UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO – UFOP

ESCOLA DE MINAS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DAYANE KELY MORAIS RODRIGUES

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS E SIMULAÇÃO APLICADO A UM PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR 2D EM REGIME ESTACIONÁRIO SEM GERAÇÃO DE CALOR

OURO PRETO - MG
2022

DAYANE KELY MORAIS RODRIGUES

dayane.rodrigues@aluno.ufop.edu.br

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS E SIMULAÇÃO APLICADO A UM PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR 2D EM REGIME ESTACIONÁRIO SEM GERAÇÃO DE CALOR

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Professor orientador: DSc. Luís Antônio Bortolaia

OURO PRETO – MG
2022

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

R696m Rodrigues, Dayane Kely Morais.
Método das diferenças finitas e simulação aplicado a um problema de transferência de calor 2D em regime estacionário sem geração de calor [manuscrito]: N/A. / Dayane Kely Morais Rodrigues. - 2022.
58 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Luís Antônio Bortolaia.
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Graduação em Engenharia Mecânica .

1. Transferência de calor. 2. Métodos numéricos. 3. Diferenças finitas. 4. Simulação numérica. I. Bortolaia, Luís Antônio. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 621

Bibliotecário(a) Responsável: Maristela Sanches Lima Mesquita - CRB-1716

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECANICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Dayane Kely Morais Rodrigues

Método das diferenças finitas e simulação aplicado a um problema de transferência de calor 2D em regime estacionário sem geração de calor

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Mecânico

Aprovada em 02 de Junho de 2022

Membros da banca

DSc. Luís Antônio Bortolaia - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)
DSc. Elisângela Martins Leal (Universidade Federal de Ouro Preto)
DSc. Claudio Marcio Santana (Universidade Federal de Ouro Preto)

Luís Antônio Bortolaia, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 10/06/2022

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35400-000
Telefone: (31)3559-1533 - www.ufop.br

Essa conquista é dedicada primeiramente a Deus, a toda família e aos amigos pela força e o apoio para a conclusão dessa etapa.

AGRADECIMENTO

Gostaria de agradecer, em primeiro lugar, a Deus que iluminou a minha trajetória e me deu forças para chegar até aqui.

Agradeço a minha mãe, Jussara, exemplo de garra e determinação, por toda preocupação, afeto e por ter feito de tudo para que essa conquista fosse possível.

Ao meu irmão, David, por toda troca de experiências e apoio ao longo do processo.

À minha cunhada, Eucilene, por todos os conselhos.

Ao meu pai, Ivo, e à minha avó Claudette, sei que onde estiverem estão torcendo pela minha felicidade.

Agradeço a toda minha família, aos meus tios, tias, primos e primas por toda torcida, pelo incentivo e por vibrarmos juntos a cada vitória.

Às amizades de Ouro Preto e do período 16.2, em especial, Bárbara, Bernardo, Davi, Nayane, Renata e Talita por conseguirmos passar por todas as dificuldades com muito companheirismo e diversão.

Aos amigos de Itabirito, principalmente, Irlana, Laura, Lorena e Luiza pela parceria de anos e por trazer leveza nos dias difíceis.

Aos companheiros da Vallourec e da equipe DP, agradeço pelos ensinamentos e por contribuírem a cada dia na minha jornada pessoal e profissional.

Ao meu orientador Luís Antônio Bortolaia, pelo incentivo e orientação neste trabalho.

Aos professores do curso de engenharia mecânica por suas importantes contribuições para o aprimoramento da minha formação.

“Determinação, coragem e autoconfiança são fatores decisivos para o sucesso. Não importa quais sejam os obstáculos e as dificuldades. Se estamos possuídos de uma inabalável determinação, conseguiremos superá-los. Independentemente das circunstâncias, devemos ser sempre humildes, recatados e despidos de orgulho”.

Dalai Lama

RESUMO

A transferência de calor é frequentemente encontrada na esfera das engenharias como um campo de estudo relevante em razão da sua aplicação e importância para o desempenho de processos industriais. Para a resolução de problemas envolvendo a transferência de calor com geometrias e condições de contorno complexas, são utilizados métodos numéricos através de técnicas de simulação que podem ser resolvidos por meio de problemas computacionais utilizando a pronta disponibilidade de computadores. O objetivo do trabalho é implementar um código computacional para a análise da transferência de calor bidimensional estacionária em aplicações de engenharia, utilizando o método das diferenças finitas que se baseia na substituição das equações diferenciais por equações algébricas. É realizado o estudo teórico sobre a transferência de calor e o método das diferenças finitas, é descrito a equação do calor pelo método, é demonstrado a técnica das diferenças finitas em código computacional usando o *software* livre Scilab, aplicando o caso prático comparando os resultados obtidos no código implementado. Após a simulação, são analisadas a influência da condutividade térmica e convecção forçada e natural, a variação de resultados através da variação do número de células de simulação e, por fim, a comparação com o *software SS-T Conduct* para validação dos resultados, demonstrando que o programa envolvendo o código computacional funcionou corretamente e apresentou bons resultados com a faixa de variação entre 0°C a 2°C, com 88% dos resultados abaixo de 1°C para o aço carbono, aço inox, alumínio e cobre.

Palavras-chave: Transferência de calor. Métodos numéricos. Diferenças finitas. Simulação numérica.

ABSTRACT

Heat transfer is often found in the engineering sphere as a relevant field of study because of its application and importance for the performance of industrial processes. To solve problems involving heat transfer with complex geometries and boundary conditions, numerical methods are used through simulation techniques that can be solved through computational problems using the ready availability of computers. The objective of this work is to implement a computational code for the analysis of stationary two-dimensional heat transfer in engineering applications, using the finite difference method which is based on the replacement of differential equations by algebraic equations. The theoretical study on heat transfer and the finite differences method is carried out, the heat equation is described by the method, the finite differences technique is demonstrated in computational code using the free software Scilab, applying the practical case comparing the results obtained in the implemented code. After the simulation, the influence of thermal conductivity and forced and natural convection are analyzed, the variation of results through the variation of the number of simulation cells and, finally, the comparison with the SS-T Conduct software for validation of the results, demonstrating that the program involving the computer code worked correctly and presented good results with the variation range between 0°C to 2°C, with 88% of the results below 1°C for carbon steel, stainless steel, aluminum and copper.

Key-words: Heat transfer. Numerical methods. Finite differences. Numerical simulation.

LISTA DE SIMBOLOS

A	Área (m^2)
T	Temperatura do local (ºC)
k	Condutividade térmica (W/m.K)
q	Taxa de transferência de calor (W)
$q"$	Fluxo térmico (W/m^2)
T_S	Temperatura da superfície (ºC)
T_∞	Temperatura do fluido (ºC)
h	Coeficiente de transferência de calor por convecção (W/m^2K)
E	Poder emissivo (W/m^2)
σ	Constante de Stefan-Boltzmann (W/m^2K^4)
ε	Emissividade
G	Irradiação (W/m^2)
α	Absortividade
Δx	Comprimento (m)
Δy	Espessura (m)
Δz	Profundidade (m)
$\dot{Q}$	Taxa de transferência de calor (W)
$\dot{e}_m$	Taxa de geração de calor por unidade de volume (W/m^3)
$\dot{E}_{ger.elem}$	Taxa de geração de calor (W/m^3)
$\dot{q}_0$	Fluxo de calor (W/m^2)
ΔT	Variação de temperatura (ºC)
L	Comprimento (m)
W	Espessura (m)
nx	Número de células na direção x
ny	Número de células na direção y

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Formulação do Problema

A ciência que se preocupa com a determinação das taxas de transferências de energia é a transferência de calor. O calor é definido como a forma de energia que pode ser transferida de um sistema para outro em consequência da diferença de temperatura entre eles e ocorre da maior para a menor temperatura (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

Na atualidade, conforme Incropera *et al.* (2008), a transferência de calor é frequentemente encontrada na esfera das engenharias como um campo de estudo relevante pela sua aplicação e importância para o desempenho de processos industriais. O mesmo autor aborda que o calor pode ser transferido de três diferentes modos: condução, convecção e radiação.

Segundo Incropera *et al.* (2008), transferência de calor por condução é o modo de transferência de energia das partículas mais energéticas para as menos energéticas de uma substância, podendo ocorrer em sólidos, líquidos ou gases em repouso. A convecção se refere à transferência de calor entre uma superfície sólida e um fluido em movimento estando os dois em diferentes temperaturas. A radiação térmica é a energia emitida pela matéria em forma de ondas eletromagnéticas e ocorre na ausência de um meio interposto participante, através de uma transferência de calor líquida entre duas superfícies em diferentes temperaturas (INCROPERA *et al.*, 2008).

Para a resolução de problemas de transferência de calor, envolvendo geometrias e condições de contornos simples, utiliza-se métodos de solução analíticas, que têm base na resolução da equação diferencial governante, junto com as condições de contorno. Métodos numéricos, por sua vez, se baseiam na substituição da equação diferencial pelo conjunto de equações algébricas para temperaturas desconhecidas, bem como são utilizados para a resolução de problemas com geometrias e condições de contorno complexas ou propriedades variáveis, e podem ser obtidas por computadores (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

Em virtude dos elevados custos associados ao andamento de estudos experimentais e das boas experiências com técnicas de simulação numérica, essa última vem se tornando uma notável alternativa para o estudo da transferência de calor.

Dentre os métodos usados na solução de problemas com equações diferenciais, este trabalho utilizará a formulação numérica do problema através do método das diferenças finitas, que se baseia na substituição das equações diferenciais por equações algébricas. Dessa forma, o presente trabalho apresenta a seguinte pergunta problema:

Como implementar um código computacional para a análise da transferência de calor bidimensional estacionária em aplicações de engenharia utilizando o método das diferenças finitas?

1.2 Justificativa

A pronta disponibilidade de computadores de alta velocidade, os poderosos programas computacionais de uso simples e a crescente necessidade de resolver problemas tidos como complexos foram os propulsores para os métodos numéricos.

Esses métodos têm como característica a redução de um problema contínuo com um número ilimitado de variáveis para um problema discreto com um número de variáveis limitado, sendo possível que sejam solucionados computacionalmente, obtendo impacto importante sobre a educação e a prática da engenharia nos últimos anos. Assim, é necessário o conhecimento e desenvolvimento dessas ferramentas para um bom desenvolvimento profissional (ÇENGEL; GHAJAR, 2012; MALISKA, 2004).

1.3 Objetivos

1.3.1 Geral

Implementar um código computacional para a análise da transferência de calor bidimensional estacionária em aplicações de engenharia utilizando o método das diferenças finitas.

1.3.2 Específicos

- Realizar estudos teóricos sobre a transferência de calor e acerca do método das diferenças finitas;
- Elaborar um procedimento metodológico para a resolução do problema;
- Descrever a equação do calor pelo método das diferenças finitas;
- Demonstrar a técnica das diferenças finitas em código computacional usando *software* livre;
- Realizar aplicação de um caso prático;

- Comparar e validar os resultados obtidos no código implementado com outro *software*.

1.4 Estrutura do Trabalho

O trabalho contém cinco capítulos, conforme destacados a seguir.

No capítulo 1 é apresentada a introdução do trabalho, a justificativa, os objetivos gerais e específicos. No capítulo 2 é mostrada uma revisão bibliográfica sobre a transferência de calor, o método das diferenças finitas, a discretização e a implementação numérica. No capítulo 3 é exibida a metodologia utilizada. No capítulo 4 é apresentada a análise e discussão dos resultados. O capítulo 5 é dedicado às conclusões e, por fim, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Transferência de calor

Segundo Kreith *et al.* (2016), o processo pelo qual se efetua o transporte de energia é conhecido como transferência de calor. Essa energia será transferida sempre que houver um gradiente de temperatura dentro de um sistema ou quando dois sistemas com diferentes temperaturas estejam em contato. O objeto em trânsito, chamado calor, não pode ser observado ou medido diretamente. No entanto, é possível identificar e quantificar seus efeitos por meio de medições e análise (KREITH *et al.*, 2016).

Çengel e Ghajar (2012) afirmam que o calor pode ser transferido de três diferentes modos: condução, convecção e radiação. Todos os modos de transferência de calor demandam a existência da diferença de temperatura, bem como ocorrem da maior para a menor temperatura (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

2.1.1 Condução

De acordo com Çengel e Ghajar (2012), condução é a transferência de energia das partículas mais energéticas de uma substância para partículas vizinhas adjacentes menos energéticas, como resultado da interação entre elas. A condução pode ocorrer em sólidos, líquidos ou gases em repouso (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

Em líquidos e gases, a condução ocorre pelas colisões e difusões das moléculas em seus movimentos aleatórios, conforme destacam Çengel e Ghajar (2012). Já a condução nos sólidos, ocorre através da combinação das vibrações das moléculas em rede, e a energia é transportada por elétrons livres (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

Segundo Kreith *et al.* (2016), a taxa q_x na qual o calor é transferido por condução é proporcional ao gradiente de temperatura dT/dx vezes a área A por meio da qual o calor é transferido.

$$q_x \; \alpha \; A \frac{dT}{dx} \tag{1}$$

Sendo T a temperatura local e x a distância na direção do fluxo de calor.

A taxa real de fluxo de calor depende da condutividade térmica k, que é uma propriedade física do meio, tal como é a medida da capacidade do material de conduzir calor (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

Kreith *et al.* (2016) apresenta as ordens de magnitude da condutividade térmica de vários tipos de materiais, conforme mostra a Tabela 1.

Tabela 1 - Condutividades térmicas de alguns metais, sólidos não metálicos, líquidos e gases

Material	Condutividade térmica, a 300 K (W/m K)
Cobre	399
Alumínio	237
Aço-carbono, 1% C	43
Vidro	0,81
Plásticos	0,2-0,3
Água	0,6
Etilenoglicol	0,26
Óleo de motor	0,15
Freon (líquido)	0,07
Hidrogênio	0,18
Ar	0,026

Fonte: Kreith *et al.* (2016, p.7)

Segundo Incropera *et al* (2019) para a condução por um meio homogêneo, a taxa de transferência de calor é dada pela lei de Fourier:

$$q_x = -\, k\, A \frac{dT}{dx} \tag{2}$$

Ou para o fluxo de calor (fluxo térmico):

$$q''_x = \frac{q_x}{A} = -\, k \frac{dT}{dx} \tag{3}$$

O sinal negativo é uma consequência da Segunda Lei da Termodinâmica, que requer que o calor flua na direção da maior para a menor temperatura (KREITH *et al.*, 2016).

De acordo com Kreith *et al.* (2016), a taxa de condução de calor por um meio depende da geometria, da espessura, do tipo de material e da diferença de temperatura a que o meio está submetido.

Para inúmeros sistemas da engenharia são apresentados modelos unidimensionais, onde gradientes de temperatura estão presentes em uma única direção e em regime estacionário, sendo a temperatura independente do tempo (INCROPERA *et al.*, 2019).

Na condução de calor unidimensional em uma parede plana, demonstrada na Figura 1, é apresentada uma parede plana que separa dois fluidos que estão a diferentes temperaturas. A transferência de calor ocorre por convecção do fluido quente ($T_{\infty,1}$) para uma superfície da parede ($T_{S,1}$) e na outra superfície da parede ($T_{S,2}$) para o fluido frio ($T_{\infty,2}$). Também tem-se o modo de transferência por condução através da parede (INCROPERA *et al.*, 2019).

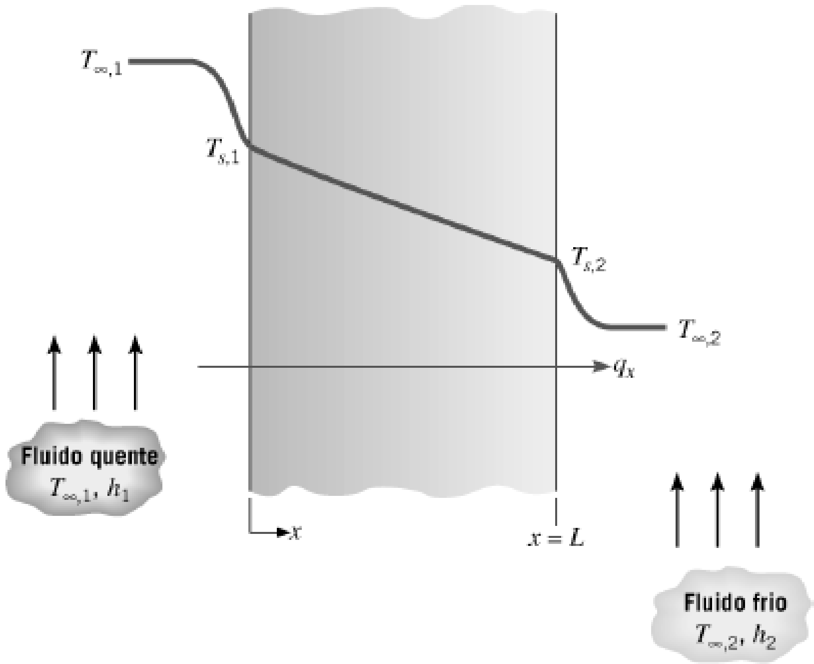

Figura 1 - Distribuição de temperatura através de uma parede plana
Fonte: Incropera *et al*. (2019, p. 64)

Para determinar a distribuição de temperatura e obter a taxa de transferência de calor por condução, Incropera *et al* (2019) cita que é necessário analisar as condições no interior da parede. Considerando uma condução unidimensional em regime estacionário em uma parede plana sem geração de calor, com o fluxo térmico sendo uma constante independente de x, tem-se:

$$\frac{d}{d_x}\left(k\,\frac{dT}{d_x}\right) = 0 \tag{4}$$

Realizando as considerações anteriores e também considerando a condutividade térmica do material da parede constante, a equação (4) pode ser integrada duas vezes, obtendo-se uma solução geral:

$$T(x) = C_1x + C_2 \tag{5}$$

Introduzindo condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$, considerando a temperatura constante na superfície, obtêm-se as constantes de integração C_1 e C_2:

$$T(0) = T_{s,1}\ e\ \ T(L) = T_{s,2} \tag{6}$$

Substituindo a condição de contorno em $x = 0$ na solução geral:

$$T_{s,1} = C_2 \tag{7}$$

Substituindo a condição de contorno em $x = L$ na solução geral:

$$T_{s,2} = C_1 L + C_2 = C_1 L + T_{s,1} \tag{8}$$

Ou ainda

$$\frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L} = C_1 \tag{9}$$

A distribuição de temperaturas é encontrada substituindo na solução geral, demonstrando que a temperatura varia linearmente com x.

$$T(x) = (T_{s,2} - T_{s,1})\frac{x}{L} + T_{s,1} \tag{10}$$

Aplica-se a distribuição de temperatura na Lei de Fourier (2) para determinar a taxa de transferência de calor por condução:

$$q_x = -\,kA\frac{dT}{dx} = \frac{kA}{L}(T_{s,1} - T_{s,2}) \tag{11}$$

O fluxo térmico:

$$q''_x = \frac{q_x}{A} = \frac{k}{L}(T_{s,1} - T_{s,2}) \tag{12}$$

Após a dedução das equações nota-se que tanto a taxa de transferência de calor q_x quanto o fluxo térmico q''_x são constantes independentes de x.

Para a resolução de problemas relacionados a condução de calor utiliza-se o procedimento padrão que consiste em determinar a solução geral para a distribuição de temperaturas e a utilização das condições de contorno para obter a solução particular, determinando a taxa de transferência de calor aplicando a lei de Fourier. Outro modo de resolução consiste na utilização dos balanços de energia nas superfícies da parede, obtendo resultados equivalentes (INCROPERA *et al.*, 2019).

2.1.2 Convecção

Çengel e Ghajar (2012, p.25) definem convecção como “o modo de transferência de energia entre a superfície sólida e a líquida ou gás adjacente, que está em movimento e que envolve os efeitos combinados de condução e de movimento de um fluido”.

A transferência de calor entre a superfície sólida e o fluido adjacente ocorre por condução, quando não houver movimento da massa de fluido, como salientam Çengel e Ghajar (2012). O mesmo autor aborda que ao contrário, quando houver a presença de movimento da massa de fluido ocorrerá o aumento da transferência de calor, dificultando também a determinação das taxas de transferência de calor.

De acordo com Incropera *et al* (2008), independente da natureza específica do processo de transferência de calor por convecção, utiliza-se a lei de resfriamento de Newton como equação apropriada:

$$q'' = h(T_S - T_\infty) \tag{13}$$

Em que q'' é o fluxo de calor por convecção (W/m²), T_S a temperatura da superfície (K), T_∞ a temperatura do fluido (K) e h o coeficiente de transferência de calor por convecção (W/(m²K)).

Na Tabela 2, são apresentados os valores típicos do coeficiente de transferência de calor por convecção que tem como influência a geometria da superfície, a natureza do escoamento do fluido, as propriedades termodinâmicas e de transporte do fluido (INCROPERA *et al.*, 2008).

Tabela 2 - Valores de coeficiente de transferência de calor por convecção

Processo	***h*** **(W/(m² K))**
Convecção natural	
Gases	2–25
Líquidos	50–1000
Convecção forçada	
Gases	25–250
Líquidos	100–20.000
Convecção com mudança de fase	
Ebulição e condensação	2500–100.000

Fonte: Incropera *et al*. (2008, p.6)

A convecção é denominada forçada quando o fluído é forçado a se movimentar sobre a superfície por meios externos, como ventilador, bomba ou ventos atmosféricos. Já a convecção natural (ou livre) acontece quando o escoamento do fluido ocorre por forças de empuxo induzidas pelas diferenças de densidade (massa específica), decorrentes da variação da temperatura no fluido (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

2.1.3 Radiação

De acordo com Çengel e Ghajar (2012, p.27) "radiação é a energia emitida pela matéria sob a forma de ondas eletromagnéticas (ou fótons) como resultado das mudanças nas configurações eletrônicas de átomos ou moléculas".

A transferência de calor por radiação é mais rápida, apresentando a velocidade da luz e ocorre mais eficientemente no vácuo. Além disso, não exige a presença de um meio interveniente, diferente da condução e convecção (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

O poder emissivo, E (W/m^2), é a taxa na qual radiação é emitida de uma superfície por unidade de área superficial, em todos os comprimentos de onda e direções. Há um limite superior para o poder emissivo, que é determinado pela lei de Stefan-Boltzmann (INCROPERA *et al.*, 2019).

$$E = \sigma T_s^4 \tag{14}$$

Em que T_s é a temperatura absoluta (K) da superfície, chamada de radiador ideal ou corpo negro e σ é a constante de Stefan-Boltzmann ($\sigma = 5{,}67\ x\ 10^{-8} W/\ m^2K^4$).

De acordo com Incropera *et al* (2019), o fluxo térmico emitido por uma superfície real é menor do que aquele emitido por um corpo negro à mesma temperatura em que ε é uma propriedade radiante da superfície conhecida por emissividade, que depende fortemente do material da superfície e de seu acabamento. Sendo definido por:

$$E = \varepsilon\sigma T_s^4 \tag{15}$$

A irradiação, G (W/m²), é a taxa na qual radiação incide sobre uma superfície por unidade de área superficial, com todos os comprimentos de onda e vinda de todas as direções. A taxa na qual a energia radiante é absorvida, por unidade de área da superfície, pode ser calculada usando a absortividade, α, que depende da natureza da irradiação e da superfície (INCROPERA *et al.*, 2019). Ou seja:

$$G_{abs} = \alpha G \tag{16}$$

Pode acontecer situações que exista uma vizinhança que apresenta temperatura diferente da superfície ($T_{viz} \neq T_s$). Nesta condição, a irradiação pode ser aproximada pela emissão de um corpo negro, ou seja:

$$G = \sigma T_{viz}^4 \tag{17}$$

Para Incropera *et al* (2019), se a superfície for considerada com $\alpha = \varepsilon$ (uma superfície cinza), a taxa líquida de transferência de calor por radiação fornece a diferença entre a energia térmica liberada em virtude da emissão de radiação e aquela ganha graças à absorção de radiação:

$$q''_{rad} = \frac{q}{A} = \varepsilon E_n(T_s) - \alpha G = \varepsilon\sigma(T_s^4 - T_{viz}^4) \qquad (18)$$

Em muitas aplicações é conveniente expressar a troca líquida de calor por radiação na forma:

$$q_{rad} = h_r A(T_s - T_{viz}) \qquad (19)$$

Na qual, o coeficiente de transferência de calor por radiação h_r é definido por:

$$h_r \equiv \varepsilon\sigma(T_s + T_{viz})(T_s^2 + T_{viz}^2) \qquad (20)$$

2.2 Métodos numéricos em condução de calor

Existem diferentes maneiras de se obter a formulação numérica para a resolução dos problemas envolvendo a condução de calor. Os métodos numéricos se baseiam na substituição da equação diferencial pelo conjunto de n equações algébricas para temperaturas desconhecidas, em n pontos selecionados, e, após a resolução das equações, são obtidos os valores da temperatura nos pontos discretos (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

Alguns desses métodos como o método das diferenças finitas, método dos elementos finitos, método dos elementos de contorno, podem ser resolvidos através de equações diferenciais ou a abordagem do balanço de energia em volumes de controle, que resultam no mesmo conjunto de equações algébricas finais (ÇENGEL; GHAJAR, 2012; FORTUNA, 2000).

2.2.1 Conceito do método das diferenças finitas

Segundo Çengel e Ghajar (2012) e Fortuna (2000), a formulação do método das diferenças finitas para problemas de condução de calor pode ser realizada por meio da substituição das derivadas por diferenças nas equações diferenciais. Utilizando o balanço de energia para a resolução de problemas e obtenção da formulação numérica não é necessário que se tenha equação diferencial antes da análise, podendo lidar de forma simplista com as condições de contorno.

2.2.2 Sequência de aplicação do método

Para Majumdar (2006) e Fortuna (2000), o processo de discretização no método das diferenças finitas envolve primeiramente a divisão da região de solução em uma rede de grade ou malha de linhas que se cruzam, e que são traçadas paralelamente aos eixos de coordenadas. Os pontos de intersecção discretos dessas linhas de grade são chamados de grade ou pontos nodais. A precisão da solução melhora com o aumento dos pontos da grade ou diminuição do tamanho da grade.

As etapas básicas para obter uma solução numérica usando o método das diferenças finitas são definidos como (MAJUMDAR, 2006):

1. Realizar a declaração matemática do problema em termos de equações, condições de contorno e condições iniciais;

2. Discretizar o domínio da solução em uma rede de pontos nodais discretos. Os valores desconhecidos são buscados apenas nesses pontos discretos, em vez da obtenção de uma solução contínua no domínio;

3. Obter as equações de discretização para todos os pontos nodais, aproximando as equações e as condições de contorno;

4. Usar um algoritmo de solução apropriado para resolver o conjunto de equações algébricas envolvendo os valores desconhecidos nos pontos nodais;

5. Realizar o processamento de dados para avaliar os valores obtidos.

2.2.3 Métodos implícito e explícito

As formulações explícitas e implícitas são expressões entre as temperaturas nodais antes e depois do intervalo de tempo e podem ser usadas em qualquer sistema de coordenadas, independentemente da dimensão da transferência de calor (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

Segundo Çengel e Ghajar (2012), a abordagem de diferenças finitas é chamada de método implícito quando se devem usar as temperaturas utilizando um novo passo de tempo $i + 1$. O mesmo autor aborda que o método explícito se difere no passo de tempo na qual se deve usar as temperaturas do passo anterior i.

Os métodos apresentam vantagens e desvantagens. O método implícito exige que as temperaturas nodais sejam resolvidas simultaneamente para cada passo de tempo, mas não impõe nenhuma restrição sobre o tempo. Já o método explícito impõe um limite sobre o passo de tempo, obtendo uma implementação mais simples (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

2.2.4 Balanço de energia

A abordagem do método do balanço de energia utiliza a subdivisão do meio em elementos de volume, seguido da aplicação do balanço de energia em cada elemento. São selecionados pontos nodais (nós) em que temperaturas serão determinadas e são criados volumes de controle próximos aos nós. Para simplificação, a temperatura pode variar linearmente entre os nós quando se expressa a condução de calor entre os elementos utilizando a lei de Fourier (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

Considerando a transferência de calor unidimensional permanente na parede plana de espessura L com geração de calor e condutividade constante k. Subdividindo a parede, conforme demonstrado na Figura 2, em M regiões iguais de espessura $\Delta x = \frac{L}{M}$ na direção x, sendo as divisões entre elas selecionadas como nós. A coordenada x de qualquer nó m é $x_m = m\Delta x$, e a temperatura nesse ponto é $T(x_m) = T_m$. Os elementos são formados pelas linhas verticais através dos pontos médios entre os nós, onde os elementos internos (nós internos) são elementos inteiros com espessura Δx, enquanto os dois elementos no contorno são apenas metade do elemento (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

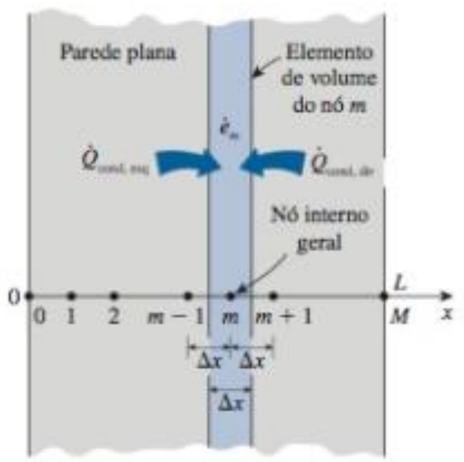

Figura 2 - Pontos nodais e elementos de volume
Fonte: Çengel e Ghajar (2012, p.302)

Çengel e Ghajar (2012) determinam a equação geral de diferenças finitas para os nós internos, considerando o elemento representado pelo nó *m* e os dois nós vizinhos *m-1* e *m+1*. Para a expressão do balanço de energia no elemento é considerado a condução de calor para o elemento em todas as superfícies:

$$\begin{pmatrix} Taxa\ de \\ condução\ de \\ calor\ no\ lado \\ esquerdo \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Taxa\ de \\ condução\ de \\ calor\ no\ lado \\ direito \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Taxa\ de \\ geração\ de \\ calor\ dentro \\ do\ elemento \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Taxa\ de\ mudança \\ de\ conteúdo \\ de\ energia \\ do\ elemento \end{pmatrix} \tag{21}$$

Assim,

$$\dot{Q}_{cond.esq} + \dot{Q}_{cond.dir} + \dot{E}_{ger.elem} = \frac{\Delta E_{elem}}{\Delta t} = 0 \tag{22}$$

No caso da quantidade de energia do meio não apresentar mudança sob condições permanentes, ou seja, $\Delta E_{elem} = 0$. A taxa de geração de calor dentro do elemento será:

$$\dot{E}_{ger.elem} = \dot{e}_m V_{elem} = \dot{e}_m A\Delta x \tag{23}$$

Em que $\dot{e}_m$ é definido como a taxa de geração de calor por unidade de volume em W/m³ avaliada no nó m e constante para todo o elemento e A é definida como a área de transferência de calor, sendo da superfície interna (ou externa) da parede (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

O mesmo autor informa que quando a temperatura varia linearmente, conforme mostrado na Figura 3, a taxa de condução de calor permanente através da parede plana de espessura L é definida como:

$$\dot{Q}_{cond} = kA\frac{\Delta T}{L} \tag{24}$$

Sendo ΔT definida como a variação de temperatura através da parede e a direção da transferência de calor (da maior para a menor temperatura).

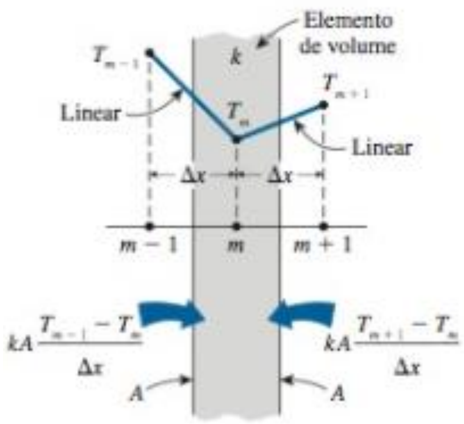

Figura 3 - A temperatura variando linearmente entre os nós
Fonte: Çengel e Ghajar (2012, p.303)

Çengel e Ghajar (2012) expressam a taxa de condução de calor nas superfícies esquerda e direita como:

$$\dot{Q}_{cond.esq} = kA\frac{T_{m-1}-T_m}{\Delta x} \ \ e \ \ \dot{Q}_{cond.dir} = kA\frac{T_{m+1}-T_m}{\Delta x} \tag{25}$$

Substituindo as equações (23) e (24) dentro da equação (22):

$$kA\frac{T_{m-1}-T_m}{\Delta x} + kA\frac{T_{m+1}-T_m}{\Delta x} + \dot{e}_m\, A\Delta x = 0 \tag{26}$$

Fazendo as simplificações, obtêm-se:

$$\frac{T_{m-1}-2T_m+T_{m+1}}{\Delta x^2} + \frac{\dot{e}_m}{k} = 0 \quad m = 1,2,3, \dots . M-1 \tag{27}$$

O autor demonstra que outras simplificações são realizadas, como não se preocupar com o sinal dos termos de condução, ou seja, todas as diferenças de temperatura são expressas como a temperatura do nó vizinho menos a temperatura do nó em análise, e todos os termos de condução são adicionados, assumindo que a condução de calor seja para o elemento em todas as superfícies.

A Figura 4 pressupõe que a transferência de calor ocorra para fora do elemento de volume na superfície da direita e sua equação é determinada como:

$$kA\frac{T_1-T_2}{\Delta x} - kA\frac{T_2-T_3}{\Delta x} + \dot{e}_2\ \ A\Delta x = 0 \ \ ou \ \ T_1 - 2T_2 + T_3 + \dot{e}_2\frac{A\Delta x^2}{k} = 0 \tag{28}$$

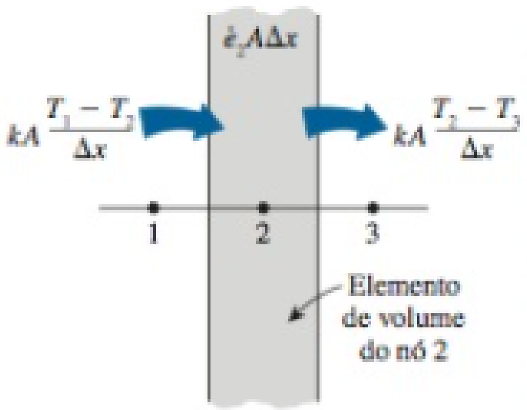

Figura 4 - Transferência fora do elemento de volume na superfície da direita
Fonte: Çengel e Ghajar (2012, p.304)

Já a Figura 5 confirma que a direção definida para a transferência de calor nas superfícies não tem efeito algum sobre a formulação do método das diferenças finitas e exemplifica a transferência de calor ocorrendo para dentro do elemento de volume em todas as superfícies e apresentando a mesma equação final determinada como:

$$kA\frac{T_1-T_2}{\Delta x} - kA\frac{T_3-T_2}{\Delta x} + \dot{e}_2\, A\Delta x = 0 \ \ ou \ \ T_1 - 2T_2 + T_3 + \dot{e}_2\frac{A\Delta x^2}{k} = 0 \qquad (29)$$

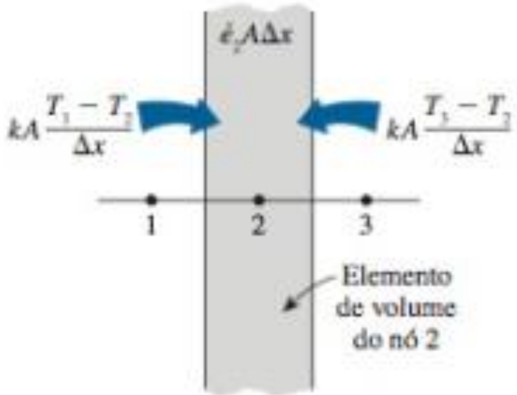

Figura 5 - Transferência dentro do elemento de volume em todas as superfícies
Fonte: Çengel e Ghajar (2012, p.304)

2.2.5 Condições de contorno

Para os nós de contorno, a abordagem apresenta diferenças, e exige a presença de nós de ambos os lados do nó em análise. Devido a isso, aplica-se o balanço de energia nos elementos de volume dos nós no contorno para obter as equações de diferenças finitas dos nós do contorno separadamente (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

As condições de contorno, demonstradas por Çengel e Ghajar (2012) são temperatura especificada, fluxo de calor especificado, convecção e radiação. Para transferência de calor unidimensional através da parede plana de espessura L, o número do nó na superfície esquerda em x = 0 é 0 e na superfície direita em x = L é M. Sendo assim, as condições de contorno de temperatura especificada nas superfícies esquerda e direita, conforme a Figura 6, podem ser expressas como:

$$\mathrm{T(0)} = T_0 = \text{ valor especificado}$$

$$\mathrm{T(L)} = T_M = \text{ valor especificado}$$

Em que T_0 e T_M são as temperaturas especificadas nas superfícies x = 0 e x = L, respectivamente.

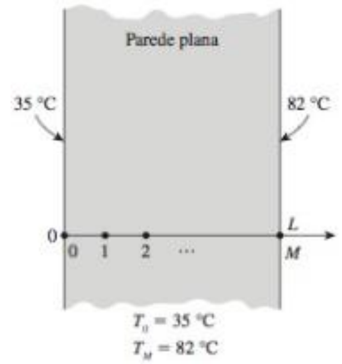

Figura 6 - Condições de contorno com temperatura especificada
Fonte: Çengel e Ghajar (2012, p.305)

Quando outras condições de contorno, como o fluxo de calor, a convecção, a radiação são especificadas no contorno, a equação de diferenças finitas para o nó do contorno é obtida, escrevendo o balanço de energia sobre o elemento de volume no contorno. O balanço de energia é novamente expresso, conforme a equação (30), para transferência de calor sob condições permanentes (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

$$\sum_{todos\ os\ lados} \dot{Q} + \dot{E}_{ger.elem} = 0 \qquad (30)$$

O fluxo de calor especificado é considerado positivo se for para dentro do meio e negativo se for para fora do meio. Por isso, a formulação de diferenças finitas para o nó m = 0, onde x = 0, da parede plana de espessura L, durante a condução de calor unidimensional permanente, pode ser representado na Figura 7.

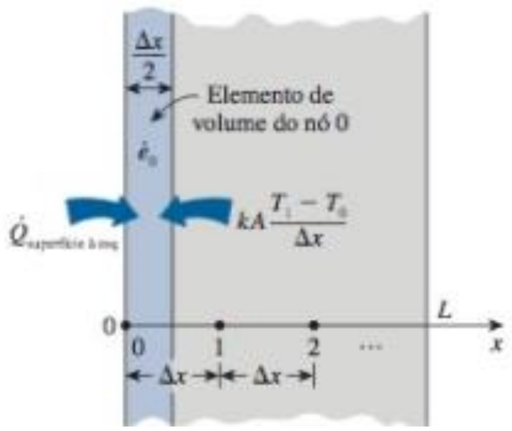

Figura 7 - Formulação do método do nó do contorno esquerdo
Fonte: Çengel e Ghajar (2012, p.305)

A formulação do método de diferenças finitas do nó do contorno esquerdo de uma parede plana é determinado onde $A\Delta x/2$ é o volume do elemento de volume, $\dot{e}_0$ é a taxa de geração de calor por unidade de volume (em W/m³) em x = 0 e A é a área de transferência de calor, que é constante para parede plana (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

$$\dot{Q}_{superfície\ \text{à}\ esquerda} + kA\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{e}_0(A\Delta x/2) = 0 \quad (31)$$

Para diferentes condições de contorno, Çengel e Ghajar (2012) definem a forma de diferenças finitas, substituindo $\dot{Q}_{superfície\ \text{à}\ esquerda}$ por uma expressão adequada na equação (31). Nas equações abaixo, $\dot{q}_0$ é o fluxo de calor especificado em W/m², h é o coeficiente de convecção, T_∞ é a temperatura do meio envolvente. As condições de contorno são definidas para o lado esquerdo e também podem ser usadas para o contorno do lado direito.

1. Condição de contorno de fluxo de calor especificado

$$\dot{q}_0 A + kA\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{e}_0(A\Delta x/2) = 0 \quad (32)$$

- Caso especial: contorno isolado ($\dot{q}_0 = 0$)

$$kA\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{e}_0(A\Delta x/2) = 0 \quad (33)$$

2. Condição de contorno de convecção

$$hA(T_\infty - T_0) + kA\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{e}_0(A\Delta x/2) = 0 \quad (34)$$

2.2.6 Condução de calor permanente bidimensional

Para a formulação e solução numérica da condução de calor permanente bidimensional em coordenadas retangulares, utilizando o método das diferenças finitas, é considerada uma região retangular com pontos nodais espaçados onde a condução de calor é significativa nas direções x e y, além de considerar a profundidade unitária $\Delta z = 1$ na direção z, de acordo com a Figura 8 (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

Para problemas bidimensionais, ocorre a notação de subscrito duplo (m, n) em que m = 0, 1, 2,..., M é a contagem dos nós na direção x e n = 0, 1, 2,..., N é a contagem dos nós na direção y. As coordenadas do nó (m, n) são simplesmente $x = m\Delta x$ e $y = n\Delta y$, e a temperatura do nó (m, n) é indicada por $T_{m,n}$ (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

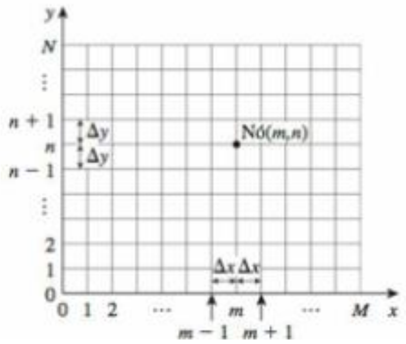

Figura 8 - Rede nodal para condução bidimensional em coordenadas retangulares
Fonte: Çengel e Ghajar (2012, p.313)

Na Figura 9 é considerado o elemento de volume de tamanho Δx x Δy x 1 centrado sobre o nó geral interno (m, n) na região onde o calor é gerado a taxa de $\dot{e}$ e condutividade térmica constante k.

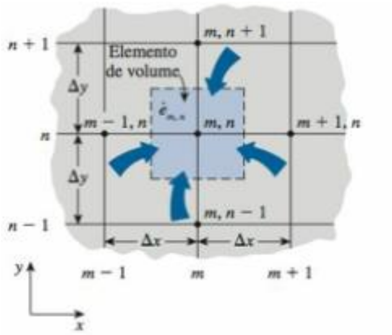

Figura 9 - Elemento de volume para condução bidimensional em coordenadas retangulares
Fonte: Çengel e Ghajar (2012, p.313)

Segundo Çengel e Ghajar (2012), o balanço de energia no elemento de volume pode ser expresso como:

$$\begin{pmatrix} Taxa\ de \\ condução\ nas \\ superfícies\ esquerda, \\ superior, direita\ e\ inferior \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Taxa\ de \\ geração\ de \\ calor\ dentro \\ do\ elemento \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Taxa\ de\ variação \\ de\ conteúdo \\ de\ energia \\ do\ elemento \end{pmatrix} \quad (35)$$

Ou para o caso permanente:

$$\dot{Q}_{cond.esq} + \dot{Q}_{cond.sup} + \dot{Q}_{cond.dir} + \dot{Q}_{cond.inf} + \dot{E}_{ger.elem} = \frac{\Delta E_{elem}}{\Delta t} = 0 \quad (36)$$

Considerando que a temperatura entre nós adjacentes varie linearmente e observando que a área de transferência de calor é $A_x = \Delta y$ x 1$= \Delta y$ na direção x e $A_y = \Delta x$ x 1$= \Delta x$ na direção y, o balanço de energia torna-se:

$$k\Delta y \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} + k\Delta y \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} + \dot{e}_{m,n}\Delta x\Delta y = 0 \quad (37)$$

Dividindo cada termo por Δx x Δy e simplificando, a equação pode ser utilizada para obter as equações de diferenças finitas em todos os nós internos:

$$\frac{T_{m-1,n}-2T_{m,n}+T_{m+1,n}}{\Delta x^2}+\frac{T_{m,n-1}-2T_{m,n}+T_{m,n+1}}{\Delta y^2}+\frac{\dot{e}_{m,n}}{k}=0 \qquad (38)$$

Na análise de diferenças finitas, geralmente a malha quadrada é utilizada por simplicidade e Δx e Δy são escolhidos iguais. Então, $\boldsymbol{\Delta x = \Delta y = 1}$, bem como a relação é simplificada:

$$T_{m-1,n}+T_{m+1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-4T_{m,n}+\frac{\dot{e}_{m,n}l^2}{k}=0 \qquad (39)$$

A equação também pode ser expressa na seguinte forma, somando as temperaturas dos quatro vizinhos mais próximos do nó, subtraindo quatro vezes a temperatura do próprio nó e adicionando-se o termo de geração de calor:

$$T_{esq}+T_{sup}+T_{dir}+T_{inf}-4T_{nó}+\frac{\dot{e}_{nó}l^2}{k}=0 \qquad (40)$$

Ocorre outra simplificação quando não há geração de calor no meio, na qual a temperatura de cada nó interno é a média aritmética das temperaturas dos quatro nós vizinhos:

$$T_{nó}=\frac{T_{esq}+T_{sup}+T_{dir}+T_{inf}}{4} \qquad (41)$$

Para os nós do contorno de problemas bidimensionais, o desenvolvimento é similar ao caso unidimensional demostrado anteriormente. Novamente, a região é dividida entre nós, formando elementos de volume em torno dos nós, e o balanço de energia é escrito para cada nó do contorno (ÇENGEL; GHAJAR, 2012).

Para transferência de calor sob condições permanentes, a equação básica a ser considerada ao escrever o balanço de energia em elemento de volume é:

$$\sum_{todos\ os\ lados}\dot{Q}+\dot{e}V_{elem}=0 \qquad (42)$$

Segundo Çengel e Ghajar (2012), é considerado novamente por simplificação na formulação, que toda transferência de calor é para o elemento de volume de todas as superfícies, com exceção do fluxo de calor especificado, cuja direção já está especificada.

3 METODOLOGIA

3.1 Tipo de pesquisa

De acordo com Gil (2019), pesquisa é o processo formal e sistemático de desenvolvimento do método científico. Apresenta como objetivo a descoberta de respostas para problemas, empregando procedimentos científicos.

Com base nisso, obtém-se os objetivos da pesquisa que determina a sua classificação, descrição e explicação. Dessa forma, a presente pesquisa se enquadra nos seguintes estudos: exploratória, quantitativa, qualitativa, bibliográfica e abrange o estudo de caso.

As pesquisas exploratórias têm como principal finalidade o desenvolvimento e esclarecimento de conceitos e ideias para proporcionar a visão geral, de tipo aproximativo, acerca de determinado fato. Além disso, tem por objetivo proporcionar maior proximidade com o problema para construir hipóteses e torná-lo mais explícito. Normalmente envolvem levantamento bibliográfico e documental ou análises de casos para obter um problema mais esclarecido (GIL, 2018).

Gil (2018) define que as pesquisas também podem ser classificadas segundo a sua forma de abordagem. As pesquisas quantitativas utilizam números e medidas estatísticas e possibilitam a verificação da existência de relação entre variáveis. Já as pesquisas qualitativas**,** utilizam dados qualitativos, que apresentam maior interesse em descrições do que mensuração de variáveis numéricas.

A monografia em questão se enquadra em pesquisas de caráter misto, que envolvem procedimentos quantitativos e qualitativos por medir fenômenos e apresentar simulações e testes, além de dados de uma análise real.

Dados obtidos mediante a leitura de livros e artigos de periódicos diversos são definidos como pesquisas de natureza bibliográfica. Por fim, os procedimentos técnicos que envolvem o estudo de caso são determinados pela pesquisa junto ao fenômeno real (GIL, 2019).

3.2 Materiais e Métodos

A metodologia geral desse trabalho é apresentada na Figura 10.

Figura 10 - Fluxograma geral das etapas
Fonte: Pesquisa Direta (2021)

A pesquisa é iniciada com a realização da formulação do problema, com a definição da justificativa, dos objetivos gerais e específicos. É realizada a revisão bibliográfica com a definição teórica dos fundamentos da transferência de calor e aplicação do método das diferenças finitas.

No procedimento metodológico, é definido os tipos de pesquisa, materiais e métodos, variáveis e indicadores utilizados. Durante o desenvolvimento do equacionamento do problema, é realizada a aplicação da equação do calor, do balanço de energia e a discretização da equação de calor.

É elaborado o código computacional baseado nas equações discretizadas através do método das diferenças finitas. Após a elaboração do código, é realizada a aplicação do estudo de caso, através da simulação computacional.

Por fim, após a aplicação da equação de calor através do método das diferenças finitas, são apresentados a análise de dados da distribuição de temperatura, os resultados, sua validação e a discussão do trabalho.

3.3 Variáveis e Indicadores

Gil (2019) define que o termo variável, definido como qualquer coisa que pode ser classificada em duas ou mais categorias, pode ser conceituado como dependente ou independente. Sendo independente, a variável que influencia a outra variável, será considerada a variável dependente. Já os indicadores podem ser definidos como elementos, que são observáveis e possibilitam definir e mensurar empiricamente o conceito (GIL, 2019).

Com base nisso, na Tabela 3 são apresentadas as variáveis que envolvem o problema e os indicadores que serão utilizados ao longo do desenvolvimento do trabalho.

Tabela 3 - Variáveis e indicadores

Variável	Indicador
Simulação computacional	- Equação do calor; - Discretização da equação; - Condições de contorno.
Elemento simulado	- Temperatura do ar; - Temperatura do material; - Fluxo de calor; - Condutividade térmica; - Difusividade térmica; - Massa específica; - Calor especifico; - Material; - Coeficiente de transferência de calor por convecção; - Distribuição de temperatura.

Fonte: Pesquisa Direta (2022)

3.4 Instrumento de coleta de dados

A coleta de dados é feita através de livros a fim de montar a revisão bibliográfica. Além disso, para o elemento simulado são utilizados os dados de literatura como condições de ambiente, material, massa específica, calor específico, condutividade térmica, difusividade térmica, dentre outros.

3.5 Tabulação dos dados

A tabulação dos dados é feita no Excel, onde os valores são compilados e organizados para geração de gráficos. Além disso, é utilizado o Word para armazenamento de informações para o relatório, realização da pesquisa e registro da coleta de dados a partir da literatura para utilizá-los no programa computacional desenvolvido no *software* de programação livre (*Scilab*) e em um *software* para a comparação dos resultados (*SS-T Conduct*).

3.6 Considerações Finais do capítulo

Nesta seção do capítulo são apresentados as ferramentas e métodos utilizados para atingir os objetivos definidos inicialmente, a revisão teórica dos conceitos aplicados futuramente e os tipos de pesquisas a serem desenvolvidas.

No próximo capítulo, são apresentados e analisados os dados para serem discutidos os resultados dos métodos das diferenças finitas, respondendo à questão e aos objetivos propostos.

4 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentadas a caracterização e aplicação do estudo de caso, a equação do calor que é utilizada no problema pelo método das diferenças finitas e a demonstração da técnica das diferenças finitas em código computacional. Em seguida, os resultados obtidos no código implantado são apresentados e analisados.

4.1 Caracterização do estudo de caso

Para realizar o equacionamento do problema e executar o código computacional, é definida uma situação hipotética para o estudo de caso. Como situação exemplo (Figura 11), é estudado o aquecimento de chapas e o que ocorre após inserir uma fonte de calor na extremidade da mesma.

Na situação exemplo, a primeira superfície tem o aquecimento da chapa devido à fonte externa de calor que está sendo imposta. O calor é conduzido ao longo da chapa, e as outras três superfícies estão trocando calor por convecção com o meio externo, gerando um gradiente de temperatura.

É definida a geometria da chapa e outras condições de contorno iniciais para obter a distribuição de temperatura, bem como a análise térmica em chapas de diferentes materiais para o problema de condução e convecção de calor, em regime estacionário, bidimensional, sem geração de calor e propriedades constantes.

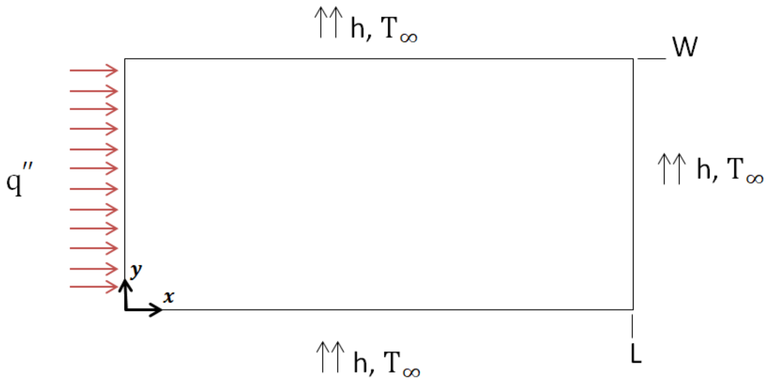

Figura 11 - Caracterização do estudo de caso
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

4.2 Equacionamento do problema

A equação de calor para o problema em questão é:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} = 0 \tag{43}$$

O problema tem quatro condições de contorno, extraídas das fronteiras das quatro superfícies, relacionadas ao fluxo de calor e a convecção térmica.

Utiliza-se o Método das Diferenças Finitas Centralizadas (MDF) para realizar o balanço de energia das células. Para efeito de cálculo, é necessário escolher um número de células mínimo igual a nove, para a aplicação da metodologia, conforme mostra o esquema da Figura 12:

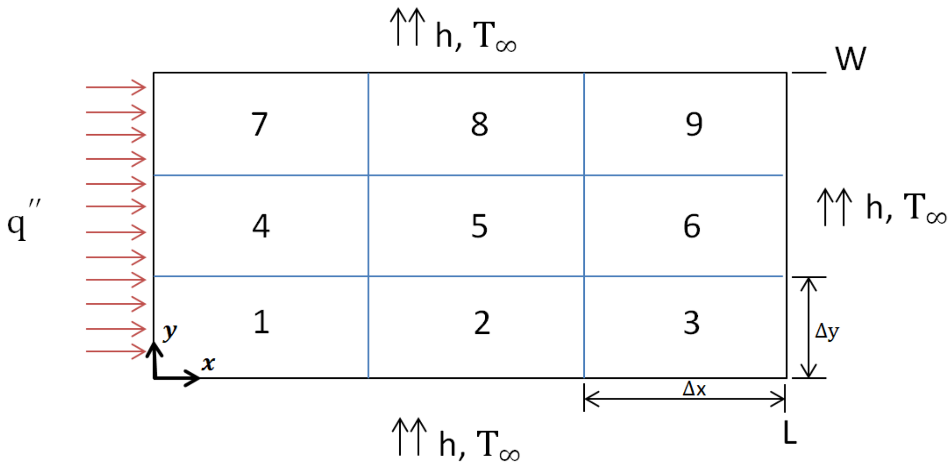

Figura 12 - Divisão das células para a solução numérica MDF
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

A partir das expressões obtidas no balanço de energia através da equação de calor pelo método implícito, as variáveis são substituídas pelas simplificações mostradas a seguir para auxiliar no código computacional.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\Delta x^2}}$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\Delta y^2}}$$

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{2h}}{\mathbf{h\Delta x^2 + 2k\Delta x}}$$

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{2h}}{\mathbf{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}}$$

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{2hT_\infty}}{\mathbf{h\Delta x^2 + 2k\Delta x}}$$

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{2hT_\infty}}{\mathbf{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}}$$

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{q''}}{\mathbf{k\Delta x}}$$

A título de simplificação, também é realizado o balanço de energia descrito a seguir de forma similar em todas as células.

$$\mathrm{E_{ent}} - \mathrm{E_{sai}} + \mathrm{E_{ger}} = \mathrm{E_{acu}}$$

Em que:

$\mathrm{E_{ger}}$ = 0 (Não tem geração de calor);

$\mathrm{E_{acu}} = 0$ (Regime estacionário);

Sendo assim, tem-se:

$$q_{ent} - q_{sai} + 0 = 0$$

Ou, para a placa bidimensional:

$$q_{ent,x} + q_{ent,y} - q_{sai,x} - q_{sai,y} = 0$$

A seguir, estão apresentadas as expressões para as células de um a nove relacionadas ao balanço de energia. Na Figura 13 é apresentado o resumo de todas as células contendo as partes reais (células reais) e as partes imaginárias (células fantasmas). Os balanços de energia nas células de um a nove e as equações resultantes são mostradas na sequência.

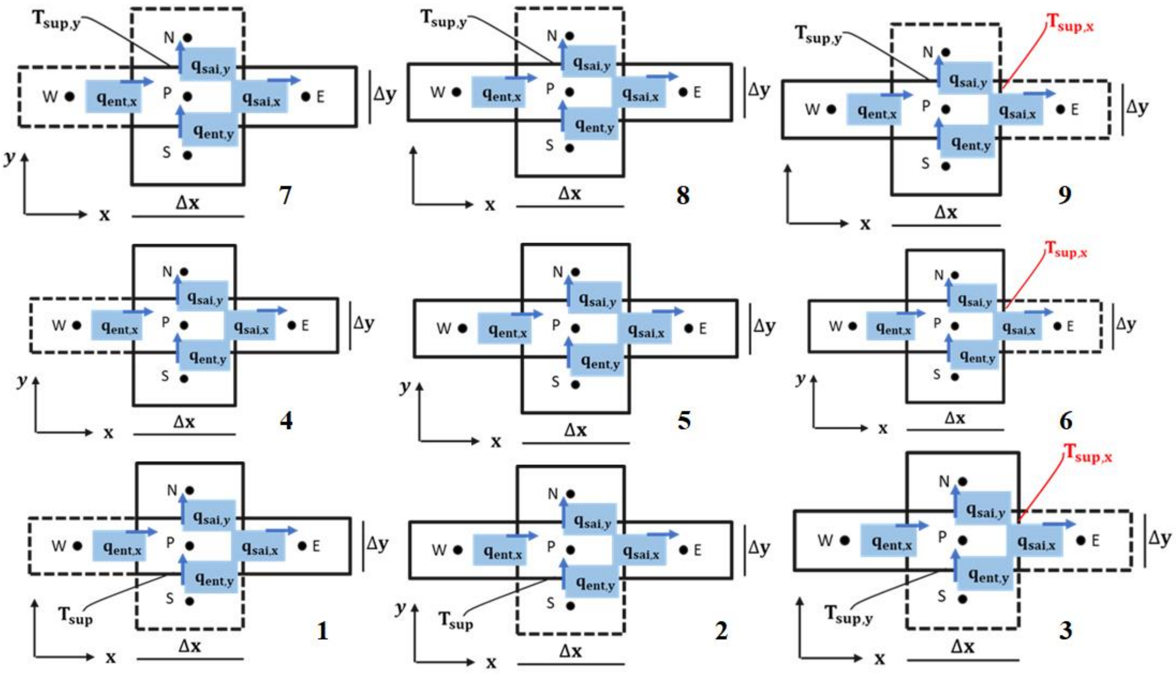

Figura 13 - Resumo do balanço de energia nas células
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

4.2.1 Célula 1

A célula 1 é mostrada na Figura 14, e o balanço de energia é fornecido na equação (44).

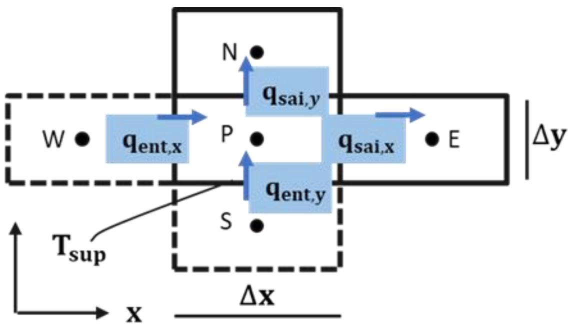

Figura 14 - Balanço de energia na célula 1
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

$$q''(\Delta y) + h(\Delta x)(T_\infty - T_{sup}) - \frac{k(\Delta y)(T_p - T_E)}{\Delta x} - \frac{k(\Delta x)(T_P - T_N)}{\Delta y} = 0 \qquad (44)$$

Criando uma superfície de controle para $T_{sup,y}$:

$$q''_{conv} = q''_{cond}$$

$$h(T_\infty - T_{sup,y}) = k\left(\frac{T_{sup,y} - T_p}{\frac{\Delta y}{2}}\right)$$

Isolando $T_{sup,y}$:

$$T_{sup,y} = \frac{2kT_P + h\Delta y T_\infty}{h\Delta y + 2k}$$

Substituindo $T_{sup,y}$ na equação (44):

$$q''(\Delta y) + h(\Delta x)\left(\frac{-2kT_P + 2kT_\infty}{h\Delta y + 2k}\right) - \frac{k(\Delta y)(T_p - T_E)}{\Delta x} - \frac{k(\Delta x)(T_P - T_N)}{\Delta y} = 0$$

Utilizando o método implícito:

$$-\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{2h}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}\right)T_p k + \frac{k}{\Delta x^2}T_E + \frac{k}{\Delta y}T_N = -\frac{q''}{\Delta x} - \frac{h}{\Delta y}\left(\frac{2kT_\infty}{h\Delta y + 2k}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{2h}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}\right)T_p + \frac{1}{\Delta x^2}T_E + \frac{1}{\Delta y^2}T_N = -\frac{q''}{k\Delta x} - \frac{2hT_\infty}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}$$

$$\boxed{-(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d})\mathbf{T_p} + \mathbf{aT_E} + \mathbf{bT_N} = -(\mathbf{f} + \mathbf{g})}$$

4.2.2 Célula 2

A célula 2 é mostrada na Figura 15 e o balanço de energia geral é fornecido na equação (45).

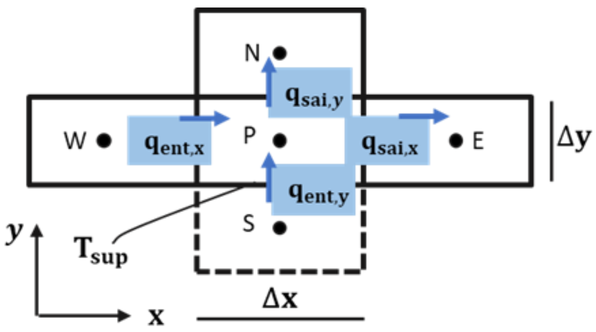

Figura 15 - Balanço de energia na célula 2
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

$$\frac{k(\Delta y)(T_W - T_P)}{\Delta x} + h(\Delta x)(T_\infty - T_{sup}) - \frac{k(\Delta y)(T_P - T_E)}{\Delta x} - \frac{k(\Delta x)(T_P - T_N)}{\Delta y} = 0 \qquad (45)$$

Criando uma superfície de controle para T_{sup}, tem-se:

$$T_{sup,y} = \frac{2kT_P + h\Delta y T_\infty}{h\Delta y + 2k}$$

Substituindo $T_{sup,y}$ na equação (45):

$$\frac{k(\Delta y)(T_w - T_p)}{\Delta x} + h(\Delta x)\left(\frac{-2kT_P + 2kT_\infty}{h\Delta y + 2k}\right) - \frac{k(\Delta y)(T_p - T_E)}{\Delta x} - \frac{k(\Delta x)(T_P - T_N)}{\Delta y} = 0$$

Utilizando o método implícito:

$$\frac{k}{\Delta x^2}T_W - \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{2h}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}\right)T_P k + \frac{k}{\Delta x^2}T_E + \frac{k}{\Delta y^2}T_N = -\frac{h}{\Delta y}\left(\frac{2kT_\infty}{h\Delta y + 2k}\right)$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}T_W - \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{2h}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}\right)T_P + \frac{1}{\Delta x^2}T_E + \frac{1}{\Delta y^2}T_N = -\frac{2hT_\infty}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}$$

$$\boxed{\mathbf{aT_W - (2a + b + d)T_p + aT_E + bT_N = -f}}$$

4.2.3 Célula 3

A célula 3 é mostrada na Figura 16, e o balanço de energia é fornecido na equação (46).

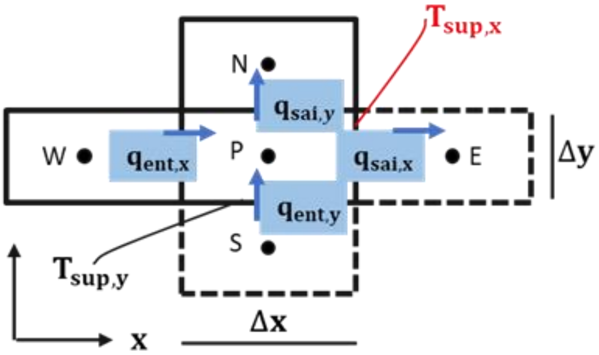

Figura 16 - Balanço de energia na célula 3
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

$$\frac{k(\Delta y)(T_w - T_p)}{\Delta x} + h(\Delta x)(T_\infty - T_{sup,y}) - h(\Delta y)(T_{sup,x} - T_\infty) - \frac{k(\Delta x)(T_P - T_N)}{\Delta y} = 0 \quad (46)$$

Criando uma superfície de controle para T_{sup} em x e y, tem-se:

$$T_{sup,y} = \frac{2kT_P + h\Delta y T_\infty}{h\Delta y + 2k} \; e \; T_{sup,x} = \frac{2kT_P + h\Delta x T_\infty}{h\Delta x + 2k}$$

Substituindo $T_{sup,y}$ e $T_{sup,x}$ na equação (46) e fazendo o equacionamento algébrico:

$$\frac{k(\Delta y)(T_w - T_p)}{\Delta x} + h(\Delta x)\left(\frac{-2kT_P + 2kT_\infty}{h\Delta y + 2k}\right) - h(\Delta y)\left(\frac{2kT_P - 2kT_\infty}{h\Delta x + 2k}\right) - \frac{k(\Delta x)(T_P - T_N)}{\Delta y} = 0$$

Utilizando o método implícito:

$$\frac{k}{\Delta x^2}T_W - \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)T_P k + \frac{k}{\Delta y^2}T_N = \frac{h}{\Delta x}\left(\frac{2kT_p - 2kT_\infty}{h\Delta x + 2k}\right) - \frac{h}{\Delta y}\left(\frac{-2kT_p + 2kT_\infty}{h\Delta y + 2k}\right)$$

$$\frac{k}{\Delta x^2}T_W - \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{2h}{h\Delta x^2 + 2k\Delta x} + \frac{2h}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}\right)T_P k + \frac{k}{\Delta y^2}T_N = \frac{h}{\Delta x}\left(\frac{-2kT_\infty}{h\Delta x + 2k}\right) - \frac{h}{\Delta y}\left(\frac{2kT_\infty}{h\Delta y + 2k}\right)$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}T_W - \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{2h}{h\Delta x^2 + 2k\Delta x} + \frac{2h}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}\right)T_P + \frac{1}{\Delta y^2}T_N = -\frac{2hT_\infty}{h\Delta x^2 + 2k\Delta x} - \frac{2hT_\infty}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}$$

$$\boxed{\mathbf{aT_w - (a + b + c + d)T_p + bT_N = -(e + f)}}$$

4.2.4 Célula 4

A célula 4 é mostrada na Figura 17, e o balanço de energia é fornecido na equação (47).

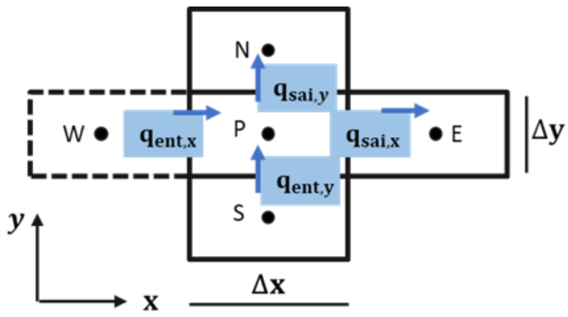

Figura 17 - Balanço de energia da célula 4
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

$$q''(\Delta y) + \frac{k(\Delta x)(T_S - T_P)}{\Delta y} - \frac{k(\Delta y)(T_P - T_E)}{\Delta x} - \frac{k(\Delta x)(T_P - T_N)}{\Delta y} = 0 \qquad (47)$$

Utilizando o método implícito:

$$-\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right)T_P k + \frac{k}{\Delta x^2}T_E + \frac{k}{\Delta y^2}T_s + \frac{k}{\Delta y}T_N = -\frac{q''}{\Delta x}$$

$$\frac{1}{\Delta y^2}T_N - \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right)T_P + \frac{1}{\Delta x^2}T_E + \frac{1}{\Delta y^2}T_s = -\frac{q''}{k\Delta x}$$

$$\boxed{\mathbf{bT_N - (a + 2b)T_p + aT_E + bT_S = -g}}$$

4.2.5 Célula 5

A célula 5 é mostrada na Figura 18, e o balanço de energia é fornecido na equação (48).

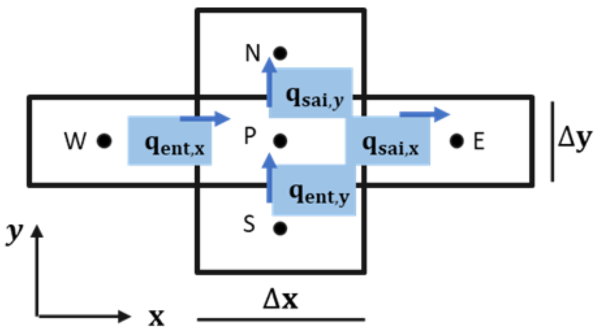

Figura 18 - Balanço de energia na célula 5
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

$$\frac{k(\Delta y)(T_w - T_p)}{\Delta x} + \frac{k(\Delta x)(T_s - T_p)}{\Delta y} - \frac{k(\Delta y)(T_p - T_E)}{\Delta x} - \frac{k(\Delta x)(T_P - T_N)}{\Delta y} = 0 \quad (48)$$

Utilizando o método implícito:

$$\frac{1}{\Delta x^2} T_w - \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right) T_p + \frac{1}{\Delta x^2} T_E + \frac{1}{\Delta y^2} T_s + \frac{1}{\Delta y^2} T_N = 0$$

$$\frac{1}{\Delta y^2} T_N + \frac{1}{\Delta x^2} T_w - \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right) T_p + \frac{1}{\Delta x^2} T_E + \frac{1}{\Delta y^2} T_s + \; = 0$$

$$\boxed{\mathbf{bT_N + aT_w - (2a + 2b)T_p + aT_E + bT_s = 0}}$$

4.2.6 Célula 6

A célula 6 é mostrada na Figura 19, e o balanço de energia é fornecido na equação (49).

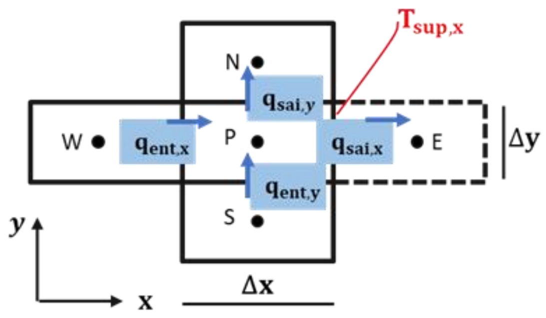

Figura 19 - Balanço de energia na célula 6
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

$$\frac{k(\Delta y)(T_w - T_p)}{\Delta x} + \frac{k(\Delta x)(T_s - T_p)}{\Delta y} - h(\Delta y)(T_{sup,x} - T_\infty) - \frac{k(\Delta x)(T_P - T_N)}{\Delta y} = 0 \quad (49)$$

Criando uma superfície de controle para $T_{sup,x}$ tem-se:

$$T_{sup,x} = \frac{2kT_P + h\Delta x T_\infty}{h\Delta x + 2k}$$

Substituindo $T_{sup,x}$ na equação (49) e fazendo o equacionamento algébrico:

$$\frac{k(\Delta y)(T_w - T_p)}{\Delta x} + \frac{k(\Delta x)(T_s - T_p)}{\Delta y} - h(\Delta y)\left(\frac{2kT_P - 2kT_\infty}{h\Delta x + 2k}\right) - \frac{k(\Delta x)(T_P - T_N)}{\Delta y} = 0$$

Utilizando o método implícito:

$$\frac{k}{\Delta x^2}T_W - \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{2h}{h\Delta x^2 + 2k\Delta x}\right)T_P k + \frac{k}{\Delta y^2}T_s + \frac{k}{\Delta y^2}T_N = \frac{h}{\Delta x}\left(\frac{-2kT_\infty}{h\Delta x + 2k}\right)$$

$$\frac{1}{\Delta y^2}T_N + \frac{1}{\Delta x^2}T_W - \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{2h}{h\Delta x^2 + 2k\Delta x}\right)T_P + \frac{1}{\Delta y^2}T_s = -\frac{2hT_\infty}{h\Delta x^2 + 2k\Delta x}$$

$$\boxed{\mathbf{bT_N + aT_w - (a + 2b + c)T_p + bT_s = -e}}$$

4.2.7 Célula 7

A célula 7 é mostrada na Figura 20, e o balanço de energia é fornecido na equação (50).

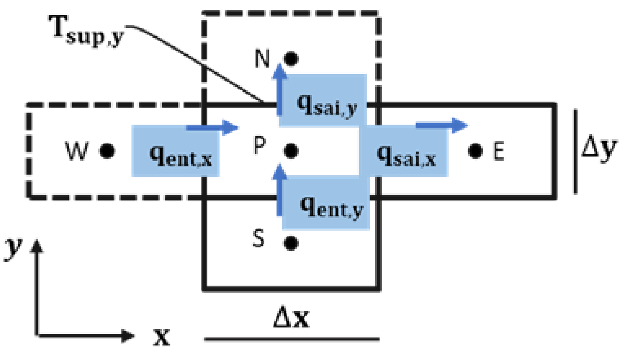

Figura 20 - Balanço de energia na célula 7
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

$$q''(\Delta y) + \frac{k(\Delta x)(T_s - T_p)}{\Delta y} - \frac{k(\Delta y)(T_p - T_E)}{\Delta x} - h(\Delta x)(T_{sup} - T_\infty) = 0 \quad (50)$$

Criando uma superfície de controle para $T_{sup,y}$, tem-se:

$$T_{sup,y} = \frac{2kT_P + h\Delta x T_\infty}{h\Delta y + 2k}$$

Substituindo $T_{sup,y}$ na equação (50) e fazendo o equacionamento algébrico:

$$q''(\Delta y) + \frac{k(\Delta x)\left(T_s - T_p\right)}{\Delta y} - \frac{k(\Delta y)\left(T_p - T_E\right)}{\Delta x} - h(\Delta x)\left(\frac{2kT_P - 2kT_\infty}{h\Delta y + 2k}\right) = 0$$

Utilizando o método implícito:

$$-\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{2h}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}\right) T_P k + \frac{k}{\Delta x^2} T_E + \frac{k}{\Delta y^2} T_s = -\frac{q''}{\Delta x} + \frac{h}{\Delta y}\left(\frac{-2kT_\infty}{h\Delta y + 2k}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{2h}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}\right) T_P + \frac{1}{\Delta x^2} T_E + \frac{1}{\Delta y^2} T_s = -\frac{q''}{k\Delta x} - \frac{2hT_\infty}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}$$

$$\boxed{-(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d})\mathbf{T_p} + \mathbf{aT_E} + \mathbf{bT_s} = -(\mathbf{f} + \mathbf{g})}$$

4.2.8 Célula 8

A célula 8 é mostrada na Figura 21, e o balanço de energia é fornecido na equação (51).

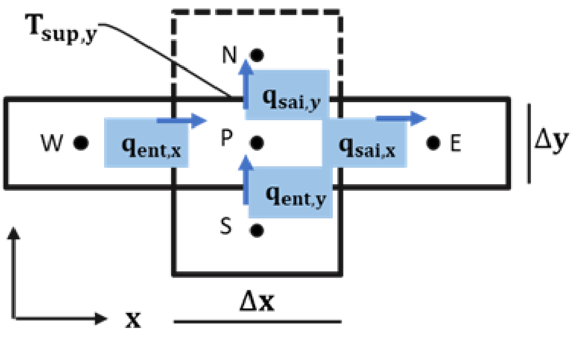

Figura 21 - Balanço de energia na célula 8
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

$$\frac{k(\Delta y)\left(T_w - T_p\right)}{\Delta x} + \frac{k(\Delta x)\left(T_s - T_p\right)}{\Delta y} - \frac{k(\Delta y)\left(T_p - T_E\right)}{\Delta x} - h(\Delta x)\left(T_{sup} - T_\infty\right) = 0 \quad (51)$$

Criando uma superfície de controle para $T_{sup,y}$, tem-se:

$$T_{sup,y} = \frac{2kT_P + h\Delta x T_\infty}{h\Delta y + 2k}$$

Substituindo $T_{sup,y}$ na equação (51) e fazendo o equacionamento algébrico:

$$\frac{k(\Delta y)(T_w - T_p)}{\Delta x} + \frac{k(\Delta x)(T_s - T_p)}{\Delta y} - \frac{k(\Delta y)(T_p - T_E)}{\Delta x} - h(\Delta x)\left(\frac{2kT_P - 2kT_\infty}{h\Delta y + 2k}\right) = 0$$

Utilizando o método implícito:

$$\frac{k}{\Delta x^2}T_W - \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{2h}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}\right)T_P k + \frac{k}{\Delta x^2}T_E + \frac{k}{\Delta y^2}T_s = \frac{h}{\Delta y}\left(\frac{-2kT_\infty}{h\Delta y + 2k}\right)$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}T_W - \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{2h}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}\right)T_P + \frac{1}{\Delta x^2}T_E + \frac{1}{\Delta y^2}T_s = -\frac{2hT_\infty}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}$$

$$\boxed{\mathbf{aT_W - (2a + b + d)T_p + aT_E + bT_s = -f}}$$

4.2.9 Célula 9

A célula 9 é mostrada na Figura 22, e o balanço de energia é fornecido na equação (52).

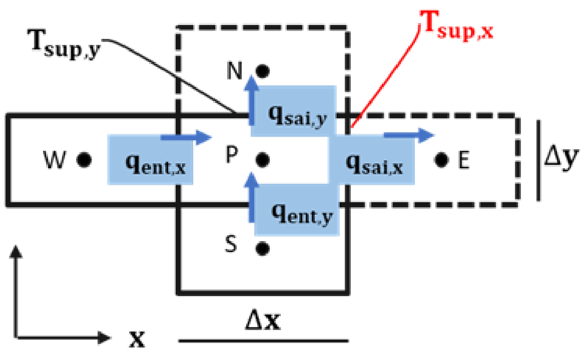

Figura 22 - Balanço de energia da célula 9
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

$$\frac{k(\Delta y)(T_w - T_p)}{\Delta x} + \frac{k(\Delta x)(T_s - T_p)}{\Delta y} - h(\Delta y)(T_{sup} - T_\infty) - h(\Delta x)(T_{sup} - T_\infty) = 0 \quad (52)$$

Criando uma superfície de controle para T_{sup} em x e y, tem-se:

$$T_{sup,y} = \frac{2kT_P + h\Delta yT_\infty}{h\Delta y + 2k} \; e \; T_{sup,x} = \frac{2kT_P + h\Delta xT_\infty}{h\Delta x + 2k}$$

Substituindo $T_{sup,y}$ e $T_{sup,x}$ na equação (52) e fazendo o equacionamento algébrico:

$$\frac{k(\Delta y)\left(T_w - T_p\right)}{\Delta x} + \frac{k(\Delta x)\left(T_s - T_p\right)}{\Delta y} - h(\Delta y)\left(\frac{2kT_P - 2kT_\infty}{h\Delta x + 2k}\right) - h(\Delta x)\left(\frac{2kT_P - 2kT_\infty}{h\Delta y + 2k}\right) = 0$$

Utilizando o método implícito:

$$\frac{k}{\Delta x^2}T_W - \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)T_P k + \frac{k}{\Delta y^2}T_s = \frac{h}{\Delta x}\left(\frac{2kT_p - 2kT_\infty}{h\Delta x + 2k}\right) + \frac{h}{\Delta y}\left(\frac{2kT_p - 2kT_\infty}{h\Delta y + 2k}\right)$$

$$\frac{k}{\Delta x^2}T_W - \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{2h}{h\Delta x^2 + 2k\Delta x} + \frac{2h}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}\right)T_P k + \frac{k}{\Delta y^2}T_s = \frac{h}{\Delta x}\left(\frac{-2kT_\infty}{h\Delta x + 2k}\right) + \frac{h}{\Delta y}\left(\frac{-2kT_\infty}{h\Delta y + 2k}\right)$$

$$\frac{1}{\Delta x^2}T_W - \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{2h}{h\Delta x^2 + 2k\Delta x} + \frac{2h}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}\right)T_P + \frac{1}{\Delta y^2}T_s = -\frac{2hT_\infty}{h\Delta x^2 + 2k\Delta x} - \frac{2hT_\infty}{h\Delta y^2 + 2k\Delta y}$$

$$\boxed{\mathbf{aT_W - (a + b + c + d)T_p + bT_s = -(e + f)}}$$

Para a resolução do problema de condução e convecção bidimensional em regime estacionário, tem-se a matriz:

$$[A][T] = [B]$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & A_{18} & A_{19} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} & A_{28} & A_{29} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} & A_{38} & A_{39} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} & A_{48} & A_{49} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & A_{58} & A_{59} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} & A_{68} & A_{69} \\ A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & A_{75} & A_{76} & A_{77} & A_{78} & A_{79} \\ A_{81} & A_{82} & A_{83} & A_{84} & A_{85} & A_{86} & A_{87} & A_{88} & A_{89} \\ A_{91} & A_{92} & A_{93} & A_{94} & A_{95} & A_{96} & A_{97} & A_{98} & A_{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{c1} \\ T_{c2} \\ T_{c3} \\ T_{c4} \\ T_{c5} \\ T_{c6} \\ T_{c7} \\ T_{c8} \\ T_{c9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \\ B_8 \\ B_9 \end{bmatrix}$$

Inicialmente, cria-se uma matriz completa com zeros e descobre-se o valor de cada célula.

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{c1} \\ T_{c2} \\ T_{c3} \\ T_{c4} \\ T_{c5} \\ T_{c6} \\ T_{c7} \\ T_{c8} \\ T_{c9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \\ B_8 \\ B_9 \end{bmatrix}$$

Após o cálculo do balanço de energia e as simplificações aplicadas em cada célula, encontra-se:

$$[A][T] = [B]$$

Em que:

$$A = \begin{bmatrix} -(a+b+d) & a & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & -(2a+b+d) & a & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -(a+b+c+d) & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & -(a+2b) & a & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & -(2a+2b) & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & a & -(a+2b+c) & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & -(a+b+d) & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & a & -(2a+b+d) & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & a & -(a+b+c+d) \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{c1} \\ T_{c2} \\ T_{c3} \\ T_{c4} \\ T_{c5} \\ T_{c6} \\ T_{c7} \\ T_{c8} \\ T_{c9} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -(f+g) \\ -f \\ -(e+f) \\ -g \\ 0 \\ -e \\ -(f+g) \\ -f \\ -(e+f) \end{bmatrix}$$

Em seguida, tem-se a elaboração do código computacional (Apêndice A), contemplando os passos e as equações já determinadas anteriormente. A sequência do código computacional é:

i. Inserção do código para limpar a janela de comando e apagar memória;

ii. Definição de parâmetros iniciais;
iii. Definição do número de células;
iv. Definição da variável m que controla o caminho percorrido;
v. Criação da matriz completa com zeros;
vi. Inserção dos elementos de simplificação;
vii. Criação de laços para varrer tudo que está na camada de x e depois de y;
viii. Incremento dos valores de m a cada vez que entrar no laço;
ix. Teste para verificar qual a condição válida para entrar no laço e definir qual célula se trata;
x. Cálculo da temperatura após chegar ao valor limite de nx e ny;
xi. Calcular a transposta do vetor B;
xii. Transformar o vetor temperatura em matriz quadrada;
xiii. Criar um vetor coordenado para x e para y;
xiv. Plotar os gráficos de distribuição de temperatura.

4.3 Resultado da simulação do caso base

Para realização da simulação através do algoritmo das diferenças finitas, são definidas as dimensões da placa, $L = 400$ mm; $W = 150$ mm e as condições de contorno para inserção no código: $q'' = 10000 \frac{W}{m^2}$; $T_\infty = 30°C$.

Inicialmente, é fixado o valor da condutividade térmica do aço carbono com $k = 60{,}5 \frac{W}{mK}$ e o valor de convecção natural com h = 20 W/(m²K).

Na Figura 23, é apresentado o primeiro resultado da distribuição de temperatura na chapa, considerando o material como aço carbono, realizado no *Scilab*.

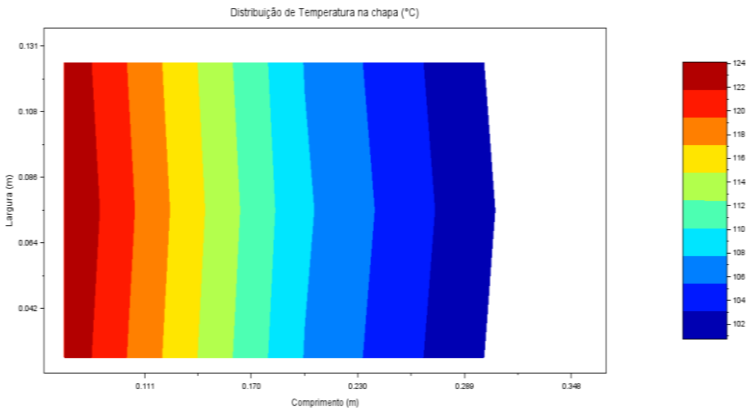

Figura 23 - Resultado da simulação com nove células referente ao aço carbono
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Observa-se na Figura 23, que para o número de células igual a nove e tratando-se de convecção natural, tem-se uma faixa de temperatura variando de 101°C a 125°C ($\Delta T = 24°C$).

4.3.1 Influência da condutividade térmica e do coeficiente de convecção

Para a análise da condutividade térmica, são selecionados quatro tipos diferentes de materiais, utilizando o valor fornecido na literatura e demonstrado na Tabela 4.

Tabela 4 - Propriedades termofísicas de sólidos metálicos selecionados

Composição	k (W(m.K))
Aço Carbono - Não ligado	60,5
Aço Inox - AISI 302	15,1
Alumínio	237
Cobre	401

Fonte: Adaptado de Incropera *et al*. (2019, p. 588)

Na primeira situação, é simulado o aço carbono com $k = 60{,}5\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$. Já na segunda situação, o material escolhido é o aço inoxidável com $k = 15{,}1\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$. Para as terceira e quarta situações, são escolhidos o alumínio e o cobre com o valor de condutividade térmica $237\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$ e $401\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$, respectivamente.

Na Tabela 5, são apresentados os valores do coeficiente de transferência de calor típicos por convecção para gases e líquidos. Para a análise da influência da convecção, serão determinados dois valores utilizados nas quatro situações, um dentro da faixa da convecção natural, com h = 20 W/(m²K), e outro dentro da convecção forçada, sendo h = 150 W/(m²K).

Tabela 5 - Valores do coeficiente de transferência de calor por convecção

Processo	h (W(m².K))
Convecção natural - Gases	2 - 25
Convecção forçada - Gases	25 - 250

Fonte: Adaptado de Incropera *et al*. (2008, p.6)

Na Figura 24, é apresentada a primeira comparação para a análise da influência da convecção, considerando o material como aço carbono.

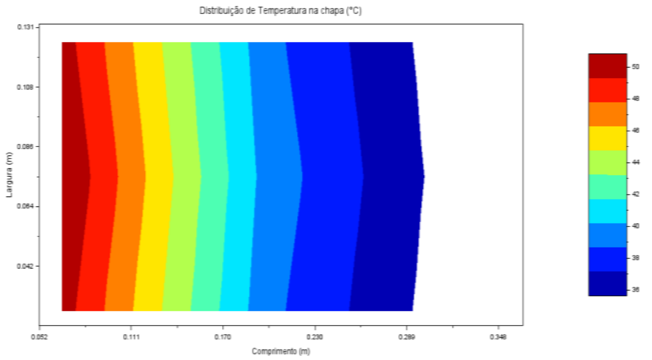

Figura 24 - Resultado da simulação referente ao aço carbono
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Observa-se na Figura 24 que, para o número de células igual a nove e tratando-se de convecção forçada, tem-se uma faixa de temperatura variando de 36°C a 52°C (ΔT = 16°C).

Na Figura 25, é ilustrada o gradiente de temperatura do aço inoxidável com a convecção natural à esquerda e a convecção forçada à direita.

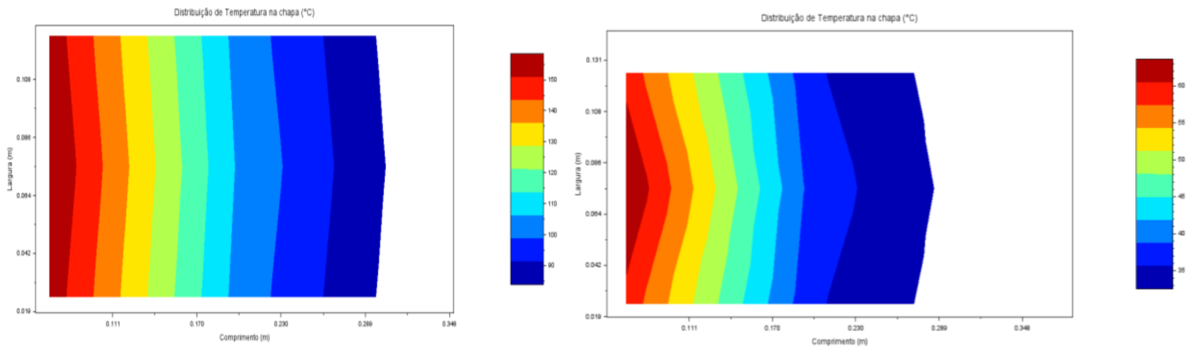

Figura 25 - Resultado da simulação com nove células referente ao aço inoxidável
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

É observado na Figura 25 que o resultado da convecção natural varia de 84°C a 161°C (ΔT = 77°C). Este valor é diminuído quando se trata da convecção forçada, obtendo o valor mínimo de temperatura de 33°C e o valor máximo de 68°C (ΔT = 35°C).

A Figura 26 refere-se à simulação do alumínio com um novo valor de condutividade térmica $\left(k = 237\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}\right)$ para as diferentes convecções, sendo a natural à esquerda e a forçada à direita.

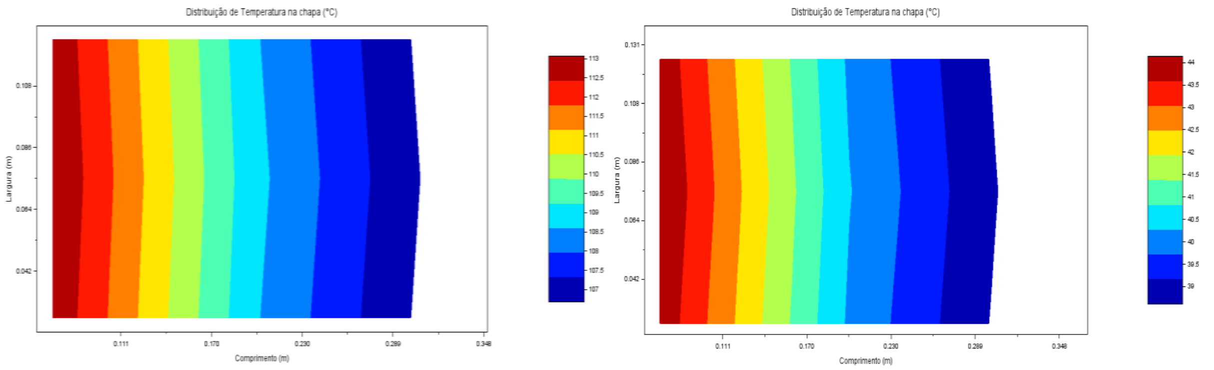

Figura 26 - Resultado da simulação com nove células referente ao alumínio
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Nota-se na Figura 26 que a distribuição de temperatura varia de 107°C a 113°C (ΔT = 6°C) para a convecção natural, bem como varia de 39°C a 44°C (ΔT = 5°C) para a convecção forçada.

Na Figura 27, tem-se a simulação referente ao cobre $\left(k = 401\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}\right)$ para análise da influência da convecção e condutividade. A convecção natural está sendo representada à esquerda e a convecção forçada à direita.

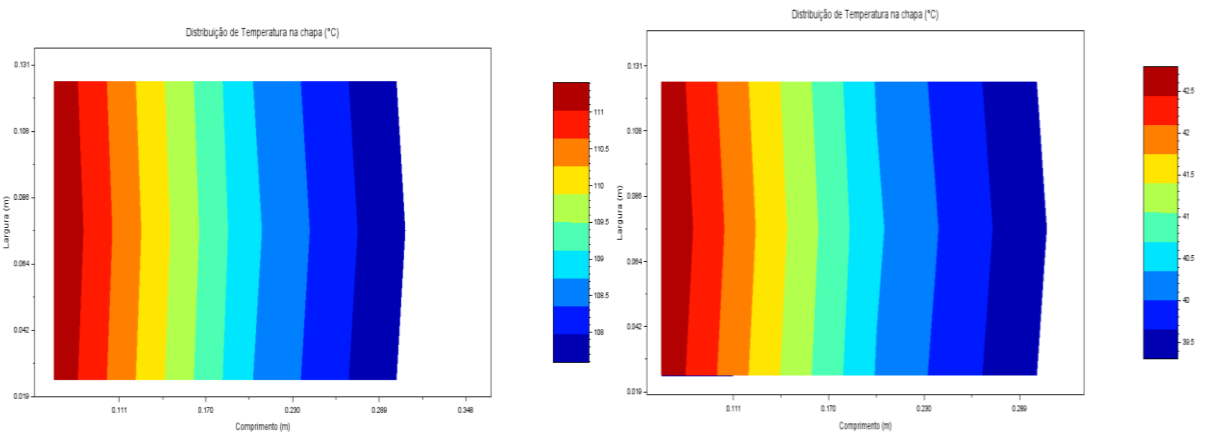

Figura 27 - Resultado da simulação com nove células referente ao cobre
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Verifica-se na Figura 27 que a faixa de temperatura varia de 108°C a 111°C (ΔT = 3°C) para a convecção natural e de 39°C a 43°C (ΔT = 4°C) para convecção forçada, sendo possível perceber a pouca variação entre o valor máximo e mínimo de temperatura.

Após gerar todos os resultados da simulação com nove células referentes aos quatro materiais distintos e as convecções natural e forçada, exportam-se todos os valores de cada célula e registra-se no Excel (Apêndice A) para realizar as comparações das temperaturas, conforme as células de maior e menor valor.

Na Figura 28, é apresentada a comparação da convecção forçada e natural para o aço carbono, aço inox, alumínio e cobre, com os valores máximos e mínimos de temperatura obtidos na chapa.

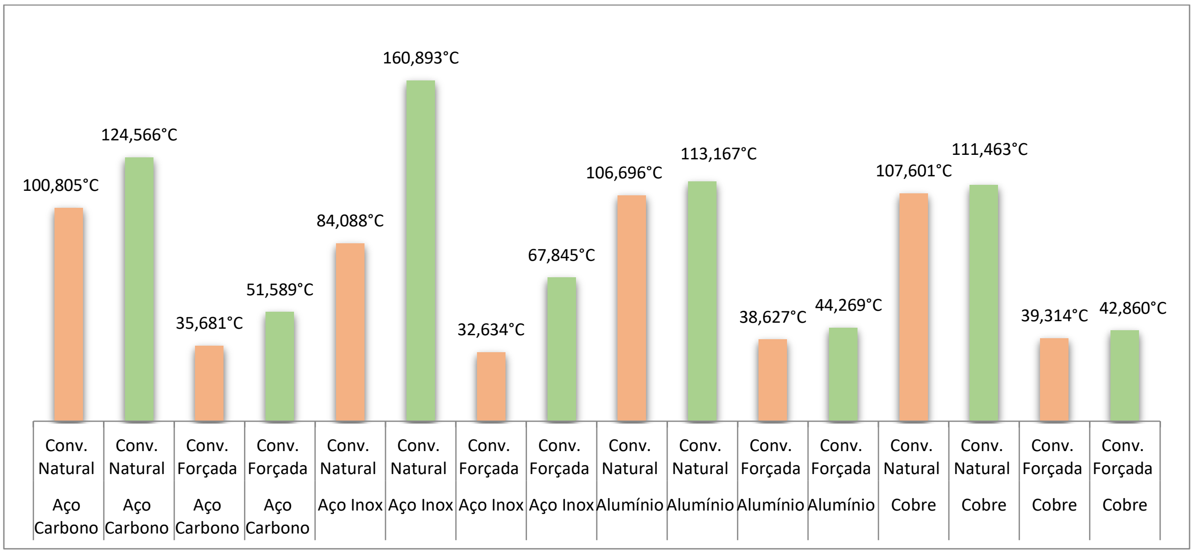

Figura 28 - Gráfico com a comparação dos valores de convecção forçada e natural
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Verifica-se na Figura 28 que, os resultados da temperatura na placa na convecção forçada são menores que os resultados da convecção natural.

Na Tabela 6, é apresentada a comparação dos valores de máximo entre os materiais.

Tabela 6 - Comparação com o valor de máximo de temperatura

Valores de máximo	Convecção Natural (°C)	Convecção Forçada (°C)	Diferença (%)
Aço Carbono	124,566	51,589	58,59
Aço Inox	160,893	67,845	57,83
Alumínio	113,167	44,269	60,88
Cobre	111,463	42,860	61,55

Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Após a análise, na Tabela 6 é demonstrada a comparação entre os quatro materiais, sendo possível determinar que a diferença entre a convecção natural e a forçada é de 60% (± 2%).

Na Tabela 7, é obtida a comparação com os valores mínimos das duas convecções.

Tabela 7 - Comparação com o valor de mínimo de temperatura

Valores de mínimo	Convecção Natural (°C)	Convecção Forçada (°C)	Diferença (%)
Aço Carbono	100,805	35,681	64,60
Aço Inox	84,088	32,634	61,19
Alumínio	106,696	38,627	63,80
Cobre	107,601	39,314	63,46

Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Verifica-se, na Tabela 7, a comparação em relação aos valores de mínimo do aço carbono, aço inox, alumínio e cobre, obtendo a diferença encontrada de 62% (± 2%) entre a convecção natural e a convecção forçada.

Na Figura 29, são apresentadas as diferenças de temperaturas máximas e mínimas obtidas na chapa (ΔT) para a convecção forçada e convecção natural para o aço carbono, aço inox, alumínio e cobre.

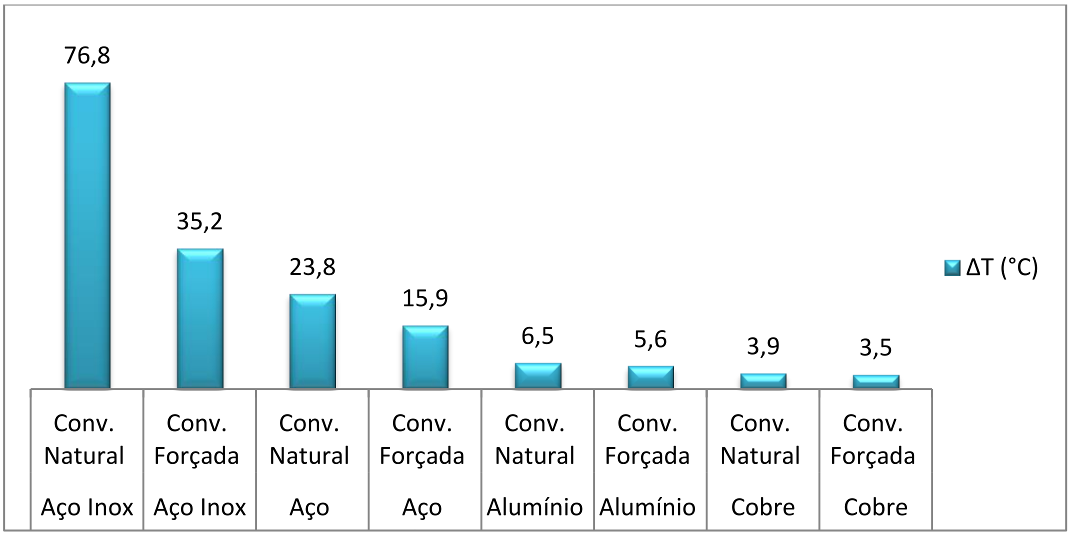

Figura 29 - Gráfico das diferenças de temperaturas na convecção forçada e natural
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Verifica-se na Figura 29 que, relacionado à condutividade térmica, é possível perceber que materiais com alta condutividade térmica, como o cobre e alumínio, apresentam pouca diferença entre os resultados de máximo e mínimo da convecção natural e da convecção forçada. Isso acontece, pois o efeito da condutividade térmica é maior que o da convecção.

4.3.2 Influência dos números de células

Para analisar a influência do aumento do número de células na simulação, é definido um novo valor de células durante a execução do código computacional. É determinado o número de células para obtenção do melhor resultado de acordo com o limite da memória do algoritmo, sendo possível determinar $nx = 150$ e $ny = 150$, ou seja, o valor de células igual a 22.500.

Na Figura 30, é ilustrado o gradiente de temperatura do aço carbono à esquerda representando as 9 células, e à direita simulando as 22.500 células para a convecção forçada.

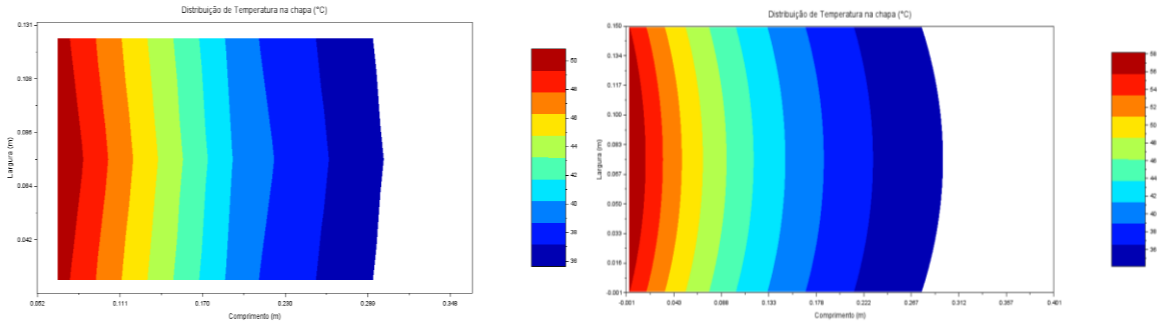

Figura 30 - Resultado da simulação com 9 e 22.500 células referente ao aço carbono
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Nota-se na Figura 30 que, para convecção forçada, tem-se a variação de 34°C a 58°C para o novo resultado com 22.500 células. É notável o aumento do número células da malha, gerando resultados em toda a superfície da chapa e de forma homogênea.

Na Figura 31, é apresentado o segundo resultado da distribuição de temperatura na chapa para convecção forçada, considerando o material como aço inoxidável para diferentes números de células.

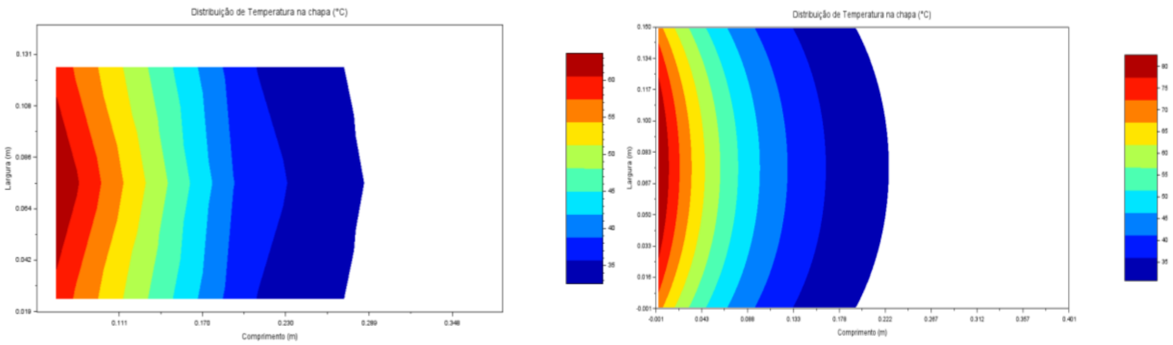

Figura 31 - Resultado da simulação com 9 e 22.500 células referente ao aço inoxidável
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Verifica-se na Figura 31 que o novo valor, tratando-se da convecção forçada, está variando entre 31°C e 86°C. Quando se trata do aço inoxidável através da espessura das faixas é possível perceber que na convecção forçada o calor é disperso de forma mais rápida quando obtém-se o resultado com o maior número de células, ou seja, demonstra de forma mais clara como ficará a distribuição da temperatura.

Na Figura 32, tem-se a distribuição de temperatura da convecção forçada, tendo o alumínio como material.

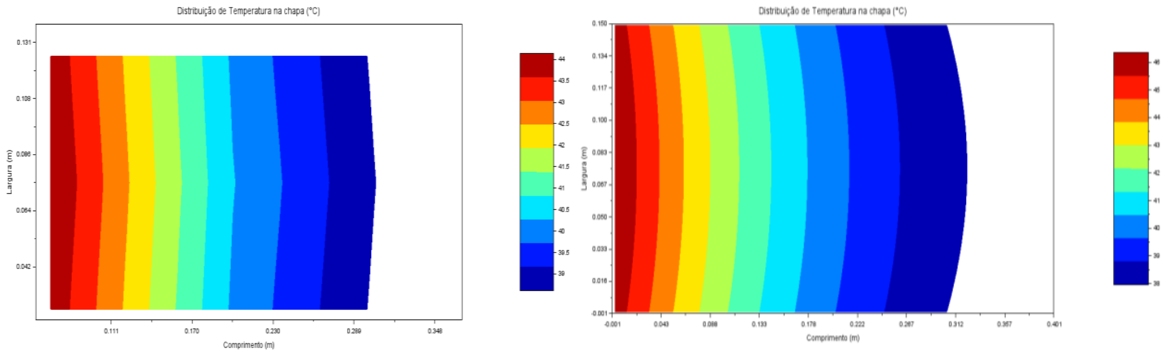

Figura 32 - Resultado da simulação com 9 e 22.500 células referente ao alumínio
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Observa-se na Figura 32 que a nova temperatura da convecção forçada varia de 38°C a 46°C. O alumínio é um material com alta condutividade térmica e apresenta resultados do gradiente de temperatura similar.

Apresenta-se, na Figura 33, a simulação do cobre para os diferentes números de células.

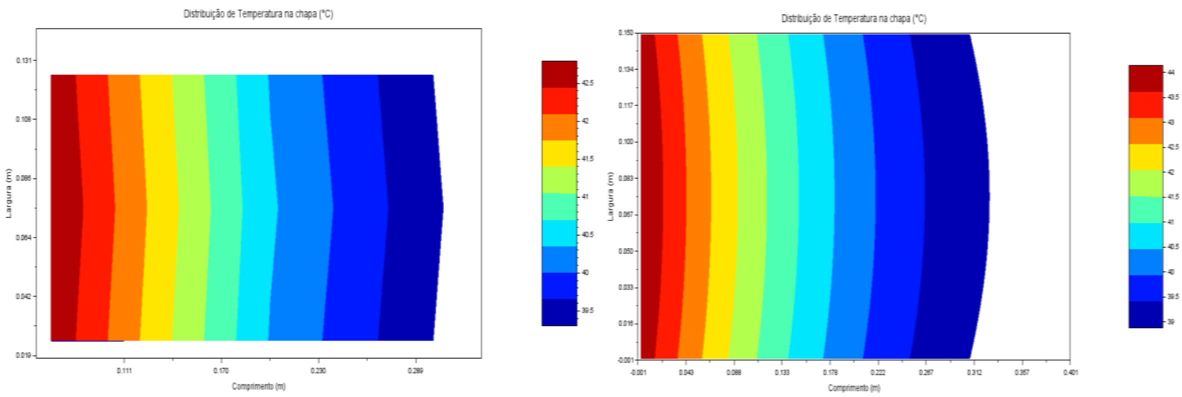

Figura 33 - Resultado da simulação com 9 e 22.500 células referente ao cobre
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Na Figura 33, observa-se o valor mínimo de temperatura 38°C e o valor máximo de 44°C na convecção forçada para as 22.500 células. O cobre possui a maior condutividade térmica e demonstra que o efeito da condutividade tem um maior efeito que o da convecção e, apesar de estar com valores de temperatura diferentes, apresenta a faixa de transferência de calor similar, ou seja, apresenta a espessura das faixas semelhantes.

4.3.3 Validação dos resultados

Para a validação dos resultados, é utilizado o programa *SS-T Conduct Input* do livro Çengel e Ghajar (2012) para realizar a comparação com os resultados obtidos pela programação criada.

Na Figura 34, é mostrada a tela principal do programa, especificando as informações que serão inseridas referentes a um problema bidimensional.

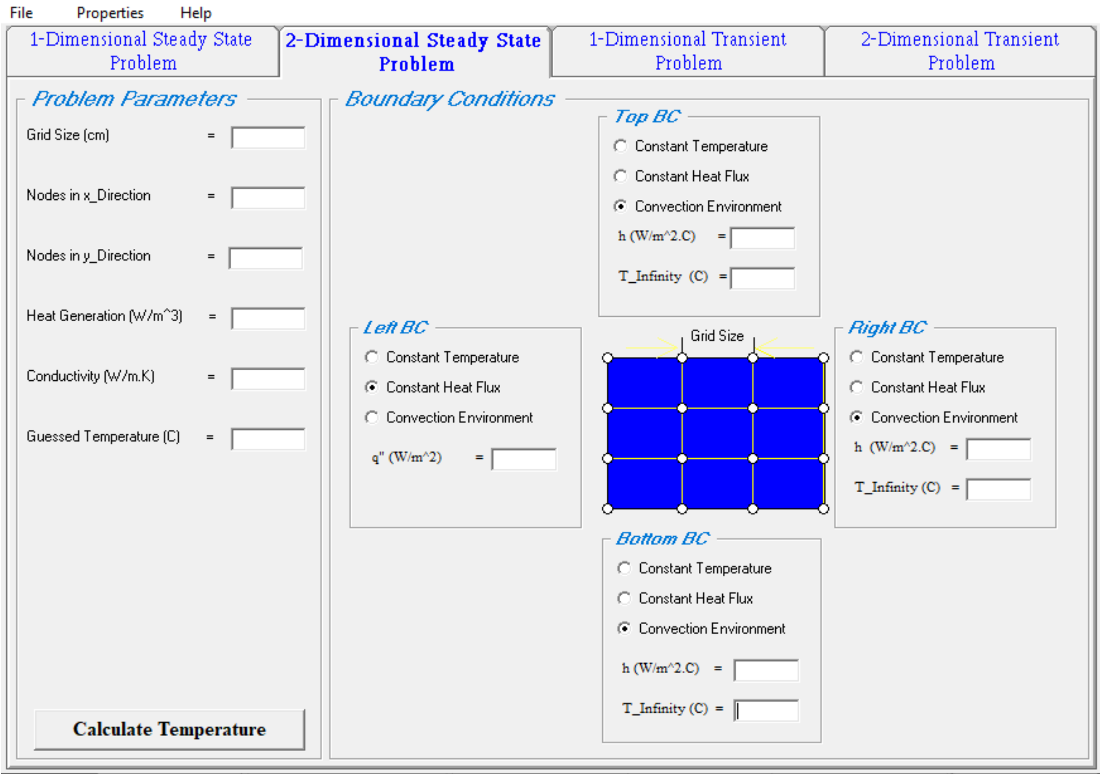

Figura 34 - Programa *SS-T Conduct* Input
Fonte: Çengel e Ghajar (2012)

Com algumas limitações do sistema a respeito do tamanho da malha, é realizada comparações com o número mais próximo de células entre o programa *SS-T Conduct* e a modelagem no *software Scilab.*

A título de comparação, na primeira simulação com 15 células, é realizada uma pequena modificação, W = 200 mm, para que o primeiro resultado passe por toda a malha e definindo a convecção forçada e aço carbono como material exemplo.

A Figura 35 exemplifica as variáveis de entrada inseridas no sistema.

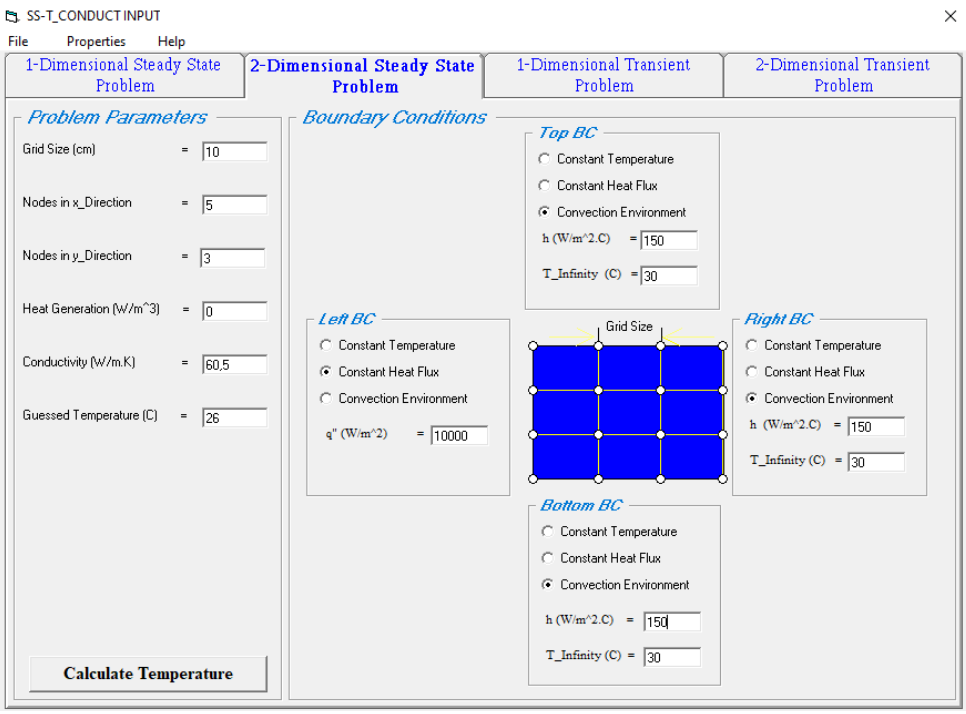

Figura 35 - Variáveis de entrada do aço carbono
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

A Figura 36 demonstra os resultados exportados do sistema, com a tabela à esquerda e o gráfico de distribuição de temperatura à direita.

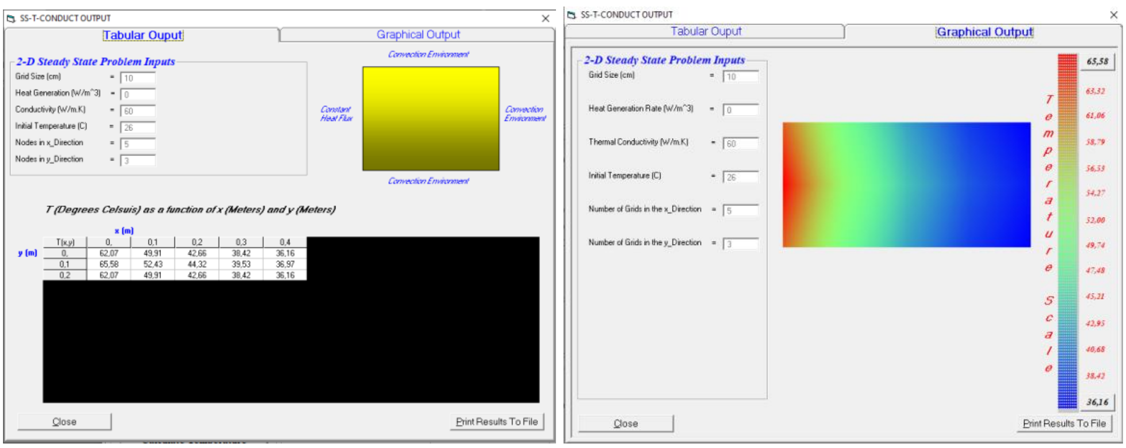

Figura 36 - Resultados tabelados do aço carbono exportados do programa
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Na programação são obtidas nx = 4 e ny = 4, totalizando 16 células. Na Figura 37, verificam-se os resultados da simulação após a programação à esquerda e o resultado do programa *SS-T Conduct* à direita.

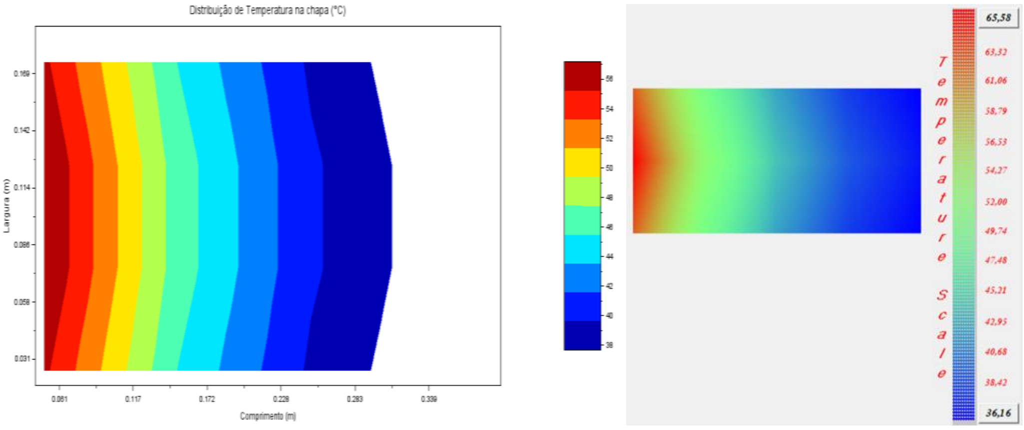

Figura 37 - Resultado do aço carbono com a convecção forçada com 15 e 16 células
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Para a convecção natural, também são realizadas as comparações utilizando o aço carbono. A Figura 38 contém os resultados gráficos da simulação após a programação e o uso do programa *SS-T Conduct.*

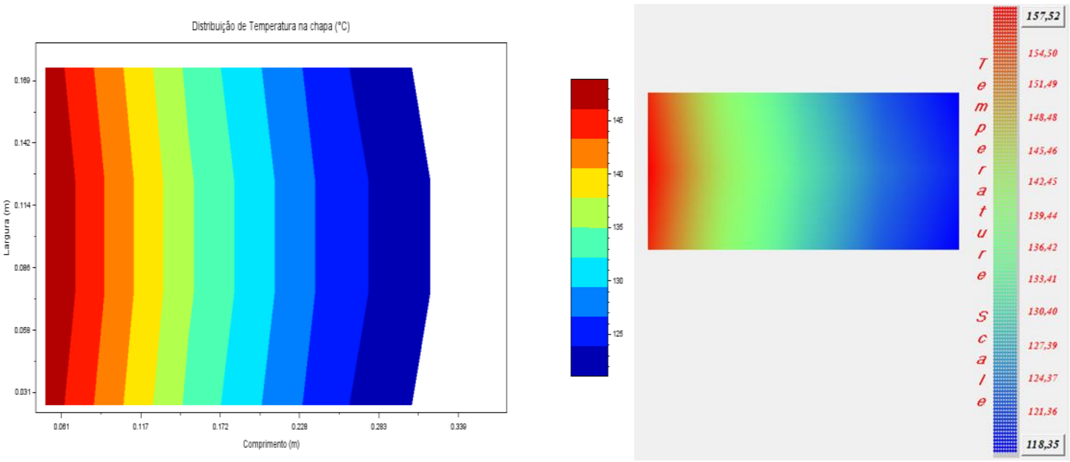

Figura 38 - Resultado do aço carbono com a convecção natural com 15 e 16 células
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Nas Tabelas 8 e 9, são apresentadas as variações dos valores relacionados à convecção forçada com os valores de máximo e mínimo, considerando o programa *SS-T Conduct* com 15 células e a programação com 16 células para os quatro materiais.

Tabela 8 - Variação dos valores máximos da convecção forçada entre 15 e 16 células

Valores de máximo	15 células (°C)	16 células (°C)	Diferença (°C)
Aço Carbono	65,58	58,66	6,92
Aço Inox	108,55	85,73	22,82
Alumínio	50,04	48,16	1,88
Cobre	47,43	46,30	1,13

Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Tabela 9 - Variação dos valores mínimos da convecção forçada entre 15 e 16 células

Valores de mínimo	15 células (°C)	16 células (°C)	Diferença (°C)
Aço Carbono	36,16	37,74	1,58
Aço Inox	31,66	33,70	2,04
Alumínio	40,61	41,25	0,64
Cobre	41,61	42,02	0,41

Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Nas tabelas anteriores, é possível perceber que a variação entre os resultados está compreendida entre 0°C a 22°C, ou seja, com o número pequeno de células, o resultado apresenta uma leve diferenciação.

Nas Tabelas 10 e 11, são apresentadas as variações dos valores relacionados à convecção natural com os valores de máximo e mínimo, considerando o programa *SS-T Conduct* com 15 células e a programação com 16 células.

Tabela 10 - Variação dos valores máximos da convecção natural entre 15 e 16 células

Valores de máximo	15 células (°C)	16 células (°C)	Diferença (°C)
Aço Carbono	157,52	149,78	7,74
Aço Inox	228,25	199,15	29,10
Alumínio	137,21	135,26	1,95
Cobre	134,28	133,13	1,15

Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Tabela 11 - Variação dos valores mínimos da convecção natural entre 15 e 16 células

Valores de mínimo	15 células (°C)	16 células (°C)	Diferença (°C)
Aço Carbono	118,35	121,17	2,82
Aço Inox	93,65	102,03	8,38
Alumínio	126,83	127,59	0,76
Cobre	128,11	128,56	0,45

Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Nas Tabelas 10 e 11, é possível perceber que as temperaturas entre os resultados variam de 0°C a 29°C, ou seja, a variação entre o modelo em *Scilab* e o algoritmo computacional é maior quando se trata da convecção natural.

Para criar um exemplo de comparação intermediária, é desenvolvido o mesmo processo, utilizando todos os valores iniciais da condição de contorno e retomando o W = 150 mm. Na programação são obtidas nx = 14 e ny = 14, totalizando 196 células. Já no programa *SS-T Conduct* é utilizada a distribuição de células mais próxima, com 189 células.

Nas Tabelas 12 e 13, são apresentadas as variações dos valores relacionados à convecção forçada com os valores de máximo e mínimo, considerando o programa com 189 células e a programação com 196 células para os quatro materiais.

Tabela 12 - Variação dos valores máximos da convecção forçada entre 189 e 196 células

Valores de máximo	189 células (°C)	196 células (°C)	Diferença (°C)
Aço Carbono	59,53	57,45	2,08
Aço Inox	95,95	90,23	5,72
Alumínio	46,03	46,12	0,09
Cobre	43,68	43,99	0,31

Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Tabela 13 - Variação dos valores mínimos da convecção forçada entre 189 e 196 célula

Valores de mínimo	189 células (°C)	196 células (°C)	Diferença (°C)
Aço Carbono	33,72	34,39	0,67
Aço Inox	30,71	31,05	0,34
Alumínio	37,40	38,08	0,68
Cobre	38,31	38,96	0,65

Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Nas tabelas acima, é possível perceber que as variações entre os resultados variam de 0°C a 5°C, ou seja, resultados melhores que os apresentados na primeira validação.

Nas Tabelas 14 e 15, são apresentadas as variações dos valores relacionados à convecção natural com os valores de máximo e mínimo, considerando o programa *SS-T Conduct* com 189 células e a programação com 196 células para os quatro materiais.

Tabela 14 - Variação dos valores máximos da convecção natural entre 189 e 196 células

Valores de máximo	189 células (°C)	196 células (°C)	Diferença (°C)
Aço Carbono	129,71	131,39	1,68
Aço Inox	192,41	189,23	3,18
Alumínio	-	-	-
Cobre	-	-	-

Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Tabela 15 - Variação dos valores mínimo da convecção natural entre 189 e 196 células

Valores de mínimo	189 células (°C)	196 células (°C)	Diferença (°C)
Aço Carbono	93,48	98,42	4,94
Aço Inox	71,84	77,10	5,26
Alumínio	-	-	-
Cobre	-	-	-

Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Nas tabelas anteriores, é possível perceber que as variações entre os resultados variam de 1°C a 5°C. É importante salientar que o programa *SS-T Conduct* começa a apresentar algumas limitações e, por isso, alguns resultados, com maiores números de células, não são mais possíveis de serem obtidos.

Para melhorar os resultados de comparação, é utilizada a maior quantidade de células permitidas no programa *SS-T Conduct*, sendo possível dividir a malha em 615 células. Já na programação, são obtidas $nx = 25$ e $ny = 25$, totalizando 625 células. A título de comparação, foi definido o aço carbono como material exemplo e utilizado a situação da convecção forçada.

A Figura 39 exemplifica as variáveis de entrada do aço carbono inserida no programa *SS-T Conduct.*

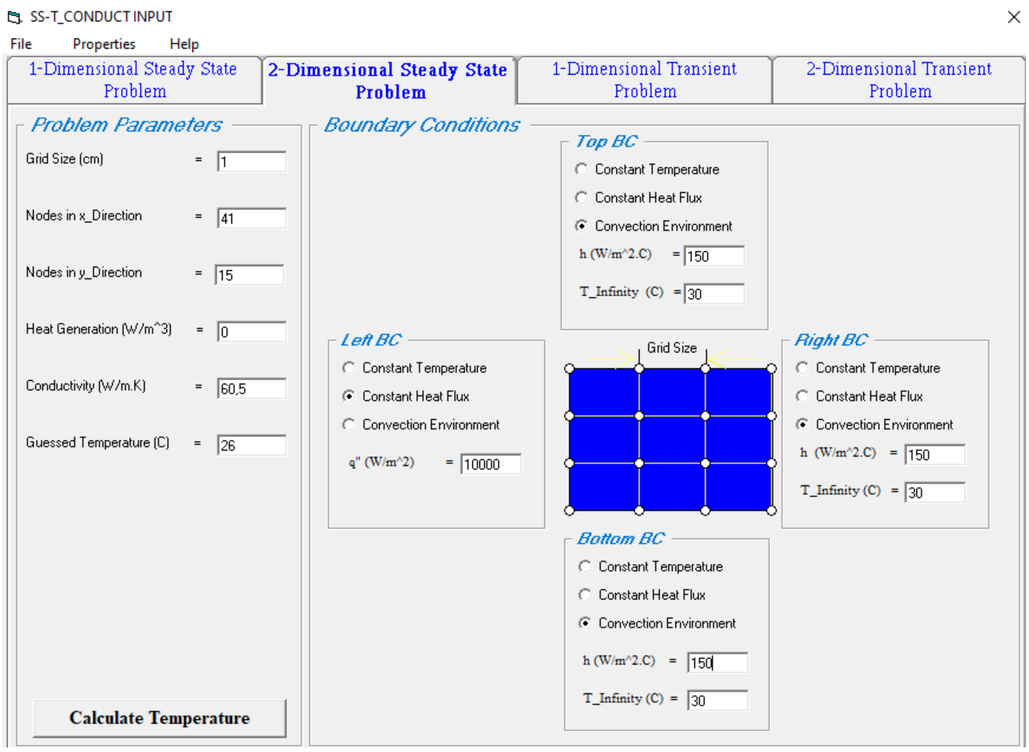

Figura 39 - Variáveis de entrada do aço carbono
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

A Figura 40 demonstra os resultados exportados do sistema, com a tabela à esquerda e o gráfico de distribuição de temperatura à direita.

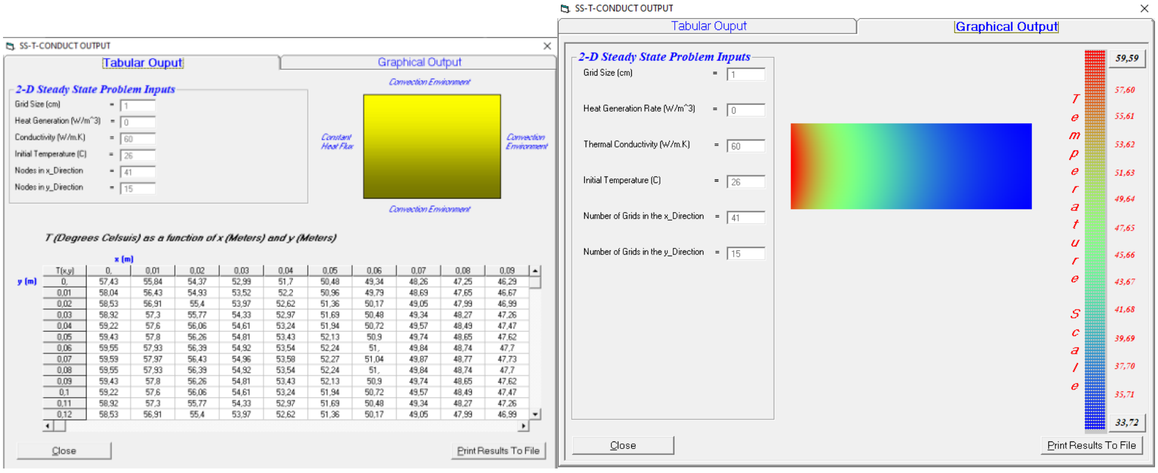

Figura 40 - Resultados do aço carbono exportados do programa
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Na Figura 41, verificam-se os resultados da simulação após a programação à esquerda com 625 células e o resultado do programa *SS-T Conduct* à direita com 615 células.

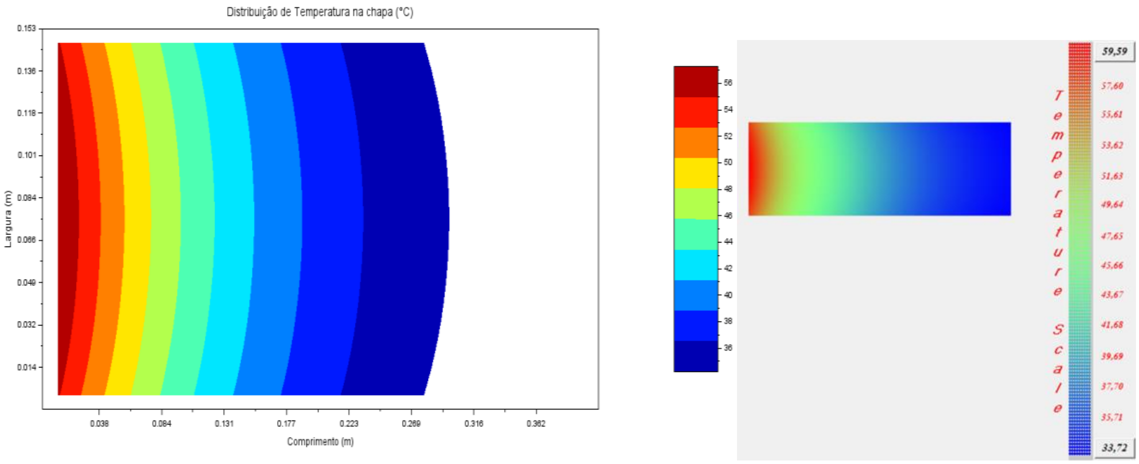

Figura 41 - Resultado do aço carbono com a convecção forçada com 615 e 625 células
Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Nas Tabelas 16 e 17, são apresentadas as variações dos valores relacionados à convecção forçada com os valores de máximo e mínimo, considerando o programa com 615 células e a programação com 625 células para os quatro materiais.

Tabela 16 - Variação dos valores máximos da convecção forçada entre 615 e 625 células

Valores de máximo	615 células (°C)	625 células (°C)	Diferença (°C)
Aço Carbono	59,59	59,22	0,37
Aço Inox	96,41	94,08	2,33
Alumínio	46,04	46,42	0,38
Cobre	43,68	44,15	0,47

Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Tabela 17 - Variação dos valores mínimos da convecção forçada entre 615 e 625 células

Valores de mínimo	615 células (°C)	625 células (°C)	Diferença (°C)
Aço Carbono	33,72	34,28	0,56
Aço Inox	30,70	30,96	0,26
Alumínio	37,40	38,03	0,63
Cobre	38,31	38,93	0,62

Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Nas Tabelas 16 e 17, é possível perceber que a variação entre os resultados estão entre 0°C a 2°C, com 88% dos resultados abaixo de 1°C, ou seja, o melhor resultado apresentado.

Para a convecção natural, com os valores de máximo e mínimo, considerando o programa *SS-T Conduct* com 615 células e a programação com 625 células, só foi possível exportar os resultados do aço inox devido à limitação de memória do sistema.

Na Tabela 18 e na Tabela 19 são apresentadas as comparações dos valores do aço inoxidável para a convecção natural.

Tabela 18 - Variação dos valores máximos da convecção natural entre 615 e 625 células

Valores de máximo	615 células (°C)	625 células (°C)	Diferença (°C)
Aço Carbono	-	-	-
Aço Inox	192,61	193,34	0,73
Alumínio	-	-	-
Cobre	-	-	-

Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Tabela 19 - Variação dos valores máximos da convecção natural entre 615 e 625 células

Valores de mínimo	615 células (°C)	625 células (°C)	Diferença (°C)
Aço Carbono	-	-	-
Aço Inox	71,85	76,49	4,64
Alumínio	-	-	-
Cobre	-	-	-

Fonte: Pesquisa Direta (2022)

Nas tabelas 18 e 19, é possível perceber que a variação entre os resultados do aço inox são de 0°C a 4°C, ou seja, resultados melhores se comparado a primeira validação e a com valores de células intermediárias.

Após todos os resultados comparados, vale salientar que a variação dos resultados envolvendo a convecção forçada é menor do que a da convecção natural. Além disso, após os resultados do programa, é possível verificar que o resultado do algoritmo computacional programado está em boa concordância com o programa *SS-T Conduct*, em razão da pequena diferença dos resultados após a simulação com o maior número de células.

5 CONCLUSÃO

Após o estudo para o desenvolvimento do equacionamento do problema, bem como a elaboração do código computacional para análise da transferência de calor bidimensional estacionária e comparação com o programa *SS-T Conduct* na análise de dados, é possível concluir que foram obtidos resultados com boa concordância e assertividade. A programação desenvolvida pode ser utilizada em aplicações acadêmicas e de engenharia, utilizando o método das diferenças finitas.

Em todas as situações de fluxo de calor estudado, foi possível notar uma elevada temperatura em $x = 0$, devido ao fluxo de calor incidindo diretamente nessa superfície, e uma dissipação de calor ao longo do comprimento até $x = L$ em função da queda de temperatura que ocorre devido à troca de calor por convecção nas outras superfícies.

Para a condutividade térmica, é possível perceber que, quando o valor de k é elevado, o material é considerado condutor térmico e, caso contrário, isolante térmico. O cobre possui a maior condutividade térmica e demonstra que o efeito da condutividade tem um maior efeito na distribuição da temperatura que o efeito da convecção, apesar de valores de temperatura diferentes, apresenta a faixa de transferência de calor similar.

Em relação à convecção forçada e natural, para todos os materiais, os resultados da primeira são menores que os da segunda. Além disso, é possível perceber que materiais com alta condutividade térmica, como o cobre e alumínio, apresentam pouca diferença entre os resultados de máximo e mínimo da convecção natural e da convecção forçada.

Apesar da limitação que o programa *SS-T Conduct* didático apresenta em relação ao número de células, percebe-se que, aumentando o número de células, obtém-se o resultado mais homogêneo e assertivo, sendo possível atingir resultados de comparação na convecção forçada com o código de programação (625 células) e no programa (615 células) na faixa de 0°C a 2°C, com 88% dos resultados abaixo de 1°C, ou seja, o melhor resultado apresentado.

A partir do trabalho realizado, é possível fazer recomendações para trabalhos futuros, como a utilização de outros programas que não apresentam limitações para melhores comparações da simulação. Como outras sugestões existem possibilidade de implantação do regime transiente, de novas geometrias como a barra circular, de aplicação de outro método numérico como elementos finitos ou volumes finitos.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ÇENGEL, Yunus A.; GHAJAR, Afshin J.. **Transferência de Calor e Massa**: uma abordagem simplificada. 4. ed. Porto Alegre: Amgh Editora Ltda, 2012.

FORTUNA, Armando de Oliveira. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações.** São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.

INCROPERA, Frank P.; DEWITT, David P.; BERGMAN, Theodore L.; LAVINE, Adrienne S. **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

INCROPERA, Frank P.; DEWITT, David P.; BERGMAN, Theodore L.; LAVINE, Adrienne S. **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

KREITH, Frank; MANGLIK, Raj M.; BOHN, Mark S. **Princípios de Transferência de Calor**. 7. ed. São Paulo: Cengage, 2016.

MAJUMDAR, Pradip. **Computational Methods for Heat and Mass Transfer**. New York: CRC Press, 2006.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. 2ª edição revista e ampliada. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2004.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 7. ed. São Paulo: Atlas Ltda, 2019.

GIL, Antônio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2018.

APÊNDICE A – CÓDIGO COMPUTACIONAL ELABORADO

```
//Problema bidimensional de transferência de calor, com propriedades constantes e sem geração de calor.
//Fluxo + convecção
clc;
clear;
fluxo=10000; //Fluxo de calor [W/m²]
L=0.4; //comprimento
W= 0.15;
Tinf = 30; //Temperatura [°C]
nx=10;
ny=10; //número de células;
dx = (L/nx);
dy = (W/ny); //comprimento de cada célula;
x=0;
y=0;
m=0; //Variação auxiliar na programação
k = 60.5; //Condutividade térmica [W/mK]
h = 20 // [W/m²K]
A = zeros(nx*ny, nx*ny);
a= 1/dx^2;
b= 1/dy^2;
c=(2*h)/(h*(dx^2)+(2*k*dx));
d=(2*h)/(h*(dy^2)+(2*k*dy));
e=(2*h*Tinf)/(h*(dx^2)+(2*k*dx));
f=(2*h*Tinf)/(h*(dy^2)+(2*k*dy));
g=fluxo/(k*dx);
m=0;
for j=1:ny
    for i=1:nx
        m=m+1;
        if(i==1 & j==1)//célula 1
            A(m,m)= -(d+a+b);
            A(m,m+1)=a;
            A(m,m+nx)=b;
            B(m)=-(f+g);
        elseif(i>1 & i<nx & j==1)//célula 2
            A(m,m-1)=a;
            A(m,m)= -(2*a+b+d);
            A(m,m+1)=a;
            A(m,m+nx)=b;
            B(m)= -f;
        elseif(i==nx & j==1)//célula 3
            A(m,m-1)=a;
            A(m,m)= -(a+b+c+d);
            A(m,m+nx)=b;
            B(m)= -(e+f);
        elseif(i==1 & j>1 & j<ny)//célula 4
            A(m,m-nx)=b;
            A(m,m)= -(a+2*b);
            A(m,m+1)=a;
            A(m,m+nx)=b;
            B(m)= -g;
        elseif(i>1 & i<nx & j>1 & j<ny)//célula 5
            A(m,m-nx)=b;
            A(m,m-1)=a;
            A(m,m)=-(2*a+2*b);
            A(m,m+1)=a;
            A(m,m+nx)=b;
            B(m)= 0;
        elseif(i==nx & j>1 & j<ny)//célula 6
            A(m,m-nx)=b;
            A(m,m-1)=a;
            A(m,m)=-(a+2*b+c);
            A(m,m+nx)=b;
            B(m)= -e;
        elseif(i==1 & j==ny)//célula 7
            A(m,m-nx)=b;
            A(m,m)=-(a+b+d);
            A(m,m+1)=a;
            B(m)= -(f+g);
        elseif(i>1 & i<nx & j==ny)//célula 8
            A(m,m-nx)=b;
            A(m,m-1)=a;
```

```
                A(m,m)=-(2*a+b+d);
                A(m,m+1)=a;
                B(m)= -f;
            elseif(i==nx & j==ny)//célula 9
                A(m,m-nx)=b;
                A(m,m-1)=a;
                A(m,m)=-(a+b+c+d);
                B(m)= -(e+f);
            end
        end
end
T=A\B;
mm=0;
for ii=1:nx //Transforma o vetor temperatura em matriz quadrada
    for jj=1:ny
        mm=mm+1;
        TT(ii,jj)=T(mm);
    end
end
x=dx/2:dx:L-dx/2;
y=dy/2:dy:W-dy/2;

f = scf();
contourf(x, y, TT',10);
f.color_map = jetcolormap(10);
title('Distribuição de Temperatura na chapa (°C)');
xlabel('Comprimento (m)');
ylabel('Largura (m)');
colorbar(T(mm), T(1));
printf('%g\n', T);
```

APÊNDICE B – RESULTADO EXPORTADO COM 9 CÉLULAS

Constante fixas:	L = 400 mm
	W = 150 mm
	T∞ = 30°C
	q'' = 10000 W/m²

Situação 1 - Aço Carbono		**Situação 1 - Aço Carbono**		**Situação 2 - Aço Inox**		**Situação 2 - Aço Inox**	
k = 60,5 W/mK		k = 60,5 W/mK		k = 15,1 W/mK		k = 15,1 W/mK	
h = 20 W/(m²K)		h = 150 W/(m²K)		h = 20 W/(m²K)		h = 150 W/(m²K)	
Número de Células = 9		Número de Células = 9		Número de Células = 9		Número de Células = 9	
Célula 1	124,0550	**Célula 1**	50,7980	**Célula 1**	158,1990	**Célula 1**	63,5356
Célula 2	109,3510	**Célula 2**	40,3950	**Célula 2**	109,1850	**Célula 2**	39,4776
Célula 3	100,8050	**Célula 3**	35,6806	**Célula 3**	84,0880	**Célula 3**	32,6336
Célula 4	124,5660	**Célula 4**	51,5895	**Célula 4**	160,8930	**Célula 4**	67,8446
Célula 5	109,7860	**Célula 5**	40,8084	**Célula 5**	110,8980	**Célula 5**	40,8278
Célula 6	101,1930	**Célula 6**	35,9074	**Célula 6**	85,2601	**Célula 6**	33,0142
Célula 7	124,0550	**Célula 7**	50,7980	**Célula 7**	158,1990	**Célula 7**	63,5356
Célula 8	109,3510	**Célula 8**	40,3950	**Célula 8**	109,1850	**Célula 8**	39,4776
Célula 9	100,8050	**Célula 9**	35,6806	**Célula 9**	84,0880	**Célula 9**	32,6336

Situação 3 - Alumínio		**Situação 3 - Alumínio**		**Situação 4 - Cobre**		**Situação 4 - Cobre**	
k = 237 W/mK		k = 237 W/mK		k = 401 W/mK		k = 401 W/mK	
h = 20 W/(m²K)		h = 150 W/(m²K)		h = 20 W/(m²K)		h = 150 W/(m²K)	
Número de Células = 9		Número de Células = 9		Número de Células = 9		Número de Células = 9	
Célula 1	113,0510	**Célula 1**	44,1240	**Célula 1**	111,3950	**Célula 1**	42,7820
Célula 2	109,0850	**Célula 2**	40,5955	**Célula 2**	109,0320	**Célula 2**	40,5841
Célula 3	106,6960	**Célula 3**	38,6272	**Célula 3**	107,6010	**Célula 3**	39,3143
Célula 4	113,1670	**Célula 4**	44,2691	**Célula 4**	111,4630	**Célula 4**	42,8604
Célula 5	109,1960	**Célula 5**	40,7062	**Célula 5**	109,0970	**Célula 5**	40,6497
Célula 6	106,8040	**Célula 6**	38,7175	**Célula 6**	107,6660	**Célula 6**	39,3721
Célula 7	113,0510	**Célula 7**	44,1240	**Célula 7**	111,3950	**Célula 7**	42,7820
Célula 8	109,0850	**Célula 8**	40,5955	**Célula 8**	109,0320	**Célula 8**	40,5841
Célula 9	106,6960	**Célula 9**	38,6272	**Célula 9**	107,6010	**Célula 9**	39,3143