Adarci Rabelo e Sebastiana Martins, que sempre me acompanharam. Aos meus amigos de São Paulo que, mesmo com a distância, sempre estiveram ao meu lado, Luana Viana, Lucas Hamada e Milena Porto. Sou imensamente grato a professora Dra. Eline Chaves por todo seu carinho, por acreditar e me mostrar toda minha capacidade.

À família Galinheiro por se tornar meu eterno lar e pelas amizades formadas nesta casa: Gustavo Borges, Marcelo Geovane, Lênio Monsores, Lucas Queiroz, Pedro Marinho, Pedro Faria, Victor Augusto, Gustavo Furtado, Bruna Arantes, Gustavo Oka, Yago Pifano, Eric Ozanan e e Pedro Carosi. Sou grato por ter conhecido vocês.

Sou especialmente grato ao professor Dr. Martin Barrenechea pelas oportunidades dadas a mim e pela orientação deste trabalho. Também sou grato aos professores Dr. Thiago Barros, Dr. Alan Costa, Dr. Diogo Ferraz por despertar meu interesse pela ciência e, principalmente, pela economia. Muito obrigado por suas contribuições na minha formação.

*“Sempre chega a hora em que descobrimos que
sabíamos muito mais do que antes julgávamos”.*
(José Saramago- Ensaio Sobre a Lucidez, página 156)

Resumo

Neste trabalho implementamos o algoritmo de McKelvey em Python para encontrar equilíbrios de Nash em estratégias mistas em diversos tipos de jogos tanto estáticos, como dinâmicos. O método de McKelvey baseia-se em utilizar a função de Lyapunov que assegura a convergência para o equilíbrio de Nash, dessa forma os zeros dessa função são encontrados utilizando métodos numéricos, assim, implementamos o algoritmo em Python para demonstrar a versatilidade do algoritmo em diferentes tipos de jogos, serão analisados os resultados e comparados com a solução numérica.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos. Equilíbrios de Nash. Método de Lyapunov.

Abstract

In this work we implement McKelvey's algorithm in Python to find Nash equilibria in mixed strategies in different types of static and dynamic games. McKelvey's method is based on using the Lyapunov function that ensures convergence to the Nash equilibrium, so the zeros of this function are found using numerical methods, so we implement the algorithm in Python to demonstrate the versatility of the algorithm in different types of games, the results will be analyzed and compared with the numerical solution.

Keywords: Game Theory. Nash equilibria. Lyapunov's Method.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Jogo Estratégico com 2 jogadores	26
Figura 2 – Jogo Estratégico Batalha dos Sexos	27
Figura 3 – Melhores Respostas BdS	28
Figura 4 – Jogo 3×3	30
Figura 5 – Segundo Jogos 3×3	31
Figura 6 – Jogo 4×4	33
Figura 7 – Jogo Extensivo I	34
Figura 8 – Jogo Extensivo I Após Inversão	35
Figura 9 – Jogo 3×3 do extensivo para o estratégico	35
Figura 10 – Jogo 3×3 Sem as Estratégias Estritamente Dominadas	36
Figura 11 – Jogo Extensivo com 4 Estratégias	38
Figura 12 – Subjogo I	38
Figura 13 – Subjogo Estrategico	38
Figura 14 – Melhores Respostas Subjogo	39
Figura 15 – Jogo 4×4	40

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela de Resultados I	29
Tabela 2 – Tabela de Resultados II	31
Tabela 3 – Tabela de Resultados III	32
Tabela 4 – Tabela de Resultados IV	33
Tabela 5 – Tabela de Resultados	36
Tabela 6 – Tabela de Resultados VI	37
Tabela 7 – Tabela de Resultados VII	40

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	FUNDAMENTOS DA TEORIA DOS JOGOS	14
2.1	Jogo Estratégico	14
2.2	Equilíbrio de Nash	15
2.3	Estratégias Mistas	15
2.4	Forma Extensiva	17
2.5	Equilíbrio de Nash na Forma Extensiva	19
3	MÉTODO DE LYAPUNOV	21
3.1	Teorema de Lyapunov e Estabilidade de Sistemas não Lineares	21
3.2	McKelvey	23
3.3	Análise dos Equilíbrios de Nash em Estratégias Mistas	25
4	JOGOS NA FORMA ESTRATÉGICA	27
4.1	Jogos 2x2	27
4.2	Jogos 3x3	30
4.3	Jogo 4x4	32
5	JOGOS NA FORMA EXTENSIVA	34
5.1	Jogos extensivos com 2 jogadores e 3 estratégias	34
5.2	4x4	37
6	CONCLUSÃO	42
	REFERÊNCIAS	43
	APÊNDICES	44
	APÊNDICE A – CÁLCULOS	45
	APÊNDICE B – SCRIPT EM PYTHON	48

1 Introdução

A Teoria dos Jogos tem um papel fundamental para a economia, política e para as ciências sociais. Com ela, pode-se estudar diversas relações e interações entre os mais diversos agentes econômicos e, muitas vezes, até prever os resultados dessas interações. A Teoria dos Jogos estuda o comportamento dos tomadores de decisões, cuja as decisões afetam uns aos outros (AUMANN, 1992).

Estudar a interação dos indivíduos trás luz ao entendimento de como funciona a racionalidade e comportamento humano, e, como uma alteração desse comportamento pode levar a uma melhora do bem estar. Ao analisar as interações, pode-se notar as vantagens e desvantagens de cada estratégia tomada pelos indivíduos e, assim, concluir quais são as melhores decisões a serem tomadas .

Os modelos de Teoria dos Jogos muitas vezes podem ser apresentados verbalmente, mas isso tende a deixar o modelo longo e impreciso (OSBORNE et al., 2004). Sendo assim, utiliza-se formulações matemáticas a fim de facilitar a resolução de problemas complexos e obter a maior precisão nos resultados obtidos.

A Teoria dos Jogos pode ser vista como uma espécie de teoria de "campo unificado" no espéctro das ciências sociais, onde "social", por muitas vezes, pode ser interpretado como a inclusão de indivíduos humanos na racionalização de problemas, como também outros tipos de jogadores (corporações, nações, animais e computadores) (AUMANN, 1992).

Ao contrário de outras abordagens presentes nas ciências econômicas ou nas ciências políticas, a Teoria dos Jogos não usa métodos diferentes para lidar com várias questões. Ao invés disso, desenvolvem-se metodologias que se aplicam, em princípio, a todas as situações interativas e, logo após, analisa-se onde essas metodologias podem ser aplicadas e os resultados gerados por elas (AUMANN, 1992).

Um ponto essencial para a compreensão dos problemas de Teoria dos Jogos é a Teoria da Escolha Racional. Nela, os indivíduos são extremamente racionais e sempre escolherão sua melhor estratégia baseada nas suas preferências, dentre todas as estratégias possíveis. O objetivo dos indivíduos é maximizar sua utilidade e obter o maior ganho bem estar possível, dessa forma, muitas vezes os indivíduos podem ser relacionados com um comportamento egoísta, por sempre buscarem maximizar seus próprios ganhos (CAMPOS; BORSANI; AZEVEDO, 2016).

Em geral, mesmo quando o jogo é muito simples, a tarefa de encontrar o equilíbrio de Nash pode ser uma tarefa tediosa e propensa a erros (MCKELVEY; MCLENNAN,

1996), principalmente pelo fato de que encontrar o equilíbrio de Nash é uma tarefa sistêmica e, muitas vezes, repetitiva. Sendo assim, a utilização de softwares para a realização desta tarefa é imprescindível, pois facilita a modelagem e a busca pelo valor de equilíbrio, trazendo mais confiança e precisão aos modelos aplicados.

Segundo McKelvey, o método apropriado para encontrar o equilíbrio depende de vários fatores. O primeiro e o mais importante fator tem relação com quantos equilíbrios de Nash o pesquisador deseja encontrar, se deseja apenas um equilíbrio (equilíbrio amostral) ou todos os equilíbrios. Na literatura existem diversos estudos e métodos para encontrar numericamente um único equilíbrio de Nash (MCKELVEY; MCLENNAN, 1996), já para encontrar múltiplos equilíbrios, embora existam métodos para isso, geralmente costumam exigir um nível intenso de conhecimento em computação.

O segundo fator tem relação com o número de jogadores (n), no caso de apenas dois jogadores existem vários métodos para encontrar facilmente o equilíbrio, pois os polinômios que surgem na definição de equilíbrio de Nash são de grau $n - 1$ nas variáveis que descrevem as estratégias mistas dos jogadores (MCKELVEY; MCLENNAN, 1996), dessa forma para encontrar o equilíbrio nestes modelos basta resolver um sistema de equações lineares. Nota-se também que se os números de entrada do modelo forem racionais, o conjunto de todos equilíbrios de Nash será a união de um conjunto convexo, que terão um número finito de pontos extremos que possuirão coordenadas racionais. Assim, existem diversos métodos para encontrar o equilíbrio de Nash com apenas dois jogadores de uma amostra exata. Entretanto, ao introduzir mais jogadores, mesmo que os números de entrada sejam racionais, o conjunto de equilíbrio não precisará ser, necessariamente, convexo e, sim, um singleton (MCKELVEY; MCLENNAN, 1996). Em geral, os métodos utilizados para encontrar equilíbrios com dois jogadores não podem ser estendidos para jogos com mais de dois jogadores.

O terceiro fator determinante para a escolha do método tem relação com o tipo de equilíbrio que o pesquisador deseja encontrar, pois alguns métodos podem gerar equilíbrios que não são necessariamente atraentes para o problema proposto. Na literatura existem vários refinamentos do conceito de equilíbrio, como por exemplo equilíbrio perfeito, equilíbrio sequencial, equilíbrio dominado e, no caso de múltiplos equilíbrios, podem ser classificados como equilíbrio de Pareto. O método proposto neste trabalho garante que apenas um equilíbrio de Nash por vez, sem qualquer condição de refinamento específico. O conjunto de equilíbrios refinados são um subconjunto do conjunto de todos equilíbrios de Nash, dessa forma, um método que encontre todos os equilíbrios de Nash pode servir de base para encontrar equilíbrios específicos.

Ao apresentar esses três fatores, nota-se a importância da aplicação de métodos numéricos para encontrar os equilíbrios de Nash, além disso a computação e a utilização de software para os cálculos buscam facilitar a aplicação de cada modelo, tendo em

vista a busca pelos equilíbrios. Assim, este trabalho é constituído por uma breve revisão das definições dos Fundamentos da Teoria dos Jogos no Capítulo 2, seguido pela apresentação do Método de Lyapunov no Capítulo 3, a aplicação do método em diversos jogos estratégicos em Python no Capítulo 4, seguido pela aplicação do método em Jogos Extensivos no Capítulo 5. Ao final, apresenta-se as conclusões sobre os resultados obtidos.

2 Fundamentos da Teoria dos Jogos

2.1 Jogo Estratégico

Em um jogo estratégico cada jogador tem um conjunto de estratégias possíveis, ao tomar decisões e escolher uma estratégia, o jogador não está afetando somente a si próprio e, sim, todos os outros jogadores que estão participando e interagindo no jogo. Em outras palavras, o modelo busca capturar a interação entre os jogadores e como a ação deles afeta uns aos outros. Cada jogador tem preferências sobre um perfil de estratégia, nas quais as preferíveis são aquelas que maximizam sua utilidade. A estrutura básica para um jogo é dada pela seguinte definição.

Definição 1. Um jogo na forma estratégica $\langle N, (S_i), (\succsim_i) \rangle$ ou $\langle N, (S_i), (u_i(\cdot)) \rangle$ segue o seguinte formato:

1. Um conjunto finito N de jogadores.
2. Para cada jogador $i \in N$ um conjunto de estratégias S_i (estratégias puras).
3. Para cada jogador $i \in N$ uma relação de preferências \succsim_i ou utilidade $u_i(\cdot)$ definida sobre $S = \times_{i \in N} S_i$, esta utilidade as vezes é conhecida como payoff.

Uma enorme variedade de situações podem ser modeladas utilizando jogos na forma estratégica (OSBORNE et al., 2004). Como por exemplo os jogadores representam empresas, os preços das ações e as preferências um reflexo do lucro delas. Outra possibilidade é os jogadores serem candidatos políticos, as ações dos jogadores é o gasto direcionado a campanha e a preferência pode ser um reflexo das probabilidades de vitória de cada candidato. Desse modo, os jogos na forma estratégica tentam capturar conflitos fundamentais presentes em diversas situações do dia a dia.

Um ponto importante de se ressaltar é que o tempo está ausente no modelo. Inicialmente, a ideia é que cada jogador escolha sua ação uma única vez e que todos os jogadores escolham suas ações simultaneamente, sendo que nenhum jogador é informado, ao escolher sua ação, da ação escolhida pelos outros jogadores. O jogador pode escolher uma ação que envolva atividades que se estendam ao longo do tempo, entretanto, o fato do tempo estar ausente no modelo implica que, ao analisar o jogo na forma estratégica, abstraímos qualquer complicação que possa surgir caso permitíssemos que o jogador mudasse de estratégia a medida que os eventos acontecessem, assim, assumimos que as ações são escolhidas de uma vez por todas (OSBORNE et al., 2004).

2.2 Equilíbrio de Nash

Em um jogo, os jogadores sabem que suas ações afetam o resultados dos outros jogadores, o modelo considera que os jogadores têm racionalidade e experiência extensas ao ponto em que saibam como será o comportamento dos outros jogadores. Seguindo esse modelo, o conceito mais amplamente aceito como resultado do jogo é denominado Equilíbrio de Nash, onde todos os jogares escolherão o perfil de estratégia que maximizam suas utilidades.

O Equilíbrio de Nash é um estado estacionário, pois ao adotar um perfil de estratégia a^* , que é um Equilíbrio de Nash, nenhum jogador tem motivos para desviar-se dela. Ou seja, quando todos os jogadores adotam suas melhores estratégias, nenhum deles têm incentivos para desviar-se dela, caso o contrário, eles não estariam maximizando suas utilidades, conseqüentemente, o jogo não estaria em equilíbrio (OSBORNE et al., 2004).

Por definição, o Equilíbrio de Nash é representado como.

Definição 2. *O perfil de estratégia a^* é um Equilíbrio de Nash se, para cada jogador i e cada ação a_i do jogador i , a^* é suficientemente bom segundo as preferências do jogador i . Sendo que, o perfil de ação (a_i, a_i^*) no qual o jogador i escolhe a_i , enquanto o jogador j escolhe a_{-j}^* . Para cada jogador i , u_i é a função de utilidade e o payoff correspondente daquela estratégia adotada, segundo as preferências do jogador i .*

$$u_i(a^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*)$$

A definição acima apresentada não implica que um jogo estratégico tenha necessariamente apenas um Equilíbrio de Nash, há jogos que podem apresentar nenhum equilíbrio e jogos que podem apresentar múltiplos equilíbrios. Como dito anteriormente, o equilíbrio de Nash é um estado estacionário no qual os jogadores não têm incentivos para desviar-se dele, dessa forma, um jogo pode ter diversos estados estacionários ou não apresentar nenhum deles.

2.3 Estratégias Mistas

As definições apresentadas até aqui são referente a jogos com estratégias puras, onde as estratégias são escolhidas de forma determinística. Ao estender esse conceito e permitir que as estratégias sejam escolhidas de forma não determinística, o jogo é trabalhado no campo das estratégias mistas. Ou seja, as estratégias passam a serem escolhidas a partir de uma função de distribuição de probabilidade sobre as estratégias puras.

Seja o jogo normal apresentado anteriormente como $\langle N, (A_i), (u_i(\cdot)) \rangle$, e seja $\Delta(A_i)$ o conjunto de distribuições de probabilidade sobre A_i e, dessa forma, uma estratégia mista do jogador i é um evento de $\Delta(A_i)$ denotado como α_i . Sendo assim, $\alpha_i(a_i)$ é a probabilidade designada por α_i para a estratégia a_i .

Um perfil de estratégias mistas $\alpha = (\alpha_i)_{i \in N}$ induz a uma distribuição de probabilidade em A , logo, a probabilidade do perfil $a = (a_i)_{i \in N}$ é $\prod_{i \in N} \alpha_i(a_i)$ e o payoff para o jogador i do perfil $\alpha = (\alpha_i)_{i \in N}$ é de:

$$U_i(\sigma) = \sum_{a_i \in A_i} \left[\left(\prod_{i \in N} \alpha_i(a_i) \right) u_i(a) \right]$$

ou

$$U_i(\alpha) = \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i) u_i(a)$$

onde $\alpha(a) = \prod_{i \in N} \alpha_i(a_i)$.

O equilíbrio de Nash em estratégias mistas é modelado como um estado estacionário de um jogo, no qual a escolha dos participantes não são determinísticas, mas serão reguladas, a partir de agora, por regras probabilísticas. Nota-se que:

$$U_i(\alpha) = \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i) u_i(a_i, \alpha_{-i})$$

onde α_{-i} é a estratégia que designa a probabilidade para $a_i \in A_i$.

A noção de Equilíbrio de Nash em jogos de estratégias mistas segue a mesma ideia dos jogos com preferências ordinais. Um equilíbrio de Nash em estratégias mistas é um perfil de estratégias mistas α^* com a propriedade de que nenhum jogador i tem uma estratégia mista α_i tal que ele prefira a loteria, ou seja, a probabilidade sobre os resultados gerados pelo perfil de estratégia $(\alpha_i, \alpha_{-i}^*)$.

Em seguida, apresenta-se a definição formal do equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

Definição 3. *Um perfil de estratégias mistas α^* em um jogo estratégico é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas se, para cada jogador i e cada estratégia mista α_i , o payoff esperado para o jogador i de α^* é tão bom quanto o payoff esperado para o jogador i de $(\alpha_i, \alpha_{-i}^*)$ de acordo com a função de utilidade, na qual o valor esperado representa as preferências do jogador i em relação a loteria.*

$$U_i(\alpha^*) \geq U_i(\alpha_i, \alpha_{-i}^*)$$

Para cada estratégia mista α_i do jogador i , onde $U_i(\alpha)$ é o payoff esperado para o jogador i no perfil de estratégia α .

2.4 Forma Extensiva

Os jogos trabalhados até aqui, são apresentados na forma estratégica, onde cada jogador escolhe sua estratégia simultaneamente. Uma outra forma de jogo, que busca dar mais dinamismo ao estudo da teoria dos jogos, são os jogos na forma extensiva, nele, cada jogador escolhe sua estratégia em sequência. Ou seja, um jogador se move primeiro e, o outro, escolhe sua estratégia a partir da escolha do primeiro. Dessa forma, as decisões de escolhas entre os jogadores estão correlacionadas, sendo que eles podem modelar suas estratégias a partir das informações apresentadas inicialmente. Os jogos extensivos são importantes para demonstrar a interação entre os indivíduos (OSBORNE et al., 2004), principalmente em jogos com repetição ou informação incompleta.

Os jogos extensivos possuem uma estrutura básica conhecida como Árvore do Jogo, nela é representado todas as etapas do jogo. O jogo começa pela raiz, ou também conhecido como nó inicial, em seguida se tem os nós de decisão, onde cada jogador escolhe qual estratégia adotar, e, por fim, se têm as folhas ou nós terminais, onde se representa o payoff adquirido por cada jogador em virtude das decisões tomadas.

Em um jogo extensivo com informação perfeita, os jogadores têm preferências como em um jogo estratégico, porém neste caso há a necessidade de especificar a ordem em que os jogadores irão se mover e as ações que cada jogador tem em cada nó de decisão. De acordo com as preferências e as ações que os jogadores tomarão em cada nó, o jogo ganha um caminho diferente que leva a uma história terminal ou, simplesmente, a um payoff corresponde à suas ações.

Definição 4. *Um jogo na forma extensiva com informação perfeita deve conter os seguintes elementos.*

1. Jogadores
2. Histórias terminais
3. Função dos Jogadores
4. Preferência de cada jogador

Ao iniciar um jogo na forma extensiva, antes de qualquer sequência de eventos, os jogadores encolhem uma ação. Entretanto, o conjunto de ações não costumam serem apresentados explicitamente na descrição do jogo, ao invés disso, a descrição do jogo

especifica o conjunto de histórias terminais e a função de cada jogador, de forma que podemos deduzir os conjuntos de ações disponíveis (OSBORNE et al., 2004).

As histórias terminais de um jogo são um conjunto de sequências, mas nem todo conjunto de sequência é, necessariamente, um conjunto legítimo de histórias terminais. Esta é a única restrição que esse tipo de jogo, pois uma sequência, que é uma sub-história, não pode ser ela mesma uma história terminal. Assim, para exemplificar essa restrição, define-se sub-histórias de uma sequência finita de ações (a_1, a^2, \dots, a^k) para ser uma sequência vazia que não possui nenhuma ação, denotada como \emptyset no início do jogo, e todas as sequências da forma (a_1, a^2, \dots, a^m) , onde $1 \leq m \leq k$, desse modo, uma sequência inteira é uma sub-história de si mesma (OSBORNE et al., 2004). Uma sequência inteira é chamada de sub-história própria e uma sequência de ações que é uma sub-história de alguma história terminal é chamada apenas de história.

Assim, por definição, um jogo na forma extensiva tem o seguinte formato:

Definição 5. *Jogo extensivo com informação perfeita consiste em:*

- *Um conjunto de jogadores;*
- *Um conjunto de sequências com a propriedade de que nenhuma sequência é uma sub-história de qualquer outra sequência (história terminal);*
- *Uma função que atribui a cada jogador uma sequência que é uma sub-história de alguma história terminal (função do jogador);*
- *Para cada jogador, suas preferências que o levarão a um nó terminal.*

O conjunto de histórias terminais é o conjunto de todas as sequências de ações que podem ocorrer no jogo, o jogador atribuído pela função de jogador a qualquer história h é o jogador que realiza a ação a após h e pode-se representar as preferências dos jogadores pela função de recompensa. Em algumas situações, o resultado está associado a cada história terminal e as preferências dos jogadores são naturalmente definidas sobre esses resultados (OSBORNE et al., 2004). No entanto, qualquer preferência sobre o resultado pode ser traduzida como preferências sobre as histórias terminais. Em geral, os resultados são, por conveniência, identificados como histórias terminais e as preferências são definidas diretamente sobre essas histórias.

Assim, podemos definir que, se uma história não terminal h , a sequência (h, a) for uma história, então a é uma das ações disponíveis para o jogador que se move depois de h . Desse modo, o conjunto de todas as ações disponíveis para o jogador que se move depois de h é:

$$A(h) = \{a : (h, a)\}$$

Outro conceito importante para essa compreensão é a definição das estratégias. Nos jogos extensivos, a estratégia de um jogador especifica a ação que o jogador escolhe para cada história na sua vez de se mover. Assim, as estratégias em jogos extensivos segue a seguinte definição:

Definição 6. *Uma estratégia para o jogador i em um jogo extensivo com informação perfeita é uma função que atribui para cada história h , após o movimento do jogador i ($P(h)=i$, onde P é a função do jogador), uma ação $A(h)$.*

O perfil de estratégia determina a história terminal que ocorrerá, o perfil de estratégia é denotado por s e a função do jogador P . Inicialmente, o jogador $P(\emptyset)$ se move, sendo sua estratégia $s_{P(\emptyset)}$ e ele escolhe sua ação $s_{P(\emptyset)}(\emptyset)$. Denotaremos a ação como a^1 , caso a história a^1 não for terminal, o jogador $P(a^1)$ se moverá em seguida, sua estratégia será $s_{P(a^1)}$ e sua ação será $s_{P(a^1)}a^1$. Ao denotar a ação como a^2 e a história (a^1, a^2) não for terminal, a função do jogador especifica de quem é a vez de se mover, a história continuará até que uma história terminal seja construída, referimos a esta história terminal como o resultado de s e denota-se como $O(s)$. Vale ressaltar que os resultados do perfil de estratégias s dependem apenas dos planos de ação dos jogadores e não de suas estratégias completas.

Dessa forma, a medida que cada jogador escolhe uma estratégia em cada nó terminal, é formada uma história de movimentos que o levarão a seu respectivo payoff. Em outras palavras, o conjunto de nós terminais dependem do conjunto de ações que os jogadores escolherão até chegar nos nós terminais, ou seja, nos payoffs correspondentes.

Vale ressaltar que em jogos extensivos as estratégias adotadas possuem um valor fundamental, pois dependem da história traçada no decorrer do jogo. Como dito anteriormente, a partir de agora a ordem em que os jogadores se movem interferem em qual nó terminal a história levará, de modo que cada jogador escolherá a sua estratégia tendo em vista em qual ponto da história ele está, ou seja, a decisão do jogador dependerá das decisões adotados anteriormente pelos outros jogadores que levou a história até aquele ponto.

2.5 Equilíbrio de Nash na Forma Extensiva

Em relação ao equilíbrio de Nash em jogos extensivos, o conceito se mantém igual em comparação aos jogos estratégicos. Desse modo, o equilíbrio de Nash modela um estado estacionário onde os jogadores não têm incentivos para mudar seu comportamento, assim, em um jogo de informação perfeita, cada jogador conhece o comportamento dos seus adversários e deve-se procurar padrões nas preferências de cada jogador que os levem ao equilíbrio. Logo, o equilíbrio de Nash em jogos extensi-

vos com informação perfeita se compara com os jogos estratégicos e segue a seguinte definição:

Definição 7. *O conjunto de estratégia s^* em um jogo extensivo com informação perfeita é um equilíbrio de Nash se, para cada jogador i e cada estratégia r_i do jogador i , leva a um nó terminal $O(s^*)$ gerado por s^* que é pelo menos tão bom, de acordo com as preferências do jogador i , quanto o nó terminal $O(r_i, s_{-i}^*)$ gerado pelo perfil de estratégia (r_i, s_{-i}^*) . Sendo que o jogador i escolhe r_i enquanto os outros jogadores j escolhem s_j^* , dessa forma, para cada jogador i se tem:*

$$u_i(O(s^*)) \geq u_i(O(r_i, s_{-i}^*))$$

Para cada jogador i , onde u_i é uma função payoff que representa as preferências do jogador i e O é a função de saída dos nós terminais.

Vale ressaltar que, a partir dessa definição, a estratégia de cada jogador deve ser ótima em relação a história e não apenas no início do jogo.

3 Método de Lyapunov

3.1 Teorema de Lyapunov e Estabilidade de Sistemas não Lineares

Nesta seção apresenta-se a definição formal de estabilidade para sistemas não lineares, em seguida definiremos a função de Lyapunov e sua utilização em sistemas autônomos para saber se o sistema é estável.

Em primeiro lugar, definiremos um sistema autônomo geral com n dimensões:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \dots \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \quad (3.1)$$

Assume-se que todos os f_n são funções. Assim, um ponto $a = (a_1, \dots, a_n)$ é chamado de equilíbrio de (1) se

$$f_1(a_1, \dots, a_n) = 0, \dots, f_n(a_1, \dots, a_n) = 0$$

Nota-se que $x_n = x_n(t) = a_n$ é a solução do sistema se x_1, \dots, x_n forem variáveis estáveis para o sistema e (1) for satisfeito, então a é um estado de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio a é estável se todas as curvas de solução permanecem próximas. O ponto a é localmente assintoticamente estável se, para cada curva de solução que inicia-se próximo a a não esteja somente próximo de a , mas converge para a . Antes de prosseguir, apresenta-se os conceitos de estabilidade e de pontos de equilíbrio local assintoticamente estável.

Definição 8. Um estado de equilíbrio $a = (a_1, \dots, a_n)$ para o sistema (1) é estável se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, de modo que cada solução $x(t)$ de (1) com $\|x(t_0) - a\| < \delta$ para algum t_0 ser definido para todo $t > t_0$ e satisfaça a seguinte inequação:

$$\|x(t_0) - a\| < \varepsilon$$

para todo $t > t_0$. Se a é estável e, ainda, existe um $\delta > 0$, tal que:

$$\|x(t_0 - a)\| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - a\| = 0$$

Então, a é chamado de localmente assintoticamente estável.

Após essa definição, apresenta-se a função de Lyapunov. Seja $a = (a_1, \dots, a_n)$ um ponto de equilíbrio para o sistema (1) e seja $V(x)$ uma função definida de C^1 em uma vizinhança aberta Ω de a . Denomina-se $V(x)$ como positivamente definida em Ω se, $V(a) = 0$ e $V(x) > 0$ para todo x em Ω , $x \neq a$.

Assim, $V(x)$ é positivamente definido em Ω se tiver um único mínimo em a , com valor mínimo igual a 0. Seja $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ a solução para o sistema (1), a derivada de $V(x(t))$ por t é:

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_i} f_i(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)) \quad (3.2)$$

Se V for positivo e $\dot{V}(x) < 0$ para todo x em Ω , então $V(x)$ é denominada como função de Lyapunov para o sistema (1). Se $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \neq a$ em Ω , então denomina-se que $V(x)$ é um função de Lyapunov forte (ou estrita) para o sistema.

Para além disso, temos que apresentar dois teoremas. O primeiro, seja $a = (a_1, \dots, a_n)$ um equilíbrio para o sistema (1), se houver uma função de Lyapunov para o sistema em uma vizinhança aberta Ω de a , então a é um ponto de equilíbrio estável. Se houver uma função de Lyapunov estrita para o sistema, então a é localmente assintoticamente estável.

O segundo, seja $a = (a_1, \dots, a_n)$ um equilíbrio para o sistema (1), assumimos que exista uma função de Lyapunov estrita $V(x)$ para (1) que é definida para todo \mathbb{R}^n tal que $V(x) \rightarrow \infty$ como $\|x\| \rightarrow \infty$, então a é globalmente assintoticamente estável.

As provas de ambos os teoremas serão apresetadas a seguir, sendo as provas obtidas segundo o livro do (SYDSÆTER et al., 2008).

Teorema 1. Ao escolher $\epsilon > 0$ tão pequeno que $\bar{B} = \{x : \|x - a\| \leq \epsilon\} \subseteq \Omega$ e seja $V(x)$ uma função de Lyapunov. A fronteira $A = \{x : \|x - a\| = \epsilon\}$ de \bar{B} é compacta desde que V seja contínua, V tem um valor mínimo α sobre A , porque $V(x)$ é positivamente definida, $\alpha > 0$. Pela continuidade de V , podemos escolher um $\delta > 0$ tal que $V(x) < \alpha$ para todo x em $C = \{x : \|x - a\| < \delta\}$. Então $\delta \leq \epsilon$ e $C \subseteq \bar{B}$. Pela definição da função de Lyapunov, também, V não pode aumentar ao longo de qualquer curva de solução. Então, se uma curva de solução para (1) começar em um ponto x_0 em C , então essa curva de solução nunca encontrará A . Por isso, qualquer solução começando em C nunca sairá em \bar{B} , tal que a é estável. Supondo que V é uma função forte de Lyapunov, nós queremos provar que se $x(t)$ é uma solução começando em um ponto $x(0) = x_0$ em C , então $x(t) \rightarrow a$, como $t \rightarrow \infty$. Evidentemente, $V(x(t))$ converge para algum limite $V^* \geq 0$. Pelo teorema do valor médio, para cada $k = 1, 2, \dots$ existe um t_k em $(k, k+1)$ tal que $\dot{V}(x(t_k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$. Pela capacidade de \bar{B} , uma subsequência $\{x(t_{k_j})\}$ converge para algum ponto x^* em \bar{B} . Resolvendo o limite da última igualdade, temos $\dot{V}(x^*) = V^* - V^* = 0$, mas $x^* = a$ é o único ponto onde $\dot{V} = 0$. Portanto, $0 = V(a) = V(x^*) = \lim_j V(x(t_{k_j})) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = V^*$. Para uma contradição, assume-se que $x(t)$ não converge para a , então para algum ϵ onde existe uma sequência $\{t^k\}$, tal que $t^k \rightarrow \infty$ e $\|x(t^k) - a\| \geq \epsilon$ para todo k . Pela capacidade de \bar{B} , a sequência $\{t^k\}$ tem

uma subsequência $\{s_j\} = \{t^{k_j}\}$ tal que $\{x(s_j)\}$ converge para um ponto x_* em \bar{B} . Então, $V(x_*) = \lim_{j \rightarrow \infty} V(x(s_j)) = 0$, então $x_* = a$, contrariando $\|x(s_j) - a\| \geq \epsilon$ para todo j .

Teorema 2. Considere uma solução com $x(0) = x_0$ e seja $\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq V(x_0)\}$, o conjunto \bar{B} é limitado, pois $V(x) > V(x_0)$ quando $\|x\|$ é suficientemente grande e \bar{B} é fechado porque V é contínuo. Então, \bar{B} é compacto.

3.2 McKelvey

O problema de encontrar equilíbrios de Nash pode ser reformulado como um problema de encontrar o mínimo global de uma função de politopos, onde o mínimo global da função corresponde ao equilíbrio de Nash do jogo. Dessa forma, ao colocar pontos iniciais pertos o suficiente a um equilíbrio de Nash isolado, pode-se garantir que o método encontre os equilíbrios para qualquer nível de precisão desejado (MCKELVEY; MCLENNAN, 1996).

Ao transformar o problema de encontrar o equilíbrio de Nash como um problema de minimização, se tem o que denomina-se como método de Lyapunov. Desse modo, construiremos a função de Lyapunov para encontrar equilíbrios de Nash para jogos finitos na forma estratégica. Esta função é comumente utilizada para encontrar o equilíbrio, desde que se converta a um problema de minimização. (MCKELVEY, 1998).

Seguindo a definição de (MCKELVEY, 1998), considera-se um jogo na forma estratégica com um número finito de jogadores, onde $N = \{1, \dots, n\}$ é o conjunto de jogadores e, para cada jogador $i \in N$, o conjunto de estratégias é $A_i = \{a_{i1}, \dots, a_{ij_i}\}$, onde J_i é a estratégia pura. Para cada jogador $i \in N$, se tem a função payoff $U : A \mapsto \mathbb{R}$, onde $A = \prod_{i \in N} A_i$.

Seja Δ_i o conjunto de probabilidade de A_i e os elementos de Δ_i são $\alpha_i : A_i \mapsto \mathbb{R}$, onde $\sum_{a_{ij} \in A_i} \alpha_i(a_{ij}) = 1$ e $\alpha_i(a_{ij}) \geq 0$ para todo $a_{ij} \in A_i$. Assim, podemos rescrever como $\Delta = \prod_{i \in N} \Delta_i$ e $J = \sum_{i \in N} J_i$, então $\Delta \subseteq \mathbb{R}^J$. Denotaremos os pontos em Δ como $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, onde $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ij_i}) \in \Delta_i$. Utiliza-se a_{ij} para denotar a estratégia $\alpha \in \Delta_i$ com $\alpha_{ij} = 1$ e $\alpha = (\alpha_i, \alpha_{-i})$. Assim, (a_{ij}, α_{-i}) representa a estratégia i onde adota-se a estratégia pura a_{ij} e os outros jogadores adotam α .

A função payoff é estendida para o domínio de Δ por $M_i(p) = \sum_{a \in A} \alpha(a) U_i(a)$, onde $\alpha(a) = \prod_{i \in N} \alpha_i(a_i)$. O vetor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Delta$ é um equilíbrio de Nash se, para todo $i \in N$ e para todo $\alpha_i \in \Delta_i$, ele for $U_i(\alpha_i, \alpha_{-i}) \leq U_i(\alpha)$.

Assim, podemos definir a função $v : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ como:

$$v(\alpha) = \sum_{i \in N} \sum_{s_{ij} \in S_i} \{\max[U_i(a_{ij}, \alpha_{-i}) - U_i(\alpha), 0]\}^2 \quad (3.3)$$

Para todo $i \in N$ e $1 \leq j \leq J_i$, define-se:

$$g_{ij}(\alpha) = \{\max[U_i(a_{ij}, \alpha_{-i}) - U_i(\alpha), 0]\}^2 \quad (3.4)$$

Assim, podemos rescrever como:

$$v(\alpha) = \sum_{i \in N} \sum_{1 \leq m_i} g_{ij}(\alpha) \quad (3.5)$$

Nota-se que a função anterior é contínua e diferenciável em qualquer ponto onde satisfaz que $v(\alpha) \geq 0$. Além disso, α é um equilíbrio de Nash se, e somente se, ele for um mínimo global de v , ou seja, $v(\alpha) = 0$.

Desse modo, minimiza-se a função $v(p)$ sujeita à restrição $\sum_j p_{ij} = 1$ e $p_{ij} \geq 0$ para todo i, j . Pode-se utilizar métodos de otimização restrita para encontrar o equilíbrio, entretanto, aqui, apresentaremos um método de impor as restrições como uma função de penalidade, o que produz a seguinte equação:

$$w(\alpha) = v(\alpha) + \sum_{ij} \{\min[\alpha_{ij}, 0]\}^2 + \sum_{i \in N} \left(1 - \sum_j \alpha_{ij}\right)^2 \quad (3.6)$$

A função anterior também é diferenciável, definida para todo α e α^* é um equilíbrio de Nash se, e somente se, $w(\alpha) = 0$. Nota-se que qualquer método que encontre o mínimo irrestrito para um função que pertença aos \mathbb{R} pode ser aplicado para encontrar o mínimo de w . Entretanto, não foi estabelecido que todos os mínimos da função v ou w são mínimos globais, desse modo, pode haver como resultado mínimos locais que não são necessariamente mínimos globais, ou seja, não são equilíbrios de Nash. Assim, há a necessidade de verificar o valor da função após a convergência para concluir se o ponto encontrado é de fato um equilíbrio de Nash.

Ao transformar o problema de encontrar equilíbrios de Nash em um problema de minimização, se tem o que denominamos como abordagem de Lyapunov (JUDD, 1998). Esse método é importante pois converge para qualquer equilíbrio isolado se o ponto inicial for perto o suficiente, essa abordagem pode encontrar todos os equilíbrios desde que exista um número finito de equilíbrios e sua única desvantagem é, como mencionado anteriormente, encontrar mínimos locais que não serão necessariamente equilíbrios de Nash.

Teorema 3. *Seja T o espaço tangente de Δ , então $T \subseteq \prod_{i \in N} \mathbb{R}^{J_i} = \mathbb{R}^J$, e qualquer $y \in T$ na forma $y = (y_1, \dots, y_n)$, onde $y_i \in \mathbb{R}^{J_i}$ satisfaça $\sum_{j=i}^{J_i} y_{ij} = 0$ para todo $i \in N$. Defina-se X para ser uma matriz $J \times n$, na qual a coluna j é um vetor $x_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn}) \in \mathbb{R}^J$, com $x_{ji} \in \mathbb{R}^{J_i}$ satisfazendo $x_{ji} = (0, \dots, 0)$ se $i \neq j$ e $x_{ji} = (1, \dots, 1)$ se $i = j$. Então T é um subespaço*

dimensional $J - n$ de \mathbb{R}^J definido por $T = \{y \in \mathbb{R}^J : X'y = 0\}$. Seja $P = (I - X(X'X)^{-1}X')$, onde I é a matriz identidade $J \times J$. Portanto, P é positivamente definido, operação de projeção idempotente onde \mathbb{R}^J em T . Para qualquer $y \in \mathbb{R}^J$, $Py \in T$ é a projeção de y em T , para qualquer função $f : \mathbb{R}^J \mapsto \mathbb{R}$, escrita como $\nabla f(p) = \frac{\partial f(p)}{\partial p}$.

Baseado em v , define-se um sistema dinâmico como:

$$\dot{p} = -P\nabla v(p) \quad (3.7)$$

Portanto, \dot{p} é a projeção do gradiente negativo de v em p no espaço tangente T

Teorema 4. A função $v : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ definida em (3) é uma função de Lyapunov para (7), na qual os zeros coincide com os equilíbrios de Nash em jogos finitos $U : \Delta \mapsto \mathbb{R}$.

As provas do teorema estão no (MCKELVEY, 1998).

3.3 Análise dos Equilíbrios de Nash em Estratégias Mistas

Nesta sessão apresenta-se o método proposto por (OSBORNE et al., 2004) para encontrar os equilíbrios em estratégias vistas e verificar se, de fato, os valores são equilíbrios de Nash. Para encontrar o equilíbrio de Nash em estratégias mistas, deve-se construir a função de melhor resposta como feito na sessão anterior. Caso o jogo tenha apenas dois jogadores, o método apresentado aqui pode ser facilmente aplicado, porém, ao introduzir mais jogadores ou mais estratégias, torna-se mais difícil à aplicação.

Antes de analisar os equilíbrios encontrados, deve-se observar algumas proposições. Um perfil de estratégias mistas α^* em um jogo que cada jogador possui um número finito de ações será um equilíbrio de Nash se, e somente se, para cada jogador i (OSBORNE et al., 2004):

- O retorno esperado, dado α_{-i}^* , para cada ação na qual α_i^* atribui probabilidade positiva é a mesma;
- O retorno esperado de α_{-i}^* para cada ação na qual α_i^* atribui probabilidade 0 é, no máximo, o retorno esperado para qualquer ação que α_i^* atribui probabilidade positiva;
- O retorno esperado de cada jogador em um equilíbrio é seu retorno esperado para qualquer ação que o mesmo jogador usa com probabilidade positiva.

A fim de facilitar a visualização do processo, apresenta-se o mesmo jogo da sessão anterior com pequenas alterações:

Figura 1 – Jogo Estratégico com 2 jogadores

		Jogador 2	
		$L(q)$	$R(1 - q)$
Jogador 1	$T(p)$	u_{11}, v_{11}	u_{12}, v_{12}
	$B(1 - p)$	u_{21}, v_{21}	u_{22}, v_{22}

Em primeiro lugar, deve-se verificar se algum dos quatro pares de ações é um equilíbrio em estratégias puras, dessa forma, a primeira proposição é satisfeita, pois existe apenas uma ação em cada subconjunto.

Em seguida, fixa-se a estratégia do jogador 2 em $\{L\}$ e considera-se o subconjunto $\{T,B\}$ para o jogador 1. Desse modo, a segunda proposição é satisfeita para o jogador 1, na qual não tem ações que atribuí probabilidade 0, e a primeira condição é automaticamente satisfeita para o jogador 2 ao atribuir probabilidade positiva a apenas uma ação. Este processo deve ser repetido para os 3 outros subconjuntos.

Para que haja o equilíbrio em estratégias mistas, deve-se encontrar as probabilidades p e q dos subconjuntos $\{T,B\}$ e $\{L,R\}$ para o jogador 1 e 2, respectivamente. Sendo todas as proposições respeitadas, assim temos as seguintes igualdades:

$$qu_{11} + (1 - q)u_{12} = qu_{21} + (1 - q)u_{22}$$

e

$$pv_{11} + (1 - p)v_{21} = pv_{12} + (1 - p)v_{22}$$

Logo, ao resolver essas equações e encontrar os valores de p e q , pode-se verificar os equilíbrios de Nash em estratégias mistas.

4 Jogos na Forma Estratégica

4.1 Jogos 2x2

Neste capítulo, utiliza-se o método analítico explicado acima para encontrar os equilíbrios de Nash em estratégias mistas e, logo após, há a demonstração do cálculo feito a partir do método numérico para encontrar os possíveis equilíbrios de Nash.

O jogo utilizado para a implementação do método é uma versão modificada da Batalha dos Sexos (BsD), nele existem dois jogadores que possuem duas estratégias. Os jogadores podem escolher entre ir ao concerto ou ao restaurante, sendo que, o jogador 1 prefere o concerto e, o jogador 2, o restaurante. Entretanto, apesar deles terem preferências distintas, ambos os jogadores preferem aproveitar o passeio juntos, ou seja, eles estarão melhores ao escolher uma estratégia em que os dois possam aproveitar juntos.

Dessa forma, apresenta-se os payoffs para cada estratégia e para cada jogador na figura a seguir:

Figura 2 – Jogo Estratégico Batalha dos Sexos

		Jogador 2	
		<i>Concerto</i>	<i>Restaurante</i>
Jogador 1	<i>Concerto</i>	2,1	0,0
	<i>Restaurante</i>	0,0	1,2

Ao analisar o jogo pelas estratégias puras, pode-se notar facilmente que há apenas dois Equilíbrios de Nash. Porém, ao analisar o jogo pelas estratégias mistas, pode-se notar três equilíbrios de Nash. A fim de facilitar a visualização, nota-se o seguinte gráfico.

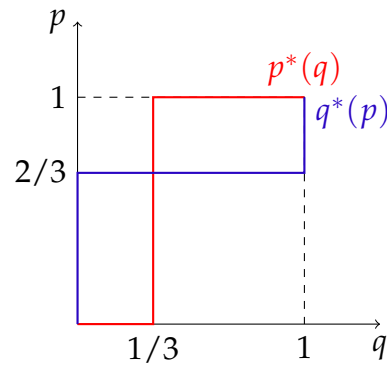


Figura 3 – Melhores Respostas Bds

Ao analisar o gráfico, nota-se três equilíbrios em estratégias mistas na forma (p_{11}, p_{21}) , estes são $EN = \{(0, 0), (1, 1), (2/3, 1/3)\}$. Para obter a solução pelo método numérico apresentado na seção anterior, deve-se contruir a função $v(\sigma)$, onde $\sigma = ((p_{11}, p_{12}), (p_{21}, p_{22}))$. Assim, a função melhor resposta terá o formato $V(p_{11}, p_{21}) = v((p_{11}, p_{12}), (p_{21}, p_{22}))$. Dessa forma, utiliza-se funções auxiliares para a obtenção do resultado final, como a seguir.

$$\begin{aligned} U_1(\sigma) &= 2p_{11}p_{21} + p_{12}p_{22} \\ U_2(\sigma) &= p_{11}p_{21} + 2p_{12}p_{22} \\ U_1(1, 0, p_{21}, p_{22}) &= 2p_{21} \\ U_1(0, 1, p_{21}, p_{22}) &= p_{22} \\ U_2(p_{11}, p_{12}, 1, 0) &= p_{11} \\ U_2(p_{11}, p_{12}, 0, 1) &= 2p_{12} \end{aligned}$$

Assim, ao introduzir o método de Lyapunov, se tem a seguinte função de maximização.

$$\begin{aligned} V(p_{11}, p_{21}) &= \max[2p_{21} - 2p_{11}p_{21} - p_{12}p_{22}, 0]^2 + \max[p_{22} - 2p_{11}p_{21} - p_{12}p_{22}, 0]^2 + \\ &\quad \max[p_{11} - p_{11}p_{21} - 2p_{12}p_{22}, 0]^2 + \max[2p_{12} - p_{11}p_{21} - 2p_{12}p_{22}, 0]^2 \end{aligned}$$

Para alcançar resultados mais preciso, a utilização de linguagens de programação para o cálculo é essencial. Neste trabalho, a linguagem Python foi a escolhida e, para modelar a equação nesse software, utiliza-se a livreria NumPy e a sublivreria optimize do SciPy. Da sublivreria, importa-se o método minimize que permite a otimização de equações com multivariáveis. Ao aplicar a equação no Python se tem:

```
1 import numpy as np
```

```

2 from scipy.optimize import minimize
3
4 def V(x):
5     p11=x[0]
6     p12=x[1]
7     p21=x[2]
8     p22=x[3]
9     s = 0.0
10    s += (max(0.0, 2*p21 -2*p11*p21 -1*p12*p22))**2
11    s += (max(0.0, p22 -2*p11*p21 -1*p12*p22))**2
12    s += (max(0.0, p11 -p11*p21 -2*p12*p22))**2
13    s += (max(0.0, 2*p12 -p11*p21 -2*p12*p22))**2
14    s += (min(0.0, p11))**2
15    s += (min(0.0, p12))**2
16    s += (min(0.0, p21))**2
17    s += (min(0.0, p22))**2
18    s += (1 -p11 -p12)**2
19    s += (1 -p21- p22)**2
20
21    return s
22
23 x1 =np.array([1, .4, 1, .4])
24 res1 = minimize(V, x1, method='L-BFGS-B')
25 print(res1.x)
26 print(res1.fun)

```

Nota-se que não há a necessidade de aplicar restrições externas no Python, pois as restrições já estão embutidas na fórmula (3). No caso dos pontos iniciais adotados, são adotados quatro ponto distintos e os resultados obtidos são apresentados a seguir:

Tabela 1 – Tabela de Resultados I

Ponto Inicial	Resultado	V(p11,p21)
(0.1,0.4,0.1,0.4)	(0.666,0.333,0.333,0.666)	1.05143e-09
(0.7,0.1,0.5,0.1)	(0.666,0.333,0.333,0.666)	3.25310e-11
(0.2,0.7,0.2,0.7)	(1.16e-06,1.00,-2.98e-06,1.00)	1.64647e-11
(1.0,0.0,1.0,0.0)	(1.000,0.000,1.000,0.000)	0.00

Ao utilizar o método adotado, pode-se notar que 2 dos 3 equilíbrios de Nash foram encontrados com precisão, porém, o terceiro pode não ter sido encontrado devido a função $V(\cdot)$ não ser diferenciável em alguns pontos e o método utilizar de gradientes para a otimização. Dessa forma, não foi possível chegar exatamente ao ponto

de equilíbrio (0,1,0,1), mas o algoritmo chegou perto ao encontrar como resultado (1.16e-06,1.00,-2.98e-06,1.00).

4.2 Jogos 3x3

Quanto mais estratégias o jogador possui, mais difícil se torna o cálculo do equilíbrio de Nash em estratégias mistas. No entanto, se torna complicado até a representação gráfica do equilíbrio, já que necessitaria de um gráfico de três dimensões. Nesta sessão, apresenta-se o mesmo método discutido até aqui, só que com um número de estratégias maior do que o anterior.

A partir deste jogo, ao invés de apresentarmos todos os cálculos, montaremos uma função genérica que será aplicada em todos os jogos. Os cálculos completos podem ser encontrados no Apêndice A deste trabalho e a formulação em Python no Apêndice B.

$$U_1(\sigma) = p_1^T \Pi^1 p_2^T$$

e

$$U_2(\sigma) = p_2 \Pi^2 p_1$$

Onde Π é a matriz de payoff de cada jogador. Assim, temos:

$$U_1(e_1, \sigma_{-1}) = e_1^T \Pi^1 p_2^T \quad U_1(e_2, \sigma_{-1}) = e_2^T \Pi^1 p_2^T \quad U_1(e_3, \sigma_{-1}) = e_3^T \Pi^1 p_2^T$$

$$U_2(e_1, \sigma_{-2}) = e_1 \Pi^2 p_1 \quad U_2(e_2, \sigma_{-2}) = e_2 \Pi^2 p_1 \quad U_2(e_3, \sigma_{-2}) = e_3 \Pi^2 p_1$$

O jogo aqui apresentado foi retirado do (FUDENBERG DREW E TIROLE, 1991). O jogo não possui estratégias estritamente dominadas, dessa forma, torna-se impossível excluir alguma estratégia a fim de facilitar a busca pelo equilíbrio de Nash.

Figura 4 – Jogo 3×3

		II		
		p_{21}	p_{22}	p_{23}
I	p_{11}	1, 1	5, 5	3, 0
	p_{12}	1, 7	6, 4	1, 1
	p_{13}	3, 0	2, 1	2, 2

Nota-se que o jogo acima não possui nenhum equilíbrio em estratégias puras, aplicaremos o método a fim de observar se o jogo possui equilíbrios em estratégias mistas e quais são eles. Ao aplicar o método, o algoritmo gera os seguintes resultados, sendo que para a obtenção deles, há a utilização de diversos pontos iniciais.

Tabela 2 – Tabela de Resultados II

Ponto Inicial	Resultado	V(.)
(0.0,0.3,0.7,0.5,0.3,0.1)	(0.00, 0.25, 0.75, 0.54, 0.33, 0.12)	0.00
(0.0,0.3,0.7,0.6,0.3,0.0)	(0.01, 0.26, 0.73, 0.65, 0.35, 0.00)	0.00
(0.1,0.2,0.7,0.5,0.3,0.1)	(0.00, 0.25, 0.75, 0.54, 0.36, 0.11)	0.00
(0.1,0.2,0.7,0.5,0.2,0.1)	(0.00, 0.25, 0.75, 0.57, 0.29, 0.14)	0.00

O equilíbrio de Nash desse jogo em estratégias mistas são $EN = \left\{ \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) \right\}$ e $\left\{ \left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{7}{13}, \frac{4}{13}, \frac{2}{13}\right) \right\}$. Desse modo, nota-se na tabela de resultados anterior que o algoritmo conseguiu convergir aos pontos de equilíbrio.

Como o jogo anterior não possui nenhum equilíbrio de Nash em estratégias puras, aplicaremos o mesmo método em um jogo 3×3 que possui equilíbrio de Nash em estratégias puras a fim de observar os possíveis resultados nas estratégias mistas. Vale ressaltar que o jogo apresentado a seguir não possui nenhuma estratégia estritamente dominada, o que não permite a exclusão de nenhuma estratégia para a resolução problema, assim o método computacional torna-se a melhor alternativa para encontrar o equilíbrio. Além disso, poderemos notar se o algoritmo funciona com payoffs negativos.

Figura 5 – Segundo Jogos 3×3

		II		
		L	S	R
I	U	1, -2	-2, 1	0, 0
	M	-2, 1	1, -2	0, 0
	D	0, 0	0, 0	1, 1

Nota-se, facilmente, que o equilíbrio de Nash em estratégias puras é $EN = \{(D, R)\}$. Assim, cria-se a função utilidade para calcular o equilíbrio de Nash em estratégias mistas:

$$U_1(\sigma) = p_1^T \Pi^1 p_2^T$$

$$U_2(\sigma) = p_2 \Pi^2 p_1$$

Onde Π é a matriz de payoff de cada jogador, $p_{11} = U, p_{12} = M, p_{13} = D, p_{21} = L, p_{22} = S$ e $p_{33} = R$. Assim, temos:

$$U_1(e_1, \sigma_{-1}) = e_1^T \Pi^1 p_2^T \quad U_1(e_2, \sigma_{-1}) = e_2^T \Pi^1 p_2^T \quad U_1(e_3, \sigma_{-1}) = e_3^T \Pi^1 p_2^T$$

$$U_2(e_1, \sigma_{-2}) = e_1 \Pi^2 p_1 \quad U_2(e_2, \sigma_{-2}) = e_2 \Pi^2 p_1 \quad U_2(e_3, \sigma_{-2}) = e_3 \Pi^2 p_1$$

Ao aplicar o método em Python, temos os seguintes resultados apresentados na tabela a seguir:

Tabela 3 – Tabela de Resultados III

Ponto Inicial	Resultado	V(.)
(0.1,0.1,0.8,0.1,0.1,0.8)	(0. 0. 1. 0. 0. 1.)	0.00
(0.0,0.1,0.9,0.0,0.1,0.9)	(0. 0. 1. 0. 0. 1.)	0.00
(0.0,0.0,0.9,0.0,0.0,0.9)	(0. 0. 1. 0. 0. 1.)	0.00
(0.0,0.1,0.8,0.0,0.1,0.8)	(0. 0. 1. 0. 0. 1.)	0.00
(0.0,0.0,0.8,0.0,0.0,0.9)	(0. 0. 1. 0. 0. 1.)	0.00
(0.0,0.0,0.8,0.0,0.0,0.8)	(0. 0. 1. 0. 0. 1.)	0.00

O único equilíbrio de Nash desse jogo é $EN = \{(0, 0, 1), (0, 0, 1)\}$. Sendo assim, o algoritmo alcançou os valores correspondentes ao equilíbrio, além de ser capaz de convergir para o equilíbrio mesmo com payoffs negativos.

4.3 Jogo 4x4

Como dito anteriormente, quanto mais estratégias o jogador tiver, mais complicado fica o cálculo do equilíbrio de Nash em estratégias mistas. Para exemplificar esse problema, apresenta-se a seguir um jogo com 4 estratégias, onde não há nenhuma estratégia dominada que possibilite sua exclusão, o que torna o método computacional mais viável para a busca do equilíbrio.

Figura 6 – Jogo 4×4

		II			
		p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}
I	p_{11}	1, 1	4, 2	3, 2	0, 0
	p_{12}	0, 3	2, 2	4, 1	0, 10
	p_{13}	0, 0	5, 1	3, 3	10, 4
	p_{14}	2, 1	5, 3	3, 1	4, 4

Da mesma forma que a sessão anterior, calculá-se a função utilizade.

$$U_1(\sigma) = p_1^T \Pi^1 p_2^T$$

e

$$U_2(\sigma) = p_2 \Pi^2 p_1$$

Onde Π é a matriz de payoff de cada jogador. Assim, temos:

$$U_i(e_j, \sigma_{-1}) = e_j^T \Pi^i p_i^T$$

Onde $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3, 4$. Ao introduzir o modelo no Python, se tem os seguintes resultados apresentados na tabela a seguir:

Tabela 4 – Tabela de Resultados IV

Ponto Inicial	Resultado	V(.)
(.0,.0,.9,.0,.0,.0,.0,.9)	(0.00,0.00,1.00,0.00,0.00,0.00,0.00,1.00)	0.00
(.0,.0,.9,.1,.0,.1,.0,.9)	(0.00,0.00,1.00,0.00,0.00,0.00,0.00,1.00)	0.00
(.0,.0,.9,.1,.0,.0,.1,.9)	(0.00,0.00,1.00,0.00,0.00,0.00,0.00,1.00)	0.00
(.0,.0,.8,.1,.0,.0,.0,.9)	(0.00,0.00,1.00,0.00,0.00,0.00,0.00,1.00)	0.00

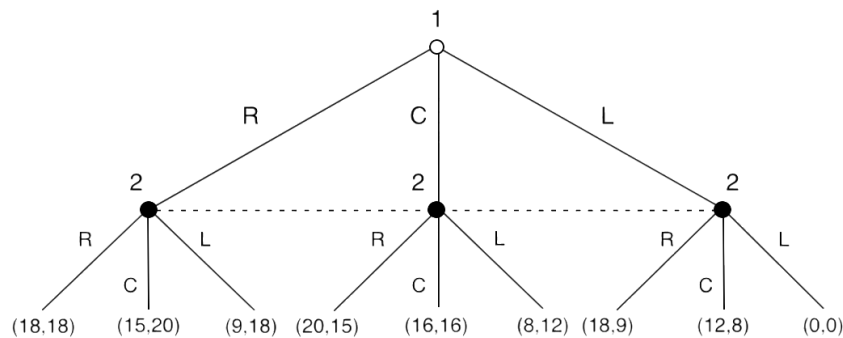
O único equilíbrio de Nash desse jogo é $EN = \{(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1)\}$. Nota-se que ao testar quatro pontos iniciais distintos o algoritmo convergiu extamento para o equilíbrio de Nash.

5 Jogos na Forma Extensiva

5.1 Jogos extensivos com 2 jogadores e 3 estratégias

A seguir, apresenta-se um jogo retirado do (FUDENBERG DREW E TIROLE, 1991) na forma extensiva onde o jogador 1 possui as estratégias representadas por letras maiúsculas e o jogador 2 com letras minúsculas. Assim, o perfil de estratégias para o jogador 1 é $s_1 = \{R, C, L\}$ e o do jogador 2 é $s_2 = \{r, c, l\}$, nota-se que o jogador 1 se move primeiro e pode escolher entre as três estratégias descritas em seu perfil e, em seguida, move-se o jogador 2 que escolherá sua estratégia dependendo da estratégia adotada pelo jogador 1.

Figura 7 – Jogo Extensivo I



Um dos métodos mais comuns utilizados para encontrar o equilíbrio de Nash neste tipo de jogo é o de regressão, onde, em primeiro lugar, se analisa as possíveis escolhas do jogador 2 e, logo após descobrir a melhor estratégia adotada pelo jogador 2, analisa-se a estratégia tomada pelo jogador 1.

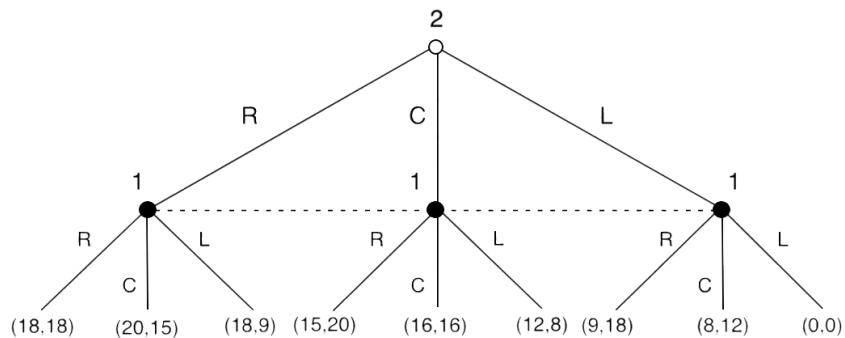
Ao utilizar o método de regressão, pode-se notar que caso o jogador 1 escolha R, o jogador 2 escolherá c; caso o jogador 1 escolha C, o jogador 2 escolherá c e, finalmente, caso o jogador 1 escolha L, o jogador 2 escolherá r. Sabendo qual será a estratégia adotada pelo jogador 2 em cada caso, basta analisar em qual das três estratégias o jogador 1 estará melhor, lembrando que em um jogo de informação perfeita todos os jogadores sabem das preferências dos outros jogadores, assim, tendo em vista as melhores estratégias do jogador 2, o jogador 1 escolherá L, o que resulta no seu melhor payoff. Desse modo, ao utilizar a regressão, o equilíbrio de Nash desse jogo é $EN = \{L(c, c, r)\}$.

Como se trata de um jogo com informação perfeita, pode-se trocar a ordem em que os jogadores tomam as decisões estratégicas sem alterar o resultado do jogo. Esse

jogo, em especial, é um caso de jogo de Stackelberg (FUDENBERG DREW E TIROLE, 1991), pois o jogador 1 se move primeiro e, só a partir daí, o segundo jogador se move. Entretanto, o jogador 1 se move já sabendo qual será o movimento do jogador 2, mesmo que o jogador 2 não tenha se movido ainda, logo, o jogo possui informação perfeita.

Na figura a seguir, inverte-se o nó de decisão dos dois jogadores para mostrar que o jogo resultará no mesmo equilíbrio, encontrado a partir da regressão.

Figura 8 – Jogo Extensivo I Após Inversão



Agora, nota-se que o equilíbrio após a inversão é $EN = \{l(C, C, R)\}$.

Para calcular o equilíbrio de Nash em estratégias mistas, por facilidade do método utilizado neste trabalho, transforma-se o jogo da forma extensiva para a forma estratégica. Desse modo, o jogo anterior se apresenta como:

Figura 9 – Jogo 3×3 do extensivo para o estratégico

		II		
		<i>r</i>	<i>c</i>	<i>l</i>
R	I	18, 18	15, 20	9, 18
C	C	20, 15	16, 16	8, 12
L	L	18, 9	12, 8	0, 0

Ao tratar o jogo na forma estratégica, nota-se facilmente o equilíbrio de Nash em estratégias puras é $EN = \{(C, c)\}$. A diferença entre os dois equilíbrios encontrados se dá, pois, o jogo na forma estratégica independe de qual jogador se move primeiro, dessa forma, não faz diferença qual se moverá primeiro porque sempre resultará no mesmo equilíbrio estático. No caso da forma extensiva, o jogador 2 escolhe sua estratégia em detrimento da escolha do jogador 1, o que leva a um equilíbrio diferente.

Pode-se notar que jogo da figura 10, a estratégia C domina estritamente a estratégia L, para o jogador I. Para o jogador 2, a estratégia l é estritamente dominada pela estratégia c. Assim, aplicaremos o método primeiramente para o jogo com três estratégias e, em seguida, excluirmos as estratégias estritamente dominadas e recalcularemos os equilíbrios a fim de observar os possíveis resultados.

$$U_1(\sigma) = p_1^T \Pi^1 p_2^T$$

e

$$U_2(\sigma) = p_2 \Pi^2 p_1$$

Onde Π é a matriz de payoff de cada jogador. Assim, temos:

$$U_i(e_j, \sigma_{-i}) = e_j^T \Pi^i p_i^T$$

Onde $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$. Assim, calcula-se a função V como feito anteriormente e aplica-se o modelo em Python que gera os seguintes resultados:

Ponto Inicial	Resultado	V(.)
(.1, .8, .1, .1, .8, .1)	(0. 1. 0. 0. 1. 0.)	0.00
(.1, .8, .1, .1, .9, .0)	(0. 1. 0. 0. 1. 0.)	0.00
(.0, .9, .0, .0, .9, .0)	(0. 1. 0. 0. 1. 0.)	0.00
(.0, .9, .1, .0, .9, .1)	(0. 1. 0. 0. 1. 0.)	0.00
(.1, .9, .1, .1, .9, .0)	(0. 1. 0. 0. 1. 0.)	0.00
(.8, .1, .1, .8, .1, .1)	(0. 1. 0. 0. 1. 0.)	0.00

Tabela 5 – Tabela de Resultados

Segundo o Gambit, o único equilíbrio de Nash do jogo é $EN = \{(0, 1, 0), (0, 1, 0)\}$, desse modo, os cinco pontos testados se resultaram no ponto de equilíbrio de Nash.

Após a exclusão das estratégias domidas, se tem o seguinte jogo.

Figura 10 – Jogo 3×3 Sem as Estratégias Estritamente Dominadas

		II	
		$r(q)$	$c(1 - q)$
I	$R(p)$	18, 18	15, 20
	$C(1 - p)$	20, 15	16, 16

Antes de aplicar o método novamente, resolveremos o jogo seguinte da forma analítica para avaliar se os resultados encontrados são, realmente, condizentes com o equilíbrio de Nash. Nota-se que o equilíbrio em estratégias puras, após a exclusão, continua sendo $EN = \{(C, c)\}$, o que nos mostra que, em qualquer circunstância, $q < (1 - q)$ e $p < (1 - p)$. Ao analisar as probabilidades, temos para o jogador 1:

$$\begin{aligned} 18q + 15(1 - q) &= 20q + 16(1 - q) \\ 3q + 15 &= 4q + 16 \end{aligned}$$

O que não pode acontecer, já que $3q + 15 < 4q + 16$, então $p = 0$. Em seguida, faremos a mesma análise para o jogador 2.

$$\begin{aligned} 18p + 15(1 - p) &= 20p + 16(1 - p) \\ 3p + 15 &= 4p + 16 \end{aligned}$$

O que também não poderia acontecer, já que $3p + 15 < 4p + 16$. Então, $q = 0$. Assim, o único equilíbrio de Nash em estratégias mistas seria $EN = \{(0, 1), (0, 1)\}$.

Após aplicação do método com atribuição de diferentes pontos iniciais, os resultados obtidos são apresentados na tabela a seguir.

Tabela 6 – Tabela de Resultados VI

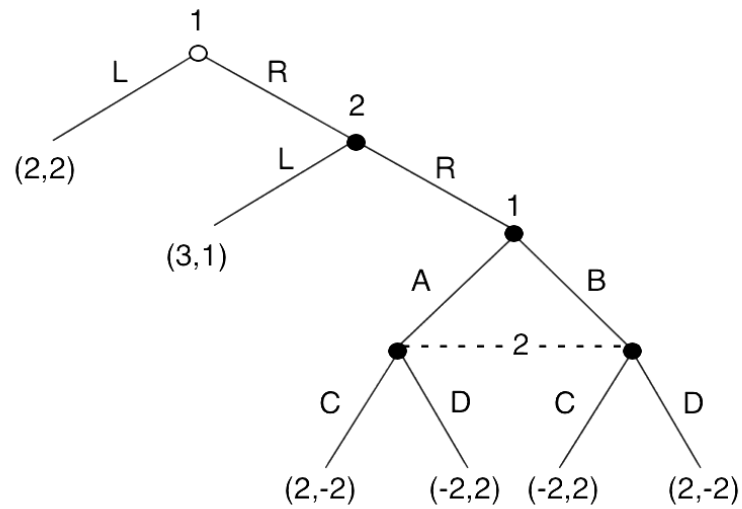
Ponto Inicial	Resultado	V(.)
(0.1, 0.9, 0.1, 0.9)	(0.00, 1.00, 0.00, 1.00)	0.00
(0.2, 0.8, 0.2, 0.8)	(0.00, 1.00, 0.00, 1.00)	0.00
(0.0, 0.9, 0.0, 0.9)	(0.00, 1.00, 0.00, 1.00)	0.00
(0.0, 0.8, 0.0, 0.8)	(0.00, 1.00, 0.00, 1.00)	0.00

Pode-se notar que o único equilíbrio encontrado em estratégias mistas é $EN = \{(C, C)\}$, este equilíbrio é equivalente ao equilíbrio em estratégias puras. Além disso, devido o resultado ser o mesmo do jogo com 3 estratégias, podemos afirmar que de fato aquelas estratégias eram dominadas, sendo assim, o único equilíbrio de Nash continua sendo o mesmo.

5.2 4x4

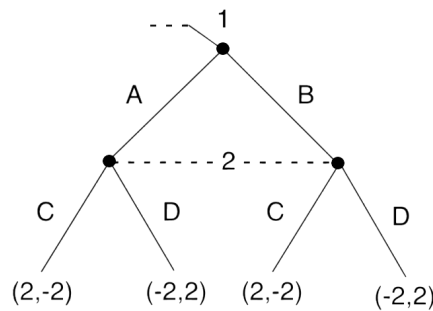
Nota-se que, no jogo apresentado a seguir, retirado do (FUDENBERG DREW E TIROLE, 1991), o quarto nó de decisão, ou seja, o segundo nó de decisão do jogador 2, não existe certeza se o jogador escolherá C ou D. Devido a essa incerteza, não é possível aplicar o método de regressão para encontrar o equilíbrio em estratégias mistas, sendo o método numérico a única alternativa viável.

Figura 11 – Jogo Extensivo com 4 Estratégias



Antes de aplicar o método numérico, analisaremos os equilíbrios da forma analítica a fim de observar se os resultados encontrados condizem com os equilíbrios. Desse modo, analisa-se o subjogo a seguir:

Figura 12 – Subjogo I



Ao transformá-lo em jogo estratégico para calcularmos a as probalidades, se tem:

Figura 13 – Subjogo Estrategico

		Jogador 2	
		$C(q)$	$D(1 - q)$
Jogador 1	$A(p)$	$2, -2$	$-2, 2$
	$B(1 - p)$	$-2, 2$	$2, -2$

Para o jogador 1, temos:

$$\begin{aligned}
 2q - 2(1 - q) &= -2q + 2(1 - q) \\
 4q - 2 &= 2 - 4q \\
 q &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Para o jogador 2, temos:

$$\begin{aligned}
 2p - 2(1 - p) &= -2p + 2(1 - p) \\
 4p - 2 &= 2 - 4p \\
 p &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Assim, temos um gráfico de melhor resposta como:

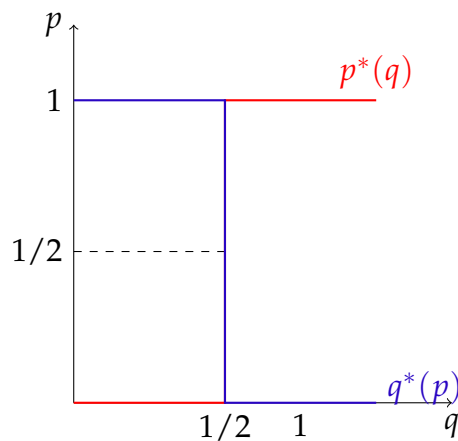


Figura 14 – Melhores Respostas Subjogo

Se considerarmos o caso onde $p_{23} + p_{24} = 1, p_{21} = p_{22} = 0$, a melhor resposta no caso não degenerado poderia ser $p_{11} + p_{12} = 1, p_{13} = p_{14} = 0$. Assim, teríamos $EN = \{(1/2, 1/2, 0, 0), (0, 0, 1/3, 2/3)\}$

O Equilíbrio de Nash Perfeito Sequencial em Estratégias Mistas, o jogador 1 joga $p(a) = 1/2$, então o payoff esperado será 0, para C e D. Então o jogador 2 no segundo nódulo escolheria L, enquanto o jogador 1 no nódulo 1 escolheria R, assim, o equilíbrio de Nash sequencial seria $EN = \{(0, 1/2, 1/4, 1/4, 1/4), (q, 1 - q, 0, 0)\}$. Nota-se que existe infinitos equilíbrios, desde $(1/2, q)$ para todo $q \in [0, 1]$.

Ao transformar o jogo da forma extensiva para a forma estratégica, temos o seguinte formato. Nota-se que o jogo não possui nenhuma estratégia estritamente dominada, o que não permite a exclusão de nenhuma estratégia, neste caso, é muito

difícil encontrar o equilíbrio de Nash em estratégias mistas, assim, utilizaremos o método proposto neste trabalho a fim de analisar os possíveis resultados.

Figura 15 – Jogo 4×4

		II			
		LC	LD	RC	RD
I	LA	2,2	2,2	2,2	2,2
	LB	2,2	2,2	2,2	2,2
	RA	3,1	3,1	2,-2	-2,2
	RB	3,1	3,1	-2,2	2,-2

Onde: $LA = p_{11}, LB = p_{12}, RA = p_{13}, RB = p_{14}, LC = p_{21}, LD = p_{22}, RC = p_{23}, RD = p_{24}$. Assim, aplicaremos o método como anteriormente, seguindo a seguinte função:

$$U_1(\sigma) = p_1^T \Pi^1 p_2^T$$

e

$$U_2(\sigma) = p_2 \Pi^2 p_1$$

Onde Π é a matriz de payoff de cada jogador. Assim, temos:

$$U_i(e_j, \sigma_{-1}) = e_j^T \Pi^i p_i^T$$

Onde $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3, 4$. Assim, calcula-se a função V como feito anteriormente e aplica-se o modelo em Python que gera os seguintes resultados:

Tabela 7 – Tabela de Resultados VII

Ponto Inicial	Resultado	V(.)
(1., .0, .0, .0, .7, .0, .2, .1)	(1., 0., 0., 0., 0.66, 0., 0.18, 0.16)	0.00
(1., .0, .0, .0, .0, .7, .1, .2)	(1., 0., 0., 0., 0.66, 0., 0.16, 0.18)	0.00
(1., .0, .0, .0, .0, .0, 1., .0)	(1., .0, .0, .0, .0, .0, 1., .0)	0.00
(1., .0, .0, .0, .0, .0, .0, 1.)	(1., .0, .0, .0, .0, .0, .0, 1.)	0.00
(.0, 1., .0, .0, .7, .0, .2, .1)	(0., 1., 0., 0., 0.66, 0., 0.18, 0.16)	0.00
(.0, 1., .0, .0, .0, .7, .2, .1)	(0., 1., 0., 0., 0., 0.66, 0.18, 0.16)	0.00
(.0, 1., .0, .0, .0, .0, 1., .0)	(.0, 1., .0, .0, .0, .0, 1., .0)	0.00
(.0, 1., .0, .0, .0, .0, .0, 1.)	(.0, 1., .0, .0, .0, .0, .0, 1.)	0.00
(.0, .0, .8, .2, 1., .0, .0, .0)	(.0, .0, .75, .25, 1., .0, .0, .0)	0.00
(.0, .0, .8, .2, .0, 1., .0, .0)	(.0, .0, .75, .25, .0, 1., .0, .0)	0.00
(.0, .0, .2, .8, .0, 1., .0, .0)	(.0, .0, .75, .25, .0, 1., .0, .0)	0.00
(.0, .0, .2, .8, .0, 1., .0, .0)	(.0, .0, .75, .25, 1., .0, .0, .0)	0.00

Os resultados obtidos foram comparados com o resultados do Gambit. Nota-se que o Gambit apontou 12 equilíbrios de Nash em estratégias mistas deste jogo, entretando, como mostramos anteriormente, o jogo possui infinitos equilíbrios de Nash, desde que siga a condição imposta a cima. Desse modo, utilizamos o método proposto neste trabalho para encontrar os 12 equilíbrios apontados pelo Gambit e, o algoritmo, foi capaz de encontrar todos.

6 Conclusão

Os resultados obtidos após a implementação do método de McKelvey, que utiliza a função de Lyapunov, para encontrar os equilíbrios de Nash foram comparados com os equilíbrios obtidos através do software Gambit. Todos os resultados aqui obtidos chegaram aos mesmos valores, ou muito próximo, comparados aos gerados pelo software, o que demonstra a funcionabilidade do método.

Como demonstramos aqui, nos jogos 2×2 , o equilíbrio é facilmente encontrado, por essa razão aplicamos o método primeiro a este jogo e observamos se os possíveis resultados eram, de fato, equilíbrios de Nash. Os resultados obtidos nesse jogo, após a aplicação do método, eram condizentes com os equilíbrios apontados pelo Gambit. Assim, aplicamos o método para jogos com mais estratégias, para demonstrar que ao introduzir mais estratégias, a obtenção do equilíbrio se tornava mais complexa, assim havia a necessidade da utilização de software para o seu cálculo.

Ao aplicar o mesmo método em jogos com mais de duas estratégias, o modelo conseguiu achar todos os equilíbrios de Nash apontados pelo Gambit, sendo em jogos 3×3 , 4×4 e jogos na forma extensiva. Sendo que os jogos apresentados não possuíam estratégias dominadas, o que não permitia a exclusão de nenhuma delas, assim o uso do software e do modelo de McKelvey se tornavam necessários.

O algoritmo de McKelvey permitiu encontrar pontos cercanos ou exatos para Equilíbrios de Nash em estratégias mistas, porém o algoritmo é dependente do método de otimização, métodos livres de derivadas deveriam ser implementados para a procura de pontos ótimos, neste caso em virtude da não diferenciabilidade da função, um método viável poderia ser o método do politopo.

O método ajuda na identificação de equilíbrios nos caso maiores a 2×2 , em virtude da complexidade dos problemas com um número maior de estratégias, assim a solução numérica mostra-se como a única alternativa factível.

Como dito anteriormente, os equilíbrios encontrados neste trabalho não possuem nenhum tipo de refinamento, sendo assim, o algoritmo aqui empregado pode ser utilizado em outros trabalhos a fim de procurar equilíbrios de Nash com refinamentos.

Novos trabalhos neste tópico devem focar-se em métodos livres de derivadas e a aplicação em estruturas mais complexas de jogos, como jogos na forma extensiva em duas etapas, com informação perfeita e informação imperfeita.

Referências

AUMANN, R. S. *Hart. Handbook of Game Theory, Vol. 1.* [S.l.]: North-Holland, Amsterdam, 1992. Citado na página 11.

CAMPOS, M. M.; BORSANI, H.; AZEVEDO, N. L. de. Méritos e limites da teoria da escolha racional como ferramenta de interpretação do comportamento social e político. *Ciências Sociais Unisinos*, v. 52, n. 1, p. 100–112, 2016. Citado na página 11.

FUDENBERG DREW E TIROLE, J. *Game theory.* [S.l.]: MIT press, 1991. Citado 4 vezes nas páginas 30, 34, 35 e 37.

JUDD, K. L. *Numerical methods in economics.* [S.l.]: MIT press, 1998. Citado na página 24.

MCKELVEY, R. D. A liapunov function for nash equilibria. California Institute of Technology, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

MCKELVEY, R. D.; MCLENNAN, A. Computation of equilibria in finite games. *Handbook of computational economics*, Elsevier, v. 1, p. 87–142, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 23.

OSBORNE, M. J. et al. *An introduction to game theory.* [S.l.]: Oxford university press New York, 2004. v. 3. Citado 6 vezes nas páginas 11, 14, 15, 17, 18 e 25.

SYDSÆTER, K. et al. *Further mathematics for economic analysis.* [S.l.]: Pearson education, 2008. Citado na página 22.

Apêndices

APÊNDICE A – Cálculos

Cálculo do jogo 3×3 :

$$U_1(\sigma) = p_{11}p_2 + p_{12}p_{21} + 3p_{13}p_{21} + 5p_{11}p_{22} + 6p_{12}p_{22} + 2p_{13}p_{22} + 3p_{11}p_{23} \\ + p_{12}p_{23} + 2p_{13} + p_{23}$$

$$U_2(\sigma) = p_{21}p_{11} + 7p_{21}p_{12} + 5p_{22}p_{11} + 4p_{22}p_{12} + p_{22}p_{13} + p_{23}p_{12} + 2p_{23}p_{13}$$

$$V(\cdot) = \max[p_{21} + 5p_{22} + 3p_{23} - p_{11}p_2 - p_{12}p_{21} - 3p_{13}p_{21} - 5p_{11}p_{22} - 6p_{12}p_{22} \\ - 2p_{13}p_{22} - 3p_{11}p_{23} - p_{12}p_{23} - 2p_{13} - p_{23}, 0]^2 + \\ \max[p_{21} + 6p_{22} + p_{23} - p_{11}p_2 - p_{12}p_{21} - 3p_{13}p_{21} - 5p_{11}p_2 - 6p_{12}p_{22} \\ - 2p_{13}p_2 - 3p_{11}p_{23} - p_{12}p_{23} - 2p_{13} - p_{23}, 0]^2 + \\ \max[3p_{21} + 2p_{22} + 2p_{23} - p_{11}p_2 - p_{12}p_{21} - 3p_{13}p_{21} - 5p_{11}p_{22} - 6p_{12}p_{22} \\ - 2p_{13}p_{22} - 3p_{11}p_{23} - p_{12}p_{23} - 2p_{13} - p_{23}, 0]^2 + \\ \max[p_{11} + 7p_{12} - p_{21}p_{11} - 7p_{21}p_{12} - 5p_{22}p_{11} - 4p_{22}p_{12} - p_{22}p_{13} - \\ p_{23}p_{12} - 2p_{23}p_{13}, 0]^2 \\ \max[5p_{11} + 4p_{12} + p_{13} - p_{21}p_{11} - 7p_{21}p_{12} - 5p_{22}p_{11} - 4p_{22}p_{12} - p_{22}p_{13} \\ - p_{23}p_{12} - 2p_{23}p_{13}, 0]^2 \\ \max[p_{12} + 2p_{13} - p_{21}p_{11} - 7p_{21}p_{12} - 5p_{22}p_{11} - 4p_{22}p_{12} - p_{22}p_{13} - \\ p_{23}p_{12} - 2p_{23}p_{13}, 0]^2$$

Cálculo do segundo jogo 3×3 :

$$U_1(\sigma) = p_{11}p_{21} - 2p_{11}p_{22} - 2p_{12}p_{21} + p_{12}p_{22} + p_{13}p_{23}$$

$$U_2(\sigma) = -2p_{21}p_{11} + p_{22}p_{11} + p_{21}p_{12} - 2p_{22}p_{12} - p_{23}p_{13}$$

$$V(U, M, L, S) = \max[p_{21} - 2p_{22} - p_{11}p_{21} + 2p_{11}p_{22} + 2p_{12}p_{21} - p_{12}p_{22} - p_{13}p_{23}, 0]^2 + \\ \max[-2p_{21} + p_{22} - p_{11}p_{21} + 2p_{11}p_{22} + 2p_{12}p_{21} - p_{12}p_{22} - p_{13}p_{23}, 0]^2 + \\ \max[p_{23} - p_{11}p_{21} + 2p_{11}p_{22} + 2p_{12}p_{21} - p_{12}p_{22} - p_{13}p_{23}, 0]^2 + \\ \max[-2p_{11} + p_{12} + 2p_{21}p_{11} - p_{22}p_{11} - p_{21}p_{12} + 2p_{22}p_{12} + p_{23}p_{13}, 0]^2 + \\ \max[p_{11} - 2p_{12} + 2p_{21}p_{11} - p_{22}p_{11} - p_{21}p_{12} + 2p_{22}p_{12} + p_{23}p_{13}, 0]^2 + \\ \max[p_{13} + 2p_{21}p_{11} - p_{22}p_{11} - p_{21}p_{12} + 2p_{22}p_{12} + p_{23}p_{13}, 0]^2$$

Cálculo do jogo 4×4 :

$$U_1(\sigma) = p_{11}p_{21} + 4p_{11}p_{22} + 3p_{11}p_{23} + 2p_{12}p_{22} + 4p_{12}p_{23} + 5p_{13}p_{22} + 3p_{13}p_{23} + 10p_{13}p_{24} + 2p_{14}p_{21} + 5p_{14}p_{22} + 3p_{14}p_{23} + 4p_{14}p_{24}$$

$$U_2(\sigma) = p_{21}p_{11} + 3p_{21}p_{12} + p_{21}p_{14} + 2p_{22}p_{11} + 2p_{22}p_{12} + p_{22}p_{13} + 3p_{22}p_{14} + 2p_{23}p_{11} + p_{23}p_{12} + 3p_{23}p_{13} + p_{23}p_{14} + 10p_{24}p_{12} + 4p_{24}p_{13} + 4p_{24}p_{14}$$

$$\begin{aligned} V(q, r, z, s, t, w) = & \max[p_{21} + 4p_{22} + 3p_{23} - p_{11}p_{21} - 4p_{11}p_{22} - 3p_{11}p_{23} - 2p_{12}p_{22} - \\ & 4p_{12}p_{23} - 5p_{13}p_{22} - 3p_{13}p_{23} - 10p_{13}p_{24} - 2p_{14}p_{21} - 5p_{14}p_{22} - \\ & 3p_{14}p_{23} - 4p_{14}p_{24}, 0]^2 + \\ & \max[2p_{22} + 4p_{23} - p_{11}p_{21} - 4p_{11}p_{22} - 3p_{11}p_{23} - 2p_{12}p_{22} - 4p_{12}p_{23} - \\ & 5p_{13}p_{22} - 3p_{13}p_{23} - 10p_{13}p_{24} - 2p_{14}p_{21} - 5p_{14}p_{22} - 3p_{14}p_{23} - 4p_{14}p_{24}, 0]^2 + \\ & \max[5p_{22} + 3p_{23} + 10p_{24} - p_{11}p_{21} - 4p_{11}p_{22} - 3p_{11}p_{23} - 2p_{12}p_{22} - \\ & 4p_{12}p_{23} - 5p_{13}p_{22} - 3p_{13}p_{23} - 10p_{13}p_{24} - 2p_{14}p_{21} - 5p_{14}p_{22} - 3p_{14}p_{23} - \\ & 4p_{14}p_{24}, 0]^2 + \\ & \max[2p_{21} + 5p_{22} + 3p_{23} + 4p_{24} - p_{11}p_{21} - 4p_{11}p_{22} - 3p_{11}p_{23} - 2p_{12}p_{22} - \\ & 4p_{12}p_{23} - 5p_{13}p_{22} - 3p_{13}p_{23} - 10p_{13}p_{24} - 2p_{14}p_{21} - 5p_{14}p_{22} - 3p_{14}p_{23} - \\ & 4p_{14}p_{24}, 0]^2 \\ & \max[p_{11} + 3p_{12} + p_{14} - p_{21}p_{11} - 3p_{21}p_{12} - p_{21}p_{14} - 2p_{22}p_{11} - 2p_{22}p_{12} - \\ & p_{22}p_{13} - 3p_{22}p_{14} - 2p_{23}p_{11} - p_{23}p_{12} - 3p_{23}p_{13} - p_{23}p_{14} - 10p_{24}p_{12} \\ & - 4p_{24}p_{13} - 4p_{24}p_{14}, 0]^2 \\ & \max[2p_{11} + 2p_{12} + p_{13} + 3p_{14} - p_{21}p_{11} - 3p_{21}p_{12} - p_{21}p_{14} - 2p_{22}p_{11} \\ & - 2p_{22}p_{12} - p_{22}p_{13} - 3p_{22}p_{14} - 2p_{23}p_{11} - p_{23}p_{12} - 3p_{23}p_{13} - p_{23}p_{14} - \\ & 10p_{24}p_{12} - 4p_{24}p_{13} - 4p_{24}p_{14}, 0]^2 \\ & \max[2p_{11} + p_{12} + 3p_{13} + p_{14} - p_{21}p_{11} - 3p_{21}p_{12} - p_{21}p_{14} - 2p_{22}p_{11} - \\ & 2p_{22}p_{12} - p_{22}p_{13} - 3p_{22}p_{14} - 2p_{23}p_{11} - p_{23}p_{12} - 3p_{23}p_{13} - p_{23}p_{14} - \\ & 10p_{24}p_{12} - 4p_{24}p_{13} - 4p_{24}p_{14}, 0]^2 \\ & \max[10p_{12} + 4p_{13} + 4p_{14} - p_{21}p_{11} - 3p_{21}p_{12} - p_{21}p_{14} - 2p_{22}p_{11} - 2p_{22}p_{12} \\ & - p_{22}p_{13} - 3p_{22}p_{14} - 2p_{23}p_{11} - p_{23}p_{12} - 3p_{23}p_{13} - p_{23}p_{14} - 10p_{24}p_{12} \\ & - 4p_{24}p_{13} - 4p_{24}p_{14}, 0]^2 \end{aligned}$$

Jogo 3×3 extensivo

$$U_1(\sigma) = 18p_{11}p_{21} + 15p_{11}p_{22} + 9p_{11}p_{23} + 20p_{12}p_{21} + 16p_{12}p_{22} + 8_{12}p_{23} \\ 18p_{13}p_{21} + 12p_{13}p_{22}$$

$$U_2(\sigma) = 18p_{21}p_{11} + 15p_{21}p_{12} + 9p_{21}p_{13} + 20p_{22}p_{11} + 16p_{22}p_{12} + 8p_{22}p_{13} \\ 18p_{23}p_{11} + 12p_{23}p_{12}$$

$$V(R, C, r, c) = \max[18p_{21} + 15p_{22} + 9p_{23} - 18p_{11}p_{21} - 15p_{11}p_{22} - 9p_{11}p_{23} - 20p_{12}p_{21} \\ - 16p_{12}p_{22} - 8p_{12}p_{23} - 18p_{13}p_{21} - 12p_{13}p_{22}, 0]^2 + \\ \max[20p_{21} + 16p_{22} + 8p_{23} - 18p_{11}p_{21} - 15p_{11}p_{22} - 9p_{11}p_{23} - 20p_{12}p_{21} \\ - 16p_{12}p_{22} - 8_{12}p_{23} - 18p_{13}p_{21} - 12p_{13}p_{22}, 0]^2 + \\ \max[18p_{21} + 12p_{22} - 18p_{11}p_{21} - 15p_{11}p_{22} - 9p_{11}p_{23} - 20p_{12}p_{21} \\ - 16p_{12}p_{22} - 8_{12}p_{23} - 18p_{13}p_{21} - 12p_{13}p_{22}, 0]^2 + \\ \max[18p_{11} + 15p_{12} + 9p_{13} - 18p_{21}p_{11} - 15p_{21}p_{12} - 9p_{21}p_{13} - 20p_{22}p_{11} \\ - 16p_{22}p_{12} - 8p_{22}p_{13} - 18p_{23}p_{11} - 12p_{23}p_{12}, 0]^2 \\ \max[20p_{11} + 16p_{12} + 8p_{13} - 18p_{21}p_{11} - 15p_{21}p_{12} - 9p_{21}p_{13} - 20p_{22}p_{11} \\ - 16p_{22}p_{12} - 8p_{22}p_{13} - 18p_{23}p_{11} - 12p_{23}p_{12}, 0]^2 \\ \max[18p_{11} + 12p_{12} - 18p_{21}p_{11} - 15p_{21}p_{12} - 9p_{21}p_{13} - 20p_{22}p_{11} - \\ 16p_{22}p_{12} - 8p_{22}p_{13} - 18p_{23}p_{11} - 12p_{23}p_{12}, 0]^2$$

APÊNDICE B – Script em Python

Script em Python do jogo 3×3 :

```

1 import numpy as np
2 from scipy.optimize import minimize
3
4 def V3 ( x ):
5     p11=x[0]
6     p12=x[1]
7     p13=x[2]
8     p21=x[3]
9     p22=x[4]
10    p23=x[5]
11    su = 0.0
12    su += (max(0.0,p21 +5*p22 +3*p23 -p11*p21 -p12*p21-3*p13*p21
13              -5*p11*p22 -6*p12*p22 -2*p13*p22-3*p11*p23
14              -p12*p23 -2*p13+p23))**2
15    su += (max(0.0,p21 +6*p22 +p23 -p11*p21 -p12*p21 -3*p13*p21
16              -5*p11*p22 -6*p12*p22 -2*p13*p22 -3*p11*p23
17              -p12*p23 -2*p13+p23))**2
18    su += (max(0.0,3*p21 +2*p22 + 2*p23 -p11*p21 -p12*p21
19              -3*p13*p21-5*p11*p22-6*p12*p22 -2*p13*p22
20              -3*p11*p23 -p12*p23 -2*p13+p23))**2
21    su += (max(0.0,p11 +7*p12 -p21*p11 -7*p21*p12 -5*p22*p11
22              -4*p22*p12 -p22*p13 -p23*p12 -2*p23*p13))**2
23    su += (max(0.0, 5*p11 +4*p12 +p13 -p21*p11 -7*p21*p12
24              -5*p22*p11 -4*p22*p12 -p22*p13 -p23*p12
25              -2*p23*p13))**2
26    su += (max(0.0, p12 +2*p13 -p21*p11 -7*p21*p12 -5*p22*p11
27              -4*p22*p12 -p22*p13 -p23*p12 -2*p23*p13))**2
28    su += (min(0.0, p11))**2
29    su += (min(0.0, p12))**2
30    su += (min(0.0, p13))**2
31    su += (min(0.0, p21))**2
32    su += (min(0.0, p22))**2
33    su += (min(0.0, p23))**2
34    su += (1 -p11 -p12 -p13)**2
35    su += (1 -p21 -p22 -p23)**2
36    return su

```

```

37
38 x31 = np.array([.1, .2, .7, .5, .2, .1])
39 res31 = minimize(V3, x31, method = 'L-BFGS-B' )
40 float_lst = list(np.float_(res31.x))
41 print(float_lst)

```

Script em Python do segundo jogo 3×3 :

```

1 def V3 ( x ):
2     p11=x[0]
3     p12=x[1]
4     p13=x[2]
5     p21=x[3]
6     p22=x[4]
7     p23=x[5]
8     su = 0.0
9     su += (max(0.0, p21 -2*p22 -p11*p21 +2*p11*p22 +2*p12*p21
10             -p12*p22 -p13*p23))**2
11     su += (max(0.0, -2*p21 +p22 -p11*p21 +2*p11*p22 +2*p12*p21
12             -p12*p22 -p13*p23))**2
13     su += (max(0.0, p23 -p11*p21 +2*p11*p22 +2*p12*p21
14             -p12*p22 -p13*p23))**2
15     su += (max(0.0, -2*p11+p12-2*p12 +2*p21*p11 -p22*p11 +p21*p12
16             -2*p22*p12 -p23*p13))**2
17     su += (max(0.0, p11-2*p12 +2*p21*p11 -p22*p11 +p21*p12
18             -2*p22*p12 -p23*p13))**2
19     su += (max(0.0, p13 +2*p21*p11 -p22*p11 +p21*p12 -2*p22*p12
20             -p23*p13))**2
21     su += (min(0.0, p11))**2
22     su += (min(0.0, p12))**2
23     su += (min(0.0, p13))**2
24     su += (min(0.0, p21))**2
25     su += (min(0.0, p22))**2
26     su += (min(0.0, p23))**2
27     su += (1 -p11 -p12 -p13)**2
28     su += (1 -p21 -p22 -p23)**2
29     return su
30
31
32 x31 = np.array([.1, .1, .8, .0, .1, .9])
33 res31 = minimize(V3, x31, method = 'L-BFGS-B' )
34

```

```

35 print(res31.fun)
36 float_lst = list(np.float_(res31.x))
37 print(float_lst)
38 print("{:f}".format(res31.fun))
39 print(np.float16(res31.x))
40 print(np.round(res31.x, 2))

```

Script em Python do jogo 4×4 :

```

1 import numpy as np
2 from scipy.optimize import minimize
3
4 p = 2
5 def V3 ( x ):
6     p11=x[0]
7     p12=x[1]
8     p13=x[2]
9     p14=x[3]
10    p21=x[4]
11    p22=x[5]
12    p23=x[6]
13    p24=x[7]
14    su = 0.0
15    su += (max(0.0, p21 +4*p22 +3*p23 -p11*p21 -4*p11*p22
16              -3*p11*p23 -2*p12*p22 -4*p12*p23 -5*p13*p22
17              -3*p13*p23 -10*p13*p24 -2*p14*p21 -5*p14*p22
18              -3*p14*p23 -4*p14*p24))**2
19    su += (max(0.0, 2*p22 +4*p23 -p11*p21 -4*p11*p22
20              -3*p11*p23 -2*p12*p22 -4*p12*p23 -5*p13*p22
21              -3*p13*p23 -10*p13*p24 -2*p14*p21 -5*p14*p22
22              -3*p14*p23 -4*p14*p24))**2
23    su += (max(0.0, 5*p22 +3*p23 +10*p24 -p11*p21 -4*p11*p22
24              -3*p11*p23 -2*p12*p22 -4*p12*p23 -5*p13*p22
25              -3*p13*p23 -10*p13*p24 -2*p14*p21 -5*p14*p22
26              -3*p14*p23 -4*p14*p24))**2
27    su += (max(0.0, 2*p21 +5*p22 +3*p23 +4*p24 -p11*p21 -4*p11*p22
28              -3*p11*p23 -2*p12*p22 -4*p12*p23 -5*p13*p22
29              -3*p13*p23 -10*p13*p24 -2*p14*p21 -5*p14*p22
30              -3*p14*p23 -4*p14*p24))**2
31    su += (max(0.0, p11 +3*p12 +p14 -p21*p11 -3*p21*p12
32              -p21*p14 -2*p22*p11 -2*p22*p12 -p22*p13 -3*p22*p14
33              -2*p23*p11 -p23*p12 -3*p23*p13 -p23*p14

```

```

34         -10*p24*p12 -4*p24*p13 -4*p24*p14))**2
35     su += (max(0.0, 2*p11 +2*p12 +p13 +3*p14 -p21*p11 -3*p21*p12
36         -p21*p14 -2*p22*p11 -2*p22*p12 -p22*p13 -3*p22*p14
37         -2*p23*p11 -p23*p12 -3*p23*p13 -p23*p14
38         -10*p24*p12 -4*p24*p13 -4*p24*p14))**2
39     su += (max(0.0, 2*p11 +p12 +3*p13 +p14 -p21*p11 -3*p21*p12
40         -p21*p14 -2*p22*p11 -2*p22*p12 -p22*p13 -3*p22*p14
41         -2*p23*p11 -p23*p12 -3*p23*p13 -p23*p14
42         -10*p24*p12 -4*p24*p13 -4*p24*p14))**2
43     su += (max(0.0, 10*p12 +4*p13 +4*p14 -p21*p11 -3*p21*p12
44         -p21*p14 -2*p22*p11 -2*p22*p12 -p22*p13 -3*p22*p14
45         -2*p23*p11 -p23*p12 -3*p23*p13 -p23*p14
46         -10*p24*p12 -4*p24*p13 -4*p24*p14))**2
47     su2 =0.0
48     su2 += (min(0.0, p11))**2
49     su2 += (min(0.0, p12))**2
50     su2 += (min(0.0, p13))**2
51     su2 += (min(0.0, p14))**2
52     su2 += (min(0.0, p21))**2
53     su2 += (min(0.0, p22))**2
54     su2 += (min(0.0, p23))**2
55     su2 += (min(0.0, p24))**2
56     su2 += (1 -p11 -p12 -p13 -p14)**2
57     su2 += (1 -p21 -p22 -p23 -p24)**2
58     su += p * su2
59     return su
60
61
62 x31 = np.array([.0, .0, .9, .1, .0, .0, .1, .9])
63 res31 = minimize(V3, x31, method = 'L-BFGS-B' )
64
65 print(res31.fun)

```

Script em Python do jogo 3×3 extensivo:

```

1 import numpy as np
2 from scipy.optimize import minimize
3
4 p = 2
5 def V3 ( x ):
6     p11=x[0]
7     p12=x[1]
8     p13=x[2]

```

```

9     p21=x[3]
10    p22=x[4]
11    p23=x[5]
12    su = 0.0
13    su += (max(0.0, 18*p21 +15*p22 +9*p23 -18*p11*p21
14              -15*p11*p22 -9*p11*p23 -20*p12*p21 -16*p12*p22
15              -8*p12*p23 -18*p13*p21 -12*p13*p22))**2
16    su += (max(0.0, 20*p21 +16*p22 +8*p23-18*p11*p21
17              -15*p11*p22 -9*p11*p23 -20*p12*p21 -16*p12*p22
18              -8*p12*p23 -18*p13*p21 -12*p13*p22))**2
19    su += (max(0.0, 18*p21 +12*p22 -18*p11*p21
20              -15*p11*p22 -9*p11*p23 -20*p12*p21 -16*p12*p22
21              -8*p12*p23 -18*p13*p21 -12*p13*p22))**2
22    su += (max(0.0, 18*p11 +15*p12 +9*p13 -18*p21*p11
23              -15*p21*p12 -9*p21*p13 -20*p22*p11 -16*p22*p12
24              -8*p22*p13 -18*p23*p11 -12*p23*p12))**2
25    su += (max(0.0, 20*p11 +16*p12 +8*p13 -18*p21*p11
26              -15*p21*p12 -9*p21*p13 -20*p22*p11 -16*p22*p12
27              -8*p22*p13 -18*p23*p11 -12*p23*p12))**2
28    su += (max(0.0, 18*p11 +12*p12 -18*p21*p11
29              -15*p21*p12 -9*p21*p13 -20*p22*p11 -16*p22*p12
30              -8*p22*p13 -18*p23*p11 -12*p23*p12))**2
31    su2 =0.0
32    su2 += (min(0.0, p11))**2
33    su2 += (min(0.0, p12))**2
34    su2 += (min(0.0, p13))**2
35    su2 += (min(0.0, p21))**2
36    su2 += (min(0.0, p22))**2
37    su2 += (min(0.0, p23))**2
38    su2 += (1 -p11 -p12 -p13)**2
39    su2 += (1 -p21 -p22 -p23)**2
40    su += p * su2
41    return su
42
43
44 x31 = np.array([.1, .8, .1, .1, .8, .1])
45 res31 = minimize(V3, x31, method = 'L-BFGS-B' )
46
47 print(res31.fun)

```