



UFOP

Universidade Federal
de Ouro Preto

**Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Computação e Sistemas**

**Combinando teoria dos grafos e teoria
dos jogos: o dilema dos prisioneiros em
estruturas complexas**

Fabiana Barreto Pereira

**TRABALHO DE
CONCLUSÃO DE CURSO**

**ORIENTAÇÃO:
Dr. Ronan Silva Ferreira**

**Junho, 2022
João Monlevade–MG**

Fabiana Barreto Pereira

**Combinando teoria dos grafos e teoria dos jogos:
o dilema dos prisioneiros em estruturas
complexas**

Orientador: Dr. Ronan Silva Ferreira

Monografia apresentada ao curso de Sistemas de Informação do Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas, da Universidade Federal de Ouro Preto, como requisito parcial para aprovação na Disciplina “Trabalho de Conclusão de Curso II”.

Universidade Federal de Ouro Preto

João Monlevade

Junho de 2022

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

P436c Pereira, Fabiana Barreto.

Combinando teoria dos grafos e teoria dos jogos [manuscrito]: o dilema dos prisioneiros em estruturas complexas. / Fabiana Barreto Pereira. - 2022.

53 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Ronan Silva Ferreira.

Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Graduação em Sistemas de Informação .

1. Jogos de estratégia (Matemática). 2. Jogos - Dinâmica. 3. Simulação (Computadores). 4. Teoria dos grafos. 5. Teoria dos jogos. I. Ferreira, Ronan Silva. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 519.83

Bibliotecário(a) Responsável: Flavia Reis - CRB6-2431



FOLHA DE APROVAÇÃO

Fabiana Barreto Pereira

Combinando teoria dos grafos e teoria dos jogos: o Dilema dos Prisioneiros em estruturas complexas

Monografia apresentada ao Curso de Sistemas de Informação da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Sistemas de Informação

Aprovada em 23 de Junho de 2022

Membros da banca

Dr. - Ronan Silva Ferreira - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)
Dr. - Carlos Henrique Gomes Ferreira - (Universidade Federal de Ouro Preto)
Dr. - Darlan Nunes de Brito - (Universidade Federal de Ouro Preto)

Ronan Silva Ferreira, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 29/08/2022



Documento assinado eletronicamente por **Ronan Silva Ferreira, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 29/08/2022, às 17:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0389851** e o código CRC **D19B5BF9**.

Este trabalho é dedicado à Deus, minha família e amigos.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço à Deus por iluminar e abençoar meus passos. Agradeço à minha família, essencialmente, meu pai Gilson, minha mãe Nazareth e minha irmã Fabíola, pelo suporte e apoio.

Sou muito grata ao meu orientador Ronan pela oportunidade de trabalharmos juntos neste trabalho, fruto de um programa de iniciação à pesquisa (PIP). Além de ser grata pelo apoio, troca de experiências e compartilhamento de conhecimentos. Agradeço também a Universidade Federal de Ouro Preto, professores e todo seu corpo docente.

Um agradecimento especial aos meus amigos da graduação, principalmente a Yasmine e a Rafaela por tornarem o processo mais agradável e tranquilo, e a todos que contribuíram de alguma forma para meu desenvolvimento e progresso nos estudos.

“Don’t make the process harder than it is.”

— Jack Welch (1935 – 2020)

Resumo

O dilema dos prisioneiros, no formato de jogos evolutivos, busca estudar o comportamento da dinâmica entre duas estratégias (cooperar *versus* desertar) considerando a racionalidade limitada devido restrições cognitivas dos agentes. A taxa de espalhamento das estratégias depende de como a população está estruturada e da interação entre os jogadores. Este trabalho teve como objetivo investigar, por meio de simulações computacionais, a dinâmica do jogo em diferentes estruturas, com diferentes padrões de conectividade entre seus constituintes, e assim compreender a influência da estrutura sobre a dinâmica evolutiva. O parâmetro de controle utilizado foi o *Temptation to defect*, que dá vantagem aos desertores. Foram implementados dois modos de interação entre os jogadores, a interação com eles próprios e com a vizinhança (auto combate), e a interação apenas com a vizinhança. No decorrer do jogo, os jogadores puderam imitar e/ou trocar de estratégia (mobilidade de estratégia) com seus vizinhos. Nossos resultados mostraram que as características estruturais podem interferir não só na sobrevivência dos cooperadores, mas na região de mistura (cooperador/desertor). Mais vizinhos não significam necessariamente mais cooperação. Além disso, a interação dos jogadores com eles próprios (auto combate) podem instigar a cooperação para maiores valores de *Temptation to defect*. Entretanto, adicionando a mobilidade de estratégia na dinâmica, a cooperação conseguiu sobreviver apenas quando o auto combate estava associado na interação. Concluimos que, apesar da escolha da rede em sistemas reais ser baseada na melhor representação para o problema, as regras da dinâmica poderão ser definidas de forma a instigar a difusão da cooperação conforme o objetivo almejado para o bom funcionamento do sistema.

Palavras-chaves: Teoria dos Jogos. Jogos Evolutivos. Dilema dos Prisioneiros. Redes Complexas.

Abstract

The prisoners' dilemma, in the form of evolutionary games, seeks to study the behavior of the dynamics between two strategies (cooperate versus defect) considering the bounded rationality due to the agents' cognitive constraints. The spread rate of strategies depends on how the population is structured and on the interaction between players. This work aimed to investigate, through computer simulations, the dynamics of the game in different structures, with different patterns of connectivity between their constituents, and thus to understand the influence of the structure on the evolutionary dynamics. The control parameter used was Temptation to defect, which gives defectors an advantage. Two modes of interaction between players were implemented, interaction with themselves and with the neighborhood (auto combat), and interaction only with the neighborhood. During the game, players could imitate and/or switch strategies (strategy mobility) with their neighbors. Our results showed that the structural characteristics can interfere not only in the survival of the cooperators, but in the mixing region (cooperator/desertor). More neighbors do not necessarily mean more cooperation. Furthermore, players' interaction with themselves (auto combat) can instigate cooperation for higher Temptation to defect values. However, adding the mobility of strategy in the dynamics, the cooperation managed to survive only when the auto combat was associated in the interaction. We conclude that, despite the choice of the network in real systems being based on the best representation for the problem, the dynamics rules can be defined in order to instigate the diffusion of cooperation according to the desired objective for the good functioning of the system.

Key-words: Game Theory. Evolutionary Games. Prisoners' Dilemma. Complex Networks.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de grafo regular	22
Figura 2 – Grafos platônicos	23
Figura 3 – Exemplo de rede quadrada com condições de contorno	28
Figura 4 – Fluxograma de construção de uma rede quadrada	28
Figura 5 – Fluxograma de construção de uma rede regular aleatória	29
Figura 6 – Fluxograma de construção de uma rede Watts e Strogatz (1998)	31
Figura 7 – Processo de Imitação de Estratégia	35
Figura 8 – Processo de Imitação e Mobilidade de Estratégia	35
Figura 9 – Estrutura da rede Watts e Strogatz (1998) (WS)	37
Figura 10 – Transitividade e triângulos	39
Figura 11 – Densidade média de cooperadores em função de b em uma rede quadrada com auto combate para diferente níveis β	41
Figura 12 – <i>Temptation to defect</i> em função de β em uma rede quadrada com auto combate	41
Figura 13 – Densidade média de cooperadores em função do tempo t_r em uma rede quadrada com auto combate	42
Figura 14 – Distribuição espacial de cooperadores entre desertores (espaços vazios) para $b = 1, 4$ e $\beta = 0, 1$	42
Figura 15 – Distribuição espacial de cooperadores entre desertores (espaços vazios) para $b = 1, 8$ e $\beta = 0, 1$	42
Figura 16 – Densidade média de cooperadores em função de b em uma rede regular aleatória com auto combate com $\beta = 0, 1$	43
Figura 17 – Densidade média de cooperadores em função de b em uma rede Watts e Strogatz (1998) com auto combate e $\beta = 0, 1$	44
Figura 18 – Densidade média de cooperadores em função de b em rede <i>Random Regular Network</i> (RRN) e WS com $p = 1, 0$, $\beta = 0, 1$ e auto combate	45
Figura 19 – Densidade média de cooperadores em função de b em uma rede WS com $\beta = 1, 0$	46
Figura 20 – Densidade média de cooperadores em função de t_r em uma rede WS com $p = 0, 0$, $k = 4$ e $\beta = 1, 0$	46
Figura 21 – Densidade média de cooperadores em função de b em rede RRN e WS com $p = 1, 0$, $\beta = 1, 0$	47
Figura 22 – Densidade média de cooperadores em função de b em rede quadrada e WS com $p = 0, 0$	47
Figura 23 – Densidade média de cooperadores em função de b com mobilidade para $\beta = 1, 0$	48

Lista de tabelas

Tabela 1 – Relação de payoff para jogador 1	19
---	----

Lista de abreviaturas e siglas

RRN *Random Regular Network*

OMS Organização Mundial de Saúde

ESPII *Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional*

ACCC *Australian Competition and Consumer Commission*

WS Watts e Strogatz (1998)

Lista de símbolos

C	Estratégia Cooperar
D	Estratégia Desertar
β	Nível de ruído
k	Grau de um vértice
T	Recompensa <i>Temptation to defect</i>
R	Recompensa <i>Reward</i>
S	Recompensa <i>Sucker's payoffs</i>
P	Recompensa <i>Punishment</i>
N	Número de nós da rede
p	Probabilidade de religação
W	Probabilidade de imitação
b	Parâmetro de controle <i>Temptation to defect</i>
ρ_c	Densidade média de cooperadores
t	Tempo
\leftarrow	Recebe
\in	Pertence
\approx	Aproximadamente
\gtrsim	Aproximadamente maior
\lesssim	Aproximadamente menor

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	O problema de pesquisa	15
1.2	Objetivos	16
1.3	Metodologia	16
1.4	Organização do trabalho	17
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
2.1	Jogos Evolutivos do Dilema dos Prisioneiros	18
2.2	Redes regulares	21
2.3	Redes Complexas	22
2.4	Trabalhos Relacionados	24
3	DESENVOLVIMENTO	27
3.1	Redes	27
3.2	Dinâmica do jogo evolutivo do Dilema dos Prisioneiros	33
3.3	Dinâmica com mobilidade de estratégia	35
4	RESULTADOS	37
4.1	Características Estruturais	37
4.2	Análise da dinâmica	40
4.2.1	Dinâmica sem mobilidade de estratégia	40
4.2.2	Dinâmica com mobilidade de estratégia	48
5	CONCLUSÃO	49
	REFERÊNCIAS	51

1 Introdução

Em 2020, o mundo inteiro se deparou com um problema comum: a *Covid-19*. Com início na cidade de Wuhan (China) no final de 2019, a nova cepa do Coronavírus em pouco tempo se espalhou pelo mundo, fazendo com que a Organização Mundial de Saúde (OMS) declarasse *Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional (ESPII)*, era o início da pandemia. Frente a esse mal, o mundo inteiro passou a pesquisar sobre o vírus em uma corrida para conter a disseminação da doença. Mecanismos foram aplicados para promoção da saúde pública, como uso de máscaras, limite de pessoas por estabelecimento, distância mínima entre os indivíduos, quarentena e até mesmo *lockdown*. A aplicação de vacinas iniciou em meados de 2021. Com isso, vários desafios surgiram, como de saúde, sociais, comerciais e econômicos.

Nesse cenário, as empresas precisavam criar uma cooperação temporária de concorrentes para atender o interesse público. Ações de cooperação puderam ser vistas em todo o mundo, a autoridade de concorrência australiana (*Australian Competition and Consumer Commission (ACCC)*), por exemplo, autorizou a cooperação entre as empresas de tecnologias médicas para fornecimento e potencial produção de equipamentos e dispositivos médicos (HAJAR, 2020). Podemos dizer, que as organizações neste período se viram perante um dilema, tendo que decidir entre competir ou juntar forças a fim de obter ganhos maiores, não só para elas mas para todos os consumidores. Elas optaram, neste caso, pela cooperação. E é exatamente esse comportamento que o dilema dos prisioneiros, no formato de jogos evolutivos, busca estudar: a dinâmica entre cooperar *versus* competir (ao longo do texto será utilizado o termo desertar).

Tradicionalmente, um jogador escolhe uma das estratégias (cooperar ou desertar) e no decorrer do jogo terão a oportunidade de trocar de estratégias. Como seres racionais e egoístas, os jogadores buscarão atingir seus objetivos pensando exclusivamente em seu benefício próprio, escolhendo as estratégias que lhe trarão os maiores benefícios (SARTINI et al., 2004; MELO et al., 2007). O jogo pode ser aplicado pelo menos de duas maneiras: para analisar as decisões dos agentes e verificar a influência dessas na rede estudada, ou ainda para definir as regras do ambiente em relação a quando os agentes devem jogar. Nesse segundo caso, quando cada jogador adotar a estratégia que maximiza seu próprio ganho, o bem coletivo de todos os agentes será maximizado (NORVIG; RUSSELL, 2014).

O jogo tem sido estudado por vários autores em diferentes áreas, seja como ferramenta de otimização para o processo de tomada de decisão, para examinar o comportamento das estratégias no estado estacionário ou como metodologia para compreensão do comportamento humano. Watanabe (2010), por exemplo, utilizou a teoria para modelagem de

aplicações de *live streaming* em redes *Peer-to-Peer*, Szabó e Tóke (1998), Szabó e Fath (2007), Vukov, Szabó e Szolnoki (2008), Santos, Dorogovtsev e Mendes (2014), Pinheiro (2016), Leivas (2018) e Li, Xu e Zhang (2019) dedicaram seus estudos para investigar a evolução da cooperação em diferentes tipos de estruturas (regulares e/ou complexas), Bahbouhi e Moussa (2017) para investigar como as trocas de usuário afetam a confiança dos indivíduos no comércio eletrônico, e O'Connor (2019) para compreensão da evolução da psicologia moral.

Em estudos recentes, a mobilidade tem sido adicionada nas investigações do jogo evolutivo do dilema dos prisioneiros como mecanismo de promover a capacidade da cooperação. Além das interações, os jogadores podem agora se deslocar na rede. Alguns trabalhos com mobilidade podem ser citados como Vainstein, Silva e Arenzon (2007), Meloni et al. (2009), Sicardi et al. (2009), Canova (2011), Gibbons, O'Riordan e Griffith (2016), Cardinot et al. (2019) e Li, Jiang e Perc (2021).

Assim, o jogo evolutivo do dilema dos prisioneiros pode ser aplicado em diversas áreas e contextos, e neste trabalho o enfoque foi em investigar a evolução da cooperação com e sem mobilidade em diferentes redes: rede quadrada com condições de contorno periódica, rede de mundo pequeno e rede regular aleatória (*Random Regular Network (RRN)*). A rede quadrada é um grafo k -regular, onde todos os vértices possuem conexões com k arestas (grau k). As duas últimas são classificadas como redes complexas. O termo redes complexas refere-se a um grafo com estrutura topológica não trivial, composta por um conjunto de nós (vértices) interligados por meio de arestas, aos quais são atribuídos significados físicos (METZ et al., 2007). Essas redes são subdivididas de acordo com suas propriedades estruturais, sendo que as de mundo pequeno apresentam um alto agrupamento entre seus vértices e ao mesmo tempo caminhos com um comprimento médio pequeno (WATTS; STROGATZ, 1998; METZ et al., 2007). O modelo mais famoso para a modelagem de redes de mundo pequeno foi apresentada por Watts e Strogatz (1998), sendo, portanto, o modelo escolhido neste trabalho. Já as RRN possuem conexões aleatórias com um grau pré-estabelecido.

1.1 O problema de pesquisa

Há na literatura uma grande discussão sobre a influência da distribuição de conectividade entre agentes de um sistema complexo na evolução de um processo dinâmico. Além disso, são encontrados trabalhos com duas diferentes abordagens de interação entre os jogadores: jogadores interagem consigo mesmo (auto combate) e com os vizinhos, e jogadores interagem apenas com os vizinhos. A primeira abordagem é mais comum quando uma família ou muitos indivíduos ocupam um simples trecho, podendo ser vista em trabalhos como Nowak e May (1993) e Szabó e Tóke (1998). Já a segunda tem sido mais explorada

em trabalhos mais recentes como [Vukov, Szabó e Szolnoki \(2008\)](#), [Santos, Dorogovtsev e Mendes \(2014\)](#) e [Gibbons, O’Riordan e Griffith \(2016\)](#). Nossa proposta foi comparar a dinâmica do Dilema dos Prisioneiros em diferentes estruturas, com diferentes padrões de conectividade entre seus constituintes e verificar qual o impacto dos jogadores interagirem ou não com eles próprios na evolução da cooperação. Na dinâmica do jogo foi acrescentada a possibilidade dos jogadores trocarem de estratégias. O que é comumente encontrado na literatura é a dinâmica de imitações de estratégias, que também estudamos aqui. Dessa forma, o trabalho se divide em três partes: características estruturais, dinâmica evolutiva do dilema dos prisioneiros e dinâmica evolutiva do dilema dos prisioneiros com mobilidade de estratégia.

1.2 Objetivos

- Objetivo geral: Compreensão da influência da estrutura sobre dinâmicas evolutivas.
- Objetivos específicos:
 - (a) Modelagem de estruturas regulares e complexas;
 - (b) Modelagem da dinâmica de estratégias *Dilema dos prisioneiros*.

1.3 Metodologia

- (a) **Modelagem de estruturas regulares e complexas.** Para este objetivo, a metodologia consistiu na revisão bibliográfica sobre *estrutura de redes complexas*. Basicamente, estudamos três classes de redes: (i) redes regulares, em que todos seus vértices possuem um mesmo número de vizinhos ou, equivalentemente, todos os vértices possuem grau k ; (ii) redes regulares aleatórias que, embora todos seus vértices possuam grau k , as conexões entre pares de vértices são estabelecidas ao acaso. Por fim, estudamos o modelo [WS](#), que permite interpolar entre uma estrutura regular (grau k) e uma aleatória, em que o grau de cada vértice i passa a ser encontrado com valor em torno de um valor médio, $k_i \approx \langle k \rangle$. Neste sentido, o modelo [WS](#) permite a análise de uma região intermediária, caracterizada pela propriedade de mundo pequeno. Essa propriedade, bem como os modelos de redes estudados serão discutidos em mais detalhes.
- (b) **Modelagem da dinâmica de estratégias *Dilema dos prisioneiros*.** Para este objetivo, revisamos a literatura sobre teoria de jogos, particularmente a literatura recente sobre o Dilema dos prisioneiros. Depois, implementamos sua dinâmica em estruturas já relatadas na literatura para corroborar nova versão do modelo. Mais

detalhes sobre as implementações e o desenvolvimento serão discutidas do decorrer do texto.

Com a combinação das etapas (a) e (b), pudemos obter resultados que nos auxiliaram em nosso objetivo geral, de uma compreensão dos mecanismos estruturais que possuem influência sobre a dinâmica do Dilema dos prisioneiros. Na próxima seção, apresentamos como o trabalho foi organizado para apresentar cada detalhe de seu desenvolvimento e os resultados alcançados.

1.4 Organização do trabalho

O restante deste trabalho é organizado como se segue. No capítulo 2 é apresentado uma breve revisão bibliográfica sobre os jogos evolutivos do dilema dos prisioneiros, redes regulares, redes complexas e trabalhos relacionados. No capítulo 3 é abordado em detalhes o modelo desenvolvido, sendo dividido em redes (seção 3.1), dinâmica do jogo evolutivo do dilema dos prisioneiros (seção 3.2) e dinâmica com mobilidade de estratégia (seção 3.3). No capítulo 4 mostramos nossos resultados, e finalmente, no capítulo 5 apresentamos nossas considerações finais e propostas para trabalhos futuros.

2 Revisão bibliográfica

Neste capítulo são apresentados os principais conceitos referentes aos jogos evolutivos do dilema dos prisioneiros (seção 2.1), redes regulares (seção 2.2) e redes complexas (seção 2.3). Na seção 2.4 são trazidos os principais trabalhos relacionados utilizados como apoio na construção do modelo.

2.1 Jogos Evolutivos do Dilema dos Prisioneiros

Uma teoria que tem sido cada vez mais utilizada no estudo de fenômenos econômicos, biológicos e sociais é a Teoria dos Jogos. Com registros antigos, desde o século XVIII, a teoria dos jogos começou a atrair atenções de diversas áreas após a publicação da obra clássica “*Theory of Games and Economic Behavior*” de Von Neumann e Morgenstern (SARTINI et al., 2004). Ela consiste em uma teoria matemática para modelar fenômenos que podem ser observados quando dois ou mais agentes de decisão se interagem, possibilitando os agentes, sob condições de conflitos, optarem por uma ou mais estratégias. Entretanto, como uma teoria matemática pura, essa também tem sido estudada em sua essência, sem relacionar-se com problemas comportamentais ou jogos (SARTINI et al., 2004).

O dilema dos prisioneiros é um clássico da teoria dos jogos, sendo um jogo de soma não-zero apresentado por Albert W. Tucker¹ em 1950. No jogo, os jogadores podem optar por uma das duas estratégias: cooperar C ou desertar D , e dependendo das escolhas dos envolvidos, cada um receberá uma recompensa (T , R , P ou S). O jogo ocorre aos pares, e os valores das recompensas são definidos conforme matriz de *payoffs* pré-estabelecida. Caso ambos os jogadores optem pela cooperação, cada um receberá uma *Reward* R , mas se ambos preferirem a deserção, receberão, cada um, uma *Punishment* P . Os jogadores, ainda podem optar por estratégias diferentes, e nesse caso, o que escolher cooperar recebe um *Sucker’s payoff* S , e o que desertar, uma *Temptation to defect* T (SZABÓ; TÓKE, 1998; SZABÓ; FATH, 2007; VUKOV; SZABÓ; SZOLNOKI, 2008; SIGMUND, 2010). A escala do jogo pode ser definida como:

$$T > R > P > S. \quad (2.1)$$

Normalmente é assumido $2R > T + S$, pois, “do contrário, um acordo para alternar C ou D , fora de fase, supera a cooperação, obscurecendo a análise”. Mas isso não é imprescindível (NOWAK; MAY, 1993, p. 36).

¹ Albert William Tucker nomeou e apresentou a primeira interpretação do dilema dos prisioneiros em contribuição ao modelo de conflito e cooperação que M. Flood e M. Dresher estavam desenvolvendo em Princeton (DEULOFEU, 2018).

Devido essa escala, independentemente da escolha do oponente, o melhor para o jogador é desertar D , como pode ser visto na tabela 1. Se ambos os jogadores buscarem maximizar seu ganho, no final terá um resultado subótimo, e nenhum jogador terá incentivo para mudar de estratégia. Neste caso, teremos o chamado ‘Equilíbrio de Nash’. O equilíbrio de Nash pode ser compreendido como a combinação de estratégias ótimas de cada jogador, pensando nas melhores respostas em contraposição às estratégias dos outros jogadores. É a melhor previsão para o resultado do jogo (AZEVEDO; CARVALHO; SILVA, 2011).

Tabela 1 – Relação de payoff para jogador 1

		se jogador II joga C	se jogador II joga D
payoff para jogador 1	se jogador I joga C	R	S
	se jogador I joga D	T	P

Fonte: Traduzido de Sigmund (2010).

Os jogos evolutivos são jogados por populações e em ciência social “baseiam-se numa ideia de processo que envolve seleção, mutação e sobrevivência de estratégias” (PRADO, 1999, p. 255). Os jogos evolutivos do dilema do prisioneiro foram introduzidos por Axelrod e Hamilton (1981), desde então a simulação tornou-se uma ferramenta muito utilizada na área política, econômica e social.

Diferente dos jogos clássicos, que pressupõe que os agentes (jogadores) tenham objetivos bem definidos e consistentes, e preferências que podem ser descritas por uma função utilitária², os evolutivos consideram a racionalidade limitada. A racionalidade limitada diz respeito às restrições cognitivas dos agentes, quando há um custo para a coleta das informações pertinentes ao jogo, e esses não têm preferências consistentes ou quando o conhecimento comum da racionalidade dos jogadores falha (SZABÓ; FATH, 2007).

A dinâmica de jogos evolutivos pode ser descrita pela equação do replicador. Essa apareceu inicialmente no contexto de jogos biológicos, sendo que o *payoff*, nesse caso, corresponde ao sucesso reprodutivo dos indivíduos (SIGMUND, 2010; BINI, 2014). Em jogos econômicos, apesar das estratégias não serem herdadas como nos jogos biológicos, elas podem ser transmitidas através do aprendizado social. Ao assumir que os indivíduos se imitam, a equação do replicador pode ser utilizada, porém, é necessário ter em mente que nem todos os mecanismos de imitação leva à essa equação (SIGMUND, 2010). Ela pode ser descrita como:

$$\dot{x}_i = x_i(f_i(x) - \bar{f}(x)) \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

sendo

² Medida de satisfação que o jogador obtém de um determinado resultado do jogo, tendo o jogador o objetivo de maximizar sua utilidade. Cada agente terá sua função utilitária, sendo que esse mudará e estruturará continuamente o cenário em busca do seu ideal individual egoísta (SZABÓ; FATH, 2007).

$$f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (2.3)$$

e

$$\bar{f}(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i \quad (2.4)$$

em que a equação (2.2) considera que a evolução da densidade x_i do indivíduo i é proporcional à diferença do seu *fitness* (*payoff*) $f_i(x)$ e o *fitness* médio da população $\bar{f}(x)$. Dessa forma se a diferença entre eles for positiva, maior será o crescimento de x_i , e do contrário, se a diferença for negativa, maior o decréscimo de x_i . Os valores de *fitness* podem ser determinados por meio de uma matriz de *payoffs*, onde cada elemento a_{ij} da matriz representa o *payoff* recebido do indivíduo i ao interagir com o indivíduo j (BINI, 2014).

Os agentes limitados racionalmente buscam melhorar seus *payoffs* adotando a substituição de estratégias. Essa surge por meio de imitação e aprendizagem, sendo que as oportunidades de atualizações de estratégias podem ser síncronas ou assíncronas. Em atualizações síncronas, toda a população é atualizada simultaneamente em intervalos de tempos discretos. Já nas assíncronas ou sequenciais aleatórias, os jogadores atualizam suas estratégias independentemente um do outro.

Algumas regras de atualizações de estratégias podem ser determinísticas, genericamente estocásticas ou ainda com pequenos componentes estocásticos representando mutações aleatórias. Um processo estocástico pode ser definido como um conjunto de variáveis aleatórias indexadas a uma variável (geralmente variável de tempo), representado por $\{X(t), t \in T\}$. Diferente do caso determinístico, onde uma função $f(t)$ recebe valores bem definidos ao longo do tempo, um processo estocástico recebe valores aleatórios ao longo do tempo. A variável tempo é, por definição, uma variável contínua, mas pode ser ‘discretizada’, utilizada como discreta, se os fenômenos puderem ser observados a intervalos regulares (ALVES; DELGADO, 1997).

Nowak e May (1993) introduziram o jogo evolucionário espacial do dilema dos prisioneiros, a fim de explorar se os efeitos espaciais são suficientes para a evolução da cooperação. Para a definição das regras do jogo, é necessário considerar a hipótese de que as populações não são completamente homogêneas, mas possuem certa estrutura espacial; e os jogadores (pessoas, animais ou moléculas) estão localizados em pontos (células, territórios) dessa estrutura, e que esses estão mais propícios a interagir com os seus vizinhos. Nesse sentido, a interação de um jogador com o outro depende, de forma não trivial, da forma que a população está estruturada (NOWAK; MAY, 1993). A interação dos jogadores é descrita pela matriz de *payoffs*:

	C	D
C	1	0
D	b	0

Se dois cooperadores interagem entre si, recebem 1 ponto. Se um desertor tira proveito de um cooperador, ele recebe o *payoff* b e o cooperador 0. Porém a interação entre dois desertores, ambos recebem 0. Para tornar o jogo mais simples, há apenas um parâmetro o b que dá vantagem aos desertores. Vale ressaltar que caso seja assumido que muitos animais ou uma família ocupam um simples trecho, pode ser incluído o jogo consigo mesmo (auto combate), porém, como as propriedades gerais não dependem desse fato, o jogo também pode ser assumido sem essa interação (NOWAK; MAY, 1993).

Nowak e May (1993) em seus estudos optaram pelo jogo determinístico em redes quadradas com 4 e 8 vizinhos e hexagonal com 6 vizinhos, sendo que em cada geração, o *payoff* de um jogador consistia na soma de todas as interações com os vizinhos, e para atualização de estratégia era considerada a que recebeu o maior retorno entre todos os vizinhos do agente, incluindo o próprio. Eles descobriram que os efeitos espaciais alteram o resultado final do sistema, dependendo da estrutura e da vizinhança, e que podem coexistir estratégias que não coexistiam em populações homogêneas.

Em estudos recentes, a mobilidade tem sido adicionada nas investigações do jogo evolutivo do dilema dos prisioneiros como mecanismo de promover a capacidade da cooperação. Particularmente, como uma característica de humanos e animais, a mobilidade pode diminuir a competição dos indivíduos por recursos locais limitados e evitar retaliações mútuas, o que atrai a atenção para explorar mecanismos mais eficazes (LI; JIANG; PERC, 2021).

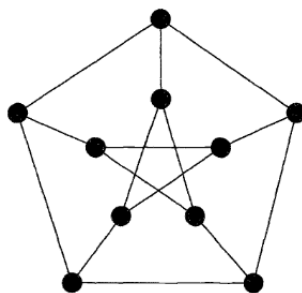
Em conformidade com Li, Jiang e Perc (2021), as pesquisas teóricas ou práticas sobre a mobilidade se concentram principalmente na mobilidade impulsionada por alguns fatores como, por exemplo, maior retorno. Esses mecanismos buscam parceiros cooperadores ou evitam desertores. O comportamento comum de alienar desertores sem interagir com eles é uma espécie de punição. Sem interação, sem ganhos. Entretanto esse fato pode favorecer os desertores a se espalharem em grupos cooperativos, já que eles podem se alienar de outros desertores (LI; JIANG; PERC, 2021). Estudos envolvendo a velocidade dos agentes também surgiram, podendo citar como exemplo, Meloni et al. (2009). Em sua pesquisa, Meloni et al. (2009) chegaram a conclusão que um sistema totalmente cooperativo é sustentado quando a *temptation* e a velocidade dos agentes não são muito altas.

2.2 Redes regulares

Pode-se dizer que uma rede regular é um grafo, sendo assim estudado pelo ramo da matemática ‘Teoria dos Grafos’. Um grafo é constituído por um conjunto não vazio

de vértices V ($|V| \geq 1$) e pares não ordenados³ desses vértices chamados de arestas E . Ele pode ser utilizado para representar diversas situações, como por exemplo um jogo de futebol. Nesse caso, os times poderiam ser os vértices e as arestas, os jogos. O grau de um vértice é o número de arestas que incidem a ele, nesse exemplo, o grau de um vértice v seria o número de jogos realizados pelo time v . Um grafo é dito k -regular ou regular de grau k quando todos os vértices tem o mesmo grau k . A figura 1 mostra um exemplo de grafo regular de grau 3 (WILSON, 1996).

Figura 1 – Exemplo de grafo regular



Fonte: Wilson (1996)

Alguns exemplos de grafos regulares podem ser citados, como grafos nulos, grafos completos e grafos platônicos. Grafos nulos ($N_n, n = |V|$) consistem em grafos com o conjunto de arestas vazio (grau 0). Grafos completos (K_n) são grafos simples⁴ no qual cada par de vértices distintos são adjacentes, eles possuem $n(n - 1)$ arestas. Por fim grafos platônicos são formados pelos cinco sólidos regulares: tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro e dodecaedro (figura 2) (WILSON, 1996).

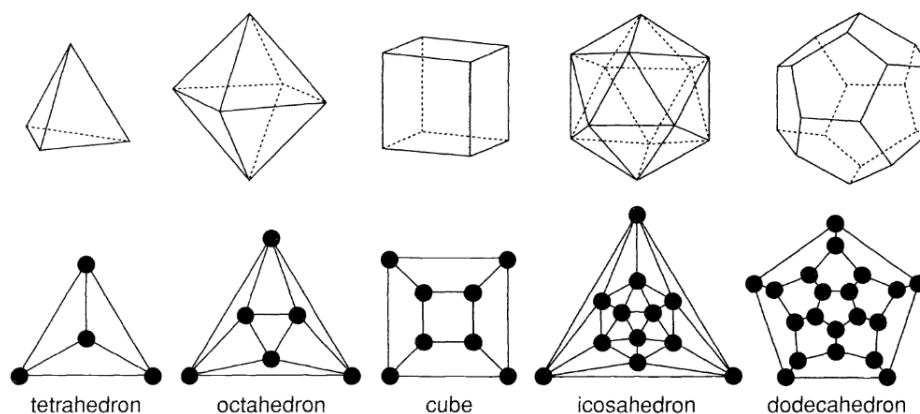
2.3 Redes Complexas

O estudo das redes complexas é um tema interdisciplinar que abrange várias áreas como as Ciências da Computação, Matemática, Física e Biologia. Ele surgiu em meados dos anos de 1930, quando sociólogos as utilizaram para estudar o comportamento da sociedade e a relação com os indivíduos. Assim, as redes sociais eram representadas por grafos, onde os indivíduos eram representados por vértices e suas interações por arestas. As pesquisas na área baseavam-se em características muito peculiares das redes como a centralidade (vértice mais central) e a conectividade (vértices com maior número de

³ Quando a família de arestas são formados por vértices ordenados, alegamos que é um grafo orientado ou direcionado.

⁴ Um grafo simples G consiste em um conjunto finito não vazio $V(G)$ de elementos chamados vértices e um conjunto finito $E(G)$ de pares não ordenados distintos de elementos distintos de $V(G)$ chamados arestas.

Figura 2 – Grafos platônicos



Fonte: [Wilson \(1996\)](#)

conexões), as quais eram utilizadas, por exemplo, para determinar quais indivíduos se relacionavam mais com os demais ou quais eram os mais influentes ([METZ et al., 2007](#)).

As redes complexas podem ser usadas para modelar diversos aspectos da vida real, como redes de computadores, redes sociais, redes organizacionais, conteúdos da internet, redes neurais, cadeia alimentar, entre outras. Existem três principais tipos de redes complexas: redes aleatórias, redes de mundo pequeno e redes sem escala ([METZ et al., 2007](#)).

As redes aleatórias são as mais simples das redes complexas. O modelo proposto por [Erdős e Rényi \(1960\)](#) é um clássico na literatura, sendo que nesse, as arestas não são direcionadas e são adicionadas aleatoriamente entre um número fixo de N vértices. Cada aresta é adicionada com uma probabilidade p , em que p é a probabilidade de um vértice se conectar com um outro qualquer. O número de arestas nesse modelo segue a distribuição de *Poisson* com um limite máximo de N . O processo de construção é aleatório, no sentido de que os vértices se agregam aleatoriamente e todos os vértices tem aproximadamente a mesma quantidade de conexões e a mesma chance de receber novas ligações ([METZ et al., 2007](#)).

Um modelo especial das redes aleatórias é a rede regular aleatória (*Random Regular Network (RRN)*). Ela possui distribuição das conexões ao acaso, mas com um grau pré-estabelecido. Em conformidade com [Wormald et al. \(1999\)](#), os resultados encontrados em *RRN* podem ser usados para mostrar que existem redes com combinações particulares de propriedade, como por exemplo, grafos k -regulares que são k -conectados, têm circunferência arbitrariamente grande, são hamiltonianos⁵ e não têm automorfismos⁶ não triviais.

As redes de mundo pequeno consistem em “redes regulares ‘religadas’ para introduzir

⁵ Grafos hamiltoniano possui um ciclo formado com todos os seus vértices, sendo que cada vértice só aparece uma vez no ciclo.

⁶ Automorfismo é a característica de um objeto mapear nele mesmo mantendo sua estrutura.

quantidades crescentes de desordem”. Elas receberam esse nome por analogia ao fenômeno do mundo pequeno, popularmente conhecido como seis graus de separação (WATTS; STROGATZ, 1998, p. 440).

O efeito mundo pequeno é observado em redes que a maioria dos vértices se conecta a outros através de um caminho mínimo (METZ et al., 2007). Esse efeito fica claro com o experimento conduzido por Stanley Milgram nos anos de 1960, nos Estados Unidos. Ele pediu aos participantes que encaminhassem uma carta para um único conhecido até que a mesma chegasse a um destinatário específico em Boston. Das cartas que chegaram, Milgram descobriu que o comprimento médio da cadeia era aproximadamente 6 (KLEINBERG, 2004).

O modelo mais famoso para a modelagem de redes de mundo pequeno foi apresentado por Watts e Strogatz (1998). Conforme Watts e Strogatz (1998), muitos sistemas, como muitas redes biológicas, tecnológicas e sociais, podem ser altamente agrupados e possuir ao mesmo tempo pequenos comprimentos característicos para os caminhos que ligam quaisquer dois vértices na rede. Nesse sentido, o modelo que eles propuseram permite a interpolação entre uma rede regular e uma aleatória, à medida que uma fração de *links* são redirecionados entre os vértices. Essa fração pode ser dimensionada em uma probabilidade p de redirecionamento de *links*: uma espécie de ‘sintonizador’ do grau de aleatoriedade para as ligações entre os vértices. Matematicamente, o menor caminho médio $\langle \ell \rangle$ entre dois vértices aumenta com o logaritmo do tamanho N do sistema (ou ainda mais lento). Isto é, $\langle \ell \rangle \sim \ln N$.

Por fim, as redes sem escala correspondem as “redes com poucos vértices altamente conectados, denominados *hubs*, e muito vértices com poucas conexões” (METZ et al., 2007, p. 8). Ou seja, uma das principais características é a conexão preferencial, em que um novo vértice tem a tendência de se conectar a um vértice com alto grau de conexão. Como exemplos desse tipo de rede, podemos citar, dentre diversos outros, a *Internet*, a *WEB* e redes de metabolismo (STROGATZ, 2001; METZ et al., 2007).

2.4 Trabalhos Relacionados

Com o objetivo de estudar a densidade de cooperadores no estado estacionário, Szabó e Tóke (1998) aplicaram o dilema dos prisioneiros em uma rede quadrada, acatando a evolução em tempo contínuo semelhante a Huberman e Glance (1993). Nesse modelo, os jogadores são atualizados em uma sequência randômica, possuindo a oportunidade de trocar de estratégia com os seus vizinhos com a probabilidade dependendo da diferença de *payoffs* entre eles, sendo considerado tanto a interação dos vizinhos quanto a interação consigo mesmo. Para análise utilizaram a simulação Monte Carlo e técnicas de *clusters* dinâmicos. Em seus estudos, mostraram que o sistema exibe uma transição contínua entre

os dois estados absorventes (C ou D) quando se varia os valores de *temptation to defect*. Quando $c \rightarrow 0$, os cooperadores podem sobreviver se formarem colônias dispersas no mar de desertores, entretanto esses as tornam raras. Também foi verificado que em comparação com a versão determinística, a região ativa (coexistência de desertores e cooperadores) é reduzida pela versão estocástica. Além disso, eles observaram uma transição crítica pertencente à classe de universalidade de percolação direcionada nos limites $c \rightarrow 0$ e 1.

Classe de universalidade diz respeito a capacidade de sistemas de naturezas distintas poderem apresentar valores para os expoentes críticos semelhantes entre si, permitindo fazer previsões sobre o comportamento crítico do sistema. Essa característica permite realizar o estudo da criticalidade em sistemas de natureza muito mais simples, mas com algumas propriedades básicas em comum. O comportamento crítico do sistema é aquele que ocorre próximo ao ponto crítico. Este ponto é o que separa o sistema em duas fases distintas, no caso (C e D). As classes de universalidade são definidas pelos expoentes críticos e por suas funções de escalas. A percolação, por exemplo, é descrita por “uma rede de canais aleatórios (ligações), por onde escoo um fluido determinístico”. O modelo de percolação sonda a transição entre a fase impermeável e permeável ao líquido, sendo que se esse escoo em qualquer direção é chamado de percolação isotrópica e caso escoo em uma direção preferencial, de percolação direcionada (SILVA, 2013, p. 17-21).

Vukov, Szabó e Szolnoki (2008) também aplicaram o jogo considerando a evolução em tempo contínuo, porém optaram por trabalhar em uma rede unidimensional com 4 vizinhos e em uma rede Newman-Watts⁷ (NEWMAN; WATTS, 1999) com $p = 0,02, 0,06$ e $0,1$. Isso ocorreu pois, em investigações sistemáticas anteriores, foi esclarecido que os cooperadores podem sobreviver para atualizações sequenciais aleatórias em redes regulares com 4 vizinhos devido a presença de triângulos sobrepostos em um local na estrutura da rede. Esses triângulos permitem que a cooperação seja disseminada quando o sistema é submetido a baixos níveis de ruídos. Por isso, o objetivo foi examinar estruturas que são totalmente abrangidas por triângulos sobrepostos (que os triângulos sobrepostos formam uma estrutura unidimensional), e verificar o que ocorre na introdução de novos *links* nessa rede. Usando simulações Monte Carlo e versões estendidas da teoria dinâmica dos campos médios, eles perceberam que essas características topológicas resultam em um diagrama de fases *temptation to defect* por ruído, onde três fases (C , D e estado misto) podem existir com valores especiais de parâmetros. Com o diagrama, foi possível visualizar a existência de um nível de ruído ótimo para a sobrevivência dos cooperadores e presença de ponto tricrítico (onde as três fases podem coexistir). Na adição de novos *links* na estrutura de conectividade da rede, o diagrama foi drasticamente modificado. Na nova estrutura, a característica de poder manter a cooperação para $b > 1$ na presença de baixos ruídos foi destruída, a região do estado misto se mostrou mais ampla para maiores valores de p , e o

⁷ Rede de mundo pequeno cuja construção se baseia na adição de links entre pares de nós escolhidos aleatoriamente com probabilidade p .

ponto tricrítico desapareceu.

Já Li, Jiang e Perc (2021) investigaram o dilema dos prisioneiros evolutivos considerando a mobilidade dos jogadores, onde indivíduos com desertores em sua vizinhança podem mover ou atualizar suas estratégias. Os jogadores tem a probabilidade p de se mudarem caso sejam explorados por desertores e $p - 1$ de ficarem e aprenderem a estratégia que obtém o maior retorno da última rodada entre os vizinhos diretos. A interação social neste caso foi simulada utilizando uma rede regular $M * M <k = 4>$ (*Von Neumann neighborhood*), sendo cada nó ocupado por um jogador ou vazio. Diferente de Szabó e Tóke (1998) e Vukov, Szabó e Szolnoki (2008), Li, Jiang e Perc (2021) utilizaram a matriz de *payoffs* com $s = -0, 1$. Além disso, adotaram dois parâmetros para verificação da universalidade do mecanismo em dilemas de diferentes intensidades: $D_g (D_g = T - R = b - 1, 0 \leq D_g \leq 1)$ e $D_r (D_r = P - S = -S, 0 \leq D_r \leq 1)$. Quando D_g e D_r são positivos, Li, Jiang e Perc (2021) observaram que os desertores dominam os cooperadores mais favoravelmente quando qualquer um dos dois parâmetros é maior. Ademais notaram também que a alienação dos desertores reforçam aglomerados cooperativos maiores e mais compactos, porém, o número de *clusters* cooperativos dependem da viscosidade da rede de interação, onde a reciprocidade da rede ainda funciona bem.

Szabó e Tóke (1998), Vukov, Szabó e Szolnoki (2008) e Li, Jiang e Perc (2021) limitaram seus estudos em redes com grau $<k = 4>$, nesse trabalho buscamos explorar diferentes números de vizinhos k e verificar o impacto na cooperação no sistema. Apesar de Vukov, Szabó e Szolnoki (2008) trabalharem em uma rede de mundo pequeno, o modelo adotado por eles é construído pela adição de *links*, restringindo o mínimo de 4 vizinhos por jogador. Neste trabalho, escolhemos o modelo de Watts e Strogatz (1998) que considera o redirecionamento de *links*, permitindo, portanto, jogadores com menos de 4 vizinhos. Além das redes quadradas e de mundo pequeno, acrescentamos em nosso projeto a rede regular aleatória, permitindo um comparativo entre as redes.

Em conformidade com Nowak e May (1993), caso seja assumido que muitos nós ocupam um simples trecho, pode ser incluído o jogo consigo mesmo (auto combate). Na literatura, os autores escolhem uma das abordagens. Szabó e Tóke (1998), por exemplo assumiram o auto combate, enquanto Vukov, Szabó e Szolnoki (2008) e Li, Jiang e Perc (2021) consideraram apenas o jogo do jogador com sua vizinhança. Neste trabalho, exploramos as duas abordagens em todas as redes estudadas para verificar o quanto a escolha influência no nível de cooperação do sistema. Ademais, Li, Jiang e Perc (2021) permitiram a mobilidade dos jogadores que possuíam desertores em sua vizinhança. Aqui, consideramos uma abordagem mais simples, os jogadores são estáticos e podem trocar de estratégias entre si. Muitas redes possuem os nós estáticos como, por exemplo, redes de sensores sem fio e pontos de acessos à *Internet*, por isso optamos por esse critério acreditando trazer contribuição para a área.

3 Desenvolvimento

Nesse capítulo é apresentado o modelo utilizado para as investigações do dilema. Na seção 3.1 expomos as redes utilizadas, na seção 3.2 a dinâmica do jogo e na seção 3.3 explicitamos a adição da mobilidade simples na dinâmica. O modelo foi desenvolvido na linguagem de programação *C*.

3.1 Redes

Para facilitar a dinâmica do jogo, uma rede de N jogadores é representada com três vetores: um indicando a vizinhança (*viz*) dos jogadores, outro contendo o número de vizinhos (*nViz*) de cada jogador e o terceiro com a posição (*pos*) de onde inicia a vizinhança dos jogadores. Considerando o jogador $jog \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ e adotando como exemplo uma rede de 6 jogadores, temos a seguinte representação:

$$viz = [1 \ 2 \ 5 \ 4 \ 2 \ 3 \ 0 \ 5 \ 3 \ 4 \ 1 \ 0 \ 4 \ 5 \ 2 \ 1 \ 3 \ 2 \ 5 \ 1 \ 4 \ 3 \ 0 \ 1] \quad (3.1)$$

$$nViz = [4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4] \quad (3.2)$$

$$pos = [0 \ 4 \ 8 \ 12 \ 16 \ 20] \quad (3.3)$$

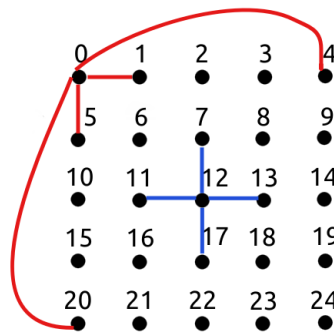
Seguindo esse exemplo, podemos observar que o jogador 0 possui como vizinhos os jogadores 1, 2, 5 e 4 e o jogador 2, os vizinhos 3, 4, 1 e 0. O início da vizinhança do jogador e quantos vizinhos devem ser considerados no vetor *viz* (equação 3.1) podem ser facilmente encontrados acessando os vetores *pos* (equação 3.3) e *nViz* (equação 3.2) na posição correspondente do jogador, por exemplo, para o jogador 0 acessamos a posição 0 e para o jogador 1, a posição 1.

O jogo evolutivo do Dilema dos Prisioneiros foi estudado em uma rede regular de 4 vizinhos ($k = 4$), rede regular aleatória (*Random Regular Network (RRN)*) e em uma rede *Watts e Strogatz (1998) (WS)* com probabilidade de religação $p = 0,0$ (regular), $p = 0,1$ (mundo pequeno) e $p = 1,0$ (aleatória). Essas últimas com $k = [4, 128]$ (intervalo logarítmico).

A rede mais simples de todas, a rede regular utilizada, consiste em uma rede quadrada com condições de contorno. A rede consiste em uma matriz $l \times l$, em que cada

nó dessa matriz é um jogador *jog*. Cada jogador *jog* possui dois vizinhos na vertical (parte superior e parte inferior) e dois vizinhos na horizontal (lateral direita e lateral esquerda). A figura 3 mostra um exemplo de uma rede quadrada com lado $l = 5$. Neste exemplo, o jogador 0 tem como vizinhos os jogadores 1, 4, 5 e 20, e o jogador 12, como vizinhos 7, 11, 13 e 17. Como podemos observar na figura 3, as bordas da rede se conectam, a extremidade superior se liga a extremidade inferior e a extremidade direita se liga a extremidade esquerda, permitindo todos os jogadores terem 4 vizinhos. Assim, o jogador 21, por exemplo, tem como vizinhos 1, 16, 20 e 22.

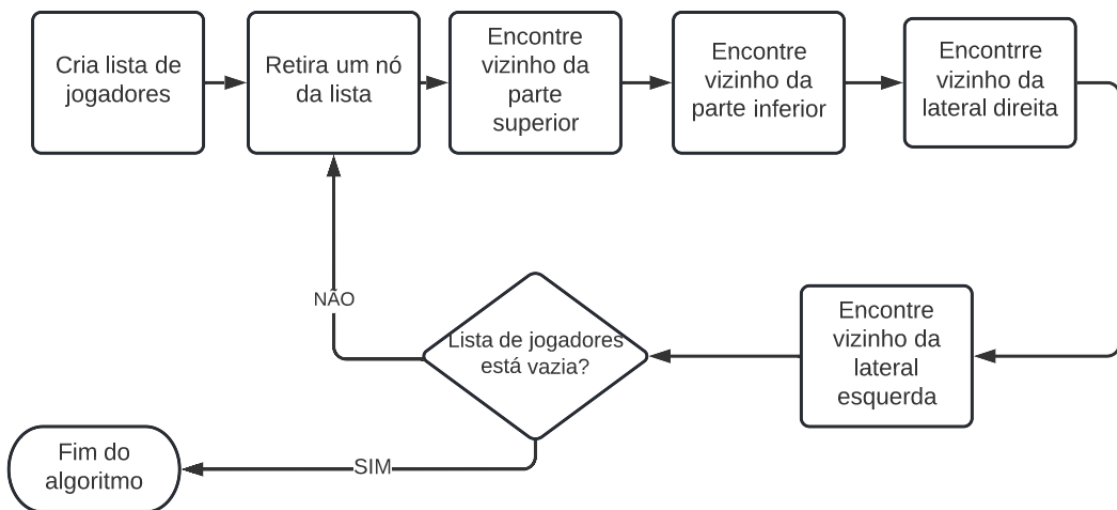
Figura 3 – Exemplo de rede quadrada com condições de contorno



Fonte: Elaborado pelo autor

A figura 4 mostra um fluxograma para construção da rede quadrada. Inicia-se com uma lista auxiliar de jogadores e para cada jogador encontra-se os quatro vizinhos (2 na horizontal e dois na vertical). A representação da rede é dada pelo vetor *viz* (equação 3.1), *nViz* (equação 3.2) e *pos* (equação 3.3).

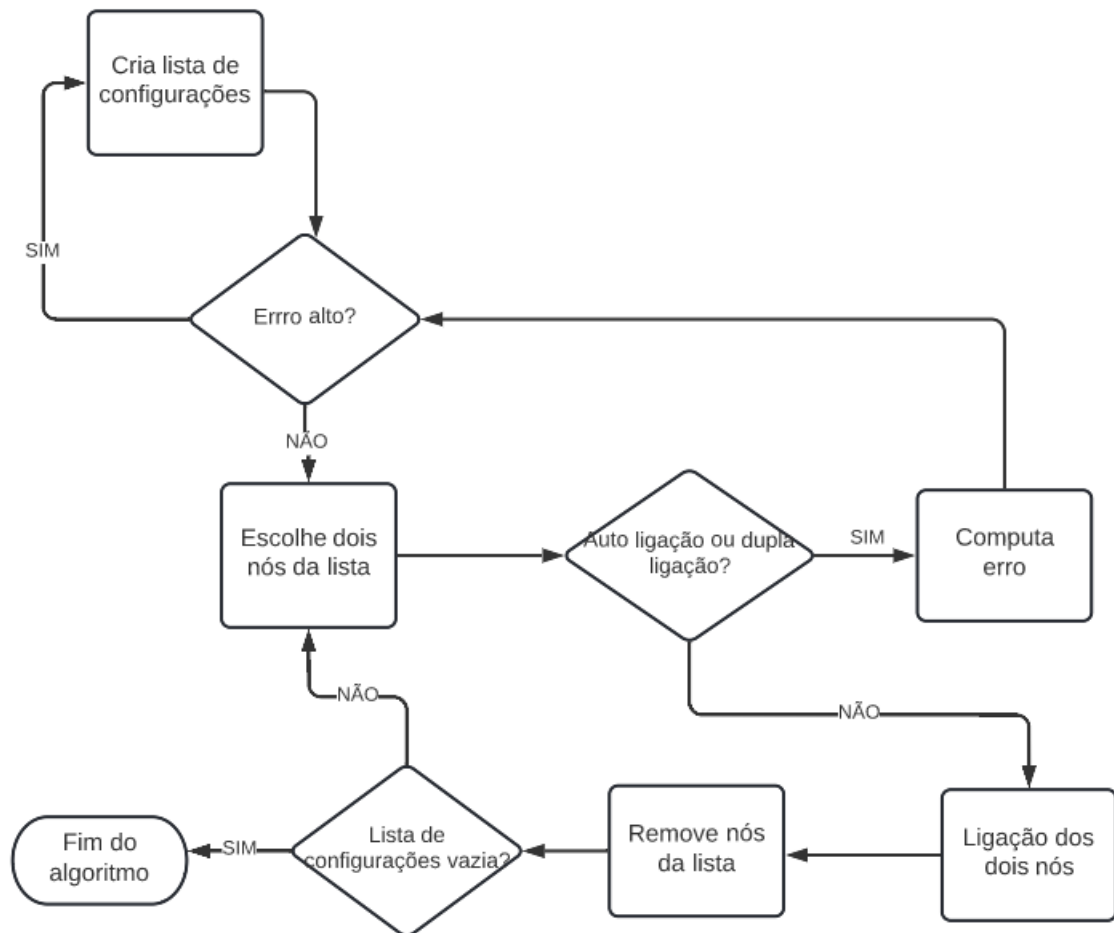
Figura 4 – Fluxograma de construção de uma rede quadrada



Fonte: Elaborado pelo autor

A rede regular aleatória é um caso especial da rede aleatória, distribui conexões ao acaso, porém, com um grau pré-estabelecido k . Ela pode ser construída utilizando o modelo de configurações, como pode ser visto no fluxograma apresentado na figura 5 e detalhado no algoritmo 1. Inicia-se com uma lista de configurações em que cada jogador $jog \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ é repetido k vezes (linhas 10 a 17). Então, escolhe-se dois nós dessa lista (linhas 26 e 28) e, caso a ligação entre eles não gerar auto ligação ou dupla ligação, eles são ligados e removidos da lista (linhas 29 a 34). Ressalta-se que a função ‘`naoExisteAresta`’ (29) avalia tanto a existência de dupla ligação quanto o fato da vizinhança de x e y estar completa. O processo se repete até que a lista esteja vazia. Caso durante o ciclo, o número de auto ligações ou duplas ligações apurados for muito alto (erro alto), as linhas 21 a 24 reiniciam o processo.

Figura 5 – Fluxograma de construção de uma rede regular aleatória



Fonte: Elaborado pelo autor

Algoritmo 1 Construção rede regular aleatória

```

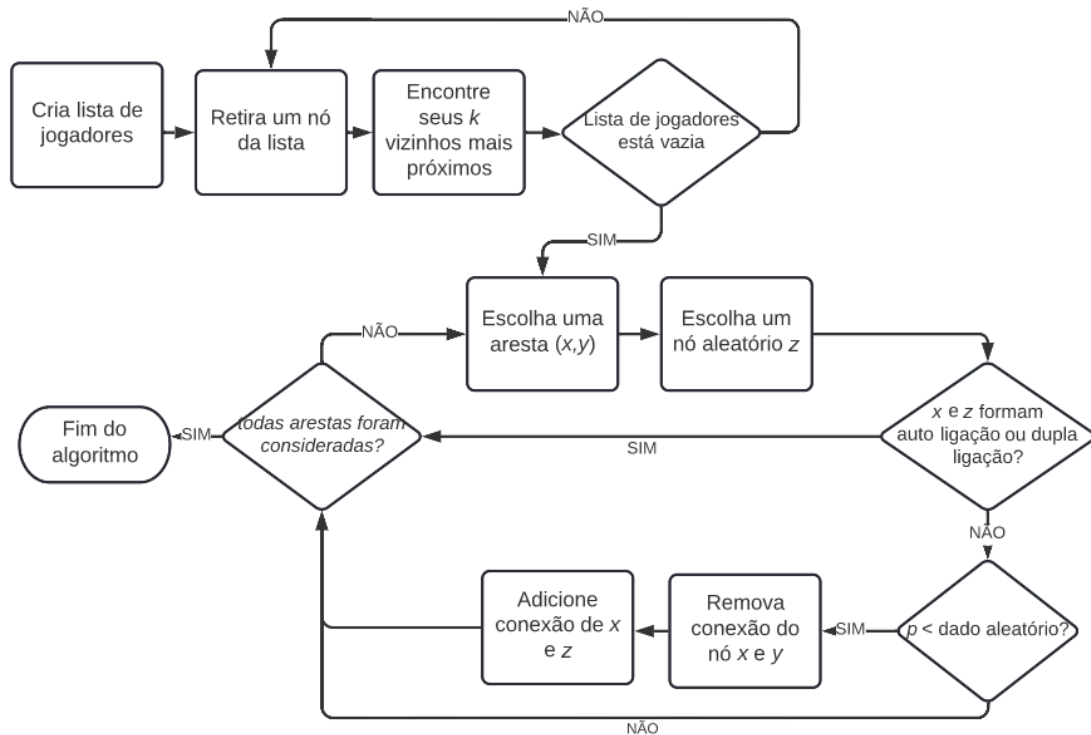
1: procedure RRN( $N, k$ )
2:    $lista \leftarrow []$ 
3:    $viz \leftarrow []$  ▷ Vizinhança (eq. 3.1)
4:    $pos \leftarrow []$  ▷ Posições (eq. 3.3)
5:    $nViz \leftarrow []$  ▷ Núm. vizinhos (eq. 3.2)
6:    $cErro \leftarrow 0$ 
7:    $i \leftarrow 0$ 
8:    $j \leftarrow 0$ 
9:    $p \leftarrow 0$ 
10:  for all  $i < N$  do
11:     $nViz[i] \leftarrow k$ 
12:     $pos[i] \leftarrow pos[i] + posAux$ 
13:     $posAux \leftarrow posAux + k$ 
14:    for all  $j < k$  do
15:       $lista[p] \leftarrow i$ 
16:       $viz[p] \leftarrow -1$ 
17:       $p \leftarrow p + 1$ 
18:   $listaAux \leftarrow copia(lista)$ 
19:   $s \leftarrow k * N$ 
20:  while  $s > 0$  do
21:    if erroAlto( $cErro$ ) then
22:       $lista \leftarrow copia(listaAux)$ 
23:       $cErro \leftarrow 0$ 
24:       $s \leftarrow k * N$ 
25:       $xi \leftarrow$  número inteiro aleatório  $\in [0, s - 1)$ 
26:       $x \leftarrow lista[xi]$ 
27:       $yi \leftarrow$  número inteiro aleatório  $\in [0, s - 1)$ 
28:       $y \leftarrow lista[yi]$ 
29:      if  $x \neq y$  & naoExisteAresta( $x, y, viz, pos, k$ ) then
30:         $pos, viz \leftarrow$  facaLigacao( $x, y, viz, pos, k$ )
31:         $lista \leftarrow$  removeDaLista( $xi, yi, lista$ )
32:         $s \leftarrow s - 2$ 
33:      else
34:         $cErro \leftarrow cErro + 1$ 
35:  return  $pos, nViz, viz$ 

```

Por fim, a rede de mundo pequeno foi construída seguindo o modelo sugerido por [Watts e Strogatz \(1998\)](#). A figura 6 traz um fluxograma para construção do modelo. Inicia-se com uma lista auxiliar de N jogadores, para cada jogador encontra-se os seus k vizinhos mais próximos de forma que os jogadores formem um anel (ver figura 9). Em seguida, as arestas da rede são redirecionadas com base em uma probabilidade p . O processo termina após todas as arestas terem sido consideradas uma vez.

O algoritmo 2 traz uma sugestão de pseudocódigo do modelo [Watts e Strogatz \(1998\)](#). No primeiro momento é feito um anel de N vértices, sendo cada vértice conectado

Figura 6 – Fluxograma de construção de uma rede Watts e Strogatz (1998)



Fonte: Elaborado pelo autor

com seus k vizinhos mais próximos (linhas 14 a 25). Os vizinhos são adicionados no vetor viz (equação 3.1) pela função ‘addVizinho’ (linhas 18 e 25). Em seguida é feita a reconexão das arestas (linha 26, com detalhamento no algoritmo 3). Seguindo o sentido horário, são escolhidos um vértice j e uma aresta que o conecta ao seu vizinho mais próximo (linha 6 do algoritmo 3). Com probabilidade p , essa aresta é reconectada a um vértice escolhido ao acaso $jogEsc$ (linha 7 do algoritmo 3) com proibição de duplicação de arestas. A restrição de duplicação de arestas é verificada pela função ‘naoExisteAresta’ (linha 8 do algoritmo 3) e as funções ‘removeConexao’ e ‘acrescenteConexao’ atualizam os vetores viz (equação 3.1), pos (equação 3.3) e $nViz$ (equação 3.2) com a nova vizinhança de j (linhas 10 a 12 do algoritmo 3). Esse processo é repetido movendo-se no sentido horário do anel, considerando cada vértice $j \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ até que uma volta seja completada. Em seguida, são consideradas as arestas que conectam os vértices em sua segunda vizinhança, no sentido horário (condição tratada no *loop* da linha 4 do algoritmo 3). Como anteriormente, cada uma dessas arestas são reconectadas com probabilidade p e o processo continuado, circulando ao redor do anel e avançando para os vizinhos mais distantes a cada volta. Esse processo ocorre até que cada aresta no grafo original tenha sido considerada uma vez. Como há $Nk/2$ arestas em todo o grafo, o processo de religação é interrompido após $k/2$ voltas. Vale ressaltar, que o efeito mundo pequeno é encontrado para valores intermediários de p , tipicamente para $10^{-3} < p < 10^{-1}$.

Algoritmo 2 Construção rede Watts e Strogatz

```

1: procedure WS( $N, k, p$ )
2:    $viz \leftarrow []$  ▷ Vizinhança (eq. 3.1)
3:    $pos \leftarrow []$  ▷ Posições (eq. 3.3)
4:    $nViz \leftarrow []$  ▷ Núm. vizinhos (eq. 3.2)
5:    $tam \leftarrow k - k/2$ 
6:    $i \leftarrow 0$ 
7:    $posAux \leftarrow 0$ 
8:    $pos[0] \leftarrow 0$ 
9:   for all  $i < N$  do
10:     $nViz[i] \leftarrow k$ 
11:     $pos[i] \leftarrow pos[i] + posAux$ 
12:     $posAux \leftarrow posAux + k$ 
13:    $i \leftarrow 0$ 
14:   for all  $i < tam$  do ▷ Vizinhos da esquerda
15:     for all  $j < N$  do
16:        $aux \leftarrow i + j + 1$ 
17:        $aux \leftarrow aux \bmod N$ 
18:        $viz \leftarrow \text{addVizinho}(aux, j, viz, k)$  ▷ Adicione o vizinho  $aux$  de  $j$  no vetor  $viz$ 
19:    $i \leftarrow 0$ 
20:    $tam \leftarrow k/2$ 
21:   for all  $i < tam$  do ▷ Vizinhos da direita
22:     for all  $j < N$  do
23:        $aux \leftarrow j + N - i - 1$ 
24:        $aux \leftarrow aux \bmod N$ 
25:        $viz \leftarrow \text{addVizinho}(aux, j, viz, k)$  ▷ Adicione o vizinho  $aux$  de  $j$  no vetor  $viz$ 
26:    $pos, nViz, viz \leftarrow \text{reconecteArestas}(pos, nViz, viz, k, p)$  ▷ Algoritmo 3
27:   return  $pos, nViz, viz$ 

```

Algoritmo 3 Construção rede Watts e Strogatz - Reconexão de arestas

```

1: procedure RECONNECTEARESTAS( $pos[], nViz[], viz[], k, p$ )
2:    $n = \text{tamanho}(pos)$ 
3:    $v \leftarrow 0$ 
4:   for all  $v < k/2$  do
5:     for all  $j < n$  do
6:        $vizinho \leftarrow \text{encontreVizinho}(j, v, pos, viz)$ 
7:        $jogEsc \leftarrow \text{número inteiro aleatório} \in [0, n - 1]$ 
8:       if  $j \neq jogEsc$  &  $\text{naoExisteAresta}(j, jogEsc, viz, pos, nViz)$  then
9:          $dado \leftarrow \text{número aleatório} \in [0, 1]$ 
10:        if  $dado < p$  then
11:           $viz, pos, nViz \leftarrow \text{removeConexao}(j, vizinho, viz, pos, nViz)$ 
12:           $viz, pos, nViz \leftarrow \text{acrescenteConexao}(j, jogEsc, viz, pos, nViz)$ 
13:   return  $pos, nViz, viz$ 

```

3.2 Dinâmica do jogo evolutivo do Dilema dos Prisioneiros

Pela simplicidade, o modelo foi baseado ao proposto por [Vukov, Szabó e Szolnoki \(2008\)](#) com algumas modificações. Assim, N jogadores são dispostos nos nós de uma rede (seção 3.1), os quais podem adotar as estratégias (S_x) cooperar (C) ou desertar (D). Os jogadores possuem a oportunidade de trocar de estratégia, essas atualizações são realizadas de forma assíncrona. O algoritmo 4 traz um pseudocódigo para revisão de estratégia.

Algoritmo 4 Revisão de estratégia

```

1: procedure REVISAOESTRATEGIA( $N$ ,  $pos[]$ ,  $nViz[]$ ,  $viz[]$ ,  $vetor[]$ )
2:    $payoffs \leftarrow []$ 
3:    $i \leftarrow 0$ 
4:   for all  $i < N$  do
5:      $payoffs[i] \leftarrow 0$ 
6:    $i \leftarrow 0$ 
7:   for all  $i < N$  do
8:      $x \leftarrow$  número inteiro aleatório  $\in [0, N - 1]$ 
9:      $y \leftarrow$  escolheVizinho( $pos$ ,  $nViz$ ,  $viz$ ,  $x$ )
10:     $payoffs[x] \leftarrow$  calculaPayoff( $x$ ,  $pos[]$ ,  $nViz[]$ ,  $viz[]$ ,  $vetor[]$ )       $\triangleright$  Alg. 5
11:     $payoffJogador \leftarrow payoffs[x]$ 
12:    if  $vetor[x] \neq vetor[y]$  then
13:       $payoffVizinho \leftarrow payoffs[y]$ 
14:       $dado \leftarrow$  número aleatório  $\in [0, 1]$ 
15:       $W \leftarrow$  calculaProbabilidade( $payoffJogador$ ,  $payoffVizinho$ )       $\triangleright$  Eq. 3.5
16:      if  $dado < W$  then
17:        if  $vetor[y] = C$  then
18:           $vetor[x] \leftarrow C$ 
19:        else
20:           $vetor[x] \leftarrow D$ 
21:           $payoffs[x] \leftarrow$  calculaPayoff( $x$ ,  $pos[]$ ,  $nViz[]$ ,  $viz[]$ ,  $vetor[]$ )       $\triangleright$  Alg. 5
22:    return  $vetor$ ,  $payoffs$ 

```

A cada passo de tempo, um jogador aleatório x (linha 8) tem a chance de revisar seu *payoff* e trocar de estratégia com um vizinho aleatório y (linha 9). O *payoff* total (f_x) é computado a partir da soma de todas as suas interações com os vizinhos (ver algoritmo 5). Vale ressaltar que foi considerado dois cenários para o cálculo do *payoff*: interação do jogador com ele mesmo e com os seus vizinhos (auto combate), e interação apenas com os vizinhos. O algoritmo 5 acata o primeiro cenário, para interação apenas com os vizinhos as linhas 5 e 6 foram desconsideradas. Caso dois cooperadores interajam entre si, é recebido uma recompensa R . Se os dois forem desertores, é recebido uma punição P . Do contrário, se tiverem estratégias diferentes, se o jogador for cooperador recebe S , e se for desertor, T . Para o cálculo dos *payoffs* foi considerado a matriz de *payoff* sugerida por [Nowak e May \(1993\)](#), sendo $R = 1$, $P = S = 0$ e $T = b$.

$$\begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Algoritmo 5 Cálculo de Payoff

```

1: procedure CALCULAPAYOFF(jogador, pos[], nViz[], viz[], vetor[])
2:   numViz ← nViz[jogador]
3:   iniViz ← pos[jogador]
4:   payoff ← 0
5:   if vetor[jogador] = C then
6:     payoff ← payoff + R                                     ▷ Auto combate
7:   i ← iniViz
8:   for all i < (numViz + iniViz) do
9:     vizinho ← viz[i]
10:    if vetor[jogador] = C then
11:      if vetor[vizinho] = C then                               ▷ C + C = R
12:        payoff ← payoff + R
13:      else                                                         ▷ C + D = S
14:        payoff ← payoff + S
15:      else
16:        if vetor[vizinho] = C then                               ▷ D + C = T
17:          payoff ← payoff + T
18:        else                                                         ▷ D + D = P
19:          payoff ← payoff + P
20:    return payoff

```

Computado o *payoff*, se suas estratégias forem diferentes, o jogador x imita a estratégia de y com a probabilidade W

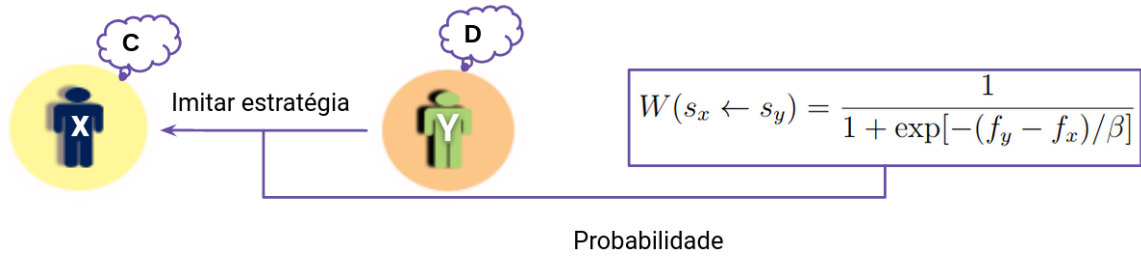
$$W(s_x \leftarrow s_y) = \frac{1}{1 + \exp[-(f_y - f_x)/\beta]} \quad (3.5)$$

onde β controla perturbações na seleção de estratégias, sendo um tipo de ruído ou o inverso da temperatura nos significados físicos. Salienta-se que a distribuição de probabilidade $W[s_x \leftarrow s_y]$ pode ser utilizada devido o comportamento do dilema dos prisioneiros condizer com o modelo de regressão logística¹. A figura 7 traz a representação do processo de imitação de estratégia.

Para a adoção de estratégia bem sucedida, tanto a estratégia, quanto o *payoff* do jogador é atualizado (linhas 12 a 21 do algoritmo 4). E para que, em média, todos jogadores tenham a chance de atualizar sua estratégia, depois de N passos de tempo é contada uma geração (o passo de tempo t_r exibido nos resultados).

¹ O modelo de regressão logística relaciona um conjunto de variáveis independentes X_1, X_2, \dots, X_n a uma variável dependente Y que assume dois (binária) ou mais valores (politômica). Além disso permite estimar de forma direta a probabilidade de um evento [Bittencourt \(2003\)](#).

Figura 7 – Processo de Imitação de Estratégia



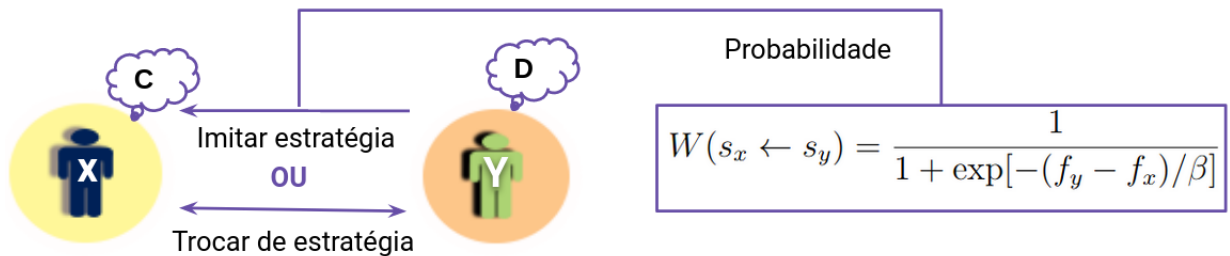
Fonte: Elaborado pelo autor

Após um tempo de relaxamento t_r da dinâmica, o sistema atinge um regime estacionário para qual foi calculado a densidade média $\rho_c(T)$ de cooperadores. A $\rho_c(T)$ foi computada durante um tempo de amostragem t_s da ordem de t_r . Para o estado inicial foi utilizado um conjunto de amostragem da ordem de $10^1 - 10^2$ realizações de rede com $\rho_c(t_0)$ (t_0 : estado inicial) escolhida aleatoriamente.

3.3 Dinâmica com mobilidade de estratégia

Para a mobilidade foi adotada uma regra simples: a possibilidade dos jogadores trocarem de estratégias entre si, permitindo o deslocamento das estratégias na rede. Desse modo, a dinâmica com mobilidade segue a mesma ideia da dinâmica retratada na seção 3.2, porém, aqui, além dos jogadores poderem imitar a estratégia de seus vizinhos, podem também trocar de estratégias com eles (figura 8). A cada passo de tempo, um jogador aleatório x tem a oportunidade de imitar a estratégia de y com probabilidade W , caso contrário, x troca de estratégia com y . O processo de imitação e mobilidade pode ser conferido nas linhas 12 a 25 do algoritmo 6.

Figura 8 – Processo de Imitação e Mobilidade de Estratégia



Fonte: Elaborado pelo autor

Algoritmo 6 Revisão de estratégia com mobilidade

```

1: procedure REVISAOESTRATEGIACOMMOBILIDADE( $N, pos[], nViz[], viz[], vetor[]$ )
2:    $payoffs \leftarrow []$ 
3:    $i \leftarrow 0$ 
4:   for all  $i < N$  do
5:      $payoffs[i] \leftarrow 0$ 
6:    $i \leftarrow 0$ 
7:   for all  $i < N$  do
8:      $x \leftarrow$  número inteiro aleatório  $\in [0, N - 1]$ 
9:      $y \leftarrow$  escolheVizinho( $pos, nViz, viz, x$ )
10:     $payoffs[x] \leftarrow$  calculaPayoff( $x, pos[], nViz[], viz[], vetor[]$ )       $\triangleright$  Alg. 5
11:     $payoffJogador \leftarrow payoffs[x]$ 
12:    if  $vetor[x] \neq vetor[y]$  then
13:       $payoffVizinho \leftarrow payoffs[y]$ 
14:       $dado \leftarrow$  número aleatório  $\in [0, 1]$ 
15:       $W \leftarrow$  calculaProbabilidade( $payoffJogador, payoffVizinho$ )       $\triangleright$  Eq. 3.5
16:      if  $dado < W$  then
17:        if  $vetor[y] = C$  then
18:           $vetor[x] \leftarrow C$ 
19:        else
20:           $vetor[x] \leftarrow D$ 
21:           $payoffs[x] \leftarrow$  calculaPayoff( $x, pos[], nViz[], viz[], vetor[]$ )   $\triangleright$  Alg. 5
22:        else
23:           $aux \leftarrow vetor[x]$ 
24:           $vetor[x] \leftarrow vetor[y]$ 
25:           $vetor[y] \leftarrow aux$ 
26:    return  $vetor, payoffs$ 

```

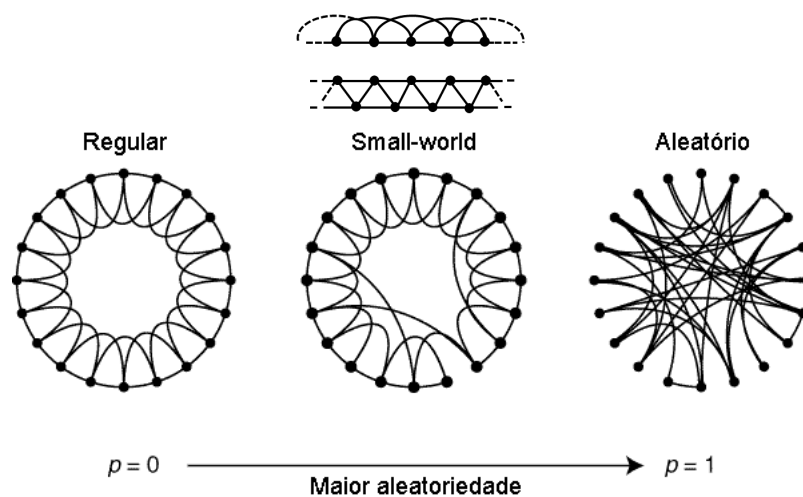
4 Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos durante o desenvolvimento do trabalho. Na seção 4.1 são exploradas as características estruturais das redes usadas, mais precisamente das redes [Watts e Strogatz \(1998\)](#) que são formadas, em sua essência, por triângulos. Já na seção 4.2 são mostrados os resultados obtidos para a dinâmica do jogo evolutivo do dilema dos prisioneiros com e sem mobilidade.

4.1 Características Estruturais

As redes quadradas e [Watts e Strogatz \(1998\)](#) ([WS](#)) possuem características bem distintas. A rede quadrada é k -regular e possui sua estrutura composta por ‘cruzes’, como pode ser visto na figura 3. Cada nó se conecta a dois vizinhos na horizontal e dois vizinhos na vertical, um de cada lado. A [WS](#), por sua vez, é constituída de triângulos, conforme é mostrado na figura 9. Além disso, a [WS](#) é obtida pela interpolação de uma rede regular e uma aleatória, à medida em que *links* são redirecionados por uma probabilidade p . Quando a probabilidade de religação p é nula ($p = 0,0$), a rede é k -regular, e quando $p = 1,0$ é dita aleatória. A rede de mundo pequeno é encontrada para valores intermediários de p . Como a rede de mundo pequeno é construída a partir de dada rede regular, a rede resultante acaba tendo alguma memória da rede regular inicial ([BARRAT; WEIGT, 2000](#)). A rede regular aleatória - *Random Regular Network* ([RRN](#)), por sua vez, é k -regular, mas com conectividade aleatória, possuindo características desses dois grupos (regular e aleatório). Semelhante a [WS](#), por seu contexto aleatório, a [RRN](#) também possui triângulos em sua composição.

Figura 9 – Estrutura da rede [WS](#)



Fonte: Adaptado de [Watts e Strogatz \(1998\)](#) e [Vukov, Szabó e Szolnoki \(2008\)](#)

Uma propriedade de grafos é a transitividade¹. A transitividade de um grafo (coeficiente de agrupamento global) é medida pela fração entre o número de triplos fechados (triângulos) e o número de todos os triplos possíveis no grafo. O triplo (u, v, w) de um vértice v corresponde a um caminho de comprimento 2 em que v é o vértice central. Se os outros dois vértices (u e w) também são conectados por uma aresta, o triplo é chamado de fechado (triângulo), do contrário aberto (HASAN; DAVE, 2018). Nesse sentido, a transitividade pode ser considerada como a probabilidade (0 a 1) de encontrar uma conexão entre dois jogadores que possuem o mesmo vizinho. Se k é o número de vizinhos de um vértice i , existe a priori $k_i(k_i - 1)/2$ possíveis *links* entre esses vizinhos. Assim, o coeficiente de agrupamento local desse nó i corresponde a fração desses *links* que estão realmente presentes no grafo, e a transitividade, a média de todos os coeficiente de agrupamento local (BARRAT; WEIGT, 2000).

Em se tratando de uma rede Watts e Strogatz (1998), para $p = 0$, cada nó está conectado com seus $2z$ vizinhos mais próximos ($k = 2z$), resultando em $3z(z - 1)/2$ arestas E_0 entre eles. Para $p > 0$, dois vizinhos de um nó i que foram conectados em $p = 0$ ainda são vizinhos de i com probabilidade $(1 - p)^3$, até termos de ordem $1/N$, em que N é o número de nós do grafo. Assim, o coeficiente de agrupamento médio definido como $[\sum_i \frac{E_i}{k_i(k_i-1)/2}] / N$ pode ser reescrito em função de probabilidades de ligação (BARRAT; WEIGT, 2000; WASSERMAN; FAUST et al., 1994)

$$\langle \tau(p) \rangle \approx \frac{3(z - 1)}{2(2z - 1)}(1 - p)^3, \quad (4.1)$$

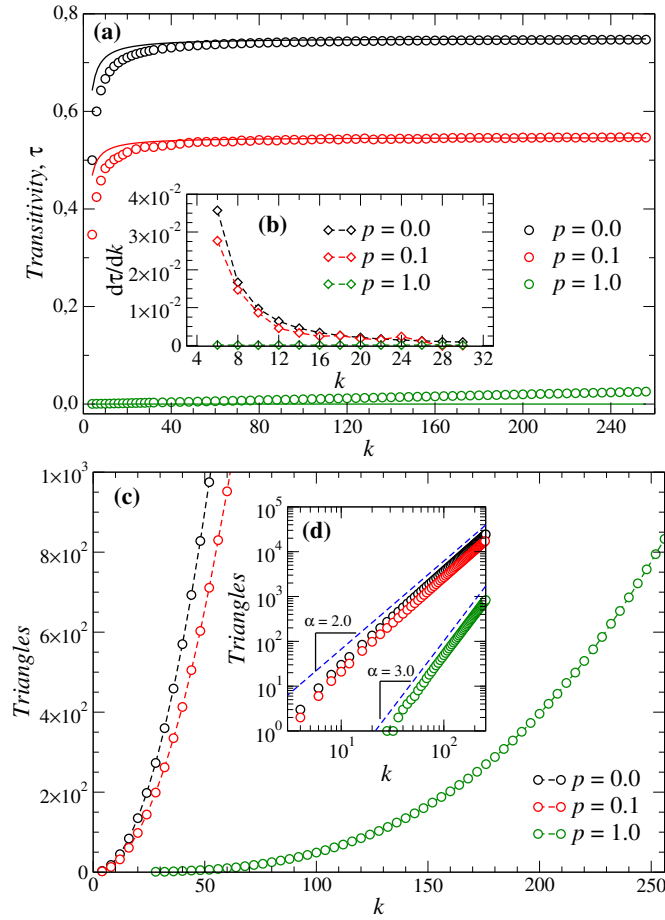
considerando termos adicionais em termos da ordem $1/N$. Esses padrões de interconexões aparecem em muitas redes complexas e são considerados blocos de construção básicos, especificando características estruturais de uma rede (MILO et al., 2002).

Na figura 10 são mostrados os comportamentos da transitividade (painel (a)) e do número médio de triângulos (painel (c)) para uma rede Watts e Strogatz (1998), ambos quando colocados em função do número de vizinhos k . São mostradas curvas para três valores representativos da probabilidade de religação p , são eles: $p = 0$ (rede regular), $p = 0,1$ (rede de mundo pequeno) e $p = 1,0$ (aleatória).

Para os cenários de rede de mundo pequeno e regular, foi observado um rápido aumento da transitividade até $k \approx 16$. Após isso, observamos uma taxa de crescimento decrescente (figura 10 - painel (b)), atingindo um comportamento quase constante para valores em torno de $k \gtrsim 20$. A curva para o cenário de mundo pequeno foi percebida abaixo da regular devido característica dessa estrutura marcada pelo caminho médio mais curto (distância química) entre os nós, interpolando características da estrutura regular e

¹ Transitividade de uma relação significa que quando existe uma relação entre i e j , e também uma relação de j para h , então existe uma relação entre i e h

Figura 10 – Transitividade e triângulos



aleatória (WATTS; STROGATZ, 1998). De fato, existe alguma memória da estrutura da rede regular original, como discutido por Barrat e Weigt (2000). A situação é diferente no cenário aleatório, no qual não foi observado nenhuma taxa de crescimento substancial, com a curva de transitividade aumentando suavemente à medida que k adquire valores mais elevados. Para a rede RRN foi observado o mesmo comportamento de $p = 1, 0$.

Entretanto quando observamos o número médio de triângulos, tanto o cenário regular quanto de mundo pequeno apresentam um comportamento muito semelhante contando com uma descrição de lei de potência seguindo $y \propto x^2$ para valores $k \approx 16$. Para valores de $k \lesssim 16$, a taxa de crescimento dos triângulos é maior, seguindo $y \propto x^{\alpha > 2}$. Por outro lado não há evidências para o cenário aleatório até que o número de vizinhos obtenha valores $k \approx 30$, assumindo uma taxa de crescimento logarítmica como nos outros cenários. Vale destacar que cenários regulares e de mundo pequeno apresentam o mesmo comportamento qualitativo.

4.2 Análise da dinâmica

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para a dinâmica do jogo evolutivo do dilema dos prisioneiros nas redes supracitadas na seção 3.1 sem e com mobilidade de estratégia (seções 4.2.1 e 4.2.2). Para ambas dinâmicas foram considerados dois cenários:

- (1) Os jogadores jogam apenas com seus vizinhos (sem auto combate).
- (2) Os jogadores jogam com seus vizinhos e consigo próprio (com auto combate).

Para as simulações foram utilizadas dois níveis de ruídos $\beta = 0,1$ e $\beta = 1,0$. Os tamanhos das redes, ou seja, o número de jogadores empregados variaram da ordem de 10^4 a 10^6 .

4.2.1 Dinâmica sem mobilidade de estratégia

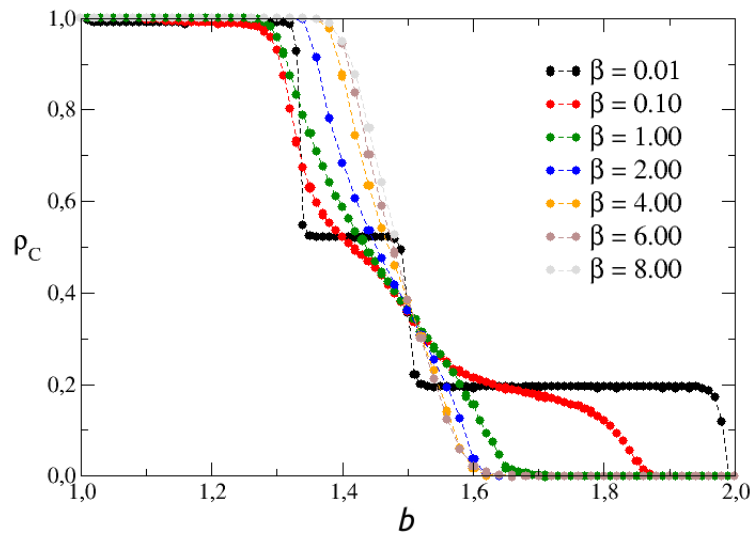
Para evolução da dinâmica na rede Watts e Strogatz (1998) foram considerados três probabilidades de religação: $p = 0,0$ (regular), $p = 0,1$ (mundo pequeno) e $p = 1,0$ (aleatória) na faixa de $k = [4, 128]$ (intervalo logaritmo). Para a rede regular aleatória foi utilizada a mesma faixa de k da WS.

As figuras 11 a 18 mostram resultados referentes à dinâmica com auto combate. A interação dos jogadores com eles próprios permite a cooperação sobreviver para altos valores de b , até, pelo menos, próximo de $b \approx 1,6$. Nas redes RRN e WS, para $p = 0,1$ e $p = 1,0$, os cooperadores sobrevivem para toda escala (equação 2.1) do jogo ($1 \leq b \leq 2$).

As figuras 11 a 15 mostram a dinâmica em uma rede quadrada com $1,6 \times 10^5$ jogadores com auto combate. Na figura 11 é exposto a densidade média de cooperadores em função do parâmetro b para diferentes níveis de ruídos β . Na figura podemos notar que apenas cooperadores sobrevivem até $b \leq 1,3$. Para $\beta = 0,01$ é observado um comportamento diferente dos outros níveis de ruídos, a densidade média de cooperadores ρ_c permanece constante para algumas faixas de b , apresentando uma queda brusca para $b \approx 1,3$, $b \approx 1,5$, e $b \approx 2,0$, quando $\rho_c = 0$. Esse comportamento sugere a formação de *clusters* para esses *Temptations* quando $\beta = 0,01$. Aumentando o nível de ruído, percebemos diminuição da área de mistura de cooperador/desertor e aproximação das curvas. Para $\beta = 8,0$, temos uma região mista para $1,4 \lesssim b \lesssim 1,6$. Além disso, podemos observar um ponto de interseção das curvas, quando $\beta \approx 1,5$.

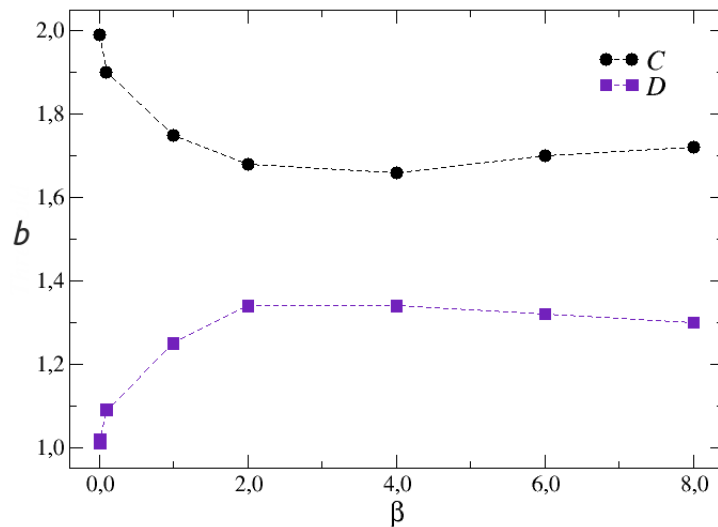
A figura 12 mostra as transições de cooperadores e desertores quando $\{C, D\} \rightarrow 0$, considerando $\beta = 0,1$. Aqui podemos observar regiões bem distintas de cooperadores e desertores quando variamos b e β . Há maior faixa de mistura (cooperador/desertor) para $\beta \lesssim 2$. Para $\beta = 1$, os cooperadores deixam de existir para $b \gtrsim 1,7$. Ademais é possível observar uma transição simétrica para $\{C, D\}$.

Figura 11 – Densidade média de cooperadores em função de b em uma rede quadrada com auto combate para diferente níveis β



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 12 – *Temptation to defect* em função de β em uma rede quadrada com auto combate



Fonte: Dados da pesquisa

Na figura 13 é mostrado a densidade média de cooperadores em função do tempo t_r para diferentes valores de b em uma rede quadrada, com $\beta = 0,1$. Podemos notar que rapidamente as amostras entram em transição e atingem o equilíbrio ($t_r \approx 60$). Nas figuras 14 e 15 podemos ver com clareza a distribuição espacial de cooperadores entre desertores (espaços vazios) para $b = 1,4$ e $b = 1,8$ quando o sistema atinge o equilíbrio ($\beta = 0,1$). Para $b = 1,4$, vemos poucos pontos de desertores no mar de cooperadores, já para $b = 1,8$, esses pontos conseguem se agrupar e formar grupos maiores disseminando a deserção na rede.

Na figura 16 temos diferentes curvas para a densidade média de cooperadores em

Figura 13 – Densidade média de cooperadores em função do tempo t_r em uma rede quadrada com auto combate

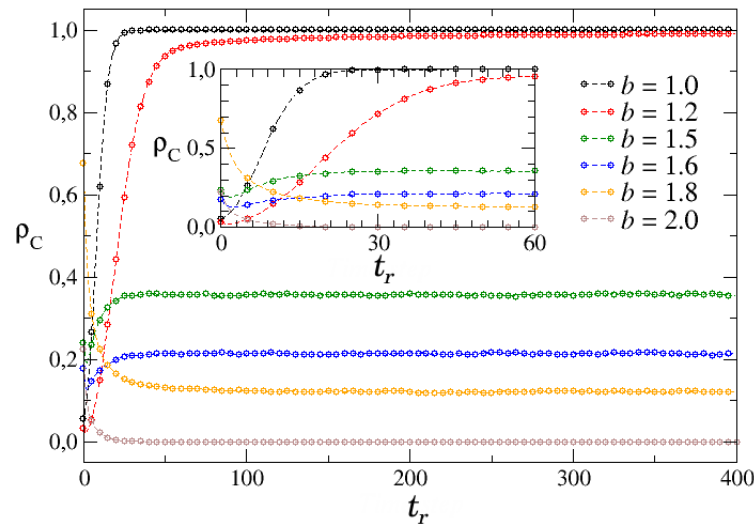


Figura 14 – Distribuição espacial de cooperadores entre desertores (espaços vazios) para $b = 1,4$ e $\beta = 0,1$

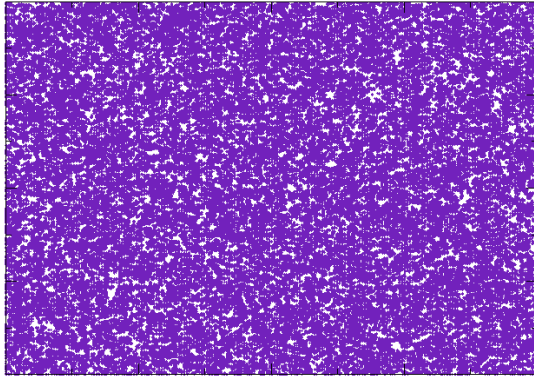
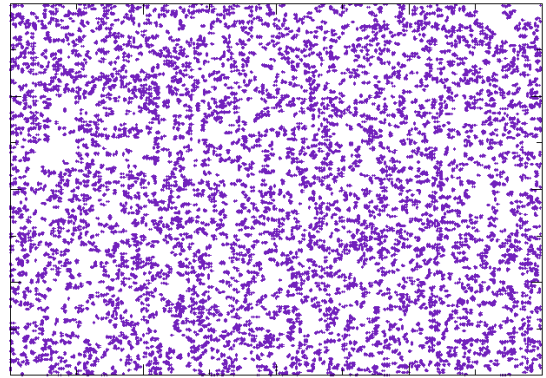


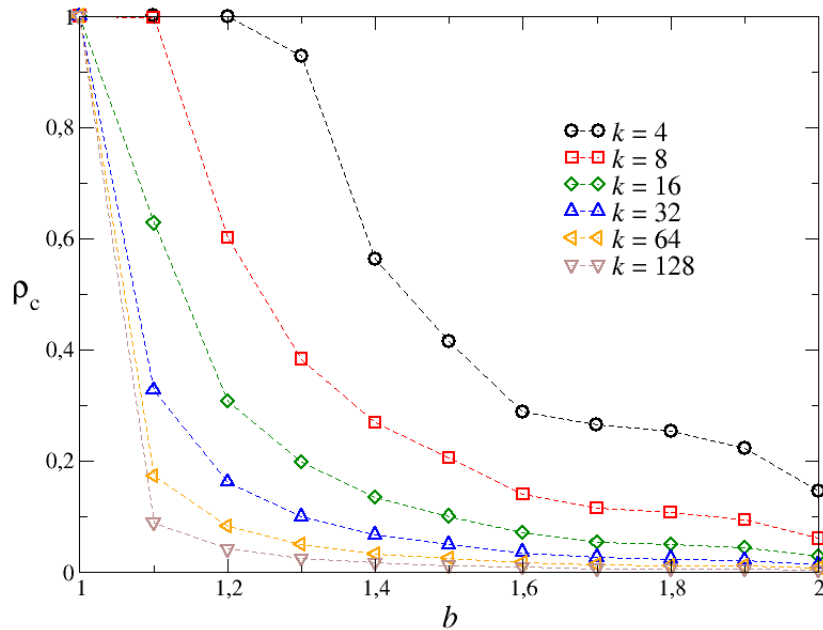
Figura 15 – Distribuição espacial de cooperadores entre desertores (espaços vazios) para $b = 1,8$ e $\beta = 0,1$



função de b em uma rede regular aleatória de $1,6 \times 10^4$ jogadores com auto combate, considerando $\beta = 0,1$. Cada curva refere-se a um número de vizinho k , onde $k = [4, 128]$ (função logarítmica). Podemos notar que quanto menor o número de vizinhos, maior a chance de sobrevivência da cooperação para maiores valores de b . Quando $k \lesssim 32$, é possível observar a sobrevivência de C para $b \geq 2$.

A figura 17 mostra a densidade média de cooperadores em função de b para uma rede Watts e Strogatz (1998) de 10^4 jogadores com auto combate, considerando nível de ruído $\beta = 0,1$ e conectividade $k = 4$. Em todas as curvas, os cooperadores perduram em sua totalidade até $b \approx 1,35$. Entretanto podemos observar que a região de mistura

Figura 16 – Densidade média de cooperadores em função de b em uma rede regular aleatória com auto combate com $\beta = 0,1$



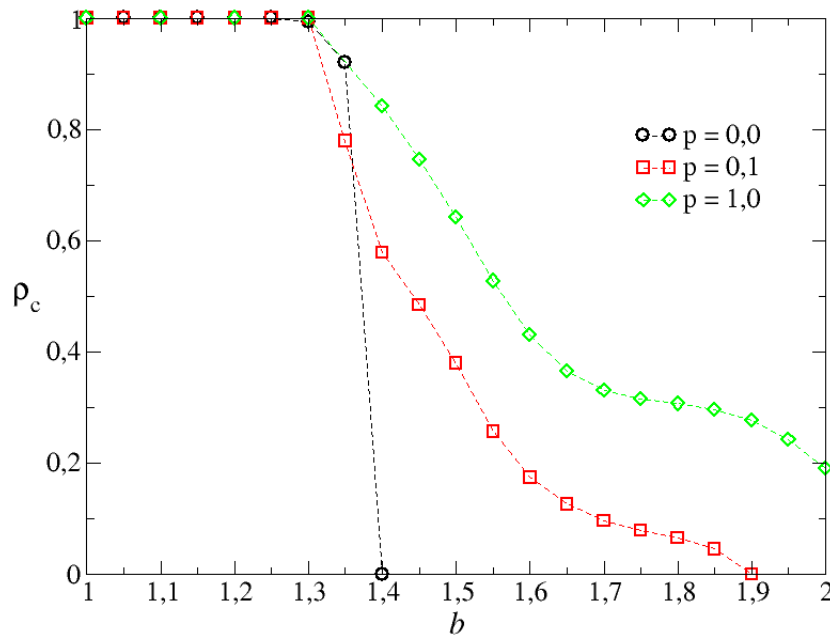
Fonte: Dados da pesquisa

(cooperador/desertor) aumenta para maiores valores de p . No contexto regular ($p = 0,0$) quase não há região de mistura, os cooperadores deixam de existir para $b \gtrsim 1,4$. Já para a rede de mundo pequeno ($p = 0,1$), os cooperadores conseguem ainda persistir até $b \gtrsim 1,9$, e no contexto aleatório ($p = 1,0$), sobrevivem em toda escala do jogo (até $b \geq 2$).

Na figura 18 podemos comparar as densidades médias de cooperadores em função de b para as redes RRN e WS com probabilidade de religação $p = 1,0$, considerando $\beta = 0,1$. Apesar de ambas terem o contexto aleatório, a RRN é k -regular. Na figura podemos verificar um comportamento semelhante entre as redes, principalmente para $b \geq 1,6$, quando fica evidenciado mesmo contorno das curvas. A cooperação consegue sobreviver para toda a escala do jogo em ambas as redes (RRN e WS).

Nas figuras 19 a 22 são evidenciados resultados para a dinâmica sem auto combate, considerando nível de ruído $\beta = 1$. A figura 19 mostra a densidade de cooperadores em função de b em uma rede WS para 10^5 jogadores, conectividade $k = [4, 128]$ (intervalo logarítmico), considerando probabilidades de religação $p = 0,0$, $p = 0,1$ e $p = 1,0$. Seguindo os painéis (a) a (f), observamos um aumento da sobrevivência de cooperadores a medida que aumentamos p combinado com menores valores de k . Além disso, aumentando p verificamos uma mistura de estratégias (cooperador/desertor) seguindo o desvio entre as simulações estruturais e análises analíticas relatadas na seção 4.1. Para $k = 128$, apenas desertores conseguem sobreviver para $b \geq 1$. Outro ponto a ser levantado é o aspecto da curvatura quando $p = 1,0$, a densidade diminui mais suavemente, se comparado com

Figura 17 – Densidade média de cooperadores em função de b em uma rede Watts e Strogatz (1998) com auto combate e $\beta = 0,1$



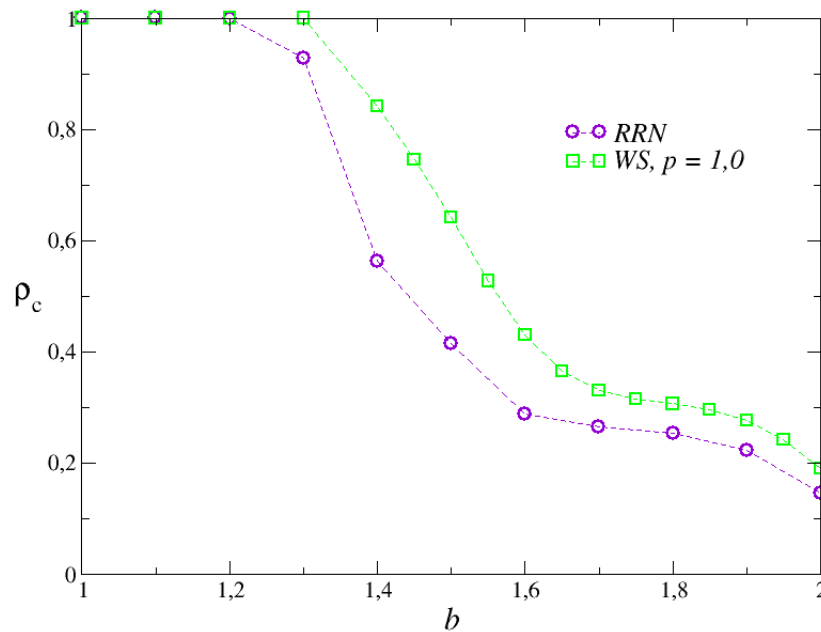
Fonte: Dados da pesquisa

$p = 0,0$ e $p = 0,1$. Podemos notar, nesse caso, uma ruptura da estrutura. O melhor resultado para $p = 0,0$ foi encontrado para $k = 8$, os cooperadores sobrevivem até próximo de $b \approx 1,05$ (painel (b) da figura 19). Para $p = 0,1$, tanto $k = 4$ e $k = 8$ sobrevivem até $b \approx 1,10$ (painéis (a) e (b) respectivamente). Quanto $p = 1,0$, o melhor foi encontrado para $k = 4$, com $b \approx 1,28$ (painel (a)). Ainda olhando a figura 19, para $k > 16$ podemos observar uma aproximação das curvas $p = 0,1$ e $p = 1,0$ para certo valor de *Temptation to defect*. No painel (d) ($k = 32$), as curvas permanecem fechadas até $b \approx 1,03$, a partir de então, para $p = 0,1$, cooperadores deixam de existir para $b \approx 1,04$, e para $p = 1,0$, $b \approx 1,18$. No painel (e), para $k = 64$, as curvas seguem o mesmo fluxo até $b \approx 1,01$, sendo que os cooperadores conseguem sobreviver até $b \approx 1,02$ para $p = 0,1$ e até $b \approx 1,14$ para $p = 1,0$. Por fim, no painel (f), para $k = 128$, seguem até $b \approx 1,0$, estendendo para $b \approx 1,01$ para $p = 0,1$ e $b \approx 1,1$ para $p = 1,0$.

A figura 20 mostra a evolução da densidade média de cooperadores em função do passo de tempo t_r em uma rede WS com 10^5 jogadores, $p = 0,0$, com conectividade $k = 4$ e $\beta = 1,0$. Diferente da rede quadrada (figura 13) que as amostras rapidamente atingem o equilíbrio, podemos observar que a WS precisa de um tempo maior para estabilizar. Para $b = 1,033$, os cooperadores deixam de existir após t_r na ordem de 10^6 . A rede RRN mostrou estabilidade rápida semelhante a rede quadrada.

Na figura 21 temos uma comparação das curvas RRN e WS com probabilidade de religação $p = 1,0$. Podemos observar na figura que ambas as curvas possuem o mesmo

Figura 18 – Densidade média de cooperadores em função de b em rede **RRN** e **WS** com $p = 1,0$, $\beta = 0,1$ e auto combate

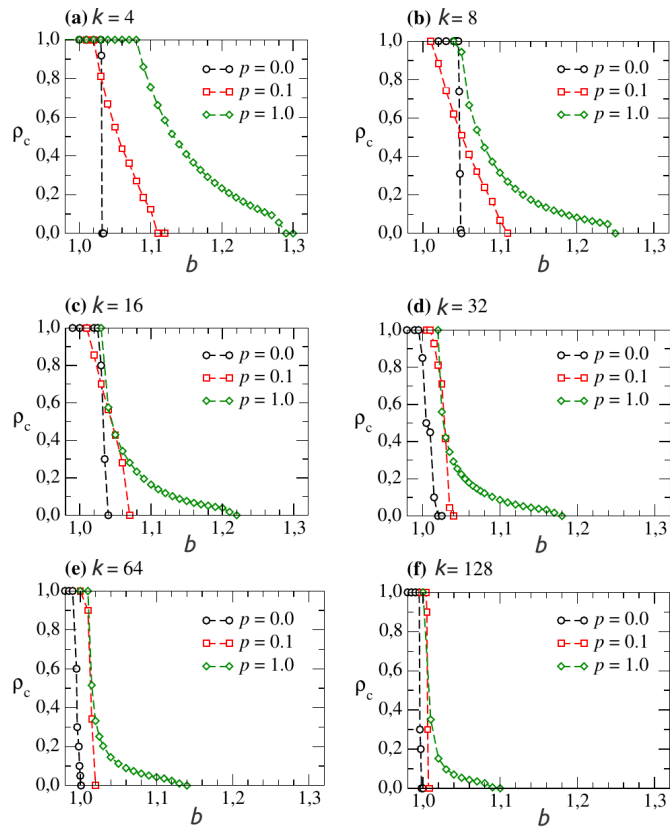


Fonte: Dados da pesquisa

comportamento qualitativo. Entretanto, a **WS** está posicionada mais a direita do eixo das abscissas. Enquanto cooperadores já começam a perder força antes mesmo de $b = 1,0$ para a **RRN** (desertores já são cerca de 40% na rede), na **WS**, os cooperadores sobrevivem em sua totalidade até $b \approx 1,05$. A cooperação desaparece para a **RRN** quando $b \approx 1,2$ e para a **WS** com $b \approx 1,35$.

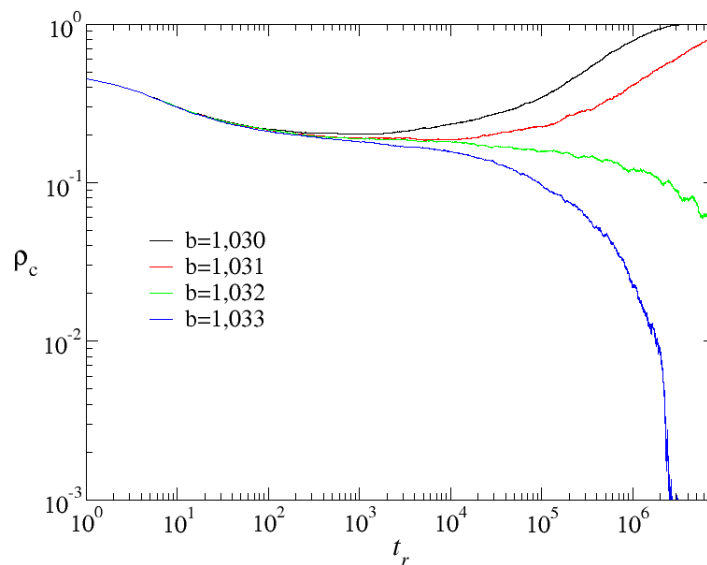
A figura 22 traz uma comparação das curvas de densidade média de cooperadores em função do parâmetro b para a rede quadrada e a **WS** quando $p = 0,0$, considerando 10^4 jogadores e $k = 4s$. Apesar de ambas as redes serem regulares, elas se diferenciam na estrutura, ao passo que a quadrada é composta por cruzes, a **WS** é constituída de triângulos. Observando a figura 22, podemos notar que a rede quadrada apresenta uma região de mistura (cooperador/desertor) bem evidente, diferente da **WS**. Os cooperadores começam a perder força antes de $b = 1,0$ para a rede quadrada (desertores são cerca de 40% na rede), entretanto conseguem perdurar até $b \approx 1,05$. A **WS**, por outro lado, cooperadores são totalidade até $b \approx 1,03$, deixando de sobreviver para $b \approx 1,032$.

Figura 19 – Densidade média de cooperadores em função de b em uma rede WS com $\beta = 1,0$



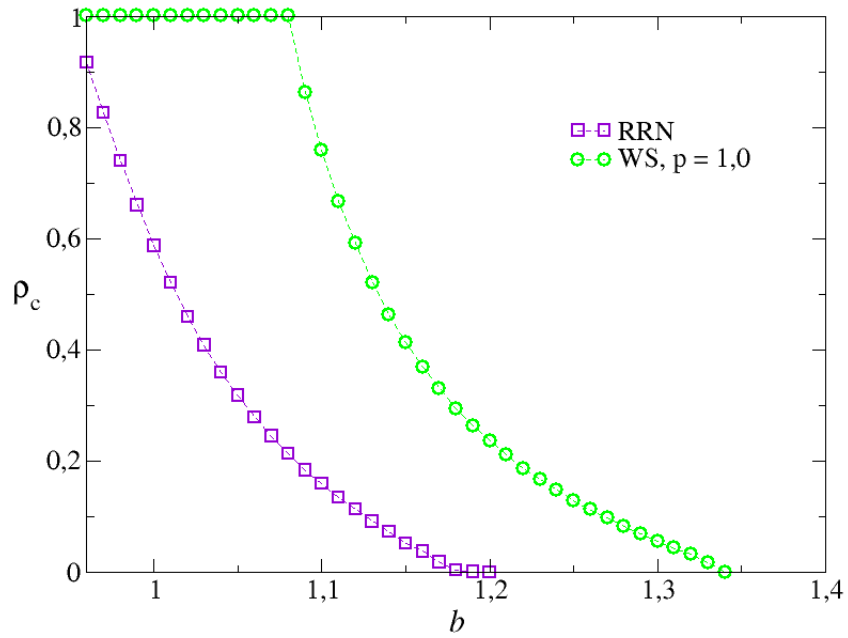
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 20 – Densidade média de cooperadores em função de t_r em uma rede WS com $p = 0,0$, $k = 4$ e $\beta = 1,0$



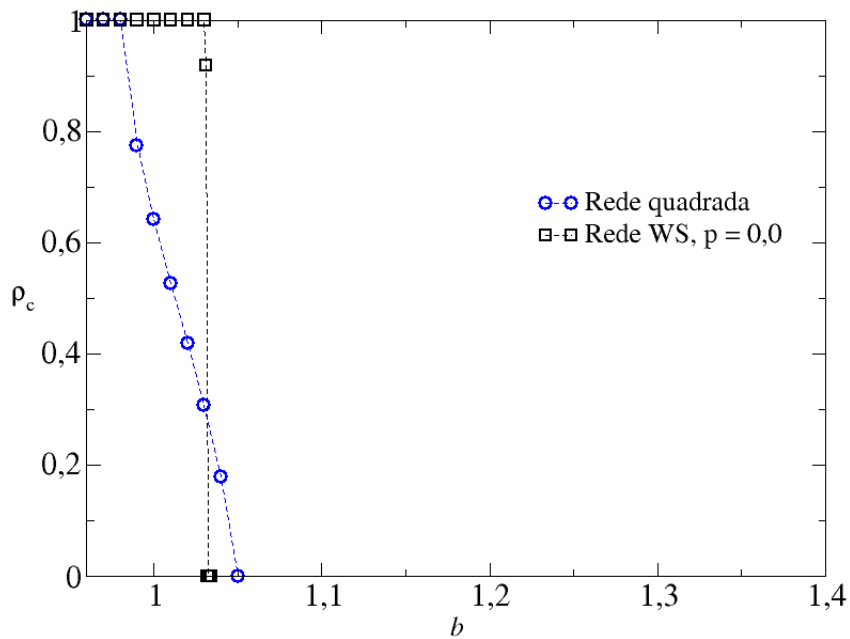
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 21 – Densidade média de cooperadores em função de b em rede RRN e WS com $p = 1,0$, $\beta = 1,0$



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 22 – Densidade média de cooperadores em função de b em rede quadrada e WS com $p = 0,0$



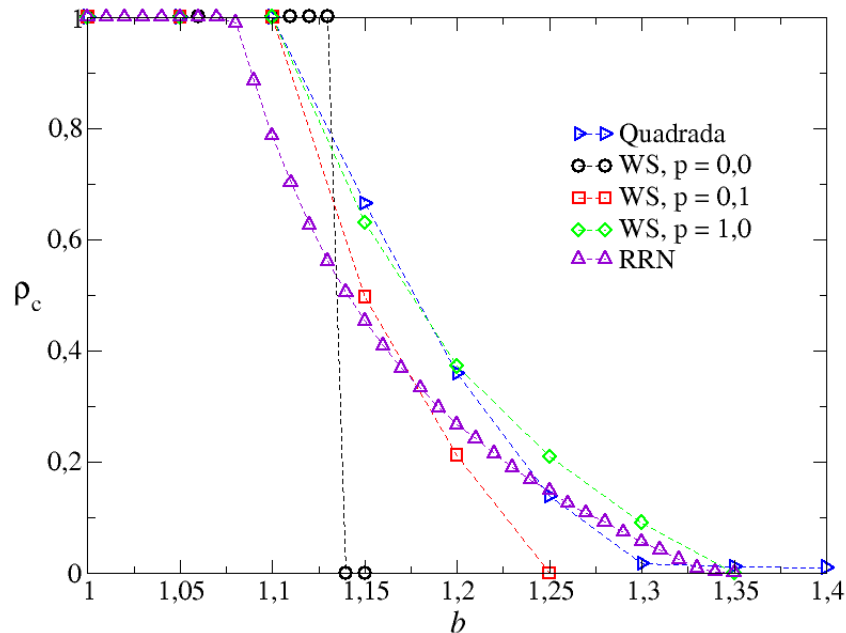
Fonte: Dados da pesquisa

4.2.2 Dinâmica com mobilidade de estratégia

A dinâmica com mobilidade de estratégia foi avaliada para as redes explicitadas na seção 3.1 considerando $1,6 \times 10^4$ jogadores, $k = 4$, e nível de ruído $\beta = 1,0$. No primeiro cenário avaliado, sem auto combate, foi constatado que a mobilidade não favorece a cooperação para nenhum b estudado. Já para a dinâmica com auto combate, a cooperação ainda perdura para alguns valores de *Temptation to defect*.

A figura 23 mostra a densidade média de cooperadores em função de b para a rede quadrada, WS com $p = 0,0$ (regular), $p = 0,1$ (mundo pequeno) e $p = 1$ (aleatória), e RRN. Observando a figura podemos verificar que a rede WS com $p = 0,0$, semelhante a dinâmica sem mobilidade, não apresentou regiões de misturas, tendo transição (cooperador/desertor) em $b \approx 1,14$. Além disso, podemos notar uma semelhança de comportamento para a RRN e a WS com $p = 1,0$. Em ambas, a cooperação deixa de existir para $b \approx 1,35$. A curva da rede quadrada acompanha a WS até $b \approx 1,2$, sendo que a rede quadrada deixa de ter número relevante de cooperadores para $b \approx 1,3$. Na rede de mundo pequeno ($p = 0,1$), os cooperadores deixam de existir para $b \approx 1,25$.

Figura 23 – Densidade média de cooperadores em função de b com mobilidade para $\beta = 1,0$



Fonte: Dados da pesquisa

5 Conclusão

Este trabalho visou investigar a dinâmica do jogo evolutivo do dilema dos prisioneiros com e sem mobilidade de estratégia em redes de diferentes estruturas (regulares e aleatórias), considerando o *Temptation to defect* como parâmetro de controle. Dois contextos foram analisados: jogadores interagem consigo mesmo e com a vizinhança (auto combate), e jogadores interagem apenas com a vizinhança. Tradicionalmente, um jogador escolhe sua estratégia dominante (cooperar ou desertar), e no decorrer do jogo possui a chance de imitar ou trocar de estratégia com um de seus vizinhos. Diferente da literatura, em que a mobilidade é tratada como a possibilidade de um jogador se mover na rede, focamos em uma abordagem mais simples, dois jogadores puderam trocar de estratégias entre si, possibilitando o deslocamento das estratégias na rede. O jogo foi simulado em três diferentes redes: rede quadrada, rede regular aleatória e rede [Watts e Strogatz \(1998\)](#) com probabilidade de religação $p = 0,0$ (regular), $p = 0,1$ (mundo pequeno) e $p = 1,0$ (aleatória).

Nossos resultados confirmaram que o número de cooperadores presentes na rede está diretamente relacionado com as suas características estruturais. Apesar da rede quadrada e a [WS](#) com $p = 0$ serem regulares e possuírem o mesmo número de conexões, a [WS](#) praticamente não apresentou região de mistura (cooperador/desertor) em todos os contextos analisados. Na quadrada, por sua vez, os desertores vão ganhando força a medida que o valor de *Temptation to defect* é aumentado. A diferença dessas redes está justamente na estrutura, a quadrada é formada por ‘cruzes’ e a [WS](#) por triângulos. Devido contexto aleatório, a rede [RRN](#) também possui triângulos em sua formação. Outro ponto que tem interferência direta, é o número de vizinhos, tanto a [WS](#) quanto a [RRN](#) apresentaram níveis menores de cooperação ao aumentar k . Em contrapartida, a aleatoriedade se mostrou favorável à cooperação, para a [WS](#), por exemplo, maiores valores de p indicaram sobrevivência de cooperadores para maiores valores de b .

Em relação as interações, a com auto combate mostrou ser mais propícia para a cooperação em todas as redes estudadas. Sem essa consideração, a transição cooperador/desertor aproximou-se mais de $b = 1,0$. O nível de ruído abordado também mostrou influência na escolha da estratégia, cooperadores sobressaíram melhor para baixos ruídos. Adicionando a mobilidade de estratégia na dinâmica, a cooperação conseguiu sobreviver apenas quando o auto combate estava associado na interação. Nesse cenário, a densidade média de cooperadores diminuiu, conseguindo sobreviver apenas para $b \lesssim 1,4$.

Assim, é notório que o nível de cooperação no sistema é influenciado pelas propriedades da rede e regras da dinâmica. Apesar dos cooperadores terem se saído melhor

nas redes aleatórias (*Random Regular Network* e [Watts e Strogatz \(1998\)](#) com $p = 1,0$), a escolha da rede em sistemas reais deverá ser baseada naquela que melhor represente o problema. Ademais, como a cooperação depende das regras da dinâmica, poderão ser definidas regras que propiciem a sua difusão pela rede de acordo com o objetivo almejado para o bom funcionamento do sistema.

Diante de tudo que foi exposto, é proposto para trabalhos futuros, aprofundar mais na mobilidade de estratégia. Nesse trabalho focamos em uma abordagem simples que não impede a disseminação da deserção da rede, por isso uma proposta seria acrescentar restrições que limitam o deslocamento da deserção. Além disso, utilizamos como parâmetro de controle o *Temptation to defect* que dá vantagens aos desertores, assim é proposto também, incluir nas investigações o *Sucker's payoff* que dá vantagens aos cooperadores, e verificar o que, e como, a combinação dos dois influenciam na cooperação da rede.

Referências

- ALVES, R.; DELGADO, C. Processos estocásticos. 1997. Citado na página 20.
- AXELROD, R.; HAMILTON, W. D. The evolution of cooperation. *science*, American Association for the Advancement of Science, v. 211, n. 4489, p. 1390–1396, 1981. Citado na página 19.
- AZEVEDO, G.; CARVALHO, H. F.; SILVA, J. F. A teoria dos jogos na estratégia de negócios: uma contribuição relevante. *Texto para Discussão da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro*, v. 1, n. 1, p. 1–29, 2011. Citado na página 19.
- BAHBOUHI, J. E.; MOUSSA, N. Prisoner’s dilemma game model for e-commerce. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 292, p. 128–144, 2017. Citado na página 15.
- BARRAT, A.; WEIGT, M. On the properties of small-world network models. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Springer, v. 13, n. 3, p. 547–560, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 39.
- BINI, R. D. *Estudos da biodiversidade utilizando o jogo pedra-papel-tesoura*. [S.l.]: Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Estadual de Maringá, Maringá . . . , 2014. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- BITTENCOURT, H. R. Regressão logística politômica: revisão teórica e aplicações. *Acta Scientiae*, v. 5, n. 1, p. 77–86, 2003. Citado na página 34.
- CANOVA, G. A. Jogos evolutivos: efeitos de difusão em redes complexas. 2011. Citado na página 15.
- CARDINOT, M. et al. Mobility restores the mechanism which supports cooperation in the voluntary prisoner’s dilemma game. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 21, n. 7, p. 073038, 2019. Citado na página 15.
- DEULOFEU, J. *Teoria dos Jogos: Prisioneiros com dilemas e estratégias dominantes*. [S.l.]: National Geographic, 2018. Edição especial. Citado na página 18.
- ERDŐS, P.; RÉNYI, A. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, v. 5, n. 1, p. 17–60, 1960. Citado na página 23.
- GIBBONS, M. D.; O’RIORDAN, C.; GRIFFITH, J. Follow flee: A contingent mobility strategy for the spatial prisoner’s dilemma. In: SPRINGER. *International Conference on Simulation of Adaptive Behavior*. [S.l.], 2016. p. 34–45. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- HAJAR, Y. N. A cooperação temporária de concorrentes durante a pandemia: Como a flexibilização da concorrência pode salvar os mercados. JOTA, 2020. Disponível em: <<https://www.jota.info/opiniao-e-analise/artigos/a-cooperacao-temporaria-de-concorrentes-durante-a-pandemia-06052020>>. Acesso em: abr. 2022. Citado na página 14.

- HASAN, M. A.; DAVE, V. S. Triangle counting in large networks: a review. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery*, Wiley Online Library, v. 8, n. 2, p. e1226, 2018. Citado na página 38.
- HUBERMAN, B. A.; GLANCE, N. S. Evolutionary games and computer simulations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 90, n. 16, p. 7716–7718, 1993. Citado na página 24.
- KLEINBERG, J. The small-world phenomenon and decentralized search. *SiAM News*, v. 37, n. 3, p. 1–2, 2004. Citado na página 24.
- LEIVAS, F. R. Dinâmicas estocásticas em teoria de jogos: percolação, cooperação e seus limites. 2018. Citado na página 15.
- LI, R.; XU, Z.; ZHANG, L. Heterogeneity of networks promotes cooperation in the prisoner’s dilemma and the snowdrift game. *Journal of the Korean Physical Society*, v. 74, n. 9, p. 831–837, 2019. Citado na página 15.
- LI, W.-J.; JIANG, L.-L.; PERC, M. A limited mobility of minorities facilitates cooperation in social dilemmas. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 391, p. 125705, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 15, 21 e 26.
- MELO, P. O. V. de et al. Teoria dos jogos na comunicação de dados em redes de sensores sem fio. 2007. Citado na página 14.
- MELONI, S. et al. Effects of mobility in a population of prisoner’s dilemma players. *Physical Review E*, APS, v. 79, n. 6, p. 067101, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 21.
- METZ, J. et al. Redes complexas: conceitos e aplicações. São Carlos, SP, Brasil., 2007. Citado 3 vezes nas páginas 15, 23 e 24.
- MILO, R. et al. Network motifs: simple building blocks of complex networks. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 298, n. 5594, p. 824–827, 2002. Citado na página 38.
- NEWMAN, M. E.; WATTS, D. J. Renormalization group analysis of the small-world network model. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 263, n. 4-6, p. 341–346, 1999. Citado na página 25.
- NORVIG, P.; RUSSELL, S. *Inteligência Artificial: Tradução da 3ª Edição*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2014. v. 1. Citado na página 14.
- NOWAK, M. A.; MAY, R. M. The spatial dilemmas of evolution. *International Journal of bifurcation and chaos*, World Scientific, v. 3, n. 01, p. 35–78, 1993. Citado 6 vezes nas páginas 15, 18, 20, 21, 26 e 33.
- O’CONNOR, C. Methods, models, and the evolution of moral psychology. *arXiv preprint arXiv:1909.09198*, 2019. Citado na página 15.
- PINHEIRO, F. L. P. Characterization of self-organization processes in complex networks. 2016. Citado na página 15.
- PRADO, E. F. Dilema do prisioneiro e dinâmicas evolucionárias. *Estudos Econômicos (São Paulo)*, v. 29, n. 2, p. 249–266, 1999. Citado na página 19.

- SANTOS, M. D.; DOROGOVTSSEV, S. N.; MENDES, J. F. Biased imitation in coupled evolutionary games in interdependent networks. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 4, p. 4436, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- SARTINI, B. A. et al. Uma introdução à teoria dos jogos. *II Bienal da SBM–Universidade Federal da Bahia*, p. 1–61, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 18.
- SICARDI, E. A. et al. Random mobility and spatial structure often enhance cooperation. *Journal of theoretical biology*, Elsevier, v. 256, n. 2, p. 240–246, 2009. Citado na página 15.
- SIGMUND, K. *The calculus of selfishness*. [S.l.]: Princeton University Press, 2010. v. 6. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- SILVA, M. B. d. Propriedades críticas de sistemas fora do equilíbrio via simulação monte carlo. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2013. Citado na página 25.
- STROGATZ, S. H. Exploring complex networks. *nature*, Nature Publishing Group, v. 410, n. 6825, p. 268, 2001. Citado na página 24.
- SZABÓ, G.; FATH, G. Evolutionary games on graphs. *Physics reports*, Elsevier, v. 446, n. 4-6, p. 97–216, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 15, 18 e 19.
- SZABÓ, G.; TÓKE, C. Evolutionary prisoner’s dilemma game on a square lattice. *Physical Review E*, APS, v. 58, n. 1, p. 69, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 15, 18, 24 e 26.
- VAINSTEIN, M. H.; SILVA, A. T.; ARENZON, J. J. Does mobility decrease cooperation? *Journal of theoretical biology*, Elsevier, v. 244, n. 4, p. 722–728, 2007. Citado na página 15.
- VUKOV, J.; SZABÓ, G.; SZOLNOKI, A. Evolutionary prisoner’s dilemma game on newman-watts networks. *Physical Review E*, APS, v. 77, n. 2, p. 026109, 2008. Citado 7 vezes nas páginas 15, 16, 18, 25, 26, 33 e 37.
- WASSERMAN, S.; FAUST, K. et al. *Social network analysis: Methods and applications*. Cambridge university press, 1994. Citado na página 38.
- WATANABE, S. S. G. Abordagem de teoria dos jogos evolucionários para modelagem de aplicações de live streaming em redes peer-to-peer. 2010. Citado na página 14.
- WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *nature*, Nature Publishing Group, v. 393, n. 6684, p. 440, 1998. Citado 16 vezes nas páginas 9, 11, 15, 24, 26, 27, 30, 31, 37, 38, 39, 40, 42, 44, 49 e 50.
- WILSON, R. J. *Introduction to Graph Theory*. [S.l.]: Oxford University Press, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- WORMALD, N. C. et al. Models of random regular graphs. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press, p. 239–298, 1999. Citado na página 23.