



Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Engenharia Elétrica



Trabalho de Conclusão de Curso

Linearizações Paramétrica e não Paramétrica para Controle Robusto a partir de Modelos de Blocos Interconectados Identificados por Métodos de Subespaços

Luís Henrique dos Santos

João Monlevade, MG
2022

Luís Henrique dos Santos

**Linearizações Paramétrica e não
Paramétrica para Controle Robusto a partir
de Modelos de Blocos Interconectados
Identificados por Métodos de Subespaços**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Augusto Ricco

Coorientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga

**Universidade Federal de Ouro Preto
João Monlevade
2022**

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

S237l Santos, Luís Henrique dos.
Linearizações paramétrica e não paramétrica para controle robusto a partir de modelos de blocos interconectados identificados por métodos de subespaços. [manuscrito] / Luís Henrique dos Santos. - 2022.
80 f.: il.: color., tab..

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Augusto Ricco.
Coorientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga.
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Graduação em Engenharia Elétrica .

1. Sistemas lineares de controle. 2. Sistemas não-lineares - Linearização. 3. Controle automático - Controle robusto. I. Braga, Márcio Feliciano. II. Ricco, Rodrigo Augusto. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 681.516.7

Bibliotecário(a) Responsável: Sione Galvão Rodrigues - CRB6 / 2526



FOLHA DE APROVAÇÃO

Luís Henrique dos Santos

Linearizações Algébrica e Gráfica para Controle Robusto a partir de Modelos de Blocos Interconectados Identificados por Métodos de Subespaços

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica

Aprovada em 07 de janeiro de 2022

Membros da banca

Doutor - Rodrigo Augusto Ricco - Orientador(a) (Universidade Federal de Ouro Preto)
Doutor - Márcio Feliciano Braga - Coorientador(a) (Universidade Federal de Ouro Preto)
Doutor - Bruno Otávio Soares Teixeira - (Universidade Federal de Minas Gerais)
Doutora - Wendy Yadira Eras Herrera - (Universidade Federal de Ouro Preto)

Rodrigo Augusto Ricco, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 07/01/2022



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Augusto Ricco**, **PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 10/01/2022, às 14:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0266505** e o código CRC **6D08E44E**.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Jesus e Rosária, pelo amor incondicional e todos os esforços que fizeram para que esta etapa fosse concluída. À minha irmã Jussara, irmãos Paulo e José Cláudio, cunhado Glaucus e cunhada Iaponyra por estarem sempre presentes me dando suporte para seguir o curso da melhor maneira possível. À minha amiga Laura por toda organização que trouxe a minha vida acadêmica. E, por fim, com muito carinho, agradeço a minha namorada Évelly que sempre me apoiou e proporcionou diversos momentos de felicidade, mesmo em meio às correrias do semestre.

Um agradecimento especial é dedicado ao meu orientador, Rodrigo Ricco, e coorientador, Márcio Braga, por terem me direcionado no decorrer deste trabalho. Sobretudo dando incentivos e sugestões, sem as quais não conseguiria ter concluído essa etapa de estudos.

Resumo

Via de regra as plantas industriais são não lineares. Em razão disso, quando busca-se qualidade e robustez nas respostas de controle de tais plantas é fundamental representá-las por modelos não lineares, por exemplo, os modelos de blocos interconectados. Se por um lado isso resulta em uma melhora na qualidade do modelo, por outro implica em utilizar técnicas avançadas de controle. No entanto, como as estratégias de controle para sistemas lineares são mais consolidadas, uma alternativa eficiente é linearizar o modelo. Ao optar por essa abordagem, os algoritmos de inversão exata da não linearidade estática passam a ser o ponto em que a dificuldade se concentra. Em contrapartida, algoritmos de inversão aproximada podem não ser eficazes em uma faixa suficiente para realizar controle. A fim de contornar as dificuldades supracitadas, em ambas configurações, este trabalho propõe o uso de inversas simples para linearizar os modelos de blocos interconectados, particularmente nas estruturas de Hammerstein e Wiener, sendo uma das metodologias paramétrica e a outra não paramétrica. Com o intuito de verificar o funcionamento das inversas, o modelo linearizado foi utilizado para projetar um controlador PI discreto de maneira que a saída da planta pudesse seguir uma referência em degrau. Foram utilizadas condições de síntese fundamentadas em desigualdades matriciais lineares a fim de permitir a alocação dos polos de malha fechada em uma dada região \mathcal{D}_R que assegurasse o atendimento a especificações de projeto. Além disso, essas desigualdades foram elaboradas para levar em consideração as incertezas do modelo decorrentes da linearização e limitar a norma \mathcal{H}_∞ . Uma planta de dois tanques em cascata e outra de um reator de tanque continuamente agitado foram simuladas para testar as metodologias. As identificações dos modelos de blocos interconectados foram realizadas nas estruturas de Hammerstein e Wiener, respectivamente. Pode-se verificar que as inversas paramétrica e não paramétrica foram eficazes nas regiões a que se propôs para realizar controle, mostrando-se uma opção relevante para controlar plantas não lineares.

Palavras-chave: Modelos de Wiener, Modelos de Hammerstein, Identificação por Subespaços, Controle Robusto, \mathcal{D}_R -estabilidade, Controle \mathcal{H}_∞ , Linearização de Modelos de Blocos Interconectados.

Abstract

Industrial plants are generally nonlinear. Thus, when looking for quality and robustness in the control responses of these plants, it is essential to represent them by nonlinear models, for example, interconnected block models. If, on the one hand, this results in an improvement in the quality of the model, on the other hand, it implies the use of advanced control techniques. However, as the control strategies for linear systems are more consolidated, an efficient alternative is to linearize the model. When this approach is chosen, the static nonlinearity exact inversion algorithms become the point where the difficulty is concentrated. In contrast, approximate inversion algorithms may not be effective over a sufficient range to perform control. In order to overcome the aforementioned difficulties, in both configurations, this work proposes the use of simple inverses to linearize the interconnected block models, particularly in the Hammerstein and Wiener structures, one of the methodologies being parametric and the other non-parametric. In order to verify the functioning of the inverses, the linearized model was used to design a discrete PI controller so that the plant output could track a step reference. Synthesis conditions based on linear matrix inequalities were used in order to allow the allocation of closed-loop poles in a given region \mathcal{D}_R that would ensure compliance with design specifications. Furthermore, these inequalities were designed to take into account the model uncertainties arising from linearization and limit the \mathcal{H}_∞ norm. A two-tank cascade plant and another one of a continuously stirred tank reactor were simulated to test the methodologies. The identifications of the interconnected block models were carried out in the Hammerstein and Wiener structures, respectively. It can be verified that the parametric and non-parametric inverses were effective in the regions which it was proposed to control, proving to be a relevant option to control nonlinear plants.

Keywords: Wiener Model, Hammerstein Model, Subspace Identification, Robust Control, \mathcal{D}_R -stability, \mathcal{H}_∞ Control, LMI, Block-oriented Model Linearization.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Modelo de Hammerstein linearizado operando em malha fechada.	4
Figura 2 – Operação do modelo de Wiener em malha fechada.	5
Figura 3 – Modelo de Hammerstein em malha aberta.	8
Figura 4 – Modelo de Wiener em malha aberta.	9
Figura 5 – Esquema do MOESP-PO.	10
Figura 6 – Esquema do algoritmo de identificação em uma etapa para o modelo de Hammerstein.	15
Figura 7 – Esquema do algoritmo de identificação em uma etapa do modelo de Wiener.	17
Figura 8 – Esquema do algoritmo de identificação em duas etapas do modelo de Hammerstein.	19
Figura 9 – Esquema do algoritmo de identificação em duas etapas do modelo de Wiener.	21
Figura 10 – Modelo de Hammerstein linearizado em malha aberta.	24
Figura 11 – Modelo linearizado de Wiener em malha aberta.	24
Figura 12 – Diagrama de flechas para funções injetoras e não injetoras.	25
Figura 13 – Diagrama de linearização paramétrica.	25
Figura 14 – Diagrama de linearização não paramétrica.	26
Figura 15 – Curva de polinômio de segundo grau e sua inversa paramétrica.	27
Figura 16 – Setor cônico do modelo de Hammerstein.	29
Figura 17 – Setor cônico do modelo de Wiener.	31
Figura 18 – Inserção da nova variável de estado no modelo linearizado em malha fechada.	33
Figura 19 – Inserção da nova variável de estado no modelo de Wiener e sua respectiva planta.	34
Figura 20 – Planta e modelo de Hammerstein com nova variável de estado.	34
Figura 21 – Região que obedece o critério de T_s	36
Figura 22 – Região para alocação de polos obedecendo MUP.	37
Figura 23 – Região para alocação de polos obedecendo tempo de assentamento e a MUP.	38
Figura 24 – Esquema no qual uma bomba transporta o material do reservatório inferior para o sistema de dois tanques em cascata.	43
Figura 25 – Dados do ensaio dinâmico da planta de dois tanques em cascata.	45
Figura 26 – Validação dinâmica do sistema de dois tanques em cascata.	47
Figura 27 – Validação da curva não linear estática da planta dos dois tanques em cascata.	47

Figura 28 – Teste da inversa paramétrica.	49
Figura 29 – Teste de correspondência em malha aberta entre planta do sistema de dois tanques em cascata e seu modelo.	50
Figura 30 – Resposta da planta de dois tanques em cascata e seu modelo para o projeto que considerou somente a \mathcal{D}_R -estabilidade.	52
Figura 31 – Polos de malha fechada para o projeto com a \mathcal{D}_R -estabilidade realizado para o sistema de dois tanques em cascata.	53
Figura 32 – Teste da \mathcal{D}_R -estabilidade sem a saturação do sinal de controle do modelo relacionado à planta de dois tanques em cascata.	54
Figura 33 – Teste empregando \mathcal{D}_R -estabilidade e limitação do sinal de controle no sistema de dois tanques em cascata.	55
Figura 34 – Controle \mathcal{H}_∞ aplicado ao sistema de dois tanques em cascata.	58
Figura 35 – Controle \mathcal{H}_∞ com restrição no sinal de controle aplicado ao sistema de dois tanques em cascata.	59
Figura 36 – Teste da funcionalidade da inversão para fins de controle.	60
Figura 37 – Esquema de entradas e saídas do CSTR.	61
Figura 38 – Resposta do CSTR para entrada em degraus ascendentes.	63
Figura 39 – Curvas não lineares do CSTR obtidas por interpolação dos dados do ensaio estático.	64
Figura 40 – Dados do ensaio dinâmico realizado no CSTR para identificação em duas etapas.	64
Figura 41 – Validação por simulação livre da curva dinâmica do CSTR.	66
Figura 42 – Validação da curva não linear estática do CSTR.	67
Figura 43 – Inversão não paramétrica para as curvas não lineares do CSTR.	68
Figura 44 – Teste da inversa não paramétrica na faixa de operação entre 0 e 50.	68
Figura 45 – Teste de correspondência entre planta e modelo em malha aberta.	70
Figura 46 – Resposta do modelo e planta do CSTR para projeto considerando $T_s = 3s$ e $MUP = 4,6\%$	72
Figura 47 – Resposta do modelo e planta do CSTR para projeto que visa minimizar a norma de pior caso γ	74
Figura 48 – Resultado para aplicação de referências em degraus de diversas amplitudes no CSTR em malha fechada.	75

Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros do sistema de dois tanques adaptado de Rayouf, Ghorbel e Braiek (2018).	44
Tabela 2 – Parâmetros do ensaio dinâmico para identificação da planta de dois tanques em cascata.	44
Tabela 3 – Resumo dos resultados obtidos da identificação da planta de dois tanques em cascata.	48
Tabela 4 – Resultados do teste com \mathcal{D}_R -estabilidade para o sistema de dois tanques em cascata.	53
Tabela 5 – Resultados do teste da \mathcal{D}_R -estabilidade junto à limitação do sinal de controle na planta de dois tanques em cascata.	55
Tabela 6 – Resultado quantitativo do controle \mathcal{H}_∞ aplicado ao sistema de dois tanques em cascata.	57
Tabela 7 – Resultados do teste com \mathcal{H}_∞ e limitação do sinal de controle aplicado ao sistema de dois tanques em cascata.	58
Tabela 8 – Parâmetros para o sistema do CSTR retirado de Luning, Zhao e Spurgeon (2018).	62
Tabela 9 – Dados do ensaio dinâmico e estático para identificação do CSTR em duas etapas.	62
Tabela 10 – Resumo dos resultados obtidos da identificação do CSTR.	67
Tabela 11 – Resultados do controle do CSTR com \mathcal{D}_R -estabilidade.	72
Tabela 12 – Resultados do teste com \mathcal{H}_∞ aplicado ao CSTR.	73

Lista de Siglas

ARX	modelo autorregressivo com entradas exógenas (<i>AutoRegressive model with eXogenous inputs</i>)
CSTR	reator de tanque continuamente agitado (<i>Continuous Stirred Tank Reactor</i>)
CVA	<i>Canonical Variate Analysis</i>
LIT	Linear e Invariante no Tempo
LMI	desigualde matricial linear (<i>Linear Matrix Inequality</i>)
MATLAB	<i>Matrix Laboratory</i>
MIMO	múltiplas entradas e múltiplas saídas (<i>Multiple Input Multiple Output</i>)
MOESP	<i>Multivariable Output-Error State sPace</i>
MOESP-PO	<i>Multivariable Output-Error State sPace - Past Output</i>
MUP	Máxima Ultrapassagem Percentual
N4SID	<i>Numerical algorithms for Subspace State-Space System IDentification</i>
PI	Proporcional Integral
PID	Proporcional Integral Derivativo
PRBSM	sinal binário pseudoaleatório modulado (<i>Pseudo Random Binary Signal Modulated</i>)
RMSE	raiz quadrada do erro médio quadrático (<i>Root Mean Square Error</i>)
SBAI	Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente
SIMO	uma entrada e múltiplas saídas (<i>Single Input Multiple Output</i>)
SNR	relação sinal ruído (<i>Signal Noise Ratio</i>)
SVD	decomposição em valores singulares (<i>Singular Value Decomposition</i>)
VAF	variância entre dois sinais (<i>Variance Accounted For</i>)

Lista de símbolos

k	Variável de tempo discreto;
u_k	Entrada de sistemas não autônomos no instante k , com $u_k \in \mathbb{R}^p$;
$\hat{(\bullet)}$	Estimativa de (\bullet) ;
v_k	Sinal intermediário dos modelos de blocos interconectados;
y_k	Sinal de saída dos modelos no instante k , com $y_k \in \mathbb{R}^m$;
r	Ordem da não linearidade estática;
$f(\bullet)$	Função não linear estática;
α_H	Vetor dos parâmetros da curva não linear estática do modelo de Hammerstein $\in \mathbb{R}^{r+(1-i_0)}$;
$(\bullet)'$	Transposição de vetores e matrizes;
\in	Pertence (é um elemento de);
i_0	Limite inferior do parâmetro α_H ou α_W ;
n	Ordem do sistema;
p	Número de entradas do sistema;
m	Número de saídas do sistema;
\mathcal{L}_H	Sistema linear do modelo de Hammerstein;
x_k	Vetor de estados no instante $k \in \mathbb{R}^n$;
A	Matriz da dinâmica do sistema $\in \mathbb{R}^{n \times n}$;
B	Matriz de entrada $\in \mathbb{R}^{n \times p}$;
w_k	Vetor de ruído de processo $\in \mathbb{R}^n$;
C	Matriz de saída $\in \mathbb{R}^{m \times n}$;
D	Matriz de transmissão direta $\in \mathbb{R}^{m \times p}$;
ν_k	Vetor de ruído de medição $\in \mathbb{R}^m$;
N_{id}	Número de amostras para identificação;

\mathcal{L}_W	Sistema linear do modelo de Wiener;
α_W	Vetor dos parâmetros da curva não linear estática do modelo de Wiener $\in \mathbb{R}^{r+(1-i_0)}$;
O_i	Matriz de projeção oblíqua dos dados de entrada-saída do sistema;
U_o	Matriz unitária à esquerda da SVD de O_i ;
S_o	Matriz com valores singulares da SVD de O_i ;
V_o	Matriz unitária à direita da SVD de O_i ;
Γ_i	Matriz de observabilidade estendida;
$(\bullet)^\dagger$	Pseudoinversa de \bullet ;
θ	Matrizes x_0 , $\text{vec}(B_M)$ e $\text{vec}(D_M)$ empilhadas;
x_0	Vetor de condições iniciais;
$\phi_{M,k}$	Matriz de regressores utilizada no MOESP;
\otimes	Produto de Kronecker;
vec	Operador vetorização;
I_\bullet	Matriz identidade de ordem \bullet ;
\hat{B}	$\hat{B}\hat{\alpha}^T$ matriz de entradas estimada transformada pela não linearidade estática no modelo de Hammerstein;
\hat{D}_1	$\hat{D}\hat{\alpha}^T$ matriz de transmissão direta estimada transformada pela não linearidade estática no modelo de Hammerstein;
U_k	Entrada transformada pela curva não linear estática;
$\ \bullet\ _2$	Norma-2 de \bullet ;
$(\check{\bullet})$	Matriz estimada \bullet , antes de aplicar transformação T_{ee} ;
$\hat{\Theta}_{BD}$	Matrizes \check{B} e \check{D} empilhadas;
s	<i>Rank</i> da matriz $\hat{\Theta}_{BD}$;
Υ	Matriz unitária à esquerda da SVD de $\hat{\Theta}_{BD}$;
Σ	Matriz com valores singulares da SVD de $\hat{\Theta}_{BD}$;
Φ	Matriz unitária à direita da SVD de $\hat{\Theta}_{BD}$;

σ_s	Valores singulares da SVD de $\hat{\Theta}_{BD}$;
v	Valores das primeiras s colunas de Υ ;
ϕ	Valores das primeiras s colunas de Φ ;
$\text{diag}(\bullet)$	Operador diagonalização que produz uma matriz diagonal dos parâmetros \bullet ;
T_{ee}	Transformação de congruência;
Q_\bullet	Limites de amplitude da entrada do ensaio dinâmico, em que \bullet pode ser min ou max;
M_d	Quantidade de iterações em que cada patamar do sinal PRBSM para o ensaio dinâmico é fixo;
$f_*^{-1}(\bullet)$	Inversa da função não linear estática;
\hat{Y}_k	Saída estimada transformada pela curva não linear estática;
\hat{C}	$\hat{\alpha}^\dagger \hat{C}$ matriz de saídas estimada transformada pela não linearidade estática no modelo de Wiener;
\hat{D}	$\hat{\alpha}^\dagger \hat{D}$ matriz de transmissão direta estimada transformada pela não linearidade estática no modelo de Wiener;
$\hat{\Theta}_{CD}$	Matrizes \check{C} e \check{D} concatenadas;
$\hat{\lambda}$	Ganho atribuído à parte dinâmica do modelo de blocos interconectados;
E_\bullet	Limites de amplitude da entrada do ensaio estático, em que \bullet pode ser min ou max;
$\text{deg}(k)$	Função degrau em tempo discreto;
J_0	Incremento de amplitude do ensaio estático;
M_e	Quantidade de iterações necessárias para a planta estabilizar no ensaio estático;
q_e	Quantidade de patamares do ensaio estático;
\tilde{v}_k	Sinal \hat{v}_k linearizado;
g	Função $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
ψ_\bullet	Composição entre as funções da não linearidade estática e sua inversa, em que \bullet pode ser H para o modelo de Hammerstein ou W para o modelo de Wiener;

\bar{m}	Limite superior de inclinação da curva gerada por ψ_{\bullet} ;
\underline{m}	Limite inferior de inclinação da curva gerada por ψ_{\bullet} ;
\mathcal{L}	Sistema linear;
\hat{e}_k	Sinal de erro;
$\hat{x}_{e,k}$	Variável de estado relacionada ao erro;
y_r	Sinal de referência;
B_r	Matriz de entrada de referência;
K	Controlador estático;
\bullet_{mf}	Matriz \bullet em malha fechada;
n_a	Ordem do sistema aumentado pelo estado integral do erro;
T_s	Tempo de assentamento;
z	Ponto sobre o plano complexo discreto;
R_{\bullet}	Matriz que descreve uma região \mathcal{D}_R convexa;
$\alpha_{p,i}$	Ponderações de cada vértice de um politopo;
Λ	Simplex unitário;
G	Matriz de folga das LMIs ;
Z	Matriz utilizada para linearizar uma desigualdade matricial e torná-la LMI ;
P	Matriz de Lyapunov;
M_{\bullet}	Matriz do teorema da \mathcal{D}_R -estabilidade;
σ	Valor de determinado polo no eixo real;
ω_d	Valor de determinado polo no eixo imaginário;
\angle_{\bullet}	Ângulo de fase de um número imaginário na representação polar;
T	Período de amostragem;
ω_n	Frequência natural de oscilação;
ζ	Fator de amortecimento;

ρ	Raio de um círculo no plano discreto;
a	Semieixo maior de uma elipse;
x_c	Ponto em que uma cardioide toca o eixo real
b	Semieixo menor de uma elipse;
y_I	Ponto de encontro entre o cone e elipse no eixo imaginário para formar a aproximação de uma cardioide;
x_I	Ponto de encontro entre o cone e elipse no eixo real para formar a aproximação de uma cardioide;
x_M	Ponto central de uma elipse no eixo real;
x_v	Vértice do cone para formar a aproximação de uma cardioide;
γ_{ac}	Angulo de abertura do cone para formar a aproximação de uma cardioide;
B_w	Matriz de entrada de ruído;
$H(z,\alpha)$	Função de transferência da entrada de ruído para a saída;
$\bar{\sigma}$	Função valor singular máximo;
ℓ_2	Espaço para sinais de energia finita para sequências de tempo discreto;
γ	Limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ ;
W	Matriz de Lyapunov para o caso dual;
μ	Quadrado do limitante da norma \mathcal{H}_∞ ;
δ	Limitante do sinal de controle;
$N_{amostra}$	Quantidade de amostra do experimento estático ou dinâmico;
q	Operador atraso;
$r_{b,i}$	Ruído branco qualquer;
N_{val}	Quantidade de dados para validação;
M_c	Matriz de controlabilidade.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Contextualização	1
1.2	Estado da Arte	2
1.3	Justificativa	3
1.4	Formulação do Problema	4
1.5	Objetivos	5
1.5.1	Objetivos Específicos	5
1.6	Produções científicas	5
1.7	Estrutura do Trabalho	6
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	7
2.1	Introdução	7
2.2	Modelo de Blocos Interconectados	7
2.2.1	Modelo de Hammerstein	7
2.2.2	Modelo de Wiener	9
2.3	Algoritmos de Subespaços	10
2.4	Identificação de Modelos de Blocos Interconectados	12
2.4.1	Identificação em Uma Etapa (GÓMEZ; BAEYENS, 2005)	12
2.4.1.1	Modelo de Hammerstein	12
2.4.1.2	Modelo de Wiener	16
2.4.2	Identificação em Duas Etapas (DE PAULA, 2016)	18
2.4.2.1	Modelo de Hammerstein	18
2.4.2.2	Modelo de Wiener	20
2.4.3	Escolha da Metodologia de Identificação	22
3	LINEARIZAÇÃO DOS MODELOS DE BLOCOS INTERCONECTADOS	23
3.1	Introdução	23
3.2	Esquemas de Linearização	23
3.3	Técnica de Linearização Paramétrica	24
3.4	Técnica de Linearização não Paramétrica	26
4	CONTROLE DOS MODELOS DE BLOCOS INTERCONECTADOS	28
4.1	Introdução	28
4.2	Modelagem da Incerteza	28

4.2.1	Modelo de Hammerstein	29
4.2.2	Modelo de Wiener	30
4.3	PI – Estabilidade e Seguimento de Referência	32
4.4	\mathcal{D}_R -estabilidade – Critérios de Desempenho	35
4.5	\mathcal{H}_∞ – Rejeição de Ruídos	38
4.6	Limitação do Sinal de Controle	41
5	RESULTADOS	42
5.1	Experimento 1	42
5.1.1	Apresentação da Planta	42
5.1.2	Identificação da Planta	44
5.1.3	Linearização Paramétrica	48
5.1.4	Controle da Planta a partir do Modelo de Hammerstein	49
5.2	Experimento 2	60
5.2.1	Apresentação da Planta do CSTR	60
5.2.2	Identificação na Estrutura de Wiener	62
5.2.3	Linearização não Paramétrica	67
5.2.4	Controle da Planta a partir do Modelo de Wiener	69
6	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	76
6.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	77
	REFERÊNCIAS	78

1 Introdução

1.1 Contextualização

Embora a maioria das pesquisas desenvolvidas para o projeto de controladores seja elaborada por intermédio de um modelo linear dos sistemas, em geral, os processos industriais possuem maior ou menor grau de não linearidade. Alguns exemplos de processos não lineares comuns nas indústrias são o controle de nível em tanques cônicos, de temperatura por impedâncias térmicas e de vazão por meio de válvulas (GARCIA, 2009). No entanto, à medida que o grau de não linearidade se torna mais expressivo e o ponto de operação varia ao longo de uma faixa cada vez mais ampla, torna-se difícil representar adequadamente um processo por modelos lineares (AGUIRRE, 2015). Como o desempenho do sistema de controle está vinculado a uma boa representação matemática do processo, uma abordagem não linear tende a ser seguida para os sistemas que apresentam uma não linearidade de grau elevado. Nesses casos, o projeto do controlador pode ser realizado aplicando técnicas especiais, tal como a linearização exata (BIAGIOLA; AGAMENNONI; FIGUEROA, 2016), controle preditivo não linear (LI; LI, 2016), ou outro procedimento específico (OGUNNAIKE; RAY, 1994).

As oportunidades criadas na busca da representação mais adequada para sistemas não lineares levou ao desenvolvimento de técnicas para a modelagem usando métodos de séries funcionais, como as séries de Volterra. Porém, elas são complexas do ponto de vista computacional e geram dificuldade na inserção de informação *a priori* (BORJAS; GARCIA, 2013). Nesse sentido, Billings e Fakhouri (1982) apresentam uma alternativa que é uma composição em cascata de um modelo dinâmico linear e uma curva estática não linear. Conhecidas como modelos de blocos interconectados, as duas estruturas mais comuns são a de Hammerstein e a de Wiener. Tais estruturas foram empregadas com sucesso para representar sistemas não lineares em diversas aplicações práticas na área de processos químicos (ROY et al., 2016; LI; LI, 2016), processos biológicos (FRĄCZ, 2016), em biomédica (JALALEDDINI; KEARNEY, 2013; NAJAFABADI; SHAHROKHI, 2016) e em projeto de controladores (BIAGIOLA; AGAMENNONI; FIGUEROA, 2016; RAYOUF; GHORBEL; BRAIEK, 2018).

Determinado sistema pode ser modelado diretamente por meio das equações que descrevem a física do processo, metodologia conhecida como modelagem caixa branca. Para isso é necessário ter total conhecimento do sistema, o que se torna muito difícil, sobretudo para processos mais complexos (GARCIA, 2009). Nesses casos, a alternativa é a modelagem caixa preta, que emprega dados de entrada e saída do sistema para estimar os parâmetros do modelo. Existe ainda uma opção intermediária que utiliza informações *a priori* para tornar mais acurado um modelo inicialmente caixa preta, conhecida como

modelagem caixa cinza (AGUIRRE, 2015).

Segundo de Paula (2016), um destaque pode ser dado aos métodos de identificação por subespaços, que entram nesse cenário como uma forma bastante atraente para a determinação de modelos lineares no espaço de estados, empregando algoritmos não iterativos por meio de álgebra linear. Eles podem ser úteis para identificar a dinâmica relacionada a sistemas não lineares, além de fornecer matrizes diretamente aplicáveis a projetos de controladores por meio de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*).

A exemplo da parte dinâmica, a não linearidade estática também tem sido modelada empregando a identificação de sistemas, sobretudo no que se refere aos modelos de blocos interconectados (FREITAS; BARBOSA; AGUIRRE, 2021; GÓMEZ; BAEYENS, 2005; DE PAULA; RICCO; TEIXEIRA, 2015).

1.2 Estado da Arte

Até a década de 90, as pesquisas encontravam-se focadas no desenvolvimento de modelos polinomiais para representar tanto a parte linear, quanto a parte não linear dos modelos de blocos interconectados. A partir dessa década, o interesse por métodos de subespaços que estimam modelos lineares representados em espaço de estados foi despertado e seguiu aumentando (RICCO, 2012). O algoritmo *Multivariable Output-Error State Space* (MOESP) proposto por Verhaegen e Dewilde (1992) é um método de identificação por subespaços frequentemente utilizado para determinar a parte dinâmica linear de sistemas modelados na estrutura de blocos interconectados.

Trabalhos como os de Gómez e Baeyens (2005) e de de Paula, Ricco e Teixeira (2015), empregam o MOESP para identificar as dinâmicas lineares associadas aos modelos de Hammerstein e Wiener. Em Gómez e Baeyens (2005), identificou-se simultaneamente a dinâmica linear e a curva estática dos modelos de blocos interconectados. Para isso, foram desenvolvidos algoritmos em que a primeira parte consiste na utilização do MOESP e a segunda em um problema de minimização de norma-2. Em alternativa, o trabalho de de Paula, Ricco e Teixeira (2015) apresentou outros algoritmos para identificar os modelos de Hammerstein e Wiener, em que a metodologia desenvolvida utilizava um experimento estático com a aplicação de múltiplos degraus na entrada para identificar a curva estática e um experimento com entrada persistentemente excitante para estimar a dinâmica linear.

A vantagem do algoritmo de identificação proposto por Gómez e Baeyens (2005) é que ele necessita somente de um experimento para obter todos os parâmetros do modelo. Isso se traduz em um menor gasto de tempo e equipamentos para identificar o modelo da planta. Por sua vez, a vantagem do método apresentado em de Paula, Ricco e Teixeira (2015) é que ele tende a resultar em um modelo mais acurado por considerar a informação auxiliar dos ganhos estáticos.

Com o intuito de realizar controle, [Rayouf, Ghorbel e Braiek \(2018\)](#) empregaram o modelo de Hammerstein identificado pelo método de [Gómez e Baeyens \(2005\)](#) para linearizar e controlar uma planta de dois tanques em cascata. O modelo encontrado foi composto de uma representação em espaço de estados para o bloco dinâmico linear e uma curva polinomial para a não linearidade estática. No trabalho, uma inversa aproximada da curva polinomial foi investigada a fim de cancelar os efeitos não lineares. Segundo os autores, algumas inversas exatas possuem elevado grau de complexidade, por esse motivo, propuseram uma metodologia de inversão mais simples e aproximada ([HONG; MITCHELL, 2006](#); [HONG; MITCHELL; CHEN, 2012](#)). Porém, a metodologia desenvolvida em [Rayouf, Ghorbel e Braiek \(2018\)](#) não funciona para uma ampla faixa de operação, podendo até mesmo falhar para não linearidades que possuam os parâmetros dos termos de maior grau com valor expressivo.

A proposta do presente trabalho é apresentar duas metodologias de inversão da curva não linear identificada que sejam eficazes em uma faixa ampla, mesmo para não linearidades polinomiais em que os termos de maior grau sejam mais expressivos. As metodologias desenvolvidas são fundamentadas em técnicas algébricas e gráficas, ainda assim, mantendo a simplicidade de obtenção que não se fazem presentes nos trabalhos de [Hong e Mitchell \(2006\)](#) e [Hong, Mitchell e Chen \(2012\)](#). As metodologias de inversão podem ser aplicadas tanto nos modelos de Hammerstein quanto nos de Wiener e, apesar de exigir um esquema de controle diferente para cada modelo supracitado, as técnicas escolhidas são comuns. São elas:

- emprego de controlador Proporcional Integral (PI) para estabilizar o modelo em espaço de estados empregando LMIs e garantir erro regulatório nulo;
- interessado em considerar os erros que por ventura possam surgir devido à inversão aproximada, o modelo é tratado como incerto e são aplicadas técnicas de controle robusto;
- também emprega-se a \mathcal{D}_R -estabilidade para alocar os polos em uma região que garanta alguns critérios de desempenho;
- pode-se empregar LMIs que limitam o sinal de controle para que não extrapolem os limites impostos pela planta a ser simulada;
- por fim, para um cenário de estabilização, com o propósito de atenuar o efeito do ruído na saída de controle aplica-se a limitação da norma \mathcal{H}_∞ .

1.3 Justificativa

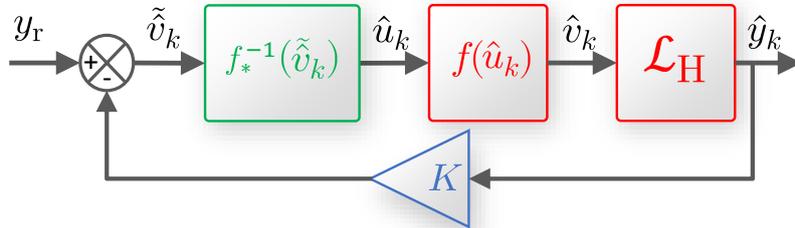
A literatura descreve que o controle de sistemas não lineares é beneficiado pela utilização de representações não lineares. Uma das opções mais simples de utilizá-las são os

modelos de blocos interconectados, que possuem aplicações em diversas áreas importantes para a sociedade como biomédica, química e controle. Nesse sentido, esta pesquisa tem o interesse de contribuir com a evolução dos modelos por intermédio de metodologias de inversão que sejam simples e funcionem em uma ampla faixa de operação, implicando em uma melhora na resposta do sistema de controle. Dessa forma, deixa de ser necessário o emprego de diversos controladores, um para cada ponto de operação, possibilitando o uso de um único controlador para a planta, tal como ocorre nos sistemas lineares.

1.4 Formulação do Problema

Tome o modelo de Hammerstein em malha fechada tal como está representado na Figura 1 em vermelho. As entradas e saídas do modelo são dadas por \hat{u}_k e \hat{y}_k , respectivamente. Com a intenção de aplicar metodologias consolidadas de controle linear, torna-se necessário linearizar o modelo, de forma que o sinal \tilde{v}_k se aproxime do sinal \hat{v}_k . Além disso, é válido destacar que o sinal \hat{v}_k pode ser acessado no modelo, ou seja, a partir de uma simulação, porém não se trata de um sinal real que estaria disponível na planta.

Figura 1 – Modelo de Hammerstein linearizado operando em malha fechada.

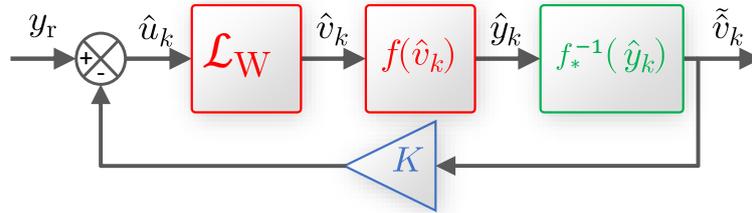


Considerando que a curva estática $f(\hat{u}_k)$ possa ser estimada e a sua inversa $f_*^{-1}(\tilde{v}_k)$ calculada, o conjunto inversa e curva estática são posicionadas em série, como observado em verde e vermelho na Figura 1, respectivamente. Dada essa estruturação, o esquema de controle assimila a composição inversa-modelo como um sistema linear e possibilita a aplicação de controle linear, representado no esquema pelo ganho de cor azul.

O método de inversão exato pode ser demasiadamente complexo e o aproximado pode ser limitado a regiões de operação estreitas (HONG; MITCHELL, 2006; HONG; MITCHELL; CHEN, 2012; RAYOUF; GHORBEL; BRAIEK, 2018). Por isso, este trabalho propõe duas técnicas de linearização simples e eficazes em uma região de operação suficientemente ampla para realizar controle. Nesse sentido, empregam-se estratégias de controle robusto para validar a eficácia da inversa em dois sistemas simulados.

De forma similar, o modelo de Wiener também pode ser linearizado tal como mostrado na Figura 2. A diferença está no posicionamento da inversa $f_*^{-1}(\hat{y}_k)$ que se encontra após a função não linear estática $f(\hat{v}_k)$.

Figura 2 – Operação do modelo de Wiener em malha fechada.



1.5 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é estudar as metodologias de inversão paramétrica e não paramétrica da curva não linear estática dos modelos de Hammerstein e Wiener a fim de aplicar técnicas consolidadas de controle linear em tempo discreto, como o controle Proporcional Integral Derivativo (PID). Além disso, é parte do escopo deste trabalho, aplicar a técnica de \mathcal{D}_R -estabilidade para levar em consideração critérios de desempenho no projeto do controlador e em outro momento limitar a norma \mathcal{H}_∞ a fim de atenuar os efeitos do ruído na saída dos sistemas.

1.5.1 Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos devem ser cumpridos:

- Identificar modelos de blocos interconectados de Hammerstein e Wiener utilizando métodos de subespaços em uma ou duas etapas;
- Linearizar modelos de Hammerstein e Wiener utilizando as metodologias de inversão paramétrica e não paramétrica;
- Controlar os modelos linearizados por intermédio da metodologia de linearização proposta, empregando o controle PID junto à \mathcal{D}_R -estabilidade e em outros momentos junto do controle \mathcal{H}_∞ ;
- Aplicar as técnicas de identificação, linearização e controle em sistemas-teste não lineares.

1.6 Produções científicas

Os resultados apresentados neste trabalho são continuidade de pesquisas que renderam outros textos científicos. No artigo Santos, Braga e Ricco (2021) apresentado no Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI) 2021 foi proposta uma metodologia

de inversão algébrica para o modelo de Hammerstein e foram realizados testes com quatro combinações de duas abordagens para identificação (em uma e duas etapas) e duas outras de linearização (por regiões de operação e algébrica), apontando a que produziu os melhores resultados no controle de dois sistemas, um de dois tanques em cascata e outro puramente teórico.

Nesse artigo a melhor abordagem de identificação foi em duas etapas. Quanto à metodologia de inversão, os melhores resultados reportados foram atribuídos à linearização algébrica, que conseguiu anular os efeitos da não linearidade de forma eficaz em uma região suficientemente extensa para abranger a amplitude do sinal de controle em todos os testes realizados. Por outro lado, a inversa algébrica precisa ser calculada para cada sistema, enquanto a inversa por regiões de operação proposta por (RAYOUF; GHORBEL; BRAIEK, 2018) funciona para todos que sejam de ordem r , bastando aplicar os parâmetros encontrados em uma equação.

As propostas do artigo são estendidas neste trabalho de conclusão de curso com a apresentação de novas abordagens de linearização além da aplicação delas, não só no modelo de Hammerstein, como no de Wiener.

1.7 Estrutura do Trabalho

O primeiro capítulo deste trabalho foi iniciado com uma contextualização do tema a ser desenvolvido, em seguida foi realizada uma exposição do estado da arte, dos objetivos e, por fim, apresentaram-se a justificativa e produção científica da pesquisa. A sequência do trabalho de conclusão de curso está estruturada da seguinte forma.

No Capítulo 2, apresenta-se uma abordagem teórica sobre os modelos de blocos interconectados de Hammerstein e de Wiener e, na sequência, a identificação utilizando métodos de subespaços em uma etapa e duas etapas destas estruturas.

No Capítulo 3, desenvolvem-se as metodologias de linearização paramétrica e não paramétrica para os modelos de blocos interconectados.

No Capítulo 4, descrevem-se as estratégias do controlador PI, da \mathcal{D}_R -estabilidade, \mathcal{H}_∞ e atenuação do ganho para controlar os modelos previamente identificados e linearizados.

No Capítulo 5, realiza-se a aplicação das técnicas de identificação, das propostas de inversão e de controle em uma planta de dois tanques em cascata e em um reator de tanque continuamente agitado (CSTR, do inglês *Continuous Stirred Tank Reactor*).

Finalmente, o Capítulo 6 destina-se ao registro das conclusões obtidas a partir dos resultados apresentados e às sugestões para os trabalhos futuros.

2 Fundamentos Teóricos

2.1 Introdução

Nos modelos de blocos interconectados, os subsistemas lineares podem ser paramétricos ou não paramétricos. No caso de serem paramétricos, podem ser utilizadas funções de transferência, representações em espaço de estados, modelos autorregressivos com entradas exógenas ([ARX](#), do inglês *AutoRegressive models with eXogenous inputs*), entre outros. De outra forma, quando são não paramétricos, emprega-se resposta ao impulso, resposta em frequência, ou outras representações afins. Os elementos não lineares também podem ser paramétricos ou não paramétricos e tal flexibilidade fornece aos modelos de blocos interconectados uma notável capacidade de representar diversas classes de sistemas não lineares complexos ([BAI, 2010](#)).

Em virtude das metodologias de identificação e linearização que serão aplicadas, neste trabalho será adotada a representação em espaço de estados para modelar a dinâmica linear e uma estrutura polinomial para representar a não linearidade estática.

Ao longo deste capítulo serão revisadas técnicas necessárias para identificar um sistema não linear modelado por meio da estrutura de Hammerstein e de Wiener. Dessa forma, na Seção [2.2](#) serão introduzidos os modelos de blocos interconectados, a Seção [2.3](#) é dedicada a uma breve apresentação do algoritmo *Multivariable Output-Error State sPace - Past Output* ([MOESP-PO](#)), bem como serão descritas as metodologias de identificação em uma e duas etapas na Seção [2.4](#).

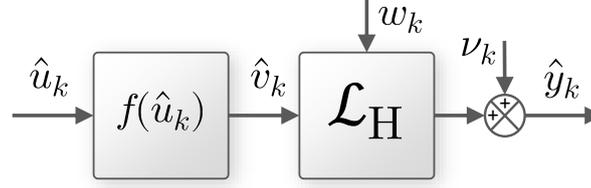
2.2 Modelo de Blocos Interconectados

2.2.1 Modelo de Hammerstein

O modelo de Hammerstein é uma estrutura de blocos interconectados tal que a não linearidade estática antecede a dinâmica linear. A estrutura descreve bem os sistemas em que a não linearidade do atuador, por exemplo uma válvula, é dominante e outros efeitos não lineares podem ser desprezados ([BAI, 2010](#)). De forma gráfica, o modelo de Hammerstein pode ser observado na Figura [3](#). O primeiro bloco pode ser interpretado como um ganho estático que obedece a uma função não linear capaz de mapear a entrada \hat{u}_k do sistema para um sinal intermediário \hat{v}_k . Logo, o sinal \hat{u}_k recebe um ganho diferente em cada ponto de operação em que se encontrar. No modelo tratado, a função é especificada por uma curva polinomial. O sinal intermediário é utilizado na sequência como entrada do bloco dinâmico linear, o qual é responsável por inserir a dinâmica do

sistema modelado no sinal \hat{u}_k e produzir o sinal de saída \hat{y}_k . Assim, \hat{y}_k carrega toda a característica não linear e dinâmica que o modelo representa (BAI, 2010).

Figura 3 – Modelo de Hammerstein em malha aberta.



Fonte: Adaptado de Gómez e Baeyens (2005).

A escolha da estrutura dos dois blocos é uma decisão particular, uma vez que muitas possibilidades de representação dinâmicas e de funções não lineares podem ser utilizadas para modelar o sistema de Hammerstein. Para o desenvolvimento deste trabalho, adotou-se uma função polinomial de ordem r para modelar a curva estática como dada a seguir

$$\hat{v}_k = f(\hat{u}_k) = \sum_{i=i_0}^r \hat{\alpha}_{H,i} \hat{u}_k^i, \quad (2.1)$$

em que $\hat{\alpha}_H = [\hat{\alpha}_{H,i_0}, \dots, \hat{\alpha}_{H,3}, \hat{\alpha}_{H,4}, \dots, \hat{\alpha}_{H,r}]' \in \mathbb{R}^{p[r+(1-i_0)] \times p}$ é uma matriz contendo os parâmetros da curva não linear estática, i_0 deve ser escolhido igual a 1 no caso da identificação em uma etapa ou 0 para a identificação em duas etapas, $\hat{u}_k \in \mathbb{R}^p$ é a sequência de entrada do sistema e $\hat{v}_k \in \mathbb{R}^p$ é a sequência intermediária gerada pela curva não linear.

Por sua vez, a dinâmica linear é modelada como uma representação em espaço de estados de ordem n , com p entradas e m saídas, dada por

$$\mathcal{L}_H = \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}\hat{v}_k + w_k, \\ \hat{y}_k = \hat{C}\hat{x}_k + \hat{D}\hat{v}_k + \nu_k, \end{cases} \quad (2.2)$$

na qual $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz da dinâmica, $\hat{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ é a matriz de entradas, $\hat{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de saídas, $\hat{D} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ é a matriz de transmissão direta, $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $w_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de ruídos de processo, $\nu_k \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de ruídos de medição e $\hat{y}_k \in \mathbb{R}^m$ é a saída do sistema.

Dada a representação descrita em (2.1) e (2.2), o problema de identificação de sistemas na estrutura de Hammerstein consiste em estimar as matrizes desconhecidas \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} e $\hat{\alpha}_H$ a partir de N_{id} dados de entrada e saída $\{u_k, y_k\}_{k=1}^{N_{\text{id}}}$, de forma a caracterizar a parte dinâmica linear e não linear estática.

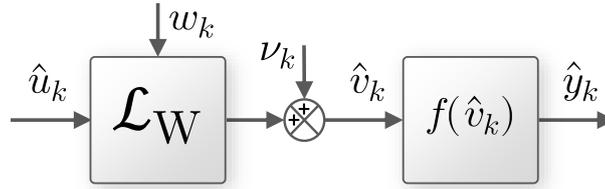
Observação 2.1 A matriz \hat{D} é definida em (2.2) para que a representação seja generalista, porém, deve ser destacado que em um cenário prático para o caso discreto, ela é nula devido a impossibilidade de haverem variações imediatas na saída como consequência de perturbações na entrada. Ademais, como tal matriz é resultante de um algoritmo

de identificação, ela pode ser identificada com erros e ser não nula. A observação aqui detalhada, se aplica ao modelo de Wiener, desenvolvido na Seção 2.2.2.

2.2.2 Modelo de Wiener

A exemplo do modelo de Hammerstein, o de Wiener também é uma composição de blocos interconectados apropriada para representar matematicamente um sistema não linear. A estrutura de Wiener consiste em um bloco dinâmico linear e invariante no tempo seguido de um bloco estático não linear. O modelo é representado graficamente na Figura 4, em que o bloco dinâmico em espaço de estados transforma a entrada \hat{u}_k no sinal intermediário \hat{v}_k de tal maneira que a dinâmica associada faça-se presente na saída. Por sua vez, o bloco estático não linear, que utiliza uma representação polinomial, mapeia a sequência intermediária \hat{v}_k para a de saída do modelo \hat{y}_k (BAI, 2010). Dessa forma, apesar de não existir uma divisão física no sistema, o modelo trata a parte linear e a não linear separadamente, simplificando o processo de identificação, tal como ocorre no modelo de Hammerstein.

Figura 4 – Modelo de Wiener em malha aberta.



Fonte: Adaptado de Gómez e Baeyens (2005).

O modelo de Wiener, inclusive, possui os mesmos blocos que o modelo de Hammerstein, porém com a ordem invertida. Isso torna os argumentos diferentes, mas a estrutura das funções que constituem cada bloco são mantidas. A dinâmica linear de ordem n com p entradas \hat{u}_k e m saídas \hat{v}_k é dada por

$$\mathcal{L}_W = \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}\hat{u}_k + w_k, \\ \hat{v}_k = \hat{C}\hat{x}_k + \hat{D}\hat{u}_k + \nu_k. \end{cases} \quad (2.3)$$

Por sua vez, a curva estática que mapeia \hat{v}_k para \hat{y}_k pode ser escrita como

$$\hat{y}_k = f(\hat{v}_k) = \sum_{i=i_0}^r \hat{\alpha}_{W,i} \hat{v}_k^i. \quad (2.4)$$

No caso de Wiener, o problema de identificação também consiste em estimar as matrizes desconhecidas \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} e $\hat{\alpha}_W$ com base em N_{id} dados de entrada e saída $\{u_k, y_k\}_{k=1}^{N_{id}}$ coletados diretamente da planta a qual deseja-se modelar.

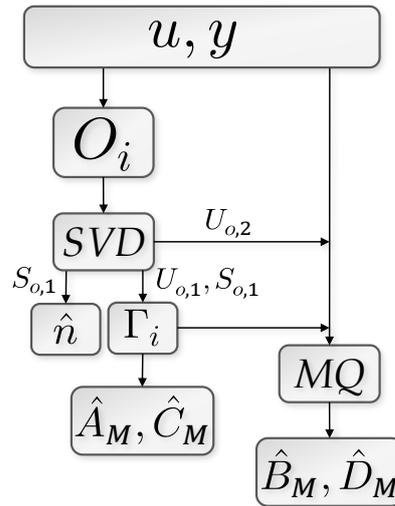
Ambos os modelos em estudo podem ser aplicados para descrever sistemas não lineares, porém pode ser interessante levar em consideração na escolha, que o de Hammerstein pode apresentar melhores resultados quando os ganhos variam com o ponto de

operação, ao passo que espera-se do modelo de Wiener melhores resultados quando os autovalores mudam com o ponto de operação (AGUIRRE; COELHO; CORREA, 2005).

2.3 Algoritmos de Subespaços

O MOESP é um algoritmo que utiliza os dados de entrada e saída de uma planta para estimar as matrizes e a ordem de um modelo que seja capaz de representá-la. Uma variação do MOESP é obtida quando se utiliza as variáveis instrumentais ao incorporar as saídas passadas na metodologia de identificação, de forma que obtém-se o MOESP-PO. Segundo Ricco (2012), o método MOESP-PO é o mais indicado quando o sistema está sujeito a ruído de medição e de processo. Além disso, ele também pode estimar a ordem do sistema como apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Esquema do MOESP-PO.



Fonte: Adaptado de Ricco (2016)

Em um primeiro momento a matriz O_i é obtida por meio da projeção oblíqua dos dados de entrada-saída do sistema. Empregando a decomposição em valores singulares (SVD, do inglês *Singular Value Decomposition*) em O_i tal como

$$O_i = U_o S_o V_o' = \begin{bmatrix} U_{o,1} & U_{o,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{o,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{o,1}' \\ V_{o,2}' \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

em que $S_{o,1} \in \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{n}}$ é uma submatriz de S_o contendo os valores singulares não nulos de O_i , pode-se extrair

$$\Gamma_i = U_{o,1} S_{o,1}^{1/2}. \quad (2.6)$$

A matriz de observabilidade estendida Γ_i é definida como a composição das matrizes A_M e C_M que se deseja estimar

$$\Gamma_i \triangleq \begin{bmatrix} C_M \\ C_M A_M \\ C_M A_M^2 \\ \vdots \\ C_M A_M^{i-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mi \times n}. \quad (2.7)$$

As matrizes \hat{A}_M e \hat{C}_M podem ser obtidas utilizando a notação do *Matrix Laboratory* (MATLAB®) como

$$\hat{C}_M = \Gamma_i(1 : m, :), \quad (2.8)$$

$$\hat{A}_M = \Gamma_i(1 : (i-1)m, :)\dagger \Gamma_i(l+1 : im, :), \quad (2.9)$$

em que o símbolo \dagger representa a pseudoinversa da matriz Γ_i .

Para estimar as matrizes B_M e D_M , considere

$$y_k = \hat{C}_M \hat{A}_M^k x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} \hat{C}_M \hat{A}_M^{k-\tau-1} B_M u_\tau + D_M u_k + \nu_k, \quad (2.10)$$

que pode ser reescrita como

$$y_k = \hat{C}_M \hat{A}_M^k x_0 + \left(\sum_{\tau=0}^{k-1} u'_\tau \otimes \hat{C}_M \hat{A}_M^{k-\tau-1} \right) \text{vec}(B_M) + (u'_k \otimes I_l) \text{vec}(D_M) + \nu_k, \quad (2.11)$$

em que \otimes denota o produto de Kronecker e vec é um operador que empilha as colunas da matriz contida em seu argumento.

A fim de estimar B_M , D_M e x_0 , define-se

$$\theta \triangleq \begin{bmatrix} x_0 \\ \text{vec}(B_M) \\ \text{vec}(D_M) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Portanto

$$\phi'_{M,k} = \left[\hat{C}_M \hat{A}_M^k \quad \left(\sum_{\tau=0}^{k-1} u'_\tau \otimes \hat{C}_M \hat{A}_M^{k-\tau-1} \right) \quad (u'_k \otimes I_l) \right], \quad (2.13)$$

em que I_l é uma identidade de ordem l . O vetor θ pode ser estimado por

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \|y_k - \phi'_{M,k} \theta\|_2^2. \quad (2.14)$$

A solução de (2.14) é o valor estimado $\hat{\theta}$ que minimiza a diferença entre a saída y_k e sua estimativa $\hat{y}_k = \phi'_{M,k} \hat{\theta}$, possibilitando obter as matrizes \hat{B}_M , \hat{D}_M e \hat{x}_0 . Para mais detalhes, ver Ricco (2016) Seção 3.1.

2.4 Identificação de Modelos de Blocos Interconectados

As metodologias de identificação em uma e em duas etapas que serão apresentadas a seguir podem ser utilizadas nos modelos de Hammerstein ou de Wiener e para isso algumas modificações são necessárias. Dessa forma, será descrito um algoritmo para cada um dos modelos. Algumas características que podem ser levadas em consideração na escolha de qual algoritmo utilizar para um determinado modelo são: a identificação em uma etapa somente necessita de um ensaio dinâmico na planta, que apresenta-se como uma vantagem prática, uma vez que quanto menos tempo a planta ficar parada para testes mais atrativo é o teste do ponto de vista financeiro. Por outro lado, em virtude do ensaio dinâmico ser utilizado para capturar as características não lineares, ele deve ser realizado em uma faixa de operação ampla que pode não ser possível em todas plantas por suas próprias limitações. A identificação em duas etapas necessita de duas etapas e, portanto, mais recursos para ser feita. Porém, o teste da curva estática pode ser dispensado caso o fabricante disponibilize esses parâmetros restando o teste dinâmico que, nesse caso, pode ser feito em uma faixa reduzida. Com relação ao desempenho, no melhor do conhecimento dos autores, em testes realizados em alguns sistemas teóricos a identificação em duas etapas produz índices de desempenho superiores.

2.4.1 Identificação em Uma Etapa (GÓMEZ; BAEYENS, 2005)

A identificação em uma etapa é um algoritmo que permite estimar as matrizes dos modelos de blocos interconectados empregando dados de apenas um ensaio dinâmico. Para isso, podem ser utilizados quaisquer algoritmos de identificação baseados em métodos de subespaços adequado como o *Numerical algorithms for Subspace State-Space System Identification* (N4SID) ou *Canonical Variate Analysis* (CVA) (GÓMEZ; BAEYENS, 2005). Uma outra possibilidade é o MOESP, descrito na Seção 2.3, proposto por Verhaegen e Dewilde (1992) para estimar modelos em espaço de estados.

2.4.1.1 Modelo de Hammerstein

O MOESP apresentado na Seção 2.3 é uma abordagem desenvolvida de forma algébrica e produz matrizes das quais é possível desassociar os parâmetros da parte não linear e as matrizes da parte linear por meio da técnica SVD. Para isso, segundo Jalaliddini e Kearney (2011), é necessário definir uma estrutura para a entrada do sistema que o transforme de uma entrada e múltiplas saídas (SIMO, do inglês *Single Input Multiple Output*) para múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês *Multiple Input Multiple Output*). No contexto deste trabalho, a estrutura foi escolhida como definida em (2.1).

Substituindo (2.1) em (2.2) e considerando $i_0 = 1$, por ser identificação em uma

etapa, obtém-se a estrutura **MIMO** em espaço de estados

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B} \sum_{i=1}^r \hat{\alpha}_{H,i} \hat{u}_k^i + w_k, \\ \hat{y}_k &= \hat{C}\hat{x}_k + \hat{D} \sum_{i=1}^r \hat{\alpha}_{H,i} \hat{u}_k^i + \nu_k,\end{aligned}\tag{2.15}$$

que pode ser reescrita de maneira compacta como

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}U_k + w_k, \\ \hat{y}_k &= \hat{C}\hat{x}_k + \hat{D}U_k + \nu_k,\end{aligned}\tag{2.16}$$

desde que seja definida $\hat{\hat{B}} \triangleq \hat{B}\hat{\alpha}'_H$, $\hat{\hat{D}} \triangleq \hat{D}\hat{\alpha}'_H$ e

$$U_k \triangleq \begin{bmatrix} u_k & u_k^2 & \dots & u_k^r \end{bmatrix}'.\tag{2.17}$$

Note que, uma vez que os ensaios de identificação são feitos em malha aberta, $u_k = \hat{u}_k$, pois o mesmo sinal inserido na planta é utilizado como entrada do modelo, assim, é adequado trocar os sinais \hat{u}_k em (2.15) por u_k . Por conseguinte, é possível constatar que existe coerência entre (2.15) e (2.16).

Segundo [Gómez e Baeyens \(2005\)](#), o sistema (2.16) pode ser considerado uma representação em espaço de estados de um sistema Linear e Invariante no Tempo (**LIT**) tal que U_k é uma versão modificada da sequência de entrada original u_k por meio da transformação mostrada em (2.17).

A representação (2.15) não é única e, para resolver esse problema, [Bai \(2010\)](#) propõe duas restrições aos parâmetros do modelo. A primeira delas é normalizar os parâmetros de forma que $\|\hat{\alpha}_H\|_2 = 1$ e a segunda é limitar o coeficiente relacionado ao grau mais elevado a valores positivos $\hat{\alpha}_{H,1} \geq 0$.

Um vez que o objetivo é representar matematicamente um sistema não linear por meio da estrutura mostrada em (2.15), pode-se entender que o processo consiste em encontrar as estimativas \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} e $\hat{\alpha}_H$ das matrizes A , B , C , D e α_H , que descrevem a planta a ser identificada.

Ao realizar um ensaio dinâmico na planta não linear, coletam-se os dados de entrada e saída resultantes. Em seguida a sequência u_k é transformada por meio de (2.17) de maneira que obtém-se U_k . A entrada transformada U_k e a saída y_k são aplicadas no algoritmo **MOESP-PO** a fim de obter as estimativas das matrizes da planta \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} , em que, $\hat{\hat{B}} \triangleq \hat{B}\hat{\alpha}'_H$ e $\hat{\hat{D}} \triangleq \hat{D}\hat{\alpha}'_H$, tal como foi definido para o modelo de Hammerstein. As matrizes retornadas pelo **MOESP-PO** são nomeadas de $\check{\hat{A}}$, $\check{\hat{B}}$, $\check{\hat{C}}$ e $\check{\hat{D}}$, visto que devem sofrer transformações para que se tornem \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} e $\hat{\alpha}_H$. As transformações serão vistas a seguir e, destaca-se que como são aplicadas nas matrizes obtidas como resultado do **MOESP-PO** elas não afetam o desenvolvimento feito na Seção 2.3.

Neste ponto do processo de identificação, a menos de uma transformação de similaridade desconhecida T_{ce} , as matrizes A e C têm suas estimativas computadas. Após definir

$$\hat{\Theta}_{BD} \triangleq \begin{bmatrix} \check{\check{B}}' \\ \check{\check{D}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{B} \\ \check{D} \end{bmatrix} \hat{\alpha}'_H, \quad (2.18)$$

torna-se possível computar as estimativas \check{B}, \check{D} e $\hat{\alpha}_H$ por meio da **SVD** como mostra o Teorema 2.1 (GÓMEZ; BAEYENS, 2005).

Teorema 2.1 (GÓMEZ; BAEYENS, 2005) Tome $\hat{\Theta}_{BD} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times rp}$ com $\text{rank } s > p$ e a **SVD** ‘economy size’ — que é encontrada removendo as linhas e colunas de zeros da **SVD** ‘full size’ — dada por

$$\hat{\Theta}_{BD} = \Upsilon_s \Sigma_s \Phi'_s = \sum_{j=1}^s \sigma_j v_j \phi'_j, \quad (2.19)$$

em que, Σ_s é uma matriz diagonal contendo os s primeiros valores singulares ($\sigma_j, j = 1, \dots, s$) não nulos de $\hat{\Theta}_{BD}$ em ordem decrescente e $\Upsilon_s = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_s] \in \mathbb{R}^{(n+m) \times s}$ e $\Phi_s = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_s] \in \mathbb{R}^{rp \times s}$ são formadas pelas primeiras s colunas das matrizes unitárias $\Upsilon \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ e $\Phi \in \mathbb{R}^{rp \times rp}$ resultantes da **SVD** ‘full size’ de $\hat{\Theta}_{BD}$,

$$\hat{\Theta}_{BD} = \Upsilon \Sigma \Phi', \quad (2.20)$$

respectivamente. As matrizes $\check{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\check{D} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ e $\hat{\alpha}_H \in \mathbb{R}^{rp \times p}$ que minimizam a norma

$$\left\| \hat{\Theta}_{BD} - \begin{bmatrix} \check{B} \\ \check{D} \end{bmatrix} \hat{\alpha}'_H \right\|_2^2,$$

são dadas por

$$\left(\begin{bmatrix} \check{B} \\ \check{D} \end{bmatrix}, \hat{\alpha}_H \right) = (\Upsilon_1 \Sigma_1, \Phi_1), \quad (2.21)$$

em que $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$, $\Upsilon_1 \in \mathbb{R}^{(n+m) \times p}$ e $\Phi_1 \in \mathbb{R}^{rp \times p}$ são encontradas pela partição da **SVD** ‘economy size’, mostrada em (2.19) da seguinte maneira

$$\hat{\Theta}_{BD} = [\Upsilon_1 \ \Upsilon_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi'_1 \\ \Phi'_2 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Ao fim desse processo, obtém-se um modelo da planta não linear tal como o apresentado na Figura 3. Considerando uma planta na qual sabe-se que as saídas medidas são seus próprios estados, a matriz C de saída deve ser uma identidade, de forma que possibilite a caracterização dos estados na saída do processo. Dessa maneira, não é necessário utilizar um observador de estados como destacado na Observação 2.2. Ademais, considera-se que o sistema seja estritamente próprio, ou seja, que a matriz de transmissão direta D seja nula. Dessa maneira, nota-se por uma visão elemento a elemento em (2.2), que $\hat{x}_k = \hat{y}_k$.

Figura 6 – Esquema do algoritmo de identificação em uma etapa para o modelo de Hammerstein.



A partir da matriz $C = I_n$, em que I_n é uma identidade de ordem n , a transformação de similaridade em espaço de estados T_{ee} é definida por

$$T_{ee} \triangleq \check{C}^\dagger C. \quad (2.23)$$

Enfim, a transformação (2.23) é utilizada para encontrar as matrizes \hat{A}, \hat{B} e \hat{C} que aproximam não só as matrizes A, B e C que caracterizam a planta, como também os estados, permitindo que o sinal de controle da planta e do modelo tenham as trajetórias mais próximas uma da outra. Ao aplicar a transformação, obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{A} &= T_{ee}^{-1} \check{A} T_{ee}, \\ \hat{B} &= T_{ee}^{-1} \check{B}, \\ \hat{C} &= \check{C} T_{ee}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Para validar o modelo de maneira quantitativa, pode-se utilizar os índices de desempenho raiz quadrada do erro médio quadrático (RMSE, do inglês *Root Mean Square Error*) e variância entre dois sinais (VAF, do inglês *Variance Accounted For*), ver Verhaegen e Verdult (2007) e Ricco (2012).

A Figura 6 apresenta um esquema que resume os passos do algoritmo de identificação. À esquerda se encontra uma indicação da principal ação realizada no passo e à esquerda o resultado obtido. Os passos são detalhados a seguir e elucidam o procedimento para obtenção de modelos de Hammerstein por meio dos métodos de subespaços (GÓMEZ; BAEYENS, 2005):

- **Passo 1:** Aplicar um sinal persistentemente excitante u_k , por exemplo um sinal binário pseudoaleatório modulado (PRBSM, do inglês *Pseudo Random Binary Signal Modulated*) com amplitude entre Q_{\min} e Q_{\max} e quantidade de iterações entre

mudanças de patamares M_d , na entrada da planta, obtendo o vetor de saída medida y_k também pertencente à planta.

- **Passo 2:** Aplicar a transformação (2.17) à sequência de entrada u_k , obtendo uma matriz de entradas U_k .
- **Passo 3:** Encontrar as matrizes $(\check{A}, \check{B}, \check{C}, \check{D})$, que são estimativas das matrizes $(A, \tilde{B}, C, \tilde{D})$, por meio do algoritmo **MOESP-PO** aplicado a U_k e y_k .
- **Passo 4:** Obter a matriz $\hat{\Theta}_{BD}$, utilizando \check{B} e \check{D} conforme (2.18) e aplicar nela a **SVD** ‘*economy size*’, obtendo Υ_1, Σ_1 e Φ_1 descrita em (2.22).
- **Passo 5:** Computar \check{B}, \check{D} e $\hat{\alpha}_H$ por meio de Υ_1, Σ_1 e Φ_1 como mostra o Teorema 2.1.
- **Passo 6:** Encontrar a transformação de similaridade T_{ec} e aplicá-la no sistema identificado de acordo com (2.24).
- **Passo 7:** Validar os modelos com relação à curva estática e à dinâmica linear estimadas.

Observação 2.2 O **Passo 6** tanto no caso de Hammerstein, na Subseção 2.4.1.1, quanto no de Wiener, na Subseção 2.4.1.2, evidenciam os estados na saída do modelo, suprimindo a necessidade da implementação de um observador de estados para o emprego de controladores por realimentação de estados.

2.4.1.2 Modelo de Wiener

De forma similar ao que foi feito no caso de Hammerstein, para possibilitar a identificação de uma planta na estrutura de Wiener, é necessário transformar o modelo para que leve em consideração, em sua saída, as características apresentadas pela função não linear. Para o modelo de Hammerstein, esse passo se resumia em transformar o sistema de **SIMO** para **MIMO**. Porém no caso de Wiener, como a saída é considerada múltipla, não faz sentido dizer que uma transformação levará o sistema de **SIMO** para **SIMO**. Em lugar disso, assume-se que a curva não linear $f(\cdot)$ é invertível e sua inversa é dada por

$$f_*^{-1}(\hat{y}_k) = \sum_{i=1}^r \hat{\alpha}_{W,i} \hat{y}_k^i, \quad (2.25)$$

em que \hat{y}_k^i configura a função polinomial de ordem r a ser considerada, $\hat{\alpha}_W$ os parâmetros a serem estimados e o $*$ pode indicar, tanto paramétrica (p) ou não paramétrica (np). Assim, de acordo com a proposta de Gómez e Baeyens (2005) pode-se reescrever a equação de saída do modelo linear como

$$\hat{\alpha}_W \hat{Y}_k \triangleq \sum_{i=1}^r \hat{\alpha}_{W,i} \hat{y}_k^i = \hat{C} \hat{x}_k + \hat{D} \hat{u}_k + \nu_k, \quad (2.26)$$

em que

$$\hat{Y}_k \triangleq [(\hat{y}_k^1)' \quad (\hat{y}_k^2)' \quad \dots \quad (\hat{y}_k^r)']'. \quad (2.27)$$

Dessa forma, (2.3) também pode ser reescrita

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}\hat{u}_k + w_k, \\ \hat{Y}_k &= \hat{C}\hat{x}_k + \hat{D}\hat{u}_k + \tilde{v}_k, \end{aligned} \quad (2.28)$$

em que $\hat{C} \triangleq \hat{\alpha}_W^\dagger \hat{C}$, $\hat{D} \triangleq \hat{\alpha}_W^\dagger \hat{D}$ e $\tilde{v}_k \triangleq \hat{\alpha}_W^\dagger \nu_k$.

Com esse equacionamento, torna-se possível identificar um modelo de blocos interconectados na estrutura de Wiener que represente o processo não linear, sendo necessário, para tanto, realizar um ensaio dinâmico na planta coletando a entrada u_k e a saída y_k . Os dados y_k transformados em \hat{Y}_k por (2.27) e u_k são usados para estimar as matrizes \check{A} , \check{B} , \check{C} e \check{D} por intermédio do MOESP-PO. As estimativas \check{A} e \check{B} estão a uma transformação de similaridade T_{ee} de \hat{A} e \hat{B} . De forma semelhante ao que foi feito no caso de Hammerstein, ao definir as matrizes

$$\hat{\Theta}_{CD} \triangleq [\check{C}' \quad \check{D}'] = \hat{\alpha}'_W [\check{C} \quad \check{D}], \quad (2.29)$$

torna-se possível computar as estimativas \check{C} , \check{D} e $\hat{\alpha}_W$ por meio da SVD da matriz $\hat{\Theta}_{CD}$. Para isso, uma reformulação *mutatis mutandi* do Teorema 2.1 pode ser feita (GÓMEZ; BAEYENS, 2005).

Figura 7 – Esquema do algoritmo de identificação em uma etapa do modelo de Wiener.



As considerações de que $\|\hat{\alpha}_W\|_2 = 1$ e $\hat{\alpha}_W \geq 1$ e as feitas para a transformação de similaridade T_{ee} definida em (2.23) também são utilizadas para o caso de Wiener, assim como os índices de desempenho. Com efeito, os seguintes passos, resumidos no esquema da Figura 7 podem ser utilizados para a obtenção de modelos de Wiener por meio dos métodos de subespaços (GÓMEZ; BAEYENS, 2005):

- **Passo 1:** Aplicar um sinal persistentemente excitante conhecido u_k na entrada da planta e medir a saída y_k .

- **Passo 2:** Aplicar a transformação (2.27) à sequência de saída medida y_k , obtendo uma matriz de saídas Y_k .
- **Passo 3:** Empregar u_k e Y_k para estimar, por meio do algoritmo MOESP-PO, as matrizes $(\check{A}, \check{B}, \check{C}, \check{D})$.
- **Passo 4:** Obter a matriz $\hat{\Theta}_{CD}$ apresentada em (2.29) empregando \check{C} e \check{D} e aplicar nela a SVD ‘*economy size*’, obtendo Υ_1, Σ_1 e Φ_1 descrita em (2.22) com as devidas alterações.
- **Passo 5:** Computar \check{C}, \check{D} e $\hat{\alpha}_w$ por meio de

$$\left(\begin{bmatrix} \check{C} & \check{D} \end{bmatrix}, \hat{\alpha}_w \right) = (\Sigma_1 \Phi_1', \Upsilon_1^\dagger). \quad (2.30)$$

- **Passo 6:** Encontrar a transformação T_{ee} e aplicá-la no sistema de acordo com (2.24).
- **Passo 7:** Validar a curva estática e dinâmica linear que compõem o modelo.

2.4.2 Identificação em Duas Etapas (DE PAULA, 2016)

Um sistema não linear pode ser identificado pela metodologia de identificação por subespaços que emprega apenas uma etapa como foi visto na Subseção 2.4.1. Uma alternativa a essa estratégia é descrita no trabalho de de Paula (2016), que apresenta duas etapas.

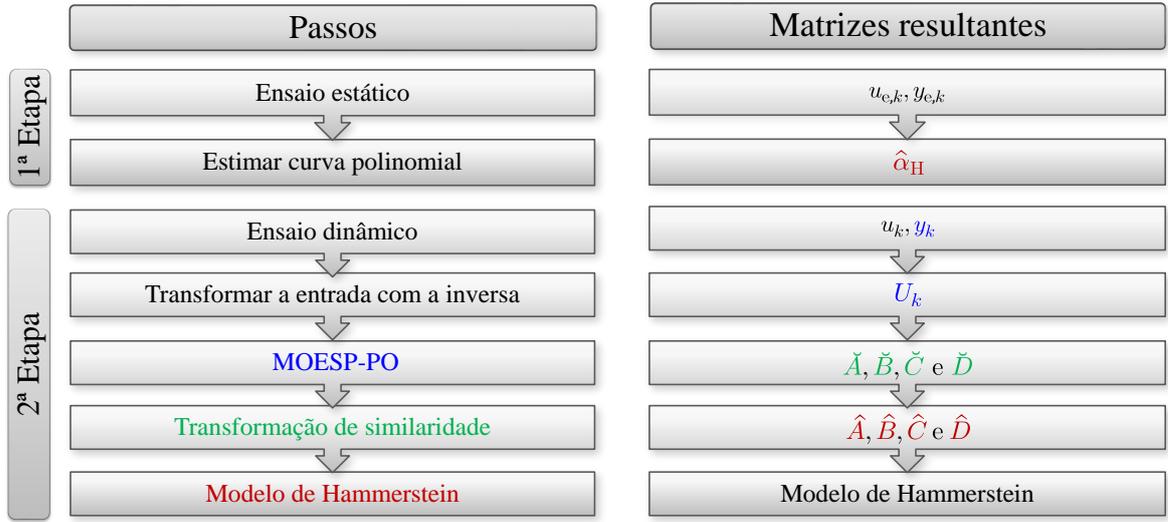
Na metodologia proposta em de Paula (2016), a primeira etapa consiste em estimar os parâmetros da curva não linear por meio de ensaios estáticos com degraus consecutivos ascendentes aplicados à planta. Por outro lado, a segunda etapa resume-se em utilizar a curva estática para estimar a sequência intermediária $\hat{v}_{e,k}$ e, conseqüentemente, poder identificar o bloco dinâmico linear.

2.4.2.1 Modelo de Hammerstein

Na identificação do modelo de Hammerstein, uma vez que a sequência intermediária não é conhecida, os ganhos exatos relacionados a cada um dos blocos não podem ser determinadas. Em princípio, conhecendo apenas a entrada e a saída do processo, é possível determinar somente o ganho total do sistema. Segundo de Paula (2016), uma das abordagens para contornar o problema é atribuir um ganho $1/\hat{\lambda}$ para o bloco estático, denominado fator de escala e estimar um modelo modificado em escala.

Suposição 2.1 (DE PAULA, 2016) Escolhendo $\hat{\lambda} = 1$, tem-se que o fator de escala para o modelo é 1. Isso significa que $\hat{v}_k = \hat{y}_k/\hat{\lambda} = \hat{y}_k$.

Figura 8 – Esquema do algoritmo de identificação em duas etapas do modelo de Hammerstein.



A representação para a curva estática não linear e para o bloco dinâmico linear foram definidas na Subseção 2.2.1 e, sendo assim, a escolha é considerada no desenvolvimento mostrado a seguir do algoritmo para a identificação em duas etapas. A Figura 8 apresenta o esquema resumido dos passos que são detalhados a seguir (DE PAULA, 2016):

- **Passo 1:** Determinar as amplitudes mínima E_{\min} e máxima E_{\max} dos sinais de entrada que podem ser aplicadas à planta de forma que excite completamente a não linearidade dela.
- **Passo 2:** Aplicar degraus ascendentes na entrada do sistema variando de E_{\min} até E_{\max} . A entrada pode ser criada por meio da função

$$u_{e,k} = E_{\min} \text{deg}(k) + J_0 \sum_{l=1}^{q_e} \text{deg}(k - lM_e), \quad (2.31)$$

em que $J_0 = (E_{\max} - E_{\min})/q_e$, $\text{deg}(\cdot)$ é a função degrau em tempo discreto, M_e é o tempo necessário para a planta estabilizar e q_e é a quantidade de patamares escolhida. Registrar em seguida a resposta em regime permanente da planta com relação a cada um dos patamares y_{e,lM_e} .

- **Passo 3:** Sabendo que o valor da sequência intermediária em regime permanente pode ser determinada por $\hat{v}_{e,k} = \hat{y}_{e,k}/\hat{\lambda}$, atribuir um valor unitário ao fator de escala de forma que a sequência intermediária $\hat{v}_{e,k}$ corresponda à saída do sistema $\hat{y}_{e,k}$.
- **Passo 4:** Após definir a estrutura, estimar uma curva polinomial na forma de (2.1) que melhor se aproxime aos pontos produzidos pelos valores coletados no **Passo 2**, ou seja, os pontos $\{u_{e,lM_e}, \hat{v}_{e,lM_e}\}$, com $l = 1, \dots, q_e$.

- **Passo 5:** Aplicar um sinal persistentemente excitante na planta, coletando os dados de entrada u_k e saída \hat{y}_k .
- **Passo 6:** Transformar a sequência de entrada u_k coletada no **Passo 5** utilizando a curva não linear estática estimada no **Passo 4** para obter a sequência intermediária \hat{v}_k . Em seguida, empregar a saída da curva não linear estática \hat{v}_k juntamente com a saída do sistema \hat{y}_k coletada no **Passo 5** para identificar o bloco dinâmico linear por meio do **MOESP-PO**. O **MOESP-PO** deve retornar a ordem n do modelo e as matrizes $(\check{A}, \check{B}, \check{C}, \check{D})$ que são estimativas das matrizes $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ a menos de uma transformação de similaridade T_{ee} .
- **Passo 7:** Encontrar a transformação de similaridade T_{ee} ao assumir que a matriz C é uma identidade de ordem n e aplicá-la no sistema de acordo com (2.24).
- **Passo 8:** Validar o modelo tanto para o bloco da curva não linear quanto para o da dinâmica linear.

Observação 2.3 *Assim como na identificação em uma etapa, o **Passo 7** nas Subseções 2.4.2.1 e 2.4.2.2 evidencia os estados na saída do modelo pelos mesmos motivos apresentados na Observação 2.2.*

2.4.2.2 Modelo de Wiener

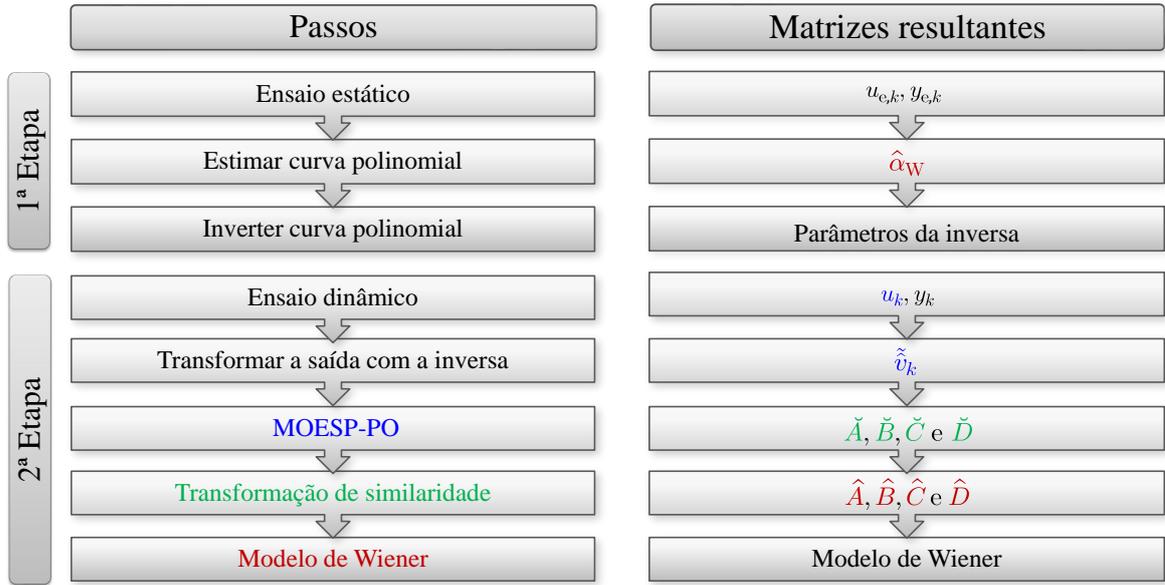
Como discutido para o modelo de Hammerstein, um dos problemas relacionados à identificação dos modelos de Wiener é que o ganho de cada um dos blocos não pode ser estimado, apenas o ganho total do sistema. Para solucionar isso, de Paula (2016) propõe a atribuição de um ganho $\hat{\lambda}$ para a dinâmica do sistema, de maneira que o modelo identificado torna-se modificado em escala. Então, a estrutura identificada é um modelo escalonado do sistema real, porém de forma que os subsistemas em cascata respeitem a relação de ganho entre a entrada e a saída da planta a ser identificada.

Suposição 2.2 (DE PAULA, 2016) *Escolhendo $\hat{\lambda} = 1$, tem-se que o fator de escala para o modelo dinâmico é 1. Isso significa que os sinais intermediários $\hat{v}_{e,k}$ são entendidos como equivalentes aos sinais de teste inseridos na entrada $u_{e,k}$, possibilitando a identificação da curva estática.*

De forma similar ao desenvolvimento para o caso de Hammerstein, segue o algoritmo para a identificação em duas etapas da estrutura de Wiener que está esquematizado na Figura 9 (DE PAULA, 2016):

- **Passo 1:** Determinar as amplitudes mínima E_{\min} e máxima E_{\max} dos sinais de entrada que podem ser aplicados ao sistema de forma que excite completamente a não linearidade dele.

Figura 9 – Esquema do algoritmo de identificação em duas etapas do modelo de Wiener.



- **Passo 2:** Aplicar degraus ascendentes na entrada do sistema variando de E_{\min} até E_{\max} . A entrada pode ser criada por meio da função

$$u_{e,k} = E_{\min} \text{deg}(k) + J_0 \sum_{l=1}^{q_e} \text{deg}(k - lM_e), \quad (2.32)$$

em que o subíndice “e” indica que os sinais pertencem ao ensaio estático, $J_0 = (E_{\max} - E_{\min})/q_e$, $\text{deg}(\cdot)$ é a função degrau em tempo discreto, M_e é o maior tempo necessário para o sistema estabilizar e q_e é a quantidade de patamares escolhida. Em seguida, registrar a resposta em regime permanente do sistema y_{e,lM_e} , ou seja, a saída do sistema obtida no ensaio estático a cada lM_e instantes de tempo.

- **Passo 3:** Sabendo que o valor da sequência intermediária em regime permanente pode ser determinada por $\hat{v}_{e,k} = \hat{\lambda} [E_{\min} + (l - 1)J_0]$, atribuir um valor unitário ao fator de escala por simplicidade.
- **Passo 4:** Estimar uma curva polinomial e sua inversa que melhor se aproxime dos pontos produzidos pelos valores coletados no **Passo 2** e **Passo 3**, ou seja, os pontos $\{\hat{v}_{e,lM_e}, y_{e,lM_e}\}$, com $l = 1, \dots, q_e$.
- **Passo 5:** Aplicar um sinal de teste persistentemente excitante conhecido u_k , por exemplo, **PRBSM**, na entrada do sistema, obtendo o vetor de saída y_k .
- **Passo 6:** Aplicar a sequência de saída y_k na inversa da curva não linear estática estimada no **Passo 4** coletando a saída \tilde{v}_k . Utilizar u_k e \tilde{v}_k no **MOESP-PO** a fim de extrair a ordem n do sistema, bem como as matrizes $(\check{A}, \check{B}, \check{C}, \check{D})$ que são estimativas das matrizes $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ a menos de uma transformação de similaridade T_{ee} .

- **Passo 7:** Encontrar a transformação de similaridade T_{ee} ao assumir que a matriz C é uma identidade de ordem n e aplicá-la no sistema de acordo com (2.24).
- **Passo 8:** Validar as estimativas da curva estática e do bloco dinâmico linear da estrutura de Wiener.

2.4.3 Escolha da Metodologia de Identificação

As metodologias de identificação em uma e duas etapas podem ser consultadas de forma mais aprofundada em [Gómez e Baeyens \(2005\)](#) e [de Paula \(2016\)](#), respectivamente, além das referências neles contidas. Como foi descrito o passo a passo de cada uma, nesta subseção, também serão listadas algumas vantagens e desvantagens para auxiliar na decisão de qual estratégia pode ser melhor para realizar a identificação de um determinado sistema.

A metodologia em uma etapa pode ocasionar a redução de custos, uma vez que necessita somente de um ensaio na planta. Ademais, para plantas que não contam com a possibilidade de ficar paradas para ensaio por longos períodos, esta metodologia apresenta-se como vantajosa se comparada à de duas etapas. Por outro lado, ao realizar esse teste o sinal de entrada deve ser variado pela maior faixa possível, dentro dos limites de operação da planta. O problema pode ser essa variação, que pode representar uma situação de “stress” para a planta caso ela não tenha sido preparada para operar com tais variações.

Como foi reportado em [Santos, Braga e Ricco \(2021\)](#) a metodologia em duas etapas pode produzir resultados mais confiáveis uma vez que os dados da curva estática podem ser considerados como uma informação auxiliar. A curva pode ser obtida de duas maneiras, uma delas é por meio de um ensaio na planta, descrito do **Passo 1** ao **Passo 4** na Subseção 2.4.2 para o modelo de Hammerstein e de Wiener. A outra maneira é por meio da folha de dados, caso o fabricante da planta disponibilize qual a relação dos ganhos estáticos. Para a identificação em duas etapas o tempo de parada da planta pode se tornar elevado caso exista a necessidade de realizar os dois ensaios, porém a vantagem é que as amplitudes dos degraus aplicados aumentam de forma gradual e o ensaio dinâmico não necessariamente precisa excursionar por toda faixa de operação, pois o objetivo é captar a dinâmica e não mais os ganhos estáticos que já estão determinados nesse ponto da identificação.

3 Linearização dos Modelos de Blocos Interconectados

3.1 Introdução

Para controlar sistemas não lineares, a maioria das estratégias aplicadas consistem em linearizar o modelo matemático em torno de um ponto de operação e aplicar o controle nessa pequena região considerada linear. A metodologia de inversão da não linearidade estática proposta em [Rayouf, Ghorbel e Braiek \(2018\)](#) é uma aproximação polinomial da inversa da curva não linear estática composta de parâmetros fixos, dependentes apenas dos termos do polinômio não linear identificado. Ela é nomeada inversa por regiões de operação, por ser limitada a faixas mais estreitas de operação quanto maior for a discrepância entre o termo de maior grau e os demais termos do polinômio não linear. Portanto, para alguns casos em que a não linearidade se aproxima de uma reta, quase linear, ela funciona por faixas amplas o suficiente para realizar controle. Entretanto para outros casos, por exemplo, com não linearidades puramente quadráticas, a região se torna estreita e influencia negativamente no controle, como evidenciado em [Santos, Braga e Ricco \(2021\)](#).

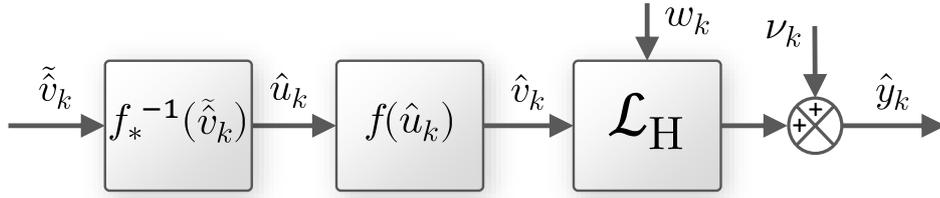
Em alternativa à metodologia de inversão por regiões de operação, este capítulo detalha duas metodologias para inversão da curva não linear estática identificada. Em um primeiro momento apresentam-se dois esquemas que ajudam a compreender o posicionamento das inversas nos diagramas em malha aberta dos modelos de Hammerstein e Wiener, respectivamente. Em seguida, na Seção 3.3, apresenta-se a metodologia de linearização paramétrica, bem como um exemplo simples que ajuda a compreender a maneira de computar a inversa. Por fim, na Seção 3.4, são relatados os passos para realizar a inversão não paramétrica e também um exemplo para melhor compreensão da técnica.

3.2 Esquemas de Linearização

A proposta deste trabalho é linearizar o sistema de forma simplificada em uma faixa ampla, invertendo a função não linear estática para cancelar os efeitos da não linearidade no modelo, como está esquematizado na Figura 10 para o caso de Hammerstein e na Figura 11 para o de Wiener. Em ambas, \tilde{v}_k é uma estimativa aproximada de \hat{v}_k . Porém, para ilustrar melhor, os passos da linearização paramétrica serão descritos em função das variáveis do modelo de Hammerstein e os da linearização não paramétrica em termos das variáveis do modelo de Wiener.

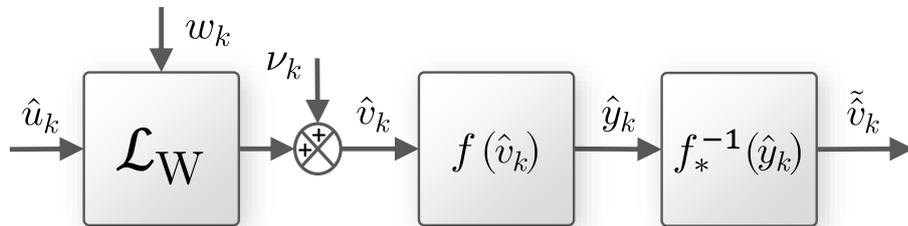
Uma vez que os ganhos não lineares tenham sido eliminados por meio da associação em cascata da função não linear estática e sua inversa, o modelo de blocos interconectados

Figura 10 – Modelo de Hammerstein linearizado em malha aberta.



pode ser visto como um sistema LIT com pequenas perturbações causadas pelas regiões de imprecisão da inversão, sobretudo nos limites de validade da inversa.

Figura 11 – Modelo linearizado de Wiener em malha aberta.



Para possibilitar a aplicação das técnicas de linearização precisa-se apenas dos parâmetros da estrutura escolhida para a curva não linear estática que foi apresentada em (2.1) e (2.4). Assim, qualquer uma das técnicas podem ser aplicadas, tanto para o modelo de Hammerstein quanto para o de Wiener. Nesse sentido, nas Figuras 10 e 11, o símbolo $*$ em $f_*^{-1}(\cdot)$ pode ser substituído por (p) caso a inversão seja paramétrica e por (np) caso seja não paramétrica.

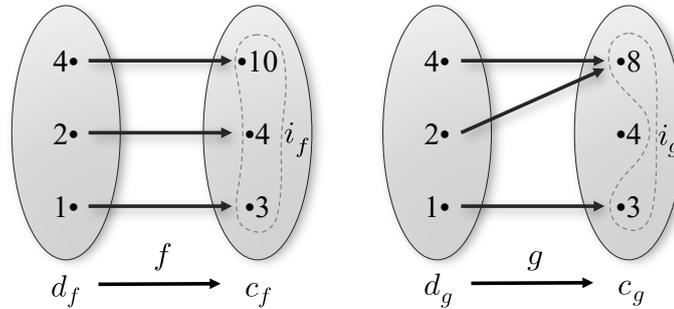
3.3 Técnica de Linearização Paramétrica

A inversa proposta por Rayouf, Ghorbel e Braiek (2018) tem sua representação escolhida como definida em (2.1) e em (2.4), ou seja, polinomial. Ela permite a inversão de qualquer não linearidade com essa representação. Porém, quanto mais forte a não linearidade, mais restrita é a região onde essa inversa funciona. Um outro tipo de inversão que pode ser considerado é a paramétrica que, apesar de envolver cálculos mais complexos, produz um resultado mais preciso da inversão, funcionando para uma faixa mais ampla, que dependerá da quantidade de algarismos significativos considerados.

O problema é que pelo caminho algébrico nem todas as funções possuem inversa, isso ocorre quando a função é não injetora. Por exemplo, ao comparar duas funções f e g cujo diagrama de flechas está na Figura 12, observa-se que f nunca assume duas vezes ou mais o mesmo valor (duas entradas quaisquer em d_f têm saídas diferentes), enquanto g assume o mesmo valor duas vezes (2 e 4 têm a mesma saída, 8) que em notação matemática pode ser escrito como $g(2) = g(4)$. Para que uma função f seja injetora, tem-se que

$f(\hat{u}_{k,1}) \neq f(\hat{u}_{k,2})$ sempre que $\hat{u}_{k,1} \neq \hat{u}_{k,2}$. E, portanto, havendo ciência desse conceito, pode-se definir a inversa de funções (STEWART, 2009).

Figura 12 – Diagrama de flechas em que f é uma função injetora e g não é injetora. Para a função f , d_f representa o domínio, c_f o contradomínio e i_f a imagem. A função g segue o mesmo padrão nos nomes dessas variáveis.

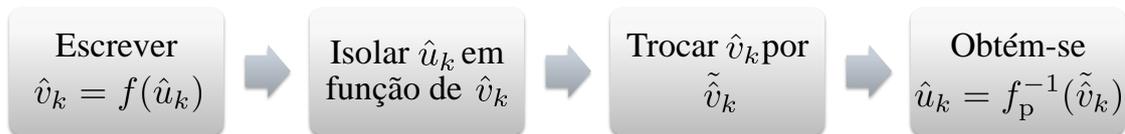


Definição 3.1 *Seja f uma função injetora com domínio d_f e imagem i_f . Então, a sua função inversa f_p^{-1} tem domínio i_f e imagem d_f e é definida por*

$$f_p^{-1}(\hat{v}_k) = \hat{u}_k \iff f(\hat{u}_k) = \hat{v}_k,$$

para todo \hat{v}_k em i_f .

Figura 13 – Diagrama de linearização paramétrica.



A função inversa pode ser encontrada para funções injetoras, como esquematizado na Figura 13, por meio dos seguintes passos segundo Stewart (2009):

- **Passo 1:** Escrever $\hat{v}_k = f(\hat{u}_k)$.
- **Passo 2:** Isolar \hat{u}_k na equação do **Passo 2**, escrevendo-o, se possível, em termos de \hat{v}_k .
- **Passo 3:** Trocar \hat{v}_k por \tilde{v}_k a fim de expressar o resultado como uma função de \tilde{v}_k . Portanto, a equação resultante é $\hat{u}_k = f_p^{-1}(\tilde{v}_k)$.

Também é possível aplicar a metodologia para funções que sejam não injetoras. Para isso, basta considerar nos cálculos da inversa apenas os limites em que ela é considerada injetora. Um exemplo pode esclarecer os limites para funções que sejam não injetoras.

Exemplo 3.1 Tome a função $\hat{v}_k = \hat{u}_k^2$. Se $\hat{u}_k \in \mathbb{R}$, a função é não injetora, uma vez que $\hat{v}_{k,0} = (\hat{u}_{k,0})^2 = (-\hat{u}_{k,0})^2$. Porém restringindo o domínio a $\hat{u}_k \in \mathbb{R}_+$, a função se torna injetora e os passos do algoritmo da inversa paramétrica podem ser aplicados. Nesse caso, obtém-se $\hat{u}_k = \sqrt{\hat{v}_k}$, no **Passo 2** e $\hat{u}_k = \sqrt{\tilde{v}_k}$, no **Passo 3**.

De forma similar, pode-se obter a inversa relativa à parte negativa restringindo o domínio a $\hat{u}_k \in \mathbb{R}_-$, o que produz $\hat{u}_k = -\sqrt{\hat{v}_k}$, no **Passo 2** e, $\hat{u}_k = -\sqrt{\tilde{v}_k}$, no **Passo 3**. ■

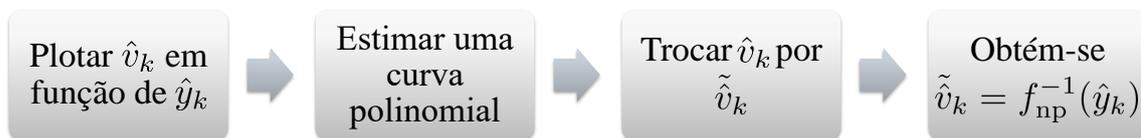
3.4 Técnica de Linearização não Paramétrica

O processo de obtenção da inversa paramétrica pode ser funcional para qualquer faixa, desde que se tenha disponível a quantidade de casas decimais necessárias. Porém, para sistemas em que a curva não linear polinomial é de ordem mais elevada, por exemplo 3 ou acima, pode se tornar trabalhoso obter os parâmetros.

Como alternativa, outra estratégia de inversão será apresentada. Tal estratégia consiste em um método não paramétrico que se fundamenta no fato de que uma inversão eficaz, produz uma curva que é espelhada com relação a uma reta de inclinação unitária, ou seja, da reta $\hat{v} = \hat{y}$.

O **Passo 3** da Subseção 3.3 que consiste em trocar \hat{v}_k e \tilde{v}_k para encontrar a função inversa, também resulta em uma forma de obter o gráfico $f_{\text{np}}^{-1}(\cdot)$ a partir de $f(\cdot)$, porém a troca é feita nos eixos. De acordo com a Figura 12, considere $\hat{v}_{k,0}$ (simplificado pelo nome d_0) um elemento de d_f e $\hat{y}_{k,0}$ (simplificado pelo nome c_0) um elemento de c_f . É possível observar que, uma vez que $f(d_0) = c_0$ se e somente se $f_{\text{np}}^{-1}(c_0) = d_0$, o ponto (d_0, c_0) estará no gráfico de $f(\cdot)$ se e somente se o ponto (c_0, d_0) estiver no gráfico de $f_{\text{np}}^{-1}(\cdot)$. Dessa forma, pode-se concluir que o ponto (c_0, d_0) pode ser obtido ao refletir (d_0, c_0) em torno da reta $\hat{v} = \hat{y}$ (STEWART, 2009).

Figura 14 – Diagrama de linearização não paramétrica.

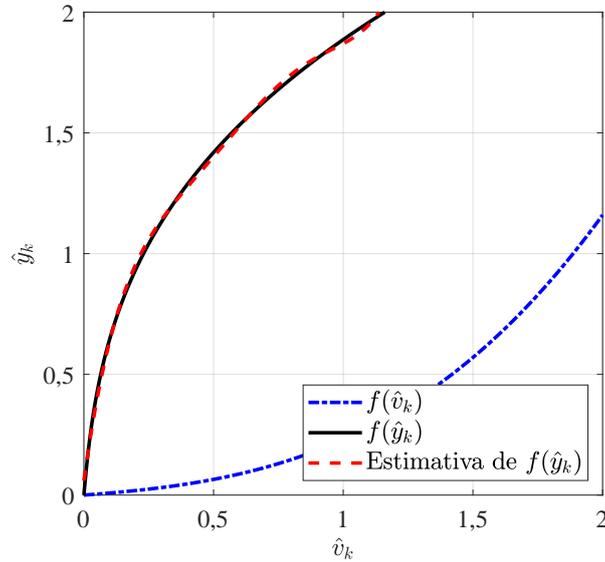


Logo, para obter a inversa utilizando o procedimento não paramétrico pode-se executar os passos esquematizados na Figura 14 e descritos a seguir:

- **Passo 1:** Inverter os eixos, plotando \hat{v}_k em função de \hat{y}_k .
- **Passo 2:** Estimar uma curva polinomial que melhor se aproxime ao conjunto de dados do **Passo 1**. No **MATLAB**[®] pode-se utilizar o comando *polyfit*.

- **Passo 3:** Trocar \tilde{v}_k por \hat{v}_k a fim de obter o resultado como função da saída \hat{y}_k , de maneira que obtém-se $\tilde{v}_k = f_{np}^{-1}(\hat{y}_k)$.

Figura 15 – Curva de polinômio de segundo grau e sua inversa paramétrica.



Exemplo 3.2 Considere o polinômio de ordem 3

$$f(\hat{v}_k) = 0,1\hat{v}_k^3 + 0,05\hat{v}_k^2 + 0,08\hat{v}_k, \quad (3.1)$$

apresentado na Figura 15 em azul pontilhado. Ao seguir o **Passo 1** e refletir o conjunto de dados em azul com relação à reta $\hat{v} = \hat{y}$, encontra-se a curva em preto da Figura 15. Em seguida, executando-se o **Passo 2** e **3**, o polinômio

$$\tilde{v}_k = f_{np}^{-1}(\hat{y}_k) = 9,7\hat{y}_k^5 - 31,5\hat{y}_k^4 + 38,6\hat{y}_k^3 - 22,7\hat{y}_k^2 + 7,7\hat{y}_k + 0,1, \quad (3.2)$$

foi estimado por intermédio do comando `polyfit` do **MATLAB**[®]. A curva desse polinômio gerou o traçado em vermelho pontilhado, que é qualitativamente próximo à curva preta. ■

4 Controle dos Modelos de Blocos Interconectados

4.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas as metodologias selecionadas para controlar os modelos de Hammerstein e de Wiener. Em um primeiro momento é desenvolvida uma maneira de considerar a incerteza presente no modelo devido a erros no processo de linearização. Em seguida o sistema encontrado, para o qual se assume estabilidade, é aumentado para seguir referências com erro nulo utilizando o controlador PI. O ganho estabilizante é computado via LMIs considerando a \mathcal{D}_R -estabilidade de forma que o projeto possa ser guiado por critérios de desempenho. Além disso, são apresentadas estratégias para limitação da norma \mathcal{H}_∞ e do sinal de controle, porém, considerando o caso específico em que busca-se apenas estabilização e não o seguimento de referência. Destaca-se que o escopo deste trabalho limita-se a apresentar, por meio de simulações, que estratégias de controle linear podem ser aplicadas para o modelo linearizado, desde que observadas as premissas para um sistema linear e a região de operação.

4.2 Modelagem da Incerteza

Ao estimar os parâmetros de um modelo, busca-se representar matematicamente as informações mais relevantes que o descrevem. Neste mesmo sentido, um controlador projetado com base no modelo matemático deve ser capaz de gerar sinais para estabilizar tanto o próprio modelo como a planta correspondente. Nos casos em que o modelo não consegue representar corretamente o comportamento da planta, ou que sofra variações dos parâmetros, técnicas de controle robusto podem ser utilizadas para que o sistema ainda seja estabilizado mesmo com a presença de incertezas no modelo.

A negligência de determinados dados no processo de identificação pode gerar incertezas. Na curva não linear estática do modelo, pode-se, por exemplo, negligenciar alguns pontos ao aproximá-la por um polinômio de ordem insuficiente. Como consequência, aumenta-se a defasagem entre os sinais produzidos pela curva do modelo e da planta, bem como dos sinais resultantes da inversa calculada com base na mesma curva. Porém, se esses limites forem levados em consideração na modelagem, os erros resultantes não conduzirão à instabilidade, uma vez que o controlador sintetizado para o sistema será robusto a essas variações.

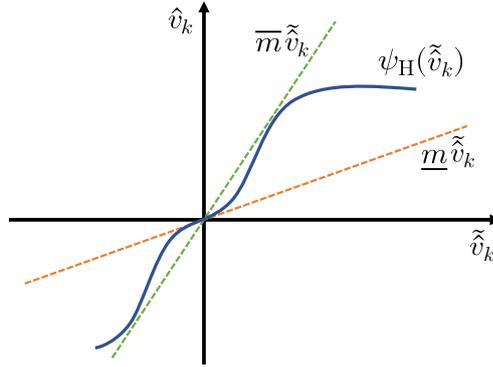
4.2.1 Modelo de Hammerstein

Tome o modelo de Hammerstein linearizado em malha aberta como apresentado na Figura 10. A associação entre a inversa e a curva estática não linear, que estão em sequência, pode ser descrita como uma composição de funções em que $\hat{v}_k = f(f_*^{-1}(\tilde{v}_k))$. Ao tratar a composição como um bloco, pode-se interpretá-lo como uma função $\psi_H(\tilde{v}_k) = f(f_*^{-1}(\tilde{v}_k)) = \hat{v}_k$, tal que sua curva esteja contida em um setor cônico $[\underline{m}\tilde{v}_k, \overline{m}\tilde{v}_k]$. Matematicamente, o setor é descrito por

$$\underline{m} \leq \frac{\psi_H(\tilde{v}_k)}{\tilde{v}_k} \leq \overline{m}, \quad (4.1)$$

e graficamente, como mostra a Figura 16.

Figura 16 – Exemplo de modelagem de um setor cônico para abranger a curva resultante da aplicação de um sinal \tilde{v}_k na inversa e, em seguida, na curva não linear estática do modelo de Hammerstein.



A curva azul na Figura 16 é produzida ao variar \tilde{v}_k em uma faixa de interesse e traçar $\psi_H(\tilde{v}_k)$. Caso a inversa calculada seja exata na faixa de teste, a curva azul será uma reta com inclinação unitária. Mas caso a inversa não seja exata, a curva se desviará da reta ideal e será utilizado o setor cônico composto pelas retas verde e laranja tracejadas para quantificar esse erro. As retas serão definidas por dois pontos. O primeiro deles, comum às duas retas, é o ponto onde a curva azul toca o eixo \hat{v}_k , que é a origem. O segundo será definido de acordo com a inclinação de reta que a escolha produz.

De forma detalhada, para definir a região do cone, seleciona-se no eixo horizontal um limite em que $\psi_H(\tilde{v}_k)$ é aproximadamente igual a \tilde{v}_k , ou seja, um limite em que a linearização funciona com boa aproximação. Caso essa escolha seja maior que a faixa de operação da planta, pode-se utilizar os limites dela. Dentro desses limites, seleciona-se o ponto em $\psi_H(\tilde{v}_k)$ que gere uma reta que passa pela origem com a mínima inclinação possível. Esse valor de inclinação é o \underline{m} que gera a reta laranja. Por outro lado, ao selecionar o ponto com máxima inclinação possível, obtém-se \overline{m} que gera a reta verde.

Considere o sistema dinâmico linear relacionado ao modelo de Hammerstein como dado a seguir

$$\mathcal{L}_H = \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}\hat{v}_k, \\ \hat{y}_k = \hat{C}\hat{x}_k + \hat{D}\hat{v}_k, \end{cases} \quad (4.2)$$

substituindo \hat{v}_k por $\psi_H(\tilde{v}_k)$, que consiste em linearizar o modelo, uma vez que a entrada se torna \tilde{v}_k , resulta em

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}\psi_H(\tilde{v}_k), \\ \hat{y}_k = \hat{C}\hat{x}_k + \hat{D}\psi_H(\tilde{v}_k), \end{cases} \quad (4.3)$$

que pode ser reescrito para explicitar o que foi definido em (4.1), isto é,

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}\frac{\psi_H(\tilde{v}_k)}{\tilde{v}_k}\tilde{v}_k, \\ \hat{y}_k = \hat{C}\hat{x}_k + \hat{D}\frac{\psi_H(\tilde{v}_k)}{\tilde{v}_k}\tilde{v}_k. \end{cases} \quad (4.4)$$

Substituindo os limites (4.1) pode-se modelar a incerteza resultante da inversão sobre as matrizes \hat{B} e \hat{D} da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\min,k+1} &= \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}\underline{m}\tilde{v}_k, & \hat{y}_{\min,k} &= \hat{C}\hat{x}_k + \hat{D}\underline{m}\tilde{v}_k, \\ \hat{x}_{\max,k+1} &= \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}\bar{m}\tilde{v}_k, & \hat{y}_{\max,k} &= \hat{C}\hat{x}_k + \hat{D}\bar{m}\tilde{v}_k, \end{aligned} \quad (4.5)$$

em que $\hat{B}\underline{m}$, $\hat{B}\bar{m}$, $\hat{D}\underline{m}$ e $\hat{D}\bar{m}$ são vértices de um polítopo que contempla as incertezas resultantes da inversão.

A vantagem de se utilizar a abordagem cônica é que ela permite escrever as incertezas associadas à linearização do modelo de blocos interconectados de maneira paramétrica e simples. Por outro lado, ela apresenta a desvantagem de que quanto mais elevado é o ponto de operação maiores são os erros e consequentemente os limites \bar{m} e \underline{m} de forma que possibilita-se o projeto de um controlador cada vez mais conservador.

4.2.2 Modelo de Wiener

No modelo de Hammerstein, a não linearidade é posicionada na entrada, enquanto para o modelo de Wiener ela aparece na saída. Dessa forma, a incerteza estudada deixa de influenciar a matriz de entradas e passa a modificar a matriz de saídas e transmissão direta. As diferenças e equacionamentos serão evidenciados nesta subseção para o modelo de Wiener.

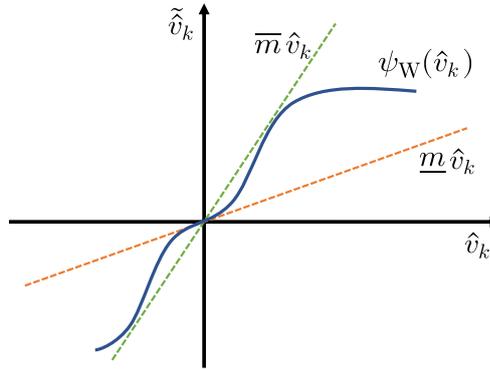
Tome o modelo de Wiener linearizado em malha aberta apresentado na Figura 11. Pode-se interpretar a dupla composta dos blocos não linear estático e sua inversa como apenas um bloco cuja entrada é \hat{v}_k e a saída é \tilde{v}_k . Matematicamente esse bloco é descrito como uma composição das funções $\psi_W(\hat{v}_k) = f_*^{-1}(f(\hat{v}_k)) = \tilde{v}_k$.

Suponha ainda que essa curva está contida em um setor cônico $[\underline{m}\hat{v}_k, \overline{m}\hat{v}_k]$ dado por

$$\underline{m} \leq \frac{\psi_W(\hat{v}_k)}{\hat{v}_k} \leq \overline{m}. \quad (4.6)$$

Graficamente o setor é limitado como apresenta-se na Figura 17. Para selecionar os parâmetros \underline{m} e \overline{m} , segue-se o mesmo processo apresentado para o modelo de Hammerstein, porém troca-se as variáveis \tilde{v}_k e \hat{v}_k uma pela outra.

Figura 17 – Forma de encontrar os parâmetros da modelagem da incerteza relacionada à inversão do modelo de Wiener.



Uma vez entendido como é descrito o setor que envolve os erros gerados pela não linearidade estática e sua inversa, considere o bloco linear de um modelo de Wiener

$$\mathcal{L}_W = \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}\hat{u}_k, \\ \hat{v}_k = \hat{C}\hat{x}_k + \hat{D}\hat{u}_k, \end{cases} \quad (4.7)$$

substituindo a segunda equação de (4.7) em (4.6) encontra-se

$$\underline{m} \leq \frac{\psi_W(\hat{v}_k)}{\hat{C}\hat{x}_k + \hat{D}\hat{u}_k} \leq \overline{m}. \quad (4.8)$$

que pode ser organizada como

$$\hat{C}\underline{m}\hat{x}_k + \hat{D}\underline{m}\hat{u}_k \leq \tilde{v}_k \leq \hat{C}\overline{m}\hat{x}_k + \hat{D}\overline{m}\hat{u}_k. \quad (4.9)$$

Utilizando os limites, pode-se modelar a incerteza resultante da inversão sobre as matrizes \hat{C} e \hat{D} da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\min,k} &= \hat{C}\underline{m}\hat{x}_k + \hat{D}\underline{m}\hat{u}_k, \\ \tilde{v}_{\max,k} &= \hat{C}\overline{m}\hat{x}_k + \hat{D}\overline{m}\hat{u}_k, \end{aligned} \quad (4.10)$$

em que $\hat{C}\underline{m}$, $\hat{C}\overline{m}$, $\hat{D}\underline{m}$ e $\hat{D}\overline{m}$ são vértices de um politopo que abrange as incertezas resultantes da inversão.

Observação 4.1 *A maneira como os parâmetros \underline{m} e \overline{m} são selecionados, adiciona, tanto no modelo de Hammerstein quanto no de Wiener, informações da incerteza relacionada à inversão da curva estática, porém não leva em consideração os erros da identificação da curva não linear. Para exemplificar, suponha que uma planta idealizada na estrutura de Hammerstein possua uma não linearidade polinomial $f(u_k) = u_k + 0,5u_k^2$ e que a identificação tenha resultado no polinômio $f(\hat{u}_k) = 0,9\hat{u}_k + 0,4\hat{u}_k^2$. Considerando que a linearização aplicada seja a paramétrica, o polinômio resultante é $f_p(\tilde{v}_k) = -1,125 + 0,125\sqrt{160\tilde{v}_k + 81}$. A modelagem da incerteza como foi descrita na Subseção 4.2.1 retorna $\underline{m} = \overline{m} = 1$. Porém existem discrepâncias entre a curva da planta e a curva não linear identificada que não foram levadas em conta ainda. Uma possível forma de considerar essa incerteza é ampliar os limites encontrados nessa seção, ou seja, elevando o \overline{m} e diminuindo o \underline{m} . Assim resultando em, por exemplo, $\underline{m} = 0,9$ e $\overline{m} = 1,1$.*

4.3 PI – Estabilidade e Seguimento de Referência

Uma vez que o modelo foi linearizado com êxito o sistema não linear passará a se comportar como linear, assim, técnicas de controle linear tornam-se aplicáveis, facilitando e expandindo as possibilidades de estratégias que podem ser propostas. No contexto das seções que se seguem neste capítulo, um sistema do tipo Hammerstein ou Wiener pode ser tratado como linear sem distinção entre eles, o que permite desenvolver as estratégias de controle sobre o seguinte sistema linear que representa o modelo linearizado de Hammerstein ou de Wiener

$$\mathcal{L} = \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}\hat{u}_k, \\ \hat{y}_k = \hat{C}\hat{x}_k + \hat{D}\hat{u}_k. \end{cases} \quad (4.11)$$

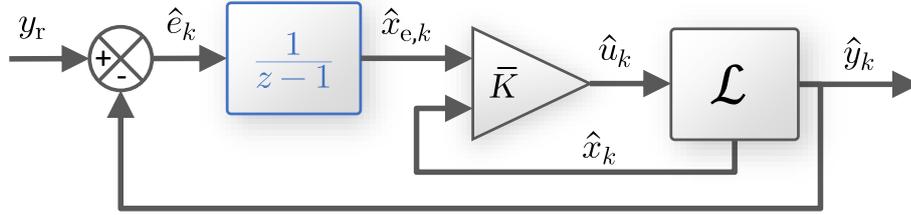
Pretende-se controlar uma planta de forma que ela siga uma dada referência e mantenha o erro de rastreamento nulo. Para isso, será projetado um servossistema do tipo 1 considerando o caso em que o modelo (4.11) pertencente à referida planta não possui integrador. Serão empregados os controladores PID que compõem uma estratégia de controle largamente utilizada em aplicações industriais. Em particular, devido a considerações práticas com a ação derivativa, os controladores PI mantêm uma posição de destaque (CONTZEN, 2017).

Inicialmente uma nova variável de estado com ação integral do erro, como visto em azul na Figura 18, é introduzida com o propósito de aumentar o tipo e zerar o erro de seguimento do modelo (4.11). A nova variável deve ser constante em regime permanente e é definida por

$$\hat{x}_{e,k+1} = \hat{x}_{e,k} + \hat{e}_k = \hat{x}_{e,k} + y_r - \hat{y}_k, \quad (4.12)$$

em que y_r é uma referência constante.

Figura 18 – Inserção da nova variável de estado no modelo linearizado em malha fechada.



Segundo Ogata (2010), agrupando (4.11) e (4.12), encontra-se o seguinte sistema aumentado que incorpora a nova variável de estado

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{x}_{e,k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{A} & 0 \\ -\hat{C} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_{e,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B} \\ -\hat{D} \end{bmatrix} \hat{u}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} y_r, \\ \hat{y}_k &= [\hat{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_{e,k} \end{bmatrix} + \hat{D} \hat{u}_k. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Definindo as matrizes

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &= \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_{e,k} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} & 0 \\ -\hat{C} & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \hat{B} \\ -\hat{D} \end{bmatrix}, \\ B_r &= \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [\hat{C} \quad 0], \quad \bar{D} = \hat{D}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

e a lei de controle

$$\hat{u}_k = [K \quad K_I] \bar{x}_k = \bar{K} \bar{x}_k, \quad (4.15)$$

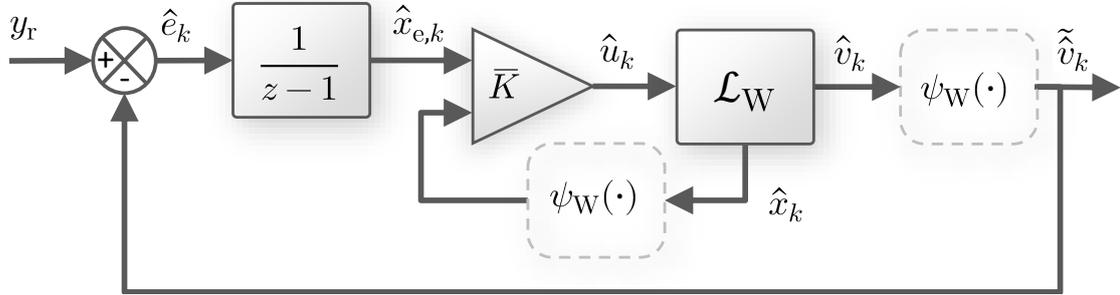
em que K é o ganho de realimentação de estados e K_I é a constante de ganho integral, o sistema em malha fechada se torna

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = A_{mf} \bar{x}_k + B_r y_r, \\ \hat{y}_k = C_{mf} \bar{x}_k, \end{cases} \quad A_{mf} = (\bar{A} + \bar{B} \bar{K}), \quad C_{mf} = (\bar{C} + \bar{D} \bar{K}). \quad (4.16)$$

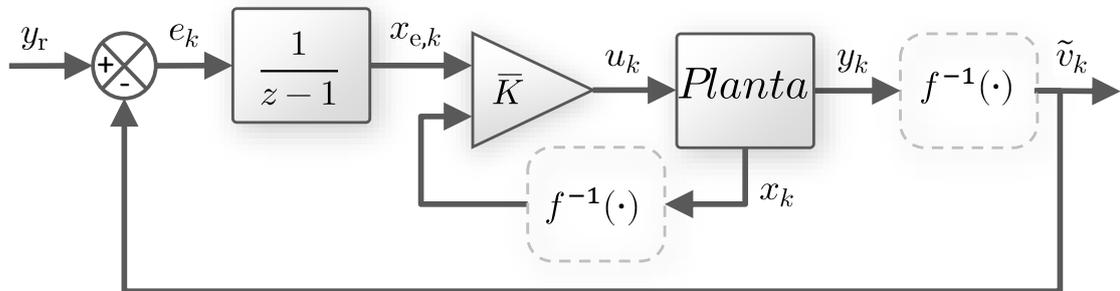
Se os autovalores da matriz A_{mf} , ou seja, os polos de malha fechada, forem especificados, então o controlador \bar{K} pode ser determinado por alguma técnica de alocação de polos, desde que \bar{A} tenha posto $n_a = n + 1$, implicando que o sistema é de estado completamente controlável (OGATA, 2010).

Conforme comentado na Seção 4.2, o controlador obtido para o modelo deve ser capaz de controlar a planta. Por esse motivo, a representação gráfica esquematizada nas Figuras 19 e 20, emprega o mesmo controlador em ambos os sistemas. Porém, no caso das plantas modeladas na estrutura de Wiener, não é possível ter acesso aos estados lineares como acontece no modelo. Dessa forma, para que a simulação represente essa característica da planta, a função $\psi_W(\cdot)$ é inserida na realimentação dos estados do modelo. Isso pode ser observado na Figura 19 (a) e (b). Na Figura 20 pode-se observar o modelo de Hammerstein e a planta que ele representa. Para esse último caso, os estados já são linearizados, por isso utiliza-se apenas a inversa da não linearidade estática.

Figura 19 – Inserção da nova variável de estado no modelo de Wiener e sua respectiva planta. Em (a) tem-se o esquema do modelo de Wiener e em (b) da planta que ele representa.

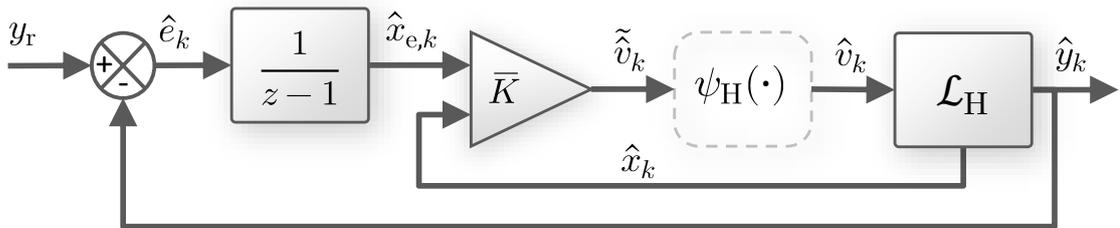


(a)

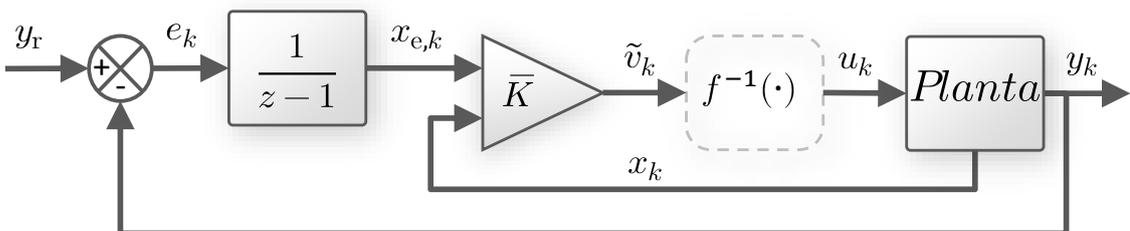


(b)

Figura 20 – Planta e modelo de Hammerstein com nova variável de estado. Em (a) tem-se o esquema do modelo e em (b) o da planta.



(a)



(b)

4.4 \mathcal{D}_R -estabilidade – Critérios de Desempenho

Os polos de malha fechada caracterizam um sistema quanto a estabilidade e também informam sobre o seu desempenho dinâmico, afetando indicadores como a Máxima Ultrapassagem Percentual (MUP) e o tempo de assentamento T_s . Diante disso, uma abordagem robusta do posicionamento dos polos pode delimitar uma região do plano complexo, em que todos os polos de malha fechada devem ser alocados de forma a atingir determinados critérios de desempenho e estabilidade. O conceito geral de regiões polares convexas apropriadas para essa finalidade, por meio de LMIs, pode ser resumido na definição a seguir.

Definição 4.1 (\mathcal{D}_R -estabilidade) Segundo Peaucelle et al. (2000), a região \mathcal{D}_R é definida como sendo um subconjunto do plano complexo \mathbb{C}

$$\mathcal{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : R_{11} + R_{12}z + R'_{12}z^* + R_{22}zz^* < 0\}, \quad (4.17)$$

em que $R_{11} = R'_{11} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $R_{12} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ e $R_{22} = R'_{22} \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

Deve ser notado que regiões \mathcal{D}_R são simétricas com relação ao eixo real do plano complexo. A matriz $A_{mf} \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$ de um determinado sistema é \mathcal{D}_R -estável se e somente se seus autovalores estão contidos na região \mathcal{D}_R . E devido à convexidade, a interseção de regiões \mathcal{D}_R resulta em uma nova região \mathcal{D}_R (ROSINOVÁ; HYPIUSOVÁ, 2019).

O seguinte teorema estabelece uma condição LMI que, por meio da descrição de uma região determinada por R_{11} , R_{12} e R_{22} , provê um controlador \bar{K} para alocar os polos da matriz A_{mf} na região \mathcal{D}_R (ROSINOVÁ; HYPIUSOVÁ, 2019). As condições podem ser programadas por meio do solver SeDuMi (STURM, 1999) empregando a interface do YALMIP (LOFBERG, 2004).

Teorema 4.1 (PEAUCELLE et al., 2000) Considere um sistema linear com uma incerteza politópica de N vértices

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{A}(\alpha)\bar{x}_k + \bar{B}(\alpha)\hat{u}_k, \quad (4.18)$$

em que

$$(\bar{A}, \bar{B})(\alpha) \in \left\{ (\bar{A}, \bar{B})(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (\bar{A}, \bar{B})_i, \alpha_i \in \Lambda_N \right\}, \quad (4.19)$$

tal que o simplex unitário é definido por

$$\Lambda_N \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}, \quad (4.20)$$

e também considere a lei de controle $\hat{u}_k = \bar{K}\bar{x}_k$. Se existirem matrizes $G \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, $Z \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$ e N matrizes $P_i \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$ simétricas e definidas positivas, tais que

$$\begin{bmatrix} M_{11i} & M_{12i} \\ M'_{12i} & M_{22i} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.21)$$

com

$$\begin{aligned} M_{11i} &= R_{11} \otimes P_i + R_{12} \otimes (\bar{A}_i G + \bar{B}_i Z) + R'_{12} \otimes (\bar{A}_i G + \bar{B}_i Z)', \\ M_{22i} &= R_{22} \otimes (P_i - G - G'), \\ M_{12i} &= R'_{12} \otimes (P_i - G') + R_{22} \otimes (\bar{A}_i G + \bar{B}_i Z), \end{aligned}$$

então o sistema incerto em malha fechada com realimentação de estados é robustamente \mathcal{D}_R -estável com o ganho de realimentação de estados dado por

$$\bar{K} = ZG^{-1}. \quad (4.22)$$

A partir do momento que as especificações de desempenho são definidas, torna-se possível obter regiões que as represente no plano complexo z por meio das matrizes R_{11} , R_{12} e R_{22} . As especificações de tempo contínuo podem ser levadas para o domínio discreto por meio da transformação

$$z = e^{(\sigma + j\omega_d)T} = e^{\sigma T} \underline{\omega_d T}, \quad (4.23)$$

em que

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad (4.24)$$

$$\sigma = \zeta \omega_n, \quad (4.25)$$

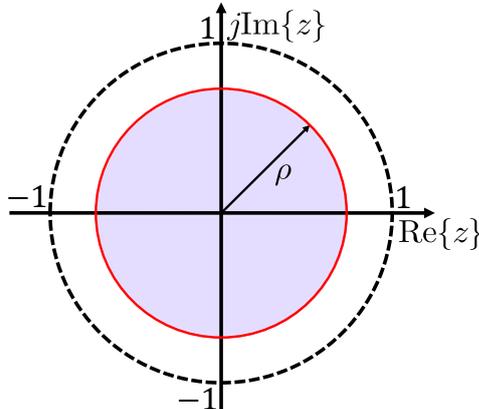
e $\underline{\bullet}$ indica a fase de $e^{j\bullet}$.

O primeiro dos critérios de desempenho a ser abordado é o tempo de assentamento, calculado em tempo contínuo como

$$T_s = \frac{4}{\sigma}. \quad (4.26)$$

Escolhendo o T_s pode-se determinar o σ , que produz um círculo de raio $\rho = e^{\sigma T}$ quando considerado constante em (4.23). Qualquer ponto interior a esse círculo produz tempos de assentamento menores que o escolhido. A região é mostrada na Figura 21 pintada em lilás.

Figura 21 – Região para alocação de polos pintada em lilás, obedecendo o critério de T_s .



Em termos das matrizes R , a região \mathcal{D}_R é descrita como

$$R_{11_{\text{circ}}} = -\rho^2, \quad R_{12_{\text{circ}}} = 0 \quad \text{e} \quad R_{22_{\text{circ}}} = 1. \quad (4.27)$$

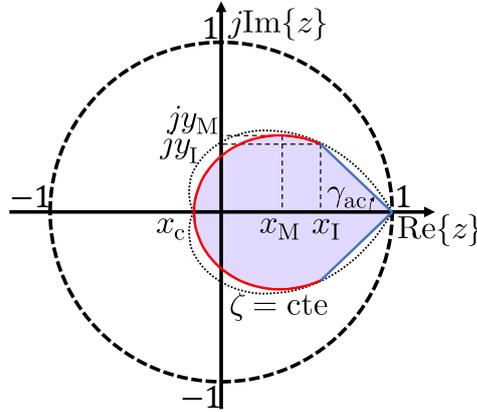
O segundo critério de desempenho apresentado neste trabalho é o da **MUP** que requer uma região mais complexa que o tempo de assentamento. Ela é calculada para o caso contínuo como

$$\text{MUP} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100. \quad (4.28)$$

Escolhendo o valor da **MUP**, pode-se determinar o ζ que, quando é considerado constante e aplicado na transformação apresentada em (4.23), resulta em uma cardioide. Note que ζ faz parte de (4.23) por meio das definições de ω_d e σ em (4.24) e (4.25), respectivamente. Porém, como a região da cardioide é não convexa, uma aproximação mais simples e convexa é proposta por Rosinová e Hypiusová (2019) utilizando a interseção entre uma elipse e um cone.

A escolha da localização da interseção das duas regiões que formam a aproximação da cardioide não é numérica, mas deve ser selecionada graficamente de forma que não fiquem espaços exagerados de erro entre a cardioide exata e a aproximada como mostra a Figura 22. Essa escolha é feita apenas no eixo real, pois o ponto correspondente sobre o eixo imaginário é encontrado diretamente da curva da cardioide exata avaliada no ponto escolhido no eixo real.

Figura 22 – Região para alocação de polos obedecendo **MUP**.



Os semieixos da elipse são nomeados a no eixo real e b no eixo imaginário. Eles são calculados por $a = (1 - x_c)/2$ e por $b = y_I a / \sqrt{a^2 - (x_I - x_M)^2}$, em que $x_M = (1 + x_c)/2$ é o ponto médio entre x_c e x_v , sendo x_v o vértice do cone, no caso deste trabalho $x_v = 1$ e x_c o ponto de encontro da cardioide com o eixo real. A região \mathcal{D}_R para limitar a **MUP** pode ser obtida por meio das seguintes matrizes

$$R_{11_e} = \begin{bmatrix} -1 & -x_M a^{-1} \\ -x_M a^{-1} & -1 \end{bmatrix}, \quad R_{12_e} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(a^{-1}-b^{-1})}{2} \\ \frac{(a^{-1}+b^{-1})}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

$$R_{22_e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por sua vez a região \mathcal{D}_R do cone com vértice em $(1, 0)$ e abertura de $2\gamma_{ac}$, no qual $\gamma_{ac} = \tan^{-1}\left(\frac{y_i}{1-x_1}\right)$, é representada por

$$\begin{aligned} R_{11_c} &= \begin{bmatrix} -2 \sin(\gamma_{ac}) & 0 \\ 0 & -2 \sin(\gamma_{ac}) \end{bmatrix}, & R_{12_c} &= \begin{bmatrix} \sin(\gamma_{ac}) & \cos(\gamma_{ac}) \\ -\cos(\gamma_{ac}) & \sin(\gamma_{ac}) \end{bmatrix}, \\ R_{22_c} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

A interseção das regiões do círculo, do cone e da elipse pode ser feita da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} R_{\text{circ}} & 0 & 0 \\ 0 & R_e & 0 \\ 0 & 0 & R_c \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

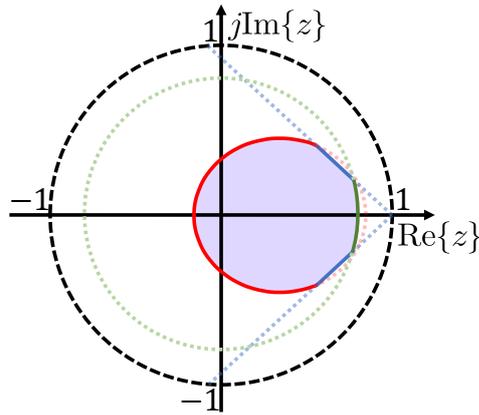
na qual os zeros representam matrizes de dimensões apropriadas e as matrizes restantes são definidas como

$$R_{\text{circ}} = \begin{bmatrix} R_{11_{\text{circ}}} & R_{12_{\text{circ}}} \\ R'_{12_{\text{circ}}} & R_{22_{\text{circ}}} \end{bmatrix}, \quad R_e = \begin{bmatrix} R_{11_e} & R_{12_e} \\ R'_{12_e} & R_{22_e} \end{bmatrix}, \quad R_c = \begin{bmatrix} R_{11_c} & R_{12_c} \\ R'_{12_c} & R_{22_c} \end{bmatrix},$$

que resulta na região pintada em lilás na Figura 23.

Assim como as demais regiões apresentadas nesta seção, alocar os polos no interior da área pintada de lilás resulta em critérios de desempenho iguais ou menores que o estabelecido.

Figura 23 – Região para alocação de polos obedecendo tempo de assentamento e a MUP.



4.5 \mathcal{H}_∞ – Rejeição de Ruídos

Para acompanhar essa seção considere o sistema LIT visto em (4.2), porém, acrescida a influência do ruído de processo como apresentado a seguir

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \bar{A}(\alpha)\bar{x}_k + \bar{B}(\alpha)\hat{u}_k + B_w(\alpha)w_k, \\ \hat{y}_k = \bar{C}(\alpha)\bar{x}_k, \end{cases} \quad (4.32)$$

em que $w_k \in \mathbb{R}^m$ corresponde a uma entrada exógena e $B_w \in \mathbb{R}^{n_a \times m}$ a uma matriz de ponderação das entradas exógenas. Além disso, o sistema em estudo é incerto, ou seja

$$(\bar{A}, \bar{B}, B_w, \bar{C})(\alpha) = \left\{ (\bar{A}, \bar{B}, B_w, \bar{C})(\alpha) : \sum_{i=1}^N \alpha_i (\bar{A}, \bar{B}, B_w, \bar{C})_i, \alpha_i \in \Lambda_N \right\}. \quad (4.33)$$

Com a intenção de harmonizar esse caso às **LMIs** apresentadas na Seção 4.4, o sistema em estudo é representado em malha fechada. Logo, empregando o controlador \bar{K} de (4.22), as equações do sistema (4.32) podem ser reescritas como

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = A_{\text{mf}} \bar{x}_k + B_w(\alpha) w_k, \\ \bar{y}_k = \bar{C}(\alpha) \bar{x}_k, \end{cases} \quad A_{\text{mf}} = \bar{A} + \bar{B} \bar{K}. \quad (4.34)$$

Segundo [Boyd et al. \(1994\)](#), a matriz de transferência que descreve a influência do ruído w_k na saída \bar{y}_k do sistema apresentado em (4.34) é

$$H(z, \alpha) = \bar{C}(\alpha)(zI - A_{\text{mf}}(\alpha))^{-1} B_w(\alpha). \quad (4.35)$$

Além disso, para um determinado valor de α , a norma \mathcal{H}_∞ é dada por

$$\|H(z)\|_\infty = \max_{\omega \in [-\pi, \pi]} \bar{\sigma}_{\max}(H(e^{j\omega})), \quad (4.36)$$

em que $\bar{\sigma}$ denota a função valor singular máximo.

A norma \mathcal{H}_∞ possui uma correspondência temporal da seguinte maneira

$$\|H(z)\|_\infty = \sup_{\|w_k\| \neq 0, w_k \in \ell_2} \frac{\|\hat{y}_k\|_2}{\|w_k\|_2}, \quad (4.37)$$

em que ℓ_2 representa o espaço para sinais de energia finita para sequências de tempo discreto. Ela pode ser interpretada como uma medida da capacidade do sistema em atenuar perturbações. Assim, caso seja desejado limitar a perturbação que a entrada de ruído causa na saída do sistema, pode-se limitar a norma \mathcal{H}_∞ por um determinado valor superior γ ([AGUIRRE et al., 2007](#)). Matematicamente

$$\|\hat{y}_k\|_2 \leq \gamma \|w_k\|_2, \quad w_k \in \ell_2, \quad (4.38)$$

que pode ser escrita de modo equivalente como

$$\hat{y}_k' \hat{y}_k \leq \gamma^2 w_k' w_k. \quad (4.39)$$

Utilizando a função de Lyapunov em sua forma quadrática $V(\bar{x}_k) = \bar{x}_k' P \bar{x}_k > 0$, com $P = P' > 0$, para garantir a estabilidade assintótica e a norma \mathcal{H}_∞ menor que γ , diz-se que

$$\sum_0^\infty (w_k' w_k - \gamma^2 w_k' w_k + \Delta V(\bar{x}_k) - \Delta V(\bar{x}_{k+1})) < 0, \quad (4.40)$$

ou seja,

$$\sum_0^{\infty} \left(w'_k w_k - \gamma^2 w'_k w_k + V(\bar{x}_{k+1}) - V(\bar{x}_k) \right) - \sum_0^{\infty} (V(\bar{x}_{k+1}) - V(\bar{x}_k)) < 0. \quad (4.41)$$

Como $H(z)$ é estável e, considerando condições iniciais nulas, o último somatório também é nulo, de forma que resta

$$w'_k w_k - \gamma^2 w'_k w_k + V(\bar{x}_{k+1}) - V(\bar{x}_k) < 0. \quad (4.42)$$

Substituindo o diferencial de primeira ordem por $V(\bar{x}_k) = \bar{x}'_k P \bar{x}_k$ e $V(\bar{x}_{k+1}) = \bar{x}'_{k+1} P \bar{x}_{k+1}$

$$w'_k w_k - \gamma^2 w'_k w_k + \bar{x}'_{k+1} P \bar{x}_{k+1} - \bar{x}'_k P \bar{x}_k < 0, \quad (4.43)$$

e considerando as equações do sistemas (4.34), encontra-se

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ w_k \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_{\text{mf}}(\alpha)' P A_{\text{mf}}(\alpha) - P + \bar{C}(\alpha)' \bar{C}(\alpha) & A_{\text{mf}}(\alpha)' P \bar{B}(\alpha) \\ \bar{B}(\alpha)' P A_{\text{mf}}(\alpha) & \bar{B}(\alpha)' P \bar{B}(\alpha) - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ w_k \end{bmatrix} < 0. \quad (4.44)$$

Segundo [Aguirre et al. \(2007\)](#), para garantir um limitante γ para a norma \mathcal{H}_{∞} da função de transferência de w_k para \hat{y}_k , deve existir uma matriz simétrica definida positiva P tal que

$$\begin{bmatrix} A_{\text{mf}}(\alpha)' P A_{\text{mf}}(\alpha) - P + \bar{C}(\alpha)' \bar{C}(\alpha) & A_{\text{mf}}(\alpha)' P \bar{B}(\alpha) \\ \bar{B}(\alpha)' P A_{\text{mf}}(\alpha) & \bar{B}(\alpha)' P \bar{B}(\alpha) - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.45)$$

Aplicando o complemento de Schur e outras transformações elementares, além de considerar que $\|H(z)\|_{\infty} = \|H(z)'\|_{\infty}$, pode-se reescrever (4.45) como

$$\begin{bmatrix} W & A_{\text{mf}}(\alpha)W & 0 & \bar{B}(\alpha) \\ W A_{\text{mf}}(\alpha)' & W & W \bar{C}(\alpha)' & 0 \\ 0 & \bar{C}(\alpha)W & I & 0 \\ \bar{B}(\alpha)' & 0 & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.46)$$

A norma \mathcal{H}_{∞} pode ser computada a partir de um procedimento convexo de otimização. Para esse processo, pode-se estabelecer o seguinte teorema para determinar a matriz $\bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$ tal que a lei de controle linear $\hat{u}_k = \bar{K} \bar{x}_k$ estabilize assintoticamente e minimize um limitante do custo garantido \mathcal{H}_{∞} do sistema em malha fechada $\forall (\bar{A}, \bar{B}, B_w, \bar{C}) \in \mathcal{H}$ ([AGUIRRE et al., 2007](#)).

Teorema 4.2 *Se existirem matrizes $Z \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$, $G \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, $W_i = W'_i$, $i = 1, \dots, N \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$ e $\mu = \gamma^2$ tais que*

$$\min_{Z, G, W_i = W'_i, i=1, \dots, N} \mu, \quad (4.47)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} W_i & G' \bar{A}'_i + Z' B'_{w,i} & 0 & \bar{B}'_i \\ \bar{A}_i G + B_{w,i} Z & G + G' - W_i & \bar{C}_i G & 0 \\ 0 & G' \bar{C}'_i & I & 0 \\ \bar{B}_i & 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix} > 0, \quad (4.48)$$

então $\bar{K} = ZG^{-1}$ assegura a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada (4.34) $\forall (\bar{A}, \bar{B}, B_w, \bar{C})(\alpha) \in \mathcal{H}$ e γ é um limitante para a norma \mathcal{H}_{∞} .

4.6 Limitação do Sinal de Controle

Um sistema linearizado pelas metodologias aproximadas apresentadas nas Seções 3.3 e 3.4 é funcional dentro de uma determinada faixa. Para que o sistema seja mantido dentro dessa faixa e considerado linear, pode-se restringir o seu sinal de controle para que os limites apontados para o bom funcionamento da inversa sejam respeitados. Essa limitação é dependente do controlador e dos estados, uma vez que o sinal de realimentação é dado por $\hat{u}_k = \bar{K} \bar{x}_k$.

Quando as condições iniciais são conhecidas, é possível encontrar limites superiores para o módulo do sinal de controle $\hat{u}_k = \bar{K} \bar{x}_k$ como segue. Tome $G > 0$ e Z que satisfaçam a condição de estabilidade apresentada em (4.21) e, ainda que $x_0' G^{-1} x_0 \leq 1$. Isso implica que \bar{x}_k se mantém dentro de ε , definida como uma elipsoide, para todo $k > 0$ e, conseqüentemente, segundo Boyd et al. (1994), o máximo valor resultante do módulo de \hat{u}_k , é igual ao máximo autovalor de $G^{-1/2} Z' Z G^{-1/2}$. De forma mais restritiva ainda, se $\|x_0\| \leq 1$, a restrição de que $\|\hat{u}_k\| \leq \delta$ é respeitada para todo $k > 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0' \\ x_0 & G \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} G & Z' \\ Z & \delta^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.49)$$

forem satisfeitas.

5 Resultados

Neste capítulo, são apresentados e analisados os resultados numéricos obtidos por meio de simulações no [MATLAB®](#) ao seguir os passos dos processos de identificação, linearização e controle descritos nos Capítulos 2, 3 e 4, respectivamente. Dois sistemas foram simulados, uma planta de dois tanques em cascata e outra de um [CSTR](#). Pelas características apresentadas como a não linearidade da válvula dos tanques em cascata e a ampla utilização dos modelos de Wiener para representar processos químicos, o modelo de Hammerstein foi selecionado para identificar os tanques em cascata enquanto que o modelo de Wiener para identificar o [CSTR](#) ([GÓMEZ; BAEYENS, 2005](#); [BIAGIOLA; AGAMENNONI; FIGUEROA, 2016](#); [LUNING et al., 2017](#); [LUNING; ZHAO; SPURGEON, 2018](#)).

Para encontrar os parâmetros de cada modelo foram implementadas as metodologias de identificação em uma e duas etapas, porém, serão apresentados apenas os resultados referentes à que retornou o melhor resultado. No caso do modelo de Hammerstein (tanques em cascata) o melhor resultado foi obtido pela identificação em uma etapa, enquanto que, para o modelo de Wiener ([CSTR](#)), o melhor resultado foi obtido pela identificação em duas etapas.

O modelo de Hammerstein será linearizado pela metodologia de inversão paramétrica uma vez que não possui ordem elevada e é vantajosa, pois o seu resultado é mais acurado que a inversão não paramétrica. Por sua vez, o modelo de Wiener será linearizado pela metodologia de inversão não paramétrica, visto que a ordem da sua curva estática tornaria o processo de inversão paramétrica mais complexo.

Para verificar a funcionalidade da linearização dos modelos, tanto de Hammerstein quanto de Wiener, eles serão submetidos a cenários de controle utilizando o [PI](#). Em um primeiro momento, quando objetiva-se o seguimento de referência, o controlador será projetado considerando a \mathcal{D}_R -estabilidade e, em seguida, quando busca-se estabilização será considerada a limitação da norma \mathcal{H}_∞ . Em todos os cenários apresentados, as incertezas da identificação e linearização são levadas em consideração. Por outro lado, a limitação do sinal de controle é utilizada apenas nos casos em que é necessária.

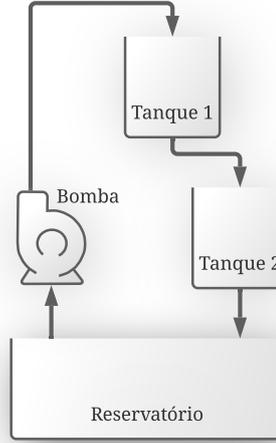
5.1 Experimento 1

5.1.1 Apresentação da Planta

O Experimento 1 diz respeito a uma planta de dois tanques em cascata apresentada em [Roy et al. \(2016\)](#) e adaptada em [Rayouf, Ghorbel e Braiek \(2018\)](#). O esquema da planta é apresentado na Figura 24, em que existem dois tanques idênticos e um reservatório. A bomba alimenta o tanque superior com o material do reservatório. O tanque superior

alimenta o tanque inferior por meio de uma válvula. E, ao final, o material retorna ao reservatório inferior por meio de outra válvula.

Figura 24 – Esquema no qual uma bomba transporta o material do reservatório inferior para o sistema de dois tanques em cascata.



Fonte: Adaptado de [Rayouf, Ghorbel e Braiek \(2018\)](#).

O conjunto de equações que descreve a cascata dos dois tanques em tempo discreto é dado por

$$\begin{cases} h_{1,k+1} = \eta \text{sat}(u_k) - \frac{a_1}{S} \sqrt{2g \text{sat}(h_{1,k})} + w_{1,k}, \\ h_{2,k+1} = \frac{a_1}{S} \sqrt{2g \text{sat}(h_{1,k})} - \frac{a_2}{S} \sqrt{2g \text{sat}(h_{2,k})} + w_{2,k}, \end{cases} \quad (5.1)$$

e

$$\begin{cases} h_{1,k,s} = \text{sat}(h_{1,k}) + \nu_{1,k}, \\ h_{2,k,s} = \text{sat}(h_{2,k}) + \nu_{2,k}, \end{cases} \quad (5.2)$$

em que h_1 e h_2 , são os níveis de material calculados, $h_{1,s}$ e $h_{2,s}$, os níveis saturados medidos, $w_{1,k}$ e $w_{2,k}$, ruídos de processo, $\nu_{1,k}$ e $\nu_{2,k}$, ruídos de medição e a_1 e a_2 , as áreas de saída, cada um correspondendo aos seus respectivos tanques. S é a área de seção transversal dos tanques, η , uma constante relacionada com a tensão da bomba que controla o fluxo de entrada de material na planta e

$$\text{sat}(h_{i,k}) = \begin{cases} 0,3 & \text{se } h_{i,k} \geq 0,3, \\ h_{i,k} & \text{se } 0 \leq h_{i,k} \leq 0,3, \\ 0 & \text{se } h_{i,k} \leq 0, \end{cases} \quad \text{para } i = \{1, 2\}, \quad (5.3)$$

$$\text{sat}(u_k) = \begin{cases} 3,5 & \text{se } u_k \geq 3,5, \\ u_k & \text{se } 0 \leq u_k \leq 3,5, \\ 0 & \text{se } u_k \leq 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

A técnica *Forward Euler*, que pode ser vista com mais detalhes em [Phillips e Nagle \(1995\)](#), foi utilizada para simular numericamente a planta, cujos parâmetros empregados são apresentados na Tabela 1, incluindo o período de amostragem T .

Tabela 1 – Parâmetros do sistema de dois tanques adaptado de [Rayouf, Ghorbel e Braiek \(2018\)](#).

Parâmetro	Valor
$a_1 = a_2$	$5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$
g	$9,81 \text{ m/s}^2$
η	$2,4 \times 10^{-3}$
S	$0,014 \text{ m}^2$
T	3 s

Ao aplicar os dados da Tabela 1 na planta (5.1), resulta em

$$\begin{cases} h_{1,k+1} = \left(2,4 \times 10^{-3} \text{ sat}(u_k) - 3,57 \times 10^{-3} \sqrt{19,62 \text{ sat}(h_{1,k})} \right) 3 + h_{1,k} + w_{1,k}, \\ h_{2,k+1} = \left(3,57 \times 10^{-3} \left(\sqrt{19,62 \text{ sat}(h_{1,k})} - \sqrt{19,62 \text{ sat}(h_{2,k})} \right) \right) 3 + h_{2,k} + w_{2,k}. \end{cases} \quad (5.5)$$

5.1.2 Identificação da Planta

A fim de representar matematicamente a planta na estrutura de Hammerstein foi realizada a identificação em uma etapa empregando o algoritmo da Subseção 2.4.1.1. Os parâmetros empregados para o ensaio dinâmico se encontram resumidos na Tabela 2.

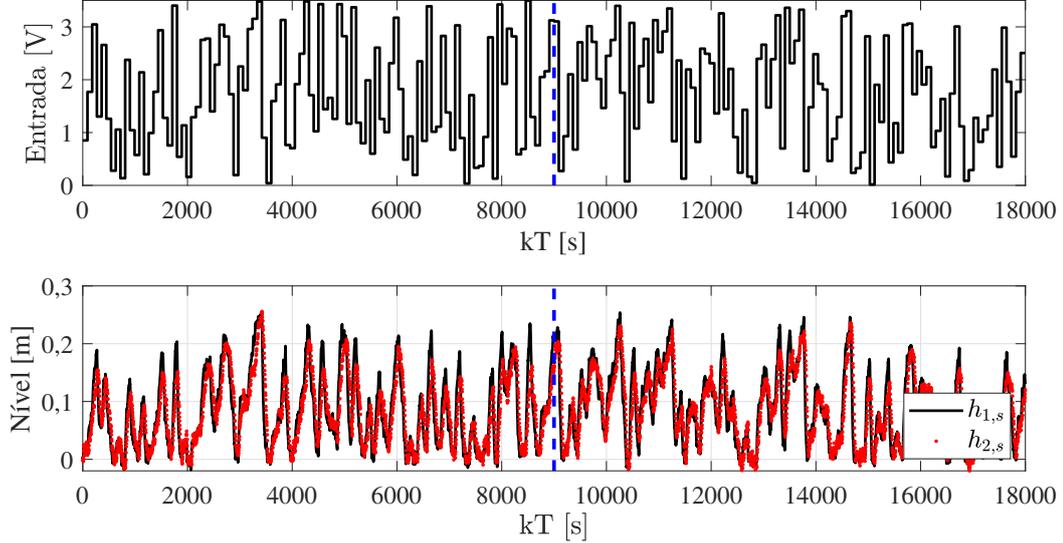
Tabela 2 – Parâmetros do ensaio dinâmico para identificação da planta de dois tanques em cascata.

Parâmetro	Valor
Q_{\min}	0
Q_{\max}	3,5
M_d	30
N_{amostra}	18000

No primeiro passo do ensaio dinâmico gerou-se um sinal [PRBSM](#) que consiste em $N_{\text{amostra}} = 18000$ amostras com amplitudes variando de $Q_{\min} = 0$ a $Q_{\max} = 3,5$ e quantidade de iterações até a mudança de patamar selecionada como $M = 30$. Os dados desse sinal podem ser visualizados na parte superior da Figura 25. Aplicar tal sinal na planta resulta em variações de nível que trazem consigo informações dinâmicas e estáticas da planta, tanto para o nível do tanque 1, indicado como $h_{1,k}$, quanto para o nível do tanque 2 indicado como $h_{2,k}$.

Foi inserido ruído branco e colorido no processo. O ruído branco utilizado foi uma sequência com média nula e desvio padrão unitário. Por sua vez, o ruído colorido foi

Figura 25 – Dados do ensaio dinâmico da planta de dois tanques em cascata. A divisa azul pontilhada separa os dados de identificação à esquerda dos dados de validação à direita.



construído da seguinte maneira

$$v_i = \frac{q^{-1} + 0,5q^{-2}}{1 - 1,69q^{-1} + 0,96q^{-2}} r_{b,i}, \quad \{i = 1,2\}, \quad (5.6)$$

em que $r_{b,i}$ são seqüências de um ruído branco qualquer com média nula e desvio padrão unitário. O valor da relação sinal ruído (SNR, do inglês *Signal Noise Ratio*) resultante foi de 21,4482 dB para a saída correspondente ao nível do tanque 1, $h_{1,s}$, e 19,6041 dB para a outra, correspondente ao nível do tanque 2, $h_{2,s}$.

Como gerou-se $N_{amostra} = 18000$ amostras, ficaram $N_{id} = 9000$ para identificação e $N_{val} = 9000$ para a validação. Dando seqüência ao ensaio dinâmico, o sinal PRBSM de entrada u_k foi aplicado na estrutura da curva não linear estática escolhida em (2.1). De acordo com testes realizados no sistema e pela característica visual da curva, a ordem escolhida para o polinômio foi $r = 2$. Como trata-se do ensaio em uma etapa, o modelo não possui o termo constante, resultando em

$$U_k = \begin{bmatrix} u_k & u_k^2 \end{bmatrix}', \quad (5.7)$$

tal como descreve (2.17). O sinal transformado U_k foi utilizado junto à saída do ensaio dinâmico, que pode ser escrita como $y_k = [h_{1,s} \ h_{2,s}]'$, para estimar as matrizes \check{A} , \check{B} , \check{C} e \check{D} por meio do MOESP-PO. Utilizando a SVD ‘*economy size*’ da matriz Θ_{BD} definida em (2.18), de acordo com (2.21) foi possível extrair também as matrizes \check{B} , \check{D} e $\hat{\alpha}_H$ dadas

por

$$\check{A} = \begin{bmatrix} 0,9506 & -0,0363 \\ 0,0636 & 0,8845 \end{bmatrix}, \quad \check{B} = \begin{bmatrix} -0,0008 \\ 0,0015 \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\check{C} = \begin{bmatrix} -1,0061 & 0,6238 \\ -1,2217 & -0,5353 \end{bmatrix}, \quad \check{D} = 10^{-4} \begin{bmatrix} -0,4992 \\ -0,0481 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\alpha}_H = \begin{bmatrix} 0,6085 & 0,7935 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Como justificado na Subseção 2.4.1.1, as matrizes podem ser transformadas por uma matriz T_{ee} a fim de tornar conhecidos os estados da planta na saída. Ao considerar que a matriz de saída da planta C é uma identidade de ordem 2, tal como a ordem da planta e, que a matriz de transmissão direta \check{D} é nula, de acordo com a transformação

$$T_{ee} = \begin{bmatrix} -0,4116 & -0,4796 \\ 0,9393 & -0,7735 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

obtida por (2.23), pode-se encontrar as estimativas desejadas das matrizes que representam a dinâmica linear do sistema de dois tanques em cascata em espaço de estados

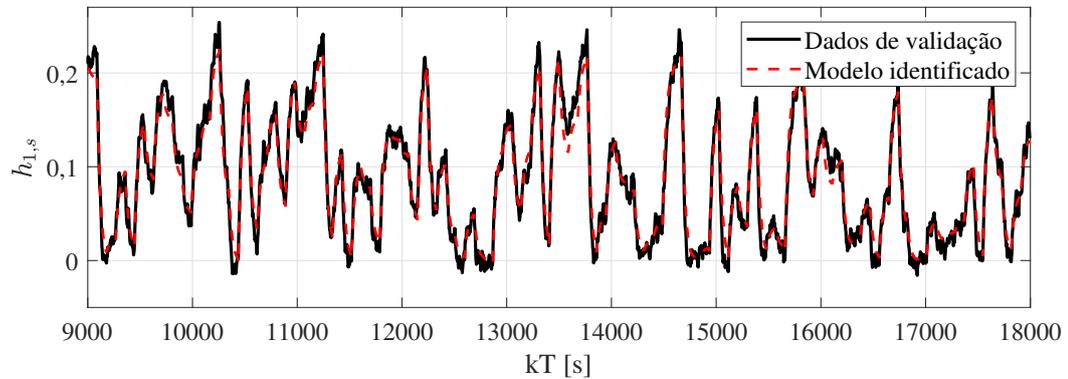
$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0,9298 & -0,0154 \\ 0,0889 & 0,9052 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0,0018 \\ 0,0002 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = I_2. \quad (5.11)$$

Os dados do ensaio nomeados como N_{val} foram empregados para validar o modelo de Hammerstein utilizando a simulação livre. Para isso, excitou-se a curva estática em cascata com o bloco dinâmico por meio da sequência de dados de entrada correspondentes aos últimos $N_{\text{val}} = 9000$ valores apresentados na parte superior da Figura 25. A resposta do modelo pode ser, portanto, comparada com a obtida na saída da planta. Os gráficos para estabelecer uma comparação entre a saída do modelo estimado e os dados de validação podem ser observados na Figura 26.

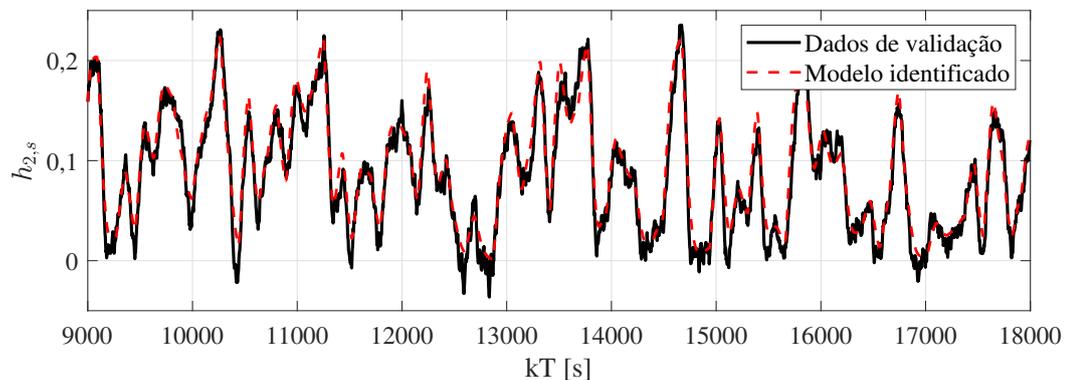
Qualitativamente, observa-se que a dinâmica estimada pelo modelo de Hammerstein representa bem a planta simulada dos dois tanques em cascata, sobretudo nos pontos de variações mais bruscas. Os ganhos estáticos, que influenciam diretamente as amplitudes, também correspondem aos da planta, sugerindo que foram coerentemente identificados. Isso pode ser confirmado pela Figura 27, que apresenta a validação da curva estática. A curva de validação em preto foi obtida ao interpolar os dados de saída da planta como resultado de aplicar degraus ascendentes com amplitudes variando entre 0 e 3,5.

Os índices apresentados na Tabela 3, assim como a análise gráfica, indicam de forma quantitativa que o modelo acompanha a planta com boa precisão. No caso do VAF busca-se índices próximos de 100%, em contrapartida, para o RMSE, o interesse é que os valores sejam mais próximos de 0.

Figura 26 – Validação da dinâmica do nível do tanque 1 $h_{1,s}$ que responde mais rapidamente, representado em (a) e do tanque 2 que responde mais lentamente representado em (b).

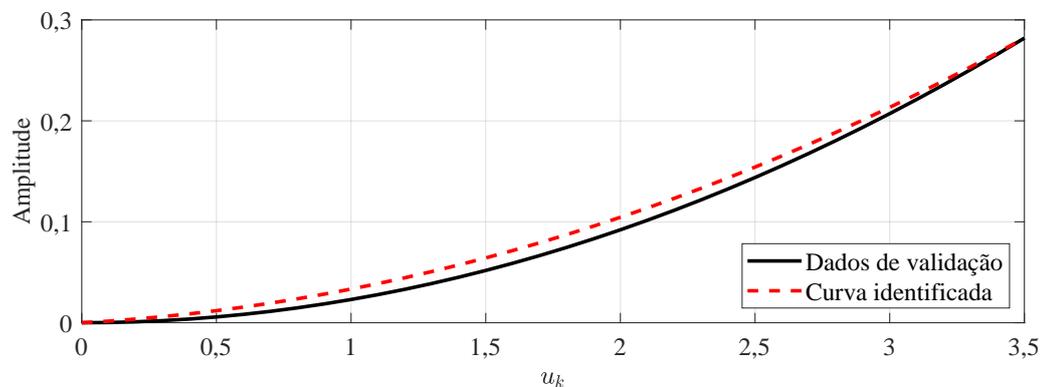


(a)



(b)

Figura 27 – Validação da curva não linear estática, em que o modelo identificado acompanha os pontos da curva não linear obtida da planta dos dois tanques em cascata.



Observa-se que o sistema em malha aberta de ordem 2 obtido é estável, uma vez que os polos apresentados possuem módulo 0,9182 e estão dentro do círculo de raio unitário. Isso torna o sistema mais simples de ser controlado de forma que o esforço de

controle pode ser menor que aquele para estabilizar um sistema instável.

Tabela 3 – Resumo dos resultados obtidos da identificação da planta de dois tanques em cascata, contendo os índices de desempenho para cada estado e os autovalores.

Saída	VAF [%]	RMSE	Autovalores
$h_{1,s}$	96,1234	0,1969	$0,9175 \pm j0,0349$
$h_{2,s}$	94,0369	0,2708	

5.1.3 Linearização Paramétrica

A curva que representa a não linearidade da planta no modelo de Hammerstein foi identificada por meio de um polinômio de ordem 2. Ele é formado ao utilizar os parâmetros $\hat{\alpha}_H$ de (5.9) na estrutura (2.1) expandida da seguinte forma

$$\hat{v}_k = 0,6085\hat{u}_k + 0,7935\hat{u}_k^2. \quad (5.12)$$

Esse polinômio caracteriza bem a não linearidade do sistema dentro do intervalo onde foi identificado, ou seja, quando \hat{u}_k varia entre 0 e 3,5, de forma que, sob os cuidados de não ficar fora desses limites, o sistema responderá corretamente em um cenário de controle a partir do modelo.

Utilizando (5.12), a inversa foi obtida ao isolar \hat{u}_k em função de \hat{v}_k tal como descreve o algoritmo da Seção 3.3. O processo não será apresentado, pois é longo e puramente algébrico. Ao final, substituiu-se \hat{v}_k por \tilde{v}_k de forma que obteve-se a inversa

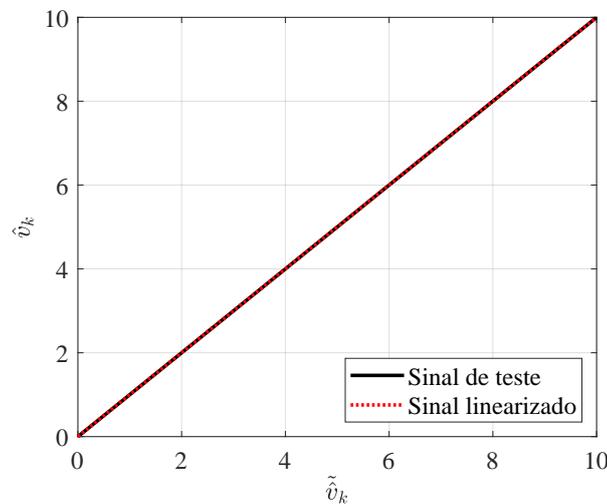
$$\hat{u}_k = -0,3834 + 3,1506 \times 10^{-4} \sqrt{1,2696 \times 10^7 \tilde{v}_k + 1,4811 \times 10^6}. \quad (5.13)$$

A fim de verificar se a região de validade da inversa atende os limites dentro dos quais a planta opera, um sinal \tilde{v}_k variando de 0 a 10 foi inserido na inversa da curva não linear estática (5.13) para obter o sinal intermediário \hat{u}_k . Na sequência, essa saída foi empregada como entrada da curva não linear estática (5.12), obtendo \hat{v}_k . Uma linearização eficaz deve fazer com que a saída seja aproximadamente igual ao sinal de entrada. Para que isso fosse verificado, foi construído um gráfico em que a saída e entrada são iguais, ou seja uma reta com inclinação unitária variando na região de teste 0 a 10. Sobrepondo essa última curva, foi traçada uma outra de \hat{v}_k em função da entrada \tilde{v}_k . O resultado é apresentado na Figura 28.

Como pode ser visto na Figura 28, a inversa funciona de forma eficaz no intervalo selecionado. É importante notar que a inversa funciona dessa forma para o modelo, que corresponde de forma inexata ao sistema real, por isso algumas incertezas fazem parte do processo, apesar da aproximação observada para este tipo de inversão ser elevada.

Mesmo sendo algébrica e produzindo uma inversão tão precisa quanto necessária, o cálculo pode se tornar complexo para ordens muito elevadas. Outro ponto que ainda

Figura 28 – Teste da inversa paramétrica variando de 0 a 10, de forma que a faixa de operação da planta varie entre 0 e 3,5.



não foi abordado diz respeito a região em que a curva identificada não é injetora. Para o sistema em estudo não há preocupações quanto a essa região pois, como apresenta a Figura 27 percebe-se que a curva é injetora no intervalo considerado. Diante de tais problemas, a inversa não paramétrica que será utilizada na Seção (5.2) pode se apresentar como uma saída mais interessante.

5.1.4 Controle da Planta a partir do Modelo de Hammerstein

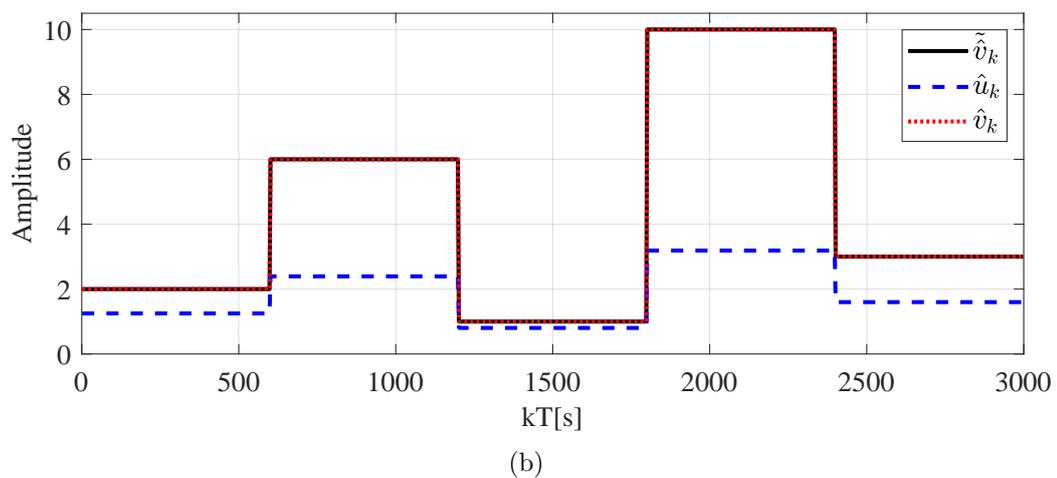
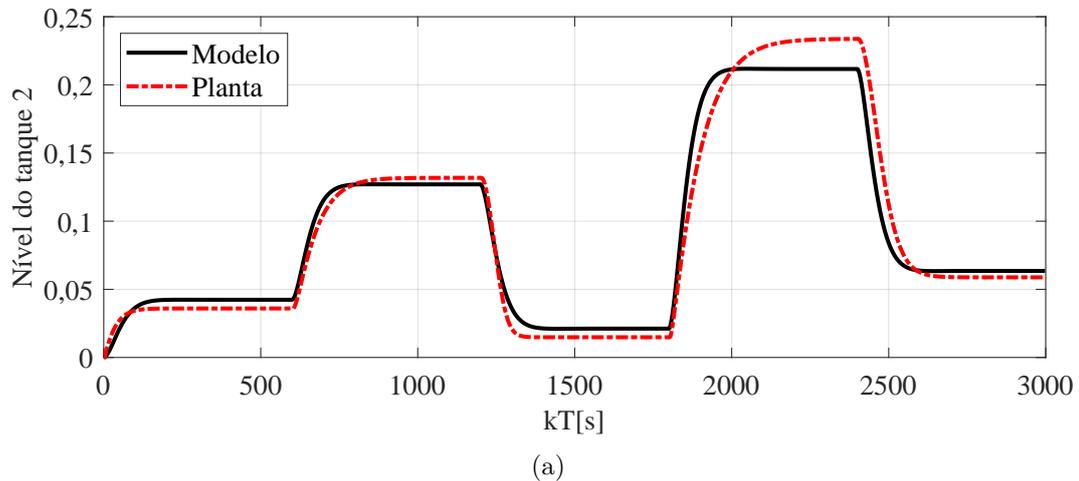
Uma vez que o sistema foi linearizado, torna-se possível empregar as estratégias para controle de sistemas lineares apresentadas no Capítulo 4. Entretanto, as LMIs que limitam a norma \mathcal{H}_∞ e o sinal de controle são desenvolvidas para estabilização, enquanto as LMIs que realizam a alocação dos polos de malha fechada em determinadas regiões são desenvolvidas para seguimento de referência. Em razão disso, serão apresentados resultados separados para verificar o efeito e desempenho de cada estratégia.

O modelo de Hammerstein descrito por (5.9) e (5.11) foi obtido utilizando a metodologia de identificação em uma etapa e, de acordo com os índices da Tabela 3, representa a planta dos dois tanques em cascata com boa aproximação. Espera-se, portanto, que o controlador a ser desenvolvido para o modelo seja capaz de causar efeitos semelhantes na planta, de forma que os critérios adotados nos projetos fiquem próximos aos atingidos pelo próprio modelo.

Para verificar a proximidade entre a saída produzida pela planta e pelo modelo, realizou-se um teste nos sistemas linearizados em malha aberta para o nível do segundo tanque, o qual pretendia-se controlar. Um sinal \tilde{v}_k variando dentro dos limites de operação definidos na Figura 28 foi gerado e, em seguida, aplicado na inversa descrita em (5.13), tal como apresenta-se no diagrama da Figura 10. O sinal que se coleta após a aplicação

da inversa é o de entrada do modelo de Hammerstein \hat{u}_k . Espera-se que esse sinal, ao ser aplicado na entrada da planta e do modelo, excite a saída de ambos de modo pariforme.

Figura 29 – Teste de correspondência em malha aberta entre planta do sistema de dois tanques em cascata e seu modelo. A saída está representada em (a) e a entrada em (b).



Os sinais de saída e entrada do teste realizado podem ser visualizados na Figura 29. Na Figura 29 (a) é possível ver que a saída do modelo acompanhou bem a planta ao longo do teste. Uma diferença maior que as demais, de 10%, pode ser notada quando a amplitude da saída esteve acima de 0,2, indicando que o ganho estático nessa região não foi bem identificado e pode influenciar negativamente no controle. Além disso, destaca-se na Figura 29 (b) dos sinais de linearização do modelo, que foi necessária uma entrada \tilde{v}_k de amplitude entre 0 e 10 para que o sinal intermediário \hat{u}_k variasse entre 0 e 3,5 e o nível do tanque 2 entre 0 e 0,25 aproximadamente.

Uma vez verificada a proximidade entre planta e modelo, pode-se proceder para a aplicação das estratégias de controle desenvolvidas no Capítulo 4. Ressalta-se que, em todos os cenários tratados no decorrer desta subseção, a incerteza será considerada presente

na matriz de entrada devido a erros de identificação e inversão da não linearidade estática, como apresentado em (4.5). Dada a precisão da metodologia de inversão paramétrica dentro dos limites que pretende-se fazer controle, \bar{m} e \underline{m} foram unitários de acordo com o desenvolvimento numérico apresentado na Subseção 4.2.1. No entanto, a fim de considerar a incerteza presente na identificação da não linearidade estática, eles foram selecionados como $\bar{m} = 1,05$ e $\underline{m} = 0,95$ no desenvolvimento descrito a seguir.

Segundo a estruturação apresentada na Seção 4.3, o modelo a ser utilizado não deve possuir integradores, critério que é atendido pelo modelo obtido para a planta dos dois tanques em cascata. Além disso, embora o sistema tenha sido identificado como SIMO, o controle será realizado sobre o segundo estado, de maneira que considera-se somente a segunda linha da matriz C apresentada em (5.11). Portanto, conforme (4.13) o sistema aumentado que inclui a nova variável de estados $\hat{x}_{e,k}$ é

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{x}_{e,k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,9298 & -0,0154 & 0 \\ 0,0889 & 0,9052 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_{e,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0018 \\ 0,0002 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{u}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_r, \\ \hat{y}_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_{e,k} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = (\bar{A} + \bar{B}\bar{K}) \bar{x}_k + B_r y_r, \\ \hat{y}_k = \bar{C} \bar{x}_k, \end{cases} \quad (5.15)$$

quando aplica-se as definições (4.14) a (4.16).

É possível obter uma matriz de ganhos \bar{K} para alocar os polos de malha fechada do sistema aumentado (5.15), ou seja, de $(\bar{A} + \bar{B}\bar{K})$, em qualquer posição desejada, desde que o par (\bar{A}, \bar{B}) seja controlável. Matematicamente, o sistema será dito controlável se o posto de $M_c = [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \bar{A}^2\bar{B} \quad \bar{A}^{n_a-1}\bar{B}]$ for igual a n_a . Para o sistema (5.14) tem-se

$$M_c = [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \bar{A}^2\bar{B}] = \begin{bmatrix} 0,0018 & 0,0016 & 0,0015 \\ 0,0002 & 0,0003 & 0,0004 \\ 0 & -0,0002 & -0,0005 \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

e o posto de M_c foi encontrado como 3 ao utilizar o **MATLAB**[®], ou seja, o par (\bar{A}, \bar{B}) é controlável. Dessa maneira, afirma-se que é possível alocar os polos que garantem erro nulo em regime permanente para uma entrada y_r em degrau com um controlador estático \bar{K} . A amplitude desse degrau será escolhida como $y_r = 0,2$, dentro dos limites da saída da planta apresentada na Figura 25. Além disso, essa é a região em que o modelo não descreve bem a planta, como foi evidenciado na Figura 29, de forma que o teste é realizado sobre o pior caso.

O posicionamento dos novos polos do sistema em malha fechada pode ser feito dentro de uma determinada região \mathcal{D}_R de forma a garantir critérios de projeto como o

tempo de assentamento e a **MUP**. As **LMI**s que permitem encontrar o ganho \bar{K} foram descritas na Seção 4.4, mais especificamente no Teorema 4.1. O tempo de assentamento desejado foi escolhido como $T_s = 200\text{s}$ e a **MUP** = 4,6%. A partir desses critérios, pode-se construir as **LMI**s do Teorema 4.1 e solucioná-las com o YALMIP e SeDuMi. Como resultado obteve-se

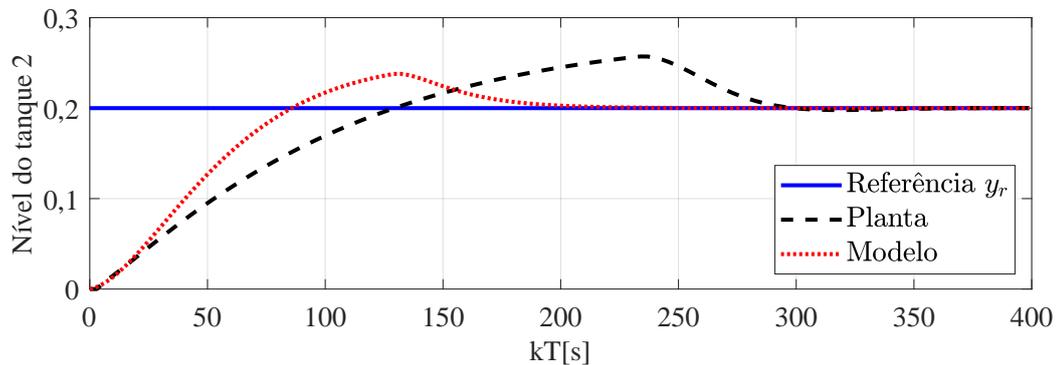
$$G = \begin{bmatrix} 2,8792 & -0,3007 & -0,1586 \\ -0,3008 & 0,1800 & 0,5525 \\ -0,1589 & 0,5524 & 3,4286 \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

$$Z = \begin{bmatrix} -768,1014 & -25,2575 & -131,8071 \end{bmatrix},$$

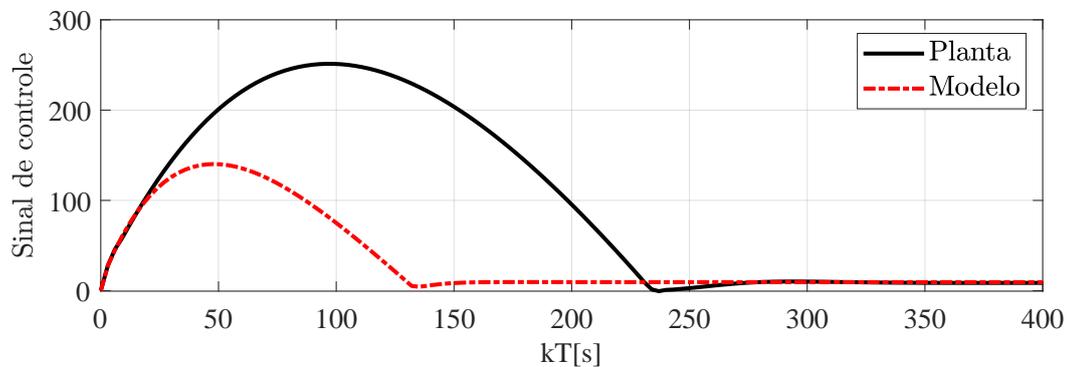
que, ao serem aplicadas em (4.22), produzem os seguintes ganhos

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} -385,5958 & -1210,6490 & 138,7975 \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Figura 30 – Resposta da planta dos dois tanques em cascata e seu modelo para projeto que considerou $T_s = 200\text{s}$ e **MUP** = 4,6%. A saída está representada em (a) e sinal de controle em (b).



(a)



(b)

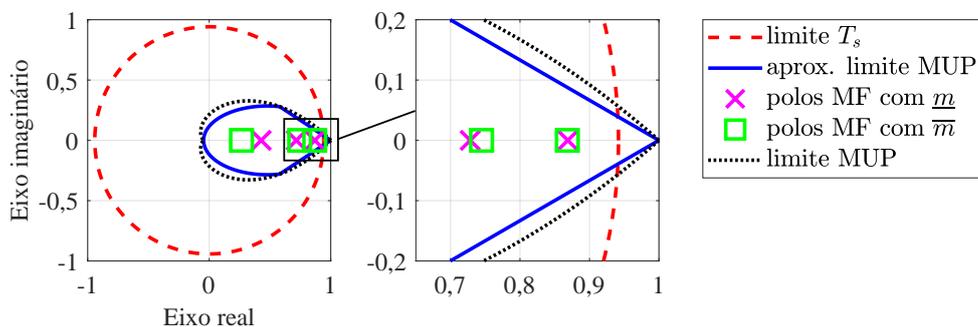
De posse do controlador, a malha do modelo e da planta foram fechadas de acordo com o diagrama da Figura 20. O resultado da simulação desses sistemas, para condições iniciais nulas, pode ser observado na Figura 30. Particularmente na Figura 30 (a)

Tabela 4 – Resultados do teste com \mathcal{D}_R -estabilidade para o sistema de dois tanques em cascata.

Origem dos dados	T_s [s]	MUP[%]
Projeto	200	4,6
Modelo	198	18,93
Planta	297	28,56

encontram-se as trajetórias dos sinais de saída do modelo e da planta convergindo para referência y_r com erro nulo. Uma análise qualitativa permite perceber a discrepância entre a dinâmica dos sistemas, o que leva a planta a não obedecer o tempo de assentamento, além disso, é possível observar que a MUP também não é obedecida pelo modelo tampouco pela planta. Quantitativamente as violações podem ser constatadas na Tabela 4 ao comparar os dados do projeto com a planta e modelo.

Como pode ser observado na Figura 31, os polos de malha fechada foram alocados corretamente na região \mathcal{D}_R pretendida, logo os critérios teriam que ser atendidos. A divergência é devida aos altos ganhos que o controlador (5.18) possui, pois com esse \bar{K} o sinal de controle, que pode ser observado na Figura 30 (b), permanece em valores elevados por quase todo o teste. Como consequência, o sinal de entrada do modelo \hat{u}_k satura em 3,5 e assim não permite à saída atingir o desempenho necessário. Nesse caso, retirar a limitação do sinal de entrada do modelo deve permitir que ele atenda os critérios de projeto. Destaca-se que isso só é possível dada a precisão da inversão paramétrica mesmo fora do intervalo em que a planta foi identificada, pois, como o sinal de controle será extrapolado a inversa ainda deve ser funcional para o resultado ser coerente com o projeto.

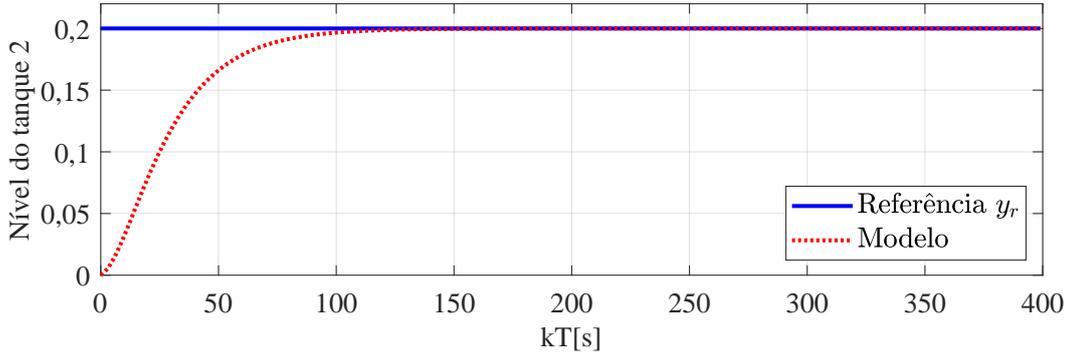
Figura 31 – Polos de malha fechada para o projeto com a \mathcal{D}_R -estabilidade realizado para o sistema de dois tanques em cascata.

Como pode ser observado na Figura 32, a MUP é nula e o tempo de assentamento reduziu para 129s, de forma que o modelo atende os critérios de projeto. O mesmo não foi feito com a planta, visto que em um cenário prático não seria possível alterar os limites de operação.

Uma solução que pode ser aplicada para o problema dos altos ganhos, inclusive na

planta, é levar em consideração uma restrição adicional no cômputo das LMIs de síntese do controlador. As LMIs apresentadas em (4.49) podem ser empregadas para limitar o sinal de controle $\tilde{v}_k = \bar{K}\bar{x}_k$ em um determinado valor δ , porém considerando o caso em que deseja-se apenas estabilização. Como o caso em estudo objetiva o seguimento de referência $y_r = 0,2$, não se pode garantir que a restrição do δ será atendida, entretanto, o interesse é na redução dos ganhos do controlador \bar{K} que ocorre independente da referência.

Figura 32 – Teste da \mathcal{D}_R -estabilidade sem a saturação do sinal de controle do modelo relacionado à planta de dois tanques em cascata.



A fim de verificar os efeitos das LMIs (4.49) no controle, elas foram implementadas junto às LMIs da \mathcal{D}_R -estabilidade em uma rotina do MATLAB®. Os critérios de projeto permaneceram os mesmos, $T_s = 200s$ e $MUP = 4,6\%$ e, adicionalmente, levou-se em consideração a limitação do sinal \tilde{v}_k em $\delta = 10$. As soluções retornadas pelo YALMIP e SeDuMi foram

$$G = \begin{bmatrix} 0,0126 & 0,0054 & 0,1843 \\ 0,0054 & 0,0389 & 0,3757 \\ 0,1843 & 0,3757 & 5,3354 \end{bmatrix}, \quad Z = [0,0195 \quad 0,0595 \quad 2,5102], \quad (5.19)$$

que, ao serem aplicadas em (4.22), resultaram no controlador

$$\bar{K} = [-85,7920 \quad -61,6071 \quad 7,7717]. \quad (5.20)$$

Observa-se que os ganhos resultantes possuem amplitudes inferiores às apresentadas em (5.18), desse modo, espera-se que o sinal de controle também seja reduzido e a resposta seja mais rápida e com menor amplitude máxima. A simulação, para condições iniciais nulas, foi realizada utilizando o controlador (5.20) e produziu os sinais de saída e de controle que podem ser observados na Figura 33.

O sinal de controle \tilde{v}_k atingiu amplitudes menores que o apresentado na Figura 30 permanecendo abaixo de 10 durante todo o teste e, por consequência, o sinal de entrada do modelo \hat{u}_k não foi afetado pelos efeitos da saturação. A Tabela 5 apresenta os resultados quantitativos, em que é possível verificar que os critérios de projeto foram atendidos pelo

Figura 33 – Teste empregando \mathcal{D}_R -estabilidade e limitação do sinal de controle no sistema de dois tanques em cascata. O sinal de saída está representado em (a) e o de controle em (b).

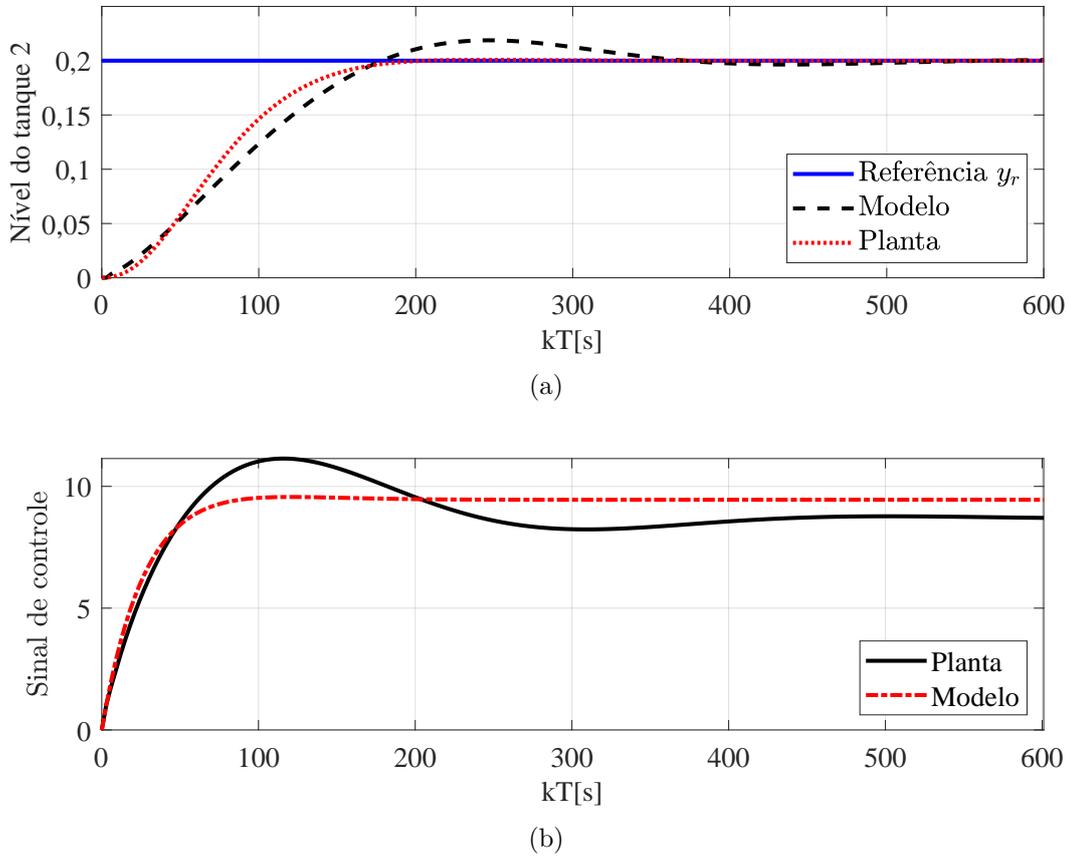


Tabela 5 – Resultados do teste da \mathcal{D}_R -estabilidade junto à limitação do sinal de controle na planta de dois tanques em cascata.

Origem dos dados	T_s [s]	MUP[%]
Projeto	200	4,6
Planta	324	8,74
Modelo	168	0,46

modelo. Além disso, a redução do ganho fez com que a planta e o modelo respondessem de forma mais parecida. Porém, devido às diferenças evidenciadas na Figura 29, era esperado que a planta não obedecesse os critérios de projeto tal como o modelo.

A resposta apresentada por Rayouf, Ghorbel e Braiek (2018) para o sistema de dois tanques em cascata tem MUP = 0% e $T_s = 200$ s. Porém, devido a saturação da saída sempre que a entrada é superior a 3,5, a limitação da entrada apresentada neste trabalho foi de 0 a 3,5, enquanto em Rayouf, Ghorbel e Braiek (2018) foi de 0 a 5. O sinal de controle mais elevado permite que uma resposta mais rápida seja obtida, porém, o ponto negativo é que a estratégia apresentada por Rayouf, Ghorbel e Braiek (2018) resulta em um sinal de controle que possui aspecto chaveado, diferente do que se encontra

neste trabalho que é suave, sendo menos desgastante para a planta.

Outro ponto de melhoria pertencente à estratégia apresentada nesta pesquisa diz respeito ao controlador. Pois, em [Rayouf, Ghorbel e Braiek \(2018\)](#), para que o seguimento de referência fosse realizado com sucesso, foi utilizado um pré-filtro na entrada, que é recalculado a cada iteração. O problema é evidenciado na prática, quando percebe-se que a cada iteração o cômputo do ganho do pré-filtro deve ocorrer antes que o período de amostragem se complete. Dessa maneira, pode ser necessário um *hardware* rápido e caro a depender do período de amostragem. Na proposta feita na Seção 4.3, o seguimento de referência foi desenvolvido utilizando um PI que é um ganho estático e independente de cálculos.

Devido à imprecisão do modelo para amplitudes superiores a 0,2, como visto na Figura 29, a planta não atingiu o mesmo desempenho que o modelo. Porém, para amplitudes menores, por exemplo $y_r = 0,1$, foi possível obter um $T_s = 144s$ para a planta ao custo de uma MUP = 1,13%. Resultado próximo ao modelo, que atingiu um $T_s = 144s$ e uma MUP = 0,05%

Por fim, destaca-se a possibilidade de projetar um controlador orientado por critérios de desempenho, podendo estabelecer a melhor relação para cada planta no que diz respeito a MUP, T_s e amplitude do sinal de controle. Tais características somente estão presentes nas metodologias apresentadas neste trabalho, de forma que o tornam uma opção relevante para controle dos modelos de blocos interconectados.

Na identificação do sistema de dois tanques em cascata apresentada na Subseção 5.1.2, havia a presença de ruído, nesse sentido é interessante que ele seja levado em consideração no controle. Dito isso, uma aplicação interessante é verificar se a norma \mathcal{H}_∞ do modelo de Hammerstein linearizado pela metodologia paramétrica pode ser limitada com sucesso.

Como informado no início dessa subseção, as LMIs apresentadas para limitação da norma \mathcal{H}_∞ são desenvolvidas para estabilização, por esse motivo, nos testes descritos a seguir não considerou-se a referência $y_r = 0,2$ como antes. Além disso, uma vez que na identificação não havia sido estimada uma matriz para a entrada de ruídos, definiu-se $B_w = [1 \ 1 \ 0]'$, de forma que todo ruído fosse transferido sem atenuação aos estados e o terceiro estado, relacionado à integral do erro, não sofresse influência direta da entrada de ruído.

Em busca do menor γ capaz de limitar a norma de pior caso do modelo (5.14), com $y_r = 0$, empregou-se uma rotina de minimização por meio do YALMIP e SeDuMi para computar os ganhos que satisfizessem as LMIs do Teorema 4.2. As matrizes resultantes

Tabela 6 – Resultado quantitativo do controle \mathcal{H}_∞ aplicado ao sistema de dois tanques em cascata.

Limitante γ	Norma do modelo	Norma da planta
1,06	3,10	2,68

foram

$$G = \begin{bmatrix} 2616,6343 & -7,7360 & 2,5599 \\ -6,7046 & 0,9655 & 0,9746 \\ 5,4708 & 0,9283 & 39863,4645 \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

$$Z = 10^3 \begin{bmatrix} -1180,2293 & -0,7889 & -0,8425 \end{bmatrix},$$

e o custo garantido γ foi retornado como 1,06. O controlador pode ser obtido por

$$\bar{K} = ZG^{-1} = \begin{bmatrix} -462,6411 & -4524,1454 & 0,1192 \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Os ganhos do controlador são elevados se comparados às amplitudes de sinal de entrada utilizados para identificar o sistema, todavia é característica do controle \mathcal{H}_∞ que os ganhos da entrada de ruído para a saída sejam reduzidos ao custo de altos ganhos no controlador. Na Figura 34 apresenta-se a simulação considerando condições iniciais nulas. Pode-se observar que a amplitude da saída na Figura 34 (b), tanto do modelo quanto da planta, foram qualitativamente maiores que o ruído inserido no sistema, apresentado na Figura 34 (a). Isso pode ser confirmado de maneira quantitativa pela norma do modelo, calculada como 3,10 e da planta, calculada como 2,68, ambas maiores que o limitante $\gamma = 1,06$. Esses resultados estão organizados na Tabela 6.

Assim como no caso da \mathcal{D}_R -estabilidade apresentada anteriormente, o problema foi que o sinal de controle elevado, que pode ser verificado na Figura 34 (c), saturou e impediu os sistemas de agirem da maneira linear que espera-se. Como solução, adotou-se a redução da amplitude do sinal de controle \tilde{v}_k por meio da inclusão da LMIs (4.49) no cômputo do controlador. Selecionando novamente $\delta = 10$ e empregando o YALMIP e SeDuMi para resolver uma rotina de minimização foram encontradas as seguintes matrizes

$$G = \begin{bmatrix} 0,1144 & -0,0710 & 0,2854 \\ -0,0710 & 0,2001 & 1,2572 \\ 0,2854 & 1,2572 & 10^4 \times 245,4434 \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

$$Z = \begin{bmatrix} -0,9633 & -3,1894 & 54,5615 \end{bmatrix},$$

e o custo garantido γ encontrado como 12,52. O controlador pode ser computado por

$$\bar{K} = ZG^{-1} = \begin{bmatrix} -23,4666 & -24,2651 & 10^{-5} \times 3,7387 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Pode-se perceber que os ganhos do controlador foram reduzidos se comparados aos ganhos apresentados em (5.22), como consequência o sinal de controle também reduziu como pode ser visto na Figura 35 (c) que apresenta o resultado da simulação para

Figura 34 – Controle \mathcal{H}_∞ aplicado ao sistema de dois tanques em cascata. O ruído de entrada é apresentado em (a), em (b) tem-se a saída resultante e em (c), o sinal de controle.

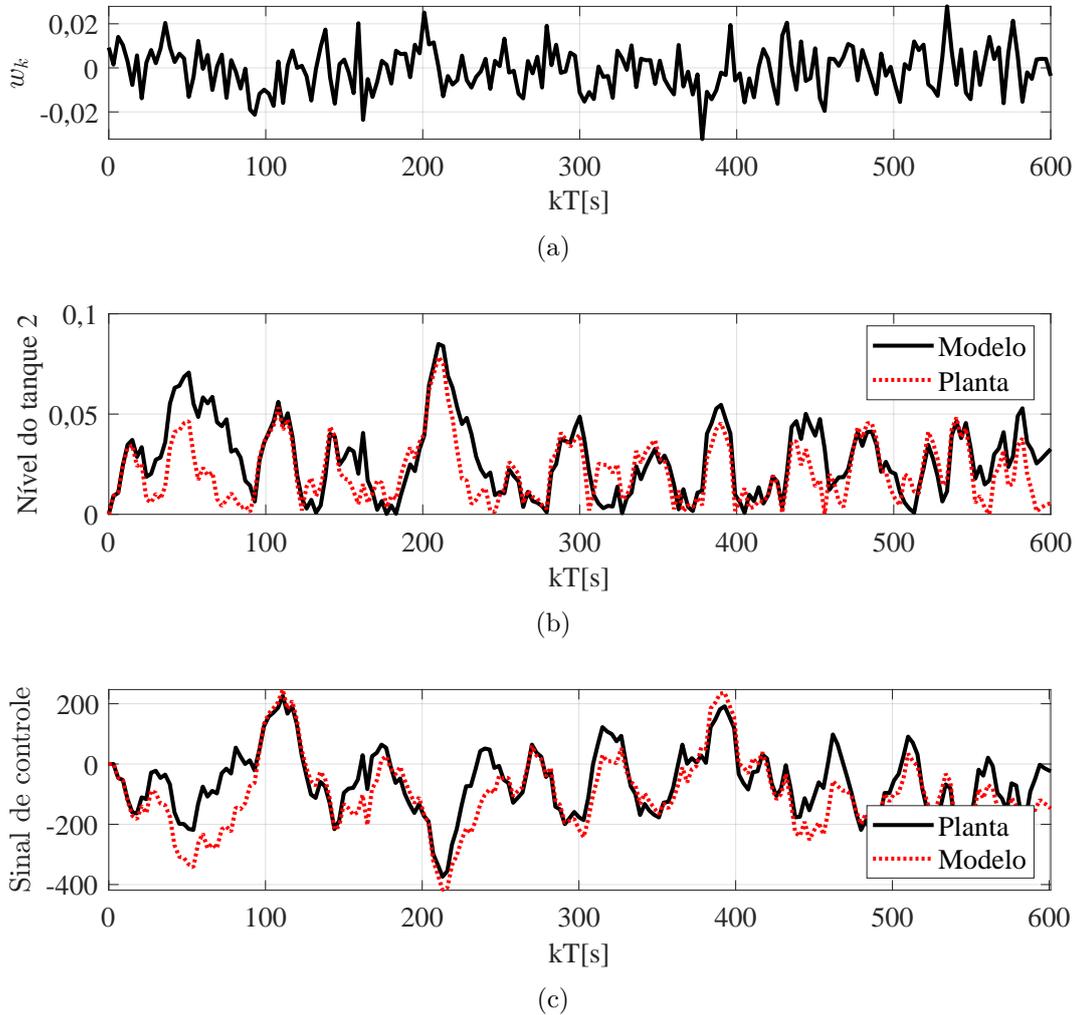


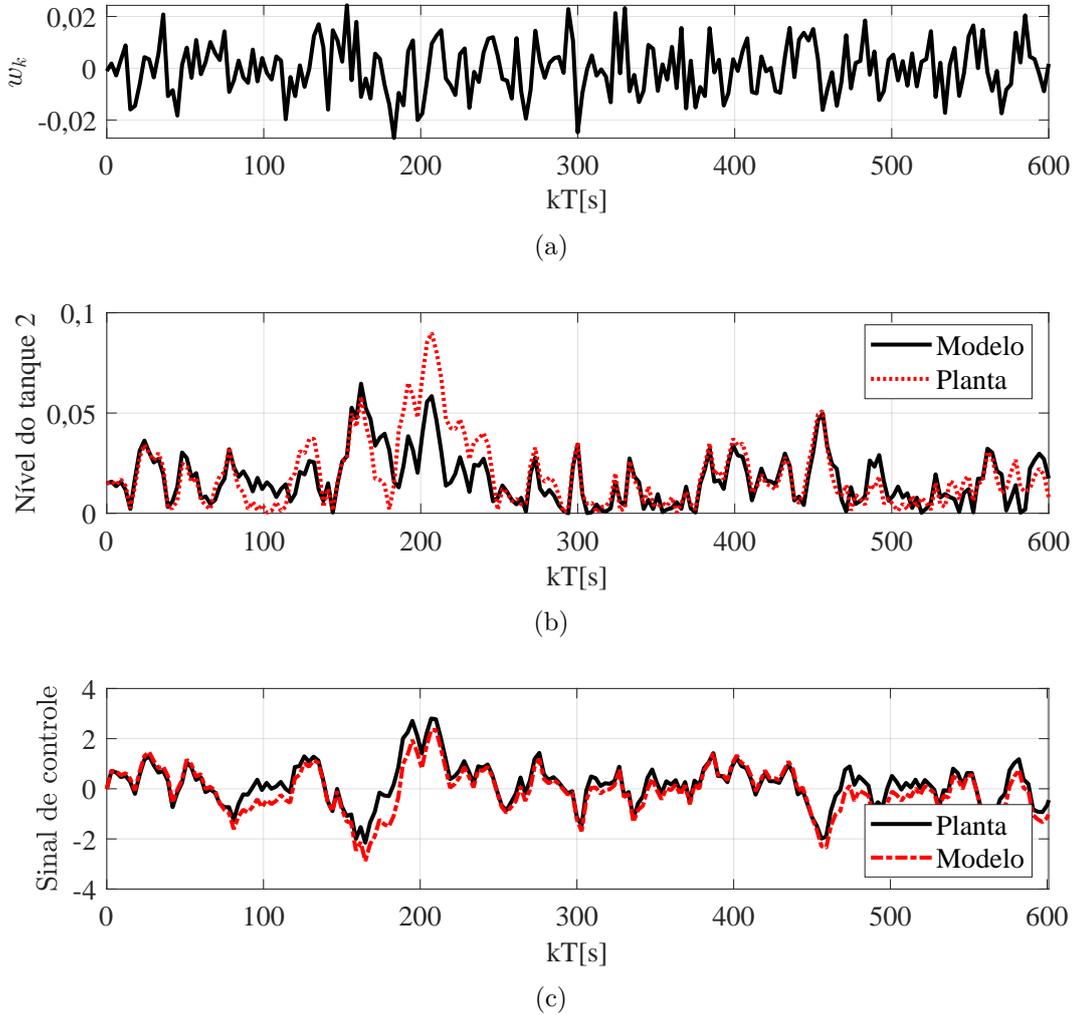
Tabela 7 – Resultados do teste com \mathcal{H}_∞ e limitação do sinal de controle aplicado ao sistema de dois tanques em cascata.

Limitante γ	Norma do modelo	Norma da planta
12,52	2,08	2,54

condições iniciais nulas. Porém, na Figura 35 (b), observa-se que o sinal de saída ainda é qualitativamente maior que o ruído apresentado na Figura 35 (a). Uma análise quantitativa, como apresenta-se na Tabela 7 sugere que o resultado está correto, pois, para a atual configuração o limitante γ tornou-se 12,52 e a norma do modelo foi calculada como 2,08 e da planta como 2,54, ambas obedecendo a restrição imposta pelas LMIs.

Para verificar o comportamento da inversa e mostrar seu funcionamento, um teste semelhante ao apresentado no início dessa seção em malha aberta foi realizado, porém em malha fechada. Para isso utilizou-se o controlador (5.20), encontrado utilizando a \mathcal{D}_R -estabilidade e limitação do sinal de controle. O objetivo é verificar se a saída da planta e

Figura 35 – Controle \mathcal{H}_∞ com restrição no sinal de controle aplicado ao sistema de dois tanques em cascata. O sinal do ruído de entrada está representado (a), a saída em (b) e o de controle em (c).

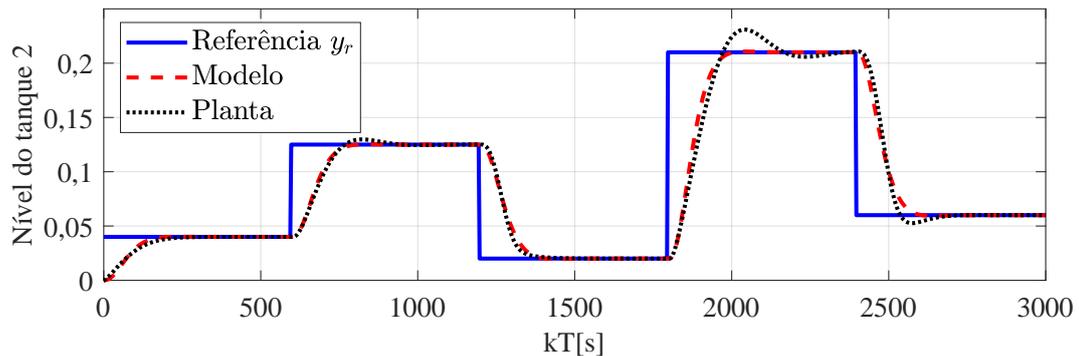


do modelo podem seguir uma dada referência em degrau em toda a faixa que a planta foi identificada.

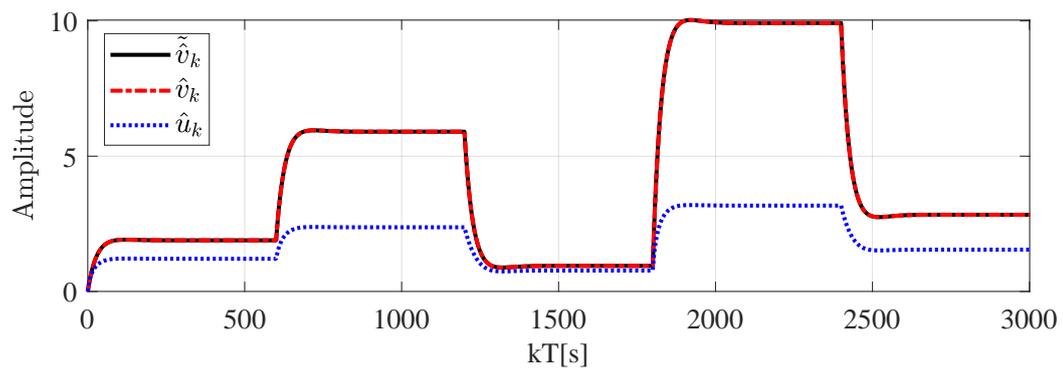
O sinal de referência foi selecionado como uma sequência de degraus tais que as amplitudes de saída fossem próximas às apresentadas na Figura 29 (a). O resultado pode ser observado na Figura 36 (a), em que é possível notar que a planta e o modelo atingem corretamente as referências e respondem de forma igual para amplitudes y_r menores que 0,2, assim como ocorreu no teste em malha aberta. Na Figura 36 (b) encontra-se o sinal \tilde{v}_k que é gerado pela realimentação de estados $\tilde{v}_k = \bar{K}\bar{x}_k$. Pode-se perceber que seu valor é inferior a 10 durante todo experimento. Esse sinal é inserido na inversa e produz o sinal de entrada do modelo \hat{u}_k , limitado por uma saturação entre 0 e 3,5. Dessa forma, por mais que o sinal de controle \tilde{v}_k supere o valor 10, e por consequência \hat{u}_k ultrapasse 3,5, o sinal que é inserido no modelo será limitado 3,5. Após ser saturado, \hat{u}_k é inserido na curva estática não linear resultando em \hat{v}_k . Em condições normais de operação com a inversão

funcional, o sinal $\tilde{v}_k \approx \hat{v}_k$. Isto está evidenciado na Figura 36 em que há sobreposição dos sinais em toda a faixa de teste, mostrando que nessa região a inversa apresentada é completamente funcional.

Figura 36 – Teste da funcionalidade da inversão em toda região de operação da planta e modelo. O sinal de saída do modelo e planta está representado em (a). Verificação da linearização pode ser vista em (b).



(a)



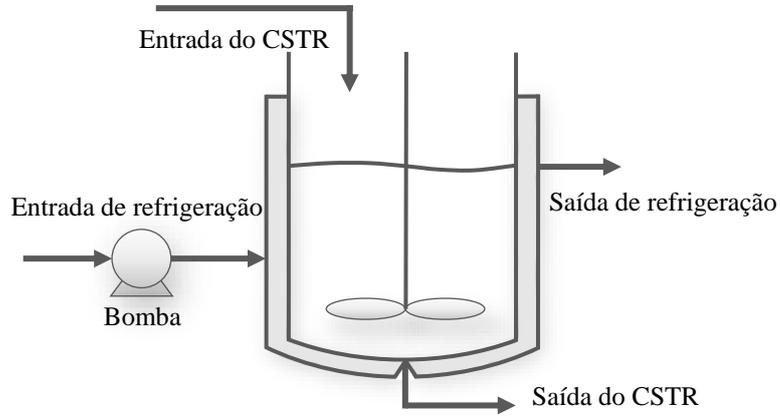
(b)

5.2 Experimento 2

5.2.1 Apresentação da Planta do CSTR

O Experimento 2 consiste em um CSTR proposto por Luning et al. (2017). Esse reator é atraente do ponto de vista de custos e é capaz de garantir, por intermédio do controle preciso e robusto, produtos com qualidade uniforme, o que o torna amplamente utilizado na indústria química (LUNING; ZHAO; SPURGEON, 2018). O esquema do processo que descreve o funcionamento do CSTR é apresentado na Figura 37.

Figura 37 – Esquema de entradas e saídas do CSTR.



Fonte: Adaptado de Luning et al. (2017).

O conjunto de equações adimensional que descreve o sistema é

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_c x_1 + D_c(1 - x_1)e^{\frac{\gamma_c x_2}{\gamma_c + x_2}} + \beta w_1, \\ \dot{x}_2 &= -a_c x_2 - b_c D_c(1 - x_1)e^{\frac{\gamma_c x_2}{\gamma_c + x_2}} + \beta(u - x_2 + w_2), \\ y &= x + \nu, \end{aligned} \quad (5.25)$$

em que $x_1 \in \mathbb{R}$ é a concentração, $x_2 \in \mathbb{R}$ é a temperatura, $u \in \mathbb{R}$ é a entrada da planta, $y \in \mathbb{R}^2$, a saída da planta, $x = [x_1 \ x_2]'$ $\in \mathbb{R}^2$, o vetor de estados, $\nu = [\nu_1 \ \nu_2]'$ e $w = [w_1 \ w_2]'$ $\in \mathbb{R}^2$, os ruídos externos. Os demais parâmetros a_c , b_c , β , γ_c e D_c são constantes reais positivas. A técnica utilizada para simular numericamente a planta foi a *Forward Euler* que discretiza o conjunto de equações (5.25) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= \left[-a_c x_{1,k} + D_c(1 - x_{1,k})e^{\frac{\gamma_c x_{2,k}}{\gamma_c + x_{2,k}}} + \beta w_{1,k} \right] T + x_{1,k}, \\ x_{2,k+1} &= \left[-a_c x_{2,k} - b_c D_c(1 - x_{1,k})e^{\frac{\gamma_c x_{2,k}}{\gamma_c + x_{2,k}}} + \beta(u_k - x_{2,k} + w_{2,k}) \right] T + x_{2,k}, \\ y_k &= x_k + \nu_k. \end{aligned} \quad (5.26)$$

De forma a especificar os valores da planta do CSTR, Luning et al. (2017) apresenta os parâmetros da Tabela 8. Empregando esses dados, incluindo o período de amostragem selecionado como $T = 0,05s$, o modelo (5.26) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= \left[-x_{1,k} + 0,072(1 - x_{1,k})e^{\frac{20x_{2,k}}{20+x_{2,k}}} + 0,3w_{1,k} \right] 0,05 + x_{1,k}, \\ x_{2,k+1} &= \left[-x_{2,k} + 0,576(1 - x_{1,k})e^{\frac{20x_{2,k}}{20+x_{2,k}}} + 0,3(u_k - x_{2,k} + w_{2,k}) \right] 0,05 + x_{2,k}, \\ y_k &= x_k + \nu_k. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Tabela 8 – Parâmetros para o sistema do CSTR retirado de Luning, Zhao e Spurgeon (2018).

Parâmetro	Valor
a_c	1
b_c	-8
β	0,3
γ_c	20
D_c	0,0072

5.2.2 Identificação na Estrutura de Wiener

A fim de implementar a metodologia de identificação em duas etapas apresentada na Subseção 2.4.2.2, foram empregados os dados resumidos na Tabela 9. As amplitudes para o ensaio estático foram selecionadas como $E_{\min} = 0$ e $E_{\max} = 50$. A quantidade de degraus foi escolhida como $q_e = 31$ e o tempo para estabilização para cada degrau $M_e = 100$ iterações.

Tabela 9 – Dados do ensaio dinâmico e estático para identificação do CSTR em duas etapas.

Tipo de ensaio	Parâmetro	Valor
Dinâmico	Q_{\min}	0
	Q_{\max}	50
	M_d	20
	N_{amostra}	10000
Estático	E_{\min}	0
	E_{\max}	50
	M_e	100
	q_e	31
	N_{amostra}	3100

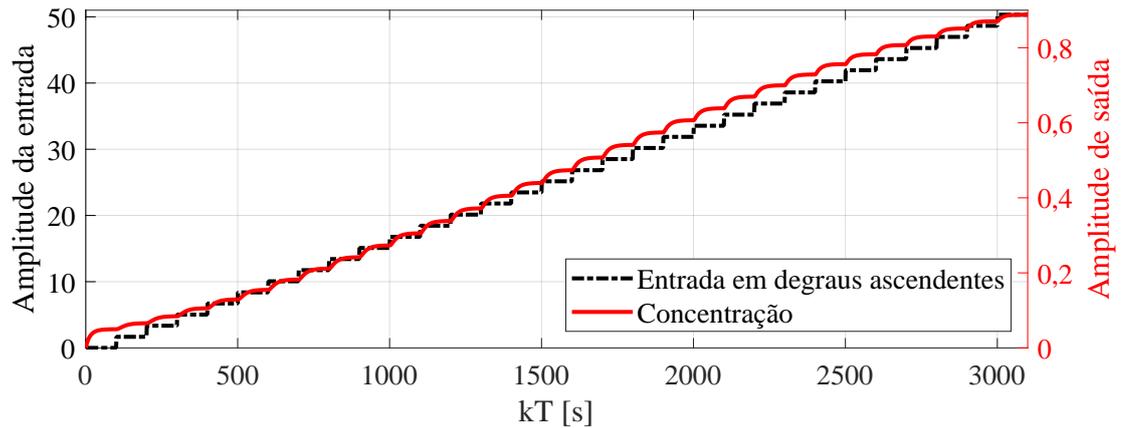
O resultado da aplicação dos degraus ascendentes na planta variando de 0 a 50 gerou os 3100 pontos que podem ser visualizados na Figura 38. Cada saída do CSTR possui uma curva não linear, mas ambas apresentam características de uma curva de terceiro grau, além de influências de graus menores. Isso pode ser confirmado ao fazer a interpolação dos pontos coletados a cada $lM_e = l100$ iterações, com $l = 1, \dots, q_e$ utilizando o comando *polyfit* do MATLAB®. Como resultado, obtém-se um polinômio de terceira ordem a partir de cada uma das curvas de concentração e temperatura. Os parâmetros da curva de concentração foram encontrados como

$$\hat{y}_{1,k} = (-0,0058\hat{v}_k^3 + 0,4246\hat{v}_k^2 + 9,8549\hat{v}_k + 47,2715) \times 10^{-3}, \quad (5.28)$$

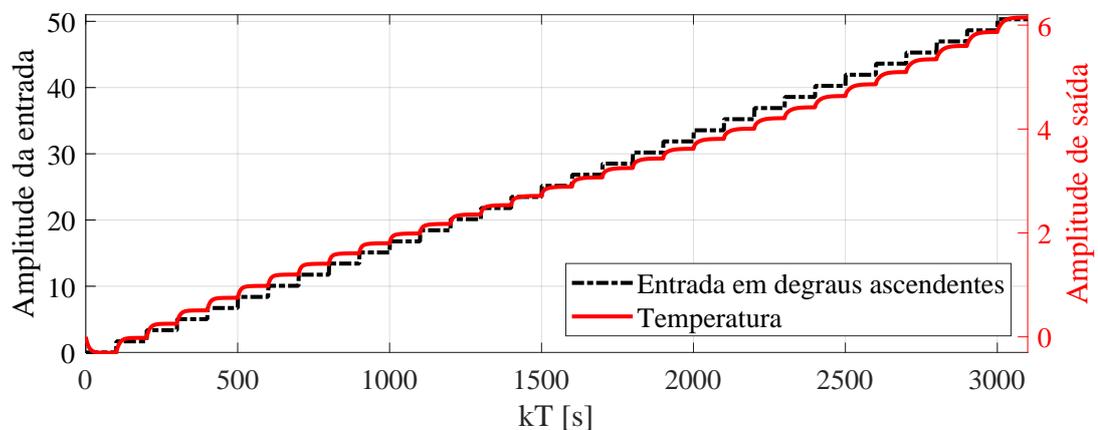
e os da temperatura como

$$\hat{y}_{2,k} = (0,0035\hat{v}_k^3 - 0,2610\hat{v}_k^2 + 17,0052\hat{v}_k - 29,2097) \times 10^{-2}. \quad (5.29)$$

Figura 38 – Resposta do CSTR para entrada em degraus ascendentes. Em (a) encontra-se a curva da concentração e em (b) a de temperatura.



(a)



(b)

Apesar das amplitudes diferentes, as curvas obtidas tem característica parecidas e são plotadas na Figura 39 para a variação da entrada \hat{v}_k de 0 a 50. Percebe-se que as duas curvas possuem termo constante e à medida que a ordem aumenta os parâmetros das curvas (5.28) e (5.29) tornam-se menores. Isso explicita que a curva possui características de um polinômio de terceiro grau, porém, possui influências de parâmetros de graus menores também, tornando-a trabalhosa caso fosse necessário utilizar a inversão paramétrica. Isso conclui o experimento que foi utilizado para identificar a não linearidade estática.

Prosseguindo para o ensaio dinâmico, o primeiro passo é criar um sinal PRBSM. Dessa maneira, foi selecionado um tempo de bit $M = 20$ e amplitudes variando de $Q_{\min} = 0$ a $Q_{\max} = 50$, iguais às utilizadas no ensaio estático e que também estão resumidas na

Figura 39 – Curvas não lineares do CSTR obtidas por interpolação dos dados do ensaio estático.

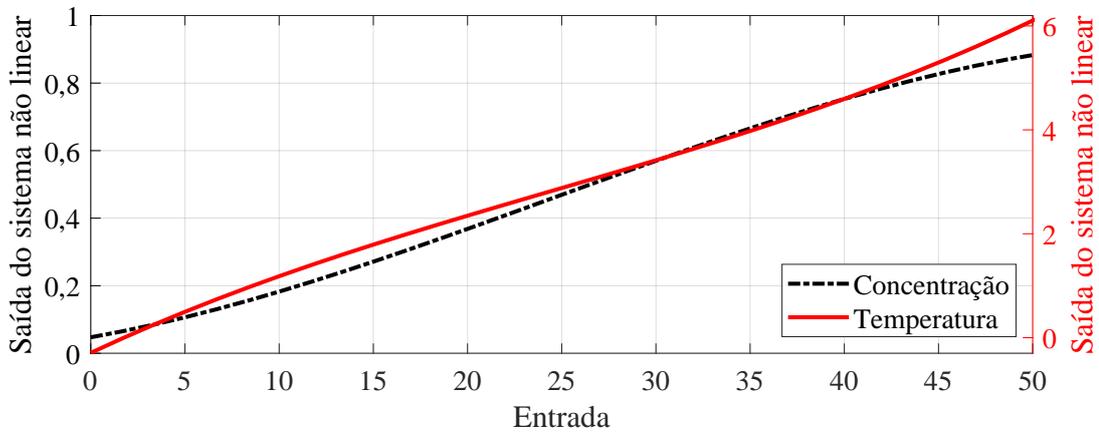
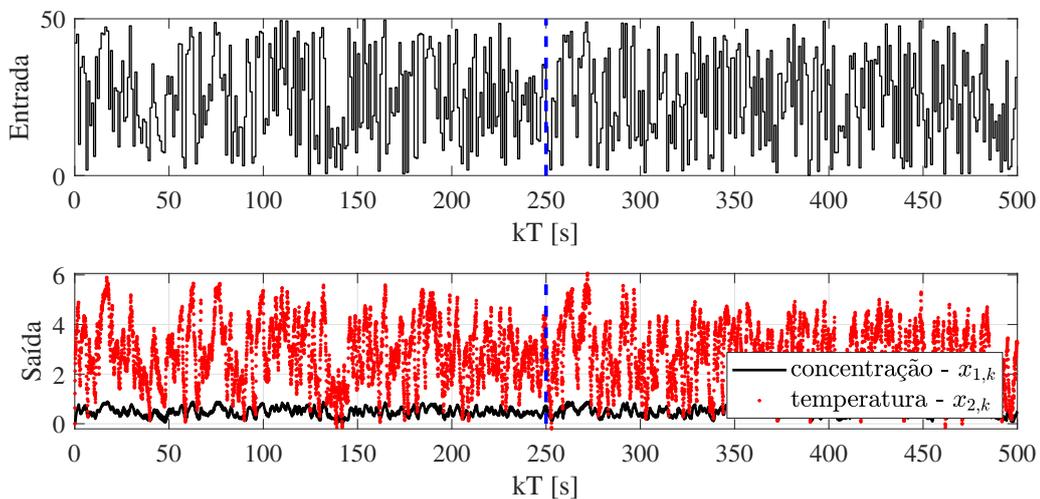


Tabela 9. O sinal de resposta do CSTR à aplicação do PRBSM foram coletados e podem ser observados na Figura 40 em sua parte inferior, assim como o sinal PRBSM que o gerou, na parte superior.

Figura 40 – Dados do ensaio dinâmico realizado no CSTR, compreendendo parte da identificação em duas etapas. A divisa azul pontilhada separa os dados de identificação à esquerda e de validação à direita.



Foram geradas $N_{\text{amostra}} = 10000$ amostras divididas em $N_{\text{id}} = 5000$ para identificação e $N_{\text{val}} = 5000$ para validação. Com o interesse em aproximar um pouco mais a simulação à realidade das plantas, como descrito na Subseção 5.2.1, a planta foi submetida a ruídos de processo e medição. O ruído de processo foi modelado como ruído branco com média nula e desvio padrão unitário. O ruído de medição colorido utilizado é o apresentado em (5.6). Os distúrbios resultam em valores de SNR de 22,6247 dB para a saída $y_{1,k}$ e 21,4346 dB para $y_{2,k}$.

Antes de fazer a identificação com os dados do experimento dinâmico, as inversas das curvas não lineares identificadas precisam ser utilizadas para obter uma estimativa do sinal presente na saída do bloco dinâmico do modelo. No caso do **CSTR**, foi utilizada a metodologia de inversão não paramétrica. Por questões de organização, a descrição completa será feita na Seção 5.2.3 e, neste momento, apresenta-se apenas o resultado necessário para dar prosseguimento ao processo de identificação. As inversas das não linearidades resultaram em polinômios de terceira ordem para concentração

$$\tilde{v}_{1,k} = 66,0577\hat{y}_{1,k}^3 - 91,1206\hat{y}_{1,k}^2 + 89,4058\hat{y}_{1,k} - 3,7410, \quad (5.30)$$

e temperatura

$$\tilde{v}_{2,k} = -0,1407\hat{y}_{2,k}^3 + 1,2026\hat{y}_{2,k}^2 + 5,7817\hat{y}_{2,k} + 1,7162. \quad (5.31)$$

Quando as curvas inversas obtidas são dispostas em cascata com a curva não linear resultante da identificação, pode-se obter uma estimativa do sinal intermediário \tilde{v}_k , que é a saída do bloco dinâmico linear. Nesse sentido, os dados de saída da planta, apresentados na segunda parte da Figura 40, foram aplicados em (5.30) e (5.31). Finalmente, as matrizes da dinâmica do sistema foram identificadas ao empregar o par de dados $\{u_k, \tilde{v}_k\}_{k=1}^{N_{\text{id}}}$ no **MOESP-PO**.

O **MOESP-PO** retornou as matrizes \check{A} , \check{B} , \check{C} e \check{D} que foram convertidas nas matrizes

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} 0,9429 & 0,0413 \\ 0,0011 & 0,8947 \end{bmatrix}, & \hat{B} &= \begin{bmatrix} 0,0184 \\ 0,1008 \end{bmatrix}, \\ \hat{C} &= I_2, & \hat{D} &= \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0041 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

por meio da transformação

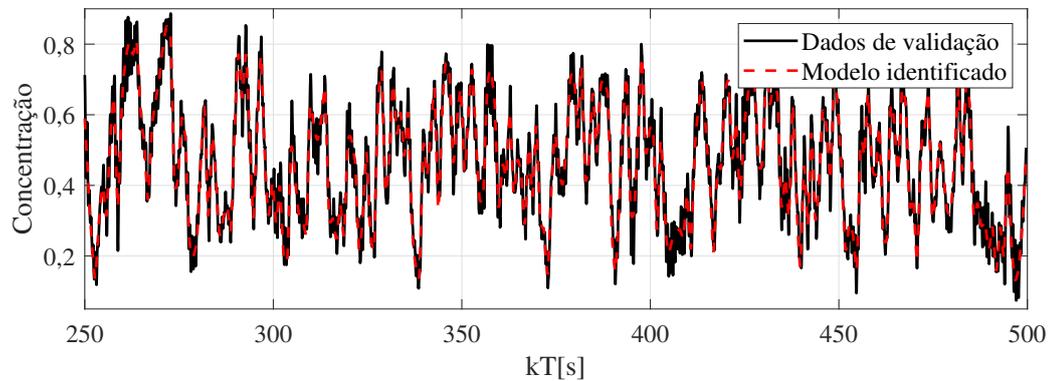
$$T_{\text{ee}} = \begin{bmatrix} -0,0309 & -0,0199 \\ 0,0420 & -0,0636 \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

aplicada em (2.24) ao considerar C como I_2 .

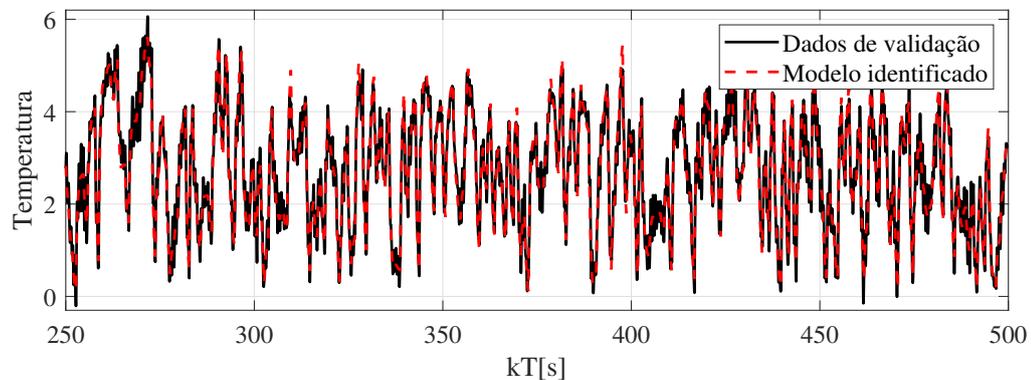
Dessa forma, a planta do **CSTR** foi identificada na estrutura de Wiener com duas curvas estáticas e um bloco dinâmico. Para validar o modelo obtido, uma simulação livre foi realizada com os N_{val} dados de validação, que correspondem às últimas 5000 amostras coletadas no ensaio dinâmico. O resultado pode ser conferido na Figura 41.

Por uma visão qualitativa, nota-se que os dados produzidos pelo modelo acompanham os dados de validação na região em estudo, tanto para a saída de concentração quanto para a de temperatura. Considera-se que a dinâmica do **CSTR** foi capturada pelo modelo de Wiener. A posse do modelo possibilita a exploração de testes severos que não poderiam ser feitos na planta, ou que seriam demorados. Além disso, pode-se projetar controladores para a planta baseando-se no modelo, uma vez que as matrizes são todas conhecidas e tem-se acesso a todos sinais envolvidos.

Figura 41 – Validação por simulação livre da curva dinâmica do CSTR relacionada à saída de concentração em (a) e da temperatura em (b).



(a)



(b)

A curva estática é validada ao plotar a saída do CSTR e a do modelo no mesmo gráfico considerando uma entrada comum. Para visualizar a característica não linear do processo, assim como no ensaio estático, são aplicados degraus ascendentes e coletadas as saídas em regime permanente. A Figura 42 apresenta essas curvas, que indicam por análise gráfica o quanto a curva não linear identificada está próxima à que o CSTR apresenta em cada uma de suas saídas.

Os índices de desempenho VAF e RMSE são apresentados na Tabela 10 e, assim como na análise gráfica, indicam que o modelo acompanha o sistema real de forma satisfatória dentro da região a que se propõe o experimento.

Os autovalores do sistema indicam que ele é estável uma vez que estão localizados dentro do círculo de raio unitário. Diferentemente do sistema de tanques em cascata que apresentou os polos complexos conjugados, os polos do modelo do CSTR são puramente reais, como mostrados na Tabela 10.

Figura 42 – Validação da curva não linear estática do **CSTR** em vermelho pontilhado, que acompanha os pontos da curva não linear obtida diretamente do sistema apresentada em preto contínuo.

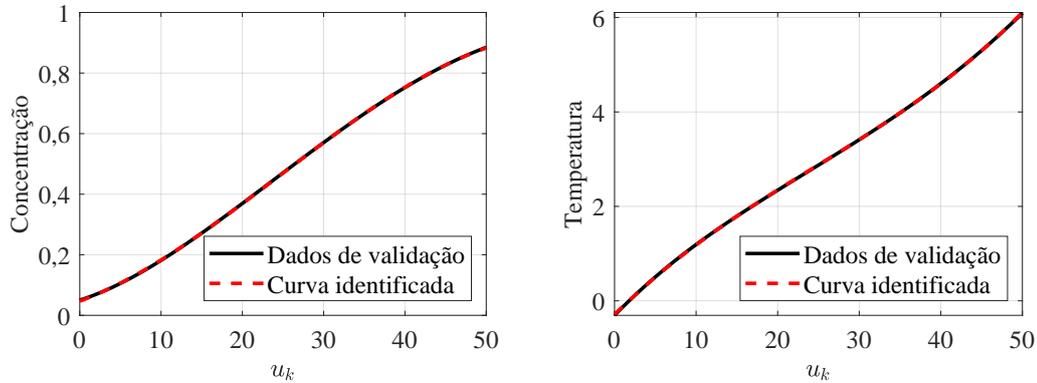


Tabela 10 – Resumo dos resultados obtidos da identificação do **CSTR**.

Saída	VAF [%]	RMSE	Autovalores
$y_{1,k}$	93,2597	0,2601	0,9439 e 0,8936
$y_{2,k}$	93,9173	0,2468	

5.2.3 Linearização não Paramétrica

As inversões das curvas utilizando o método não paramétrico são realizadas em dois passos principais, de forma simples, que resultam em polinômios de ordem não necessariamente igual ao que o gerou, ou seja, ela pode ser diferente de r . Para o **CSTR**, a ordem foi igual a 3 e, a fim de encontrá-la, foram plotadas as curvas não lineares estáticas. Nesse teste, a entrada \hat{v}_k varia entre os valores definidos no ensaio estático, 0 e 50 e as saídas \hat{y}_k de acordo com as respostas geradas ao aplicar \hat{v}_k nos parâmetros das curvas não lineares estáticas (5.28) e (5.29). O gráfico com essas curvas foi apresentado na Figura 39, em que encontram-se as saídas relacionadas à concentração em preto tracejado e temperatura em vermelho contínuo.

Invertendo os eixos, ou seja, colocando a entrada \hat{v}_k na vertical e as saídas \hat{y}_k na horizontal, o segundo passo é estimar os polinômios que melhor se aproximem a essas novas configurações dos dados para cada saída. Utilizando o *polyfit* do **MATLAB**[®], pode-se encontrar a estimativa de dois polinômios para representar as curvas em preto contínuo vistas na Figura 43. Como resultado, obteve-se o seguinte polinômio para a inversa da curva de concentração

$$\tilde{v}_{1,k} = 66,0577\hat{y}_{1,k}^3 - 91,1206\hat{y}_{1,k}^2 + 89,4058\hat{y}_{1,k} - 3,7410, \quad (5.34)$$

e este outro para a inversa da curva de temperatura

$$\tilde{v}_{2,k} = -0,1407\hat{y}_{2,k}^3 + 1,2026\hat{y}_{2,k}^2 + 5,7817\hat{y}_{2,k} + 1,7162. \quad (5.35)$$

Figura 43 – Inversão não paramétrica para as curvas não lineares do CSTR.

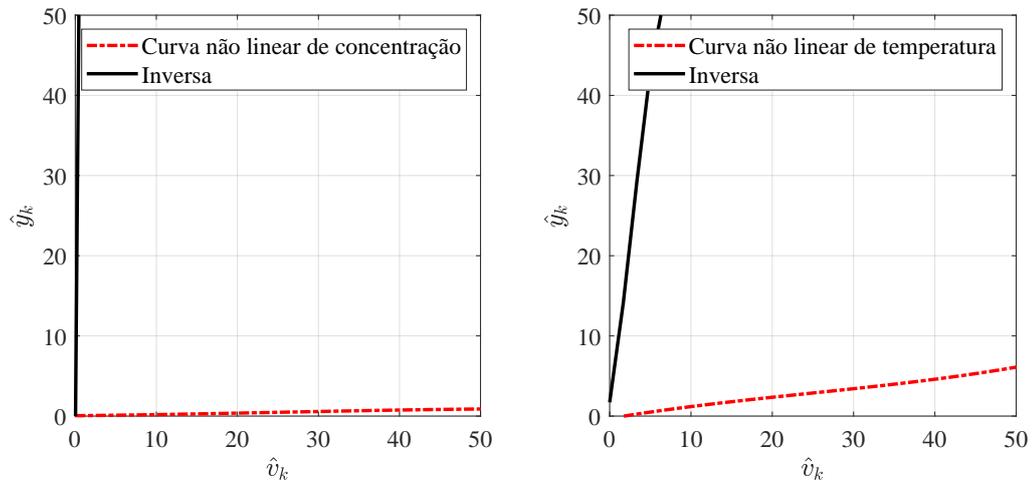
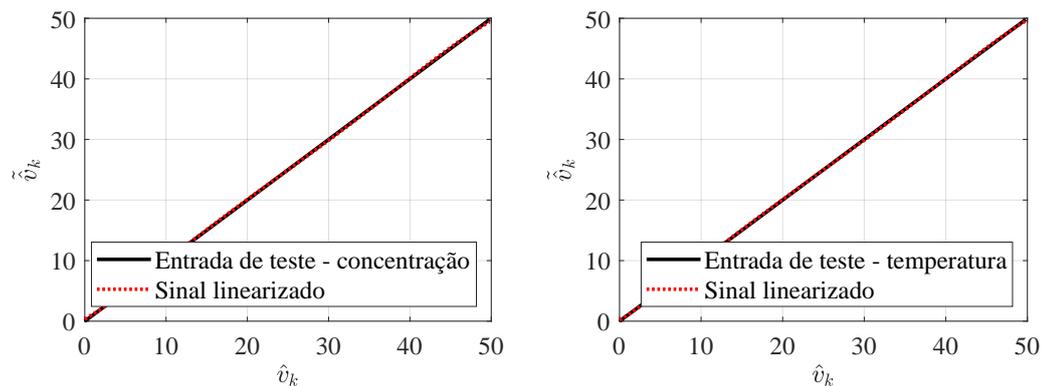


Figura 44 – Teste da inversa não paramétrica na faixa de operação entre 0 e 50.



A Figura 44 apresenta um teste realizado com a inversa, em que a entrada \hat{v}_k é variada dentro dos limites que se deseja fazer controle, entre 0 e 50. A entrada é aplicada nas curvas não lineares identificadas (5.28) e (5.29). Em seguida a saída \hat{y}_k é aplicada no bloco da inversa como apresenta a Figura 11 resultando no sinal \tilde{v}_k . Como o ganho esperado da composição entre a curva não linear e inversa é unitário, pode-se comparar a própria entrada \hat{v}_k e a saída \tilde{v}_k . Exatamente isso que é feito na Figura 44 e percebe-se que a inversão funciona corretamente dentro da faixa que se propõe.

A técnica de linearização não paramétrica pode ser empregada de forma simples em diversas curvas polinomiais, o problema é que a depender da curva que se deseja estimar, o polinômio necessário para obter a resposta correta pode ser de ordem elevada. Isso pode ser observado no Exemplo 3.2, em que uma curva com aparência simples de raiz quadrada, precisou de um polinômio de ordem 5 para obter um bom ajuste (veja (3.2)).

5.2.4 Controle da Planta a partir do Modelo de Wiener

Nesta seção, aborda-se o controle da planta e do modelo de Wiener linearizados pela metodologia de inversão não paramétrica a fim de verificar a possibilidade e influência desse procedimento de linearização para realizar controle. As estratégias a serem aplicadas foram descritas no Capítulo 4 e, assim como foi estabelecido para a planta dos dois tanques em cascata na Subseção 5.1.4, o controle \mathcal{H}_∞ será empregado no contexto em que busca-se estabilização, enquanto a \mathcal{D}_R -estabilidade será empregada em um cenário de seguimento de referência.

Na planta dos dois tanques em cascata, considerou-se saturações no modelo e na planta que levaram o sistema a condições que não foram modeladas. Por outro lado, o CSTR não apresenta saturações em sua planta ou modelo. Esse cenário não é prático, uma vez que toda planta real possui limites nos sinais que produz. Porém, a saturação não foi necessária nesse sistema devido às amplitudes moderadas dos demais sinais do teste se comparada à do sinal aplicado na entrada.

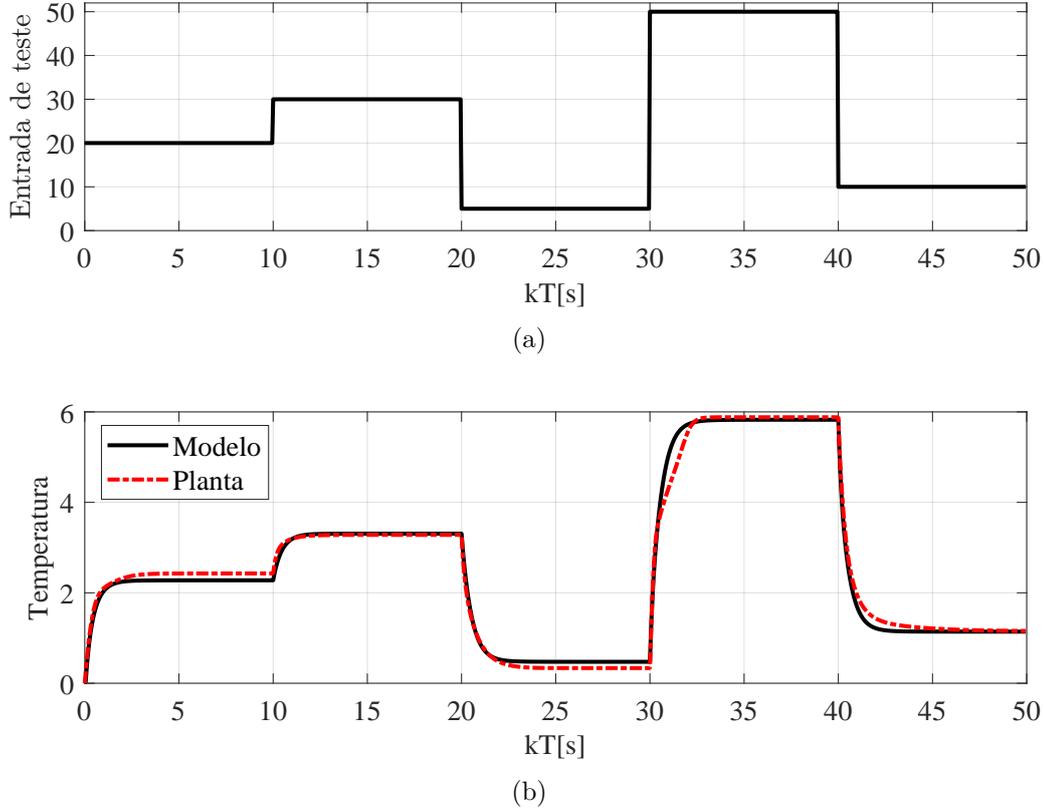
O primeiro experimento realizado foi útil para verificar a capacidade do modelo de acompanhar a planta em malha aberta. Ele permitiu verificar a acurácia da identificação em conjunto com a linearização. Inicialmente, um sinal de teste \hat{u}_k foi gerado com amplitudes variando entre 0 e 50. Os dados em cada instante de tempo podem ser visualizados na Figura 45 (a). Esse sinal foi inserido na entrada da planta e do modelo de Wiener linearizado, estruturado da maneira apresentada na Figura 11.

O efeito que cada variação de amplitude da entrada causa na saída dos sistemas em malha aberta pode ser observado na Figura 45 (b). O modelo resultou em sinais que acompanharam a planta de perto, exceto para o quarto degrau, no qual surge uma diferença entre as dinâmicas dos sistemas. Apesar disso, os ganhos estáticos são próximos entre planta e modelo, de forma que, para o seguimento de referência, o projeto a partir do modelo indica que haverá eficácia nos resultados.

Como descrito na Seção 4.2, as etapas de identificação e linearização podem inserir incertezas no modelo. Entretanto, para o CSTR, como pode ser verificado na Figura 44, a linearização é quase exata e não produz incertezas, dessa forma os parâmetros \underline{m} e \overline{m} foram calculados e o valor encontrado nos dois casos foi $\underline{m} = \overline{m} = 1$. Dessa forma, a fim de levar em consideração possíveis incertezas relacionadas à identificação da não linearidade estática, os parâmetros são selecionados como $\underline{m} = 0,95$ e $\overline{m} = 1,05$. Para todos os cenários apresentados nesta seção, os limites serão considerados operantes sobre a matriz de saída como descreve (4.10), uma vez que a matriz de transmissão direta é nula.

O próximo teste apresentado foi desenvolvido com o objetivo de controlar o estado relacionado à temperatura do CSTR linearizado e em malha fechada, de forma que ele pudesse seguir uma referência com erro nulo. Para esse fim, foi utilizado um controlador PI. O procedimento descrito na Seção 4.3 consiste em inserir um integrador na malha de

Figura 45 – Teste de correspondência entre planta e modelo em malha aberta. A entrada está representada em (a) e a saída em (b).



controle, uma vez que o sistema em estudo, cujos polos foram apresentados na Tabela 10, não possui integradores. Partindo das matrizes apresentadas em (5.32) e utilizando apenas a segunda linha da matriz \hat{C} , uma vez que o objetivo é controlar somente a saída relacionada à temperatura do CSTR, encontrou-se o sistema aumentado a seguir que passou a incluir a presença do integrador

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{x}_{e,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9429 & 0,0413 & 0 \\ 0,0011 & 0,8947 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_{e,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0184 \\ 0,1008 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{u}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_r, \quad (5.36)$$

$$\hat{y}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_{e,k} \end{bmatrix}.$$

Ao empregar as definições (4.14) a (4.16), obteve-se o sistema em malha fechada

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = (\bar{A} + \bar{B}\bar{K}) \bar{x}_k + B_r y_r, \\ \hat{y}_k = \bar{C} \bar{x}_k. \end{cases} \quad (5.37)$$

Como descrito para o modelo de Hammerstein na Subseção 5.1.4, é possível controlar o par (\bar{A}, \bar{B}) com um controlador \bar{K} se o posto da matriz M_c for igual a n_a . Para

o sistema apresentado em (5.36), no qual $n_a = 3$, tem-se

$$M_c = [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \bar{A}^2\bar{B}] = \begin{bmatrix} 0,0184 & 0,0215 & 0,0240 \\ 0,1008 & 0,0902 & 0,0807 \\ 0 & -0,1008 & -0,1910 \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

e seu posto pode ser calculado por meio do **MATLAB**[®] como 3. Portanto, conclui-se que o par (\bar{A}, \bar{B}) é controlável.

Uma estratégia de alocação dos polos de malha fechada do modelo pode garantir alguns critérios de desempenho, visto que o posicionamento deles definem a dinâmica da resposta do sistema. Para isso, o controlador \bar{K} deve ser definido de forma que os polos sejam posicionados em uma região \mathcal{D}_R de interesse. A fim de obter o controlador \bar{K} , foi realizado um projeto orientado a critérios de desempenho, como o tempo de assentamento e **MUP**. Essa estratégia possibilita, por exemplo, deixar a resposta mais rápida em troca do aumento do sinal de controle.

O objetivo estabelecido foi fazer com que o modelo seguisse uma referência em degrau de amplitude $y_r = 5$ com erro regulatório nulo em regime permanente. Além disso, alguns critérios de projeto também foram definidos, como o $T_s = 3s$ e a **MUP** = 4,6%. Orientado por esses objetivos foram implementadas as **LMIs** descritas no Teorema 4.1. Como resultado as seguintes matrizes foram obtidas

$$G = \begin{bmatrix} 0,3932 & 0,0527 & -0,8458 \\ 0,0527 & 0,8876 & 1,2736 \\ -0,8457 & 1,2739 & 5,2724 \end{bmatrix}, \quad Z = [-0,9527 \quad -6,5683 \quad -5,8151], \quad (5.39)$$

que aplicadas em (4.22) resultam no controlador

$$\bar{K} = [2,8075 \quad -10,1488 \quad 1,7990]. \quad (5.40)$$

Os ganhos \bar{K} são utilizados para fechar a malha de controle do sistema aumentado (5.37) e simular tanto o modelo como a planta, considerando condições iniciais nulas. O resultado pode ser observado na Figura 46. De maneira detalhada, na Figura 46 (a) observa-se que a saída da planta acompanha a saída do modelo durante todo o experimento, corroborando com os apontamentos dos índices **VAF** e **RMSE** obtidos para a validação do modelo. Pela curva das respostas, é possível perceber que os critérios de projeto foram atendidos, não só pelo modelo como também pela planta. Os resultados quantitativos estão resumidos na Tabela 11. Na Figura 46 (b) encontra-se o sinal de controle que manteve-se menor que 10 durante todo o teste, amplitude essa que está dentro da região na qual a inversa foi verificada como completamente eficaz, entre 0 e 50.

Como é possível perceber, os ganhos do controlador (5.40) são condizentes se comparados à amplitude que o sinal de controle tem possibilidade de atingir. Outro ponto a ser destacado é que o sistema não conta com saturação em sua composição. À vista

Figura 46 – Resposta do modelo e planta do **CSTR** para projeto considerando $T_s = 3\text{s}$ e $\text{MUP} = 4,6\%$. A saída está representada em (a) e sinal de controle (b).

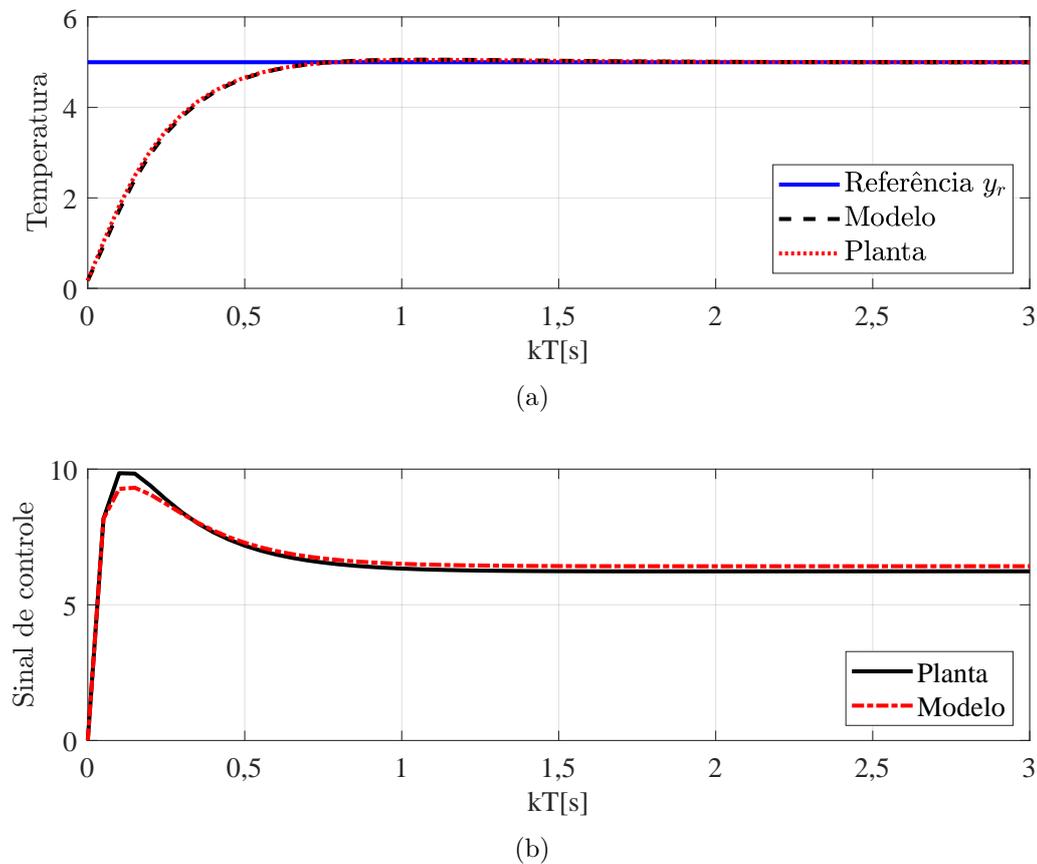


Tabela 11 – Resultados do controle do **CSTR** com \mathcal{D}_R -estabilidade.

Origem dos dados	$T_s[s]$	$\text{MUP}[\%]$
Projeto	3	4,6
Planta	0,75	1,13
Modelo	0,75	0,99

disso, não se fez necessário aplicar **LMI**s que limitem o sinal de controle. Os resultados indicam que a planta do **CSTR** foi linearizada com sucesso pela metodologia de inversão não paramétrica dentro da faixa em que se propunha para realizar controle.

Na etapa de identificação da planta do **CSTR**, apresentada na Subseção 5.2.2, foi considerada a presença de ruídos. Contudo no teste anterior que foi realizado apenas com a \mathcal{D}_R -estabilidade, o ruído foi desconsiderado para que os critérios fossem verificados sem interferências. Dessa maneira, realizou-se outro teste a fim de verificar o comportamento do sistema linearizado sendo controlado na presença de ruído. Em tal caso, a metodologia de controle \mathcal{H}_∞ foi empregada com a intenção de limitar a norma da entrada de ruído para a saída de controle em um determinado valor γ . Mais que isso, utilizou-se uma rotina de minimização a fim de encontrar o menor limitante e reduzir o valor da norma \mathcal{H}_∞ do modelo de Wiener linearizado.

Tabela 12 – Resultados do teste com \mathcal{H}_∞ aplicado ao CSTR.

Limitante γ	Norma do modelo	Norma da planta
1,05	0,87	0,99

A matriz de entradas de ruídos, não fez parte da identificação e foi considerada como $B_w = [1 \ 1 \ 0]'$, assim como relatado para o sistema de dois tanques em cascata na Subseção 5.1.4. Ainda de acordo com o que foi discutido na referida subseção, o controle \mathcal{H}_∞ apresentado neste trabalho é configurado para o caso em que busca-se estabilização, por isso a referência y_r foi considerada nula nesse teste. Apesar das LMIs garantirem a estabilização, em caso de factibilidade, destaca-se que o objetivo foi apenas minimizar o limitante da norma de pior caso γ , uma vez que o sistema aumentado (5.37) não é instável.

Tomando como base o Teorema 4.2, as matrizes (5.37) foram empregadas para programar as LMIs em uma rotina de minimização utilizando o YALMIP e SeDuMi em que obteve-se

$$G = \begin{bmatrix} 36341,1805 & 0,3013 & -88,7681 \\ 0,1309 & 0,9070 & 0,9065 \\ -199,3941 & 0,9086 & 38587,5058 \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

$$Z = \begin{bmatrix} -394,7284 & -8,0550 & 1,8960 \end{bmatrix},$$

e o custo garantido $\gamma = 1,05$. Aplicar as matrizes (5.41) em $\bar{K} = ZG^{-1}$ resultou nos ganhos

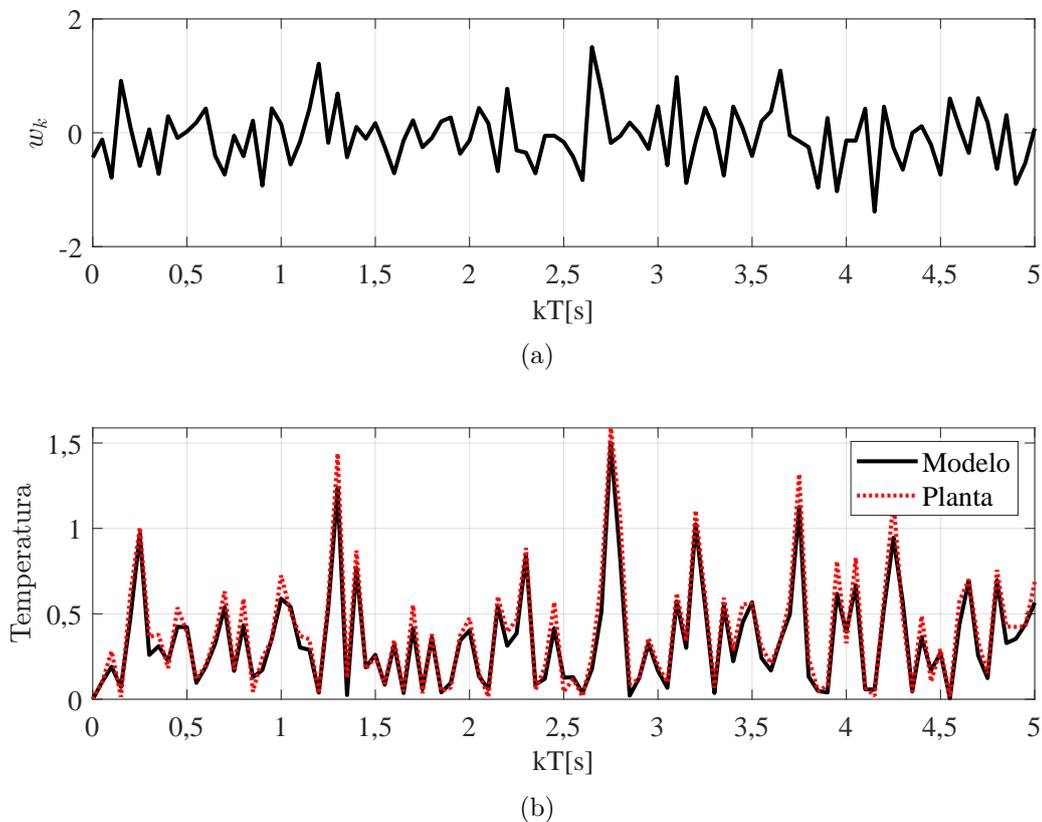
$$\bar{K} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -10,8285 & -8877,1601 & 0,2328 \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

O resultado da simulação dos sistemas considerando o controlador \bar{K} e condições iniciais nulas pode ser visualizado na Figura 47. Mais precisamente, a Figura 47 (a) apresenta o ruído inserido na entrada dos sistemas variando entre $-1,5$ e $1,5$. A saída correspondente está logo abaixo na Figura 47 (b), em que é possível constatar que o modelo reproduz corretamente a dinâmica da planta, mesmo que a entrada tenha variações bruscas.

O menor valor de γ que satisfaz as restrições impostas pelas LMIs programadas foi de 1,05, de forma que no pior caso a norma do ruído de entrada para a saída do modelo teria um ganho de 1,05. Uma avaliação qualitativa é difícil de ser realizada sobre a Figura 47, dessa forma, a alternativa é a análise quantitativa da norma na Tabela 12. É possível verificar que a norma do modelo é inferior ao limitante encontrado pela rotina de minimização. Sendo assim, o teste evidencia que o controle \mathcal{H}_∞ limitou a norma do ruído da entrada para a saída com sucesso, implicando que a linearização proposta não causou efeitos negativos tanto no modelo como na planta.

O último teste realizado no CSTR foi o do seguimento de referências de diversas amplitudes utilizando a \mathcal{D}_R -estabilidade. Com ele foi possível mostrar que a linearização utilizada foi funcional dentro da faixa de operação em que foi realizada a identificação.

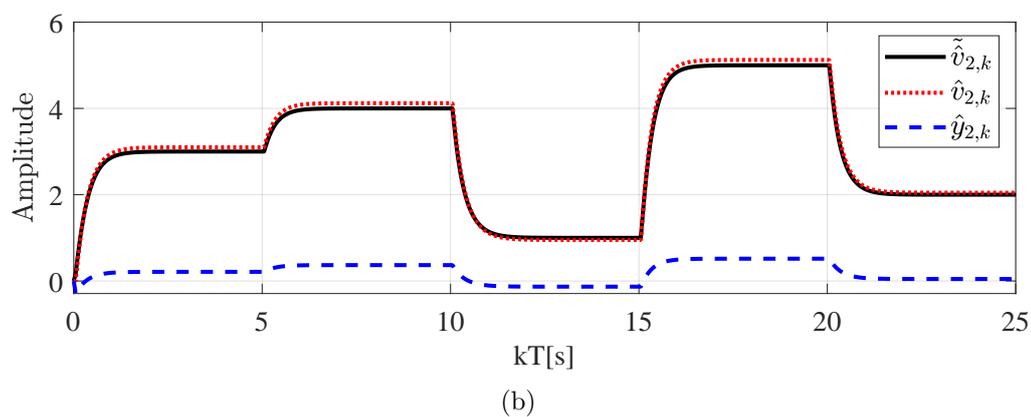
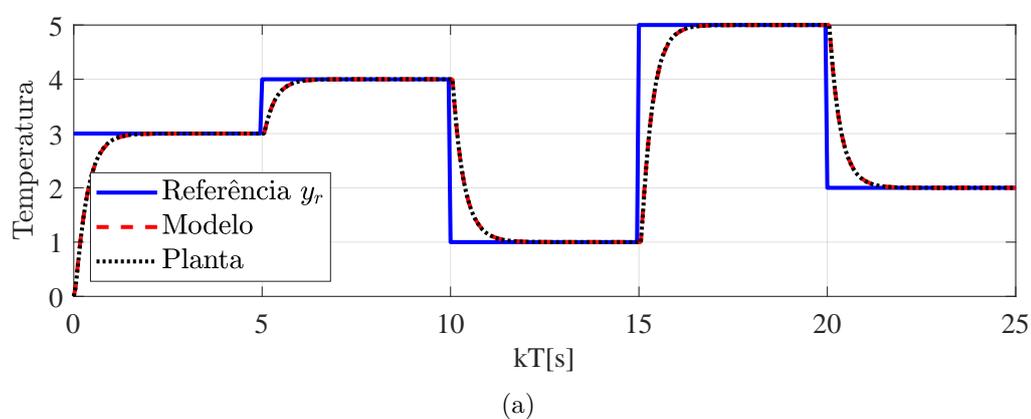
Figura 47 – Resposta da planta e modelo para projeto que visa minimizar a norma de pior caso γ . Ruído aplicado na entrada do sistema (a) e saídas (b).



A Figura 48 apresenta os sinais resultantes da simulação feita com base no controlador apresentado em (5.40).

Na Figura 48 (a) encontra-se a referência em azul contínuo e a resposta da planta e do modelo em vermelho tracejado e preto pontilhado, respectivamente. É possível verificar que a referência é alcançada pelos sistemas para todas amplitudes avaliadas, com sucesso e harmonia entre a dinâmica dos dois. A trajetória dos sinais envolvidos na linearização são apresentados na Figura 48 (b). Apresenta-se somente o sinal relacionado ao modelo, uma vez que não se tem acesso ao sinal intermediário da planta. O sinal gerado pelo bloco linear do modelo é $\hat{v}_{2,k}$ que ao ser aplicado na não linearidade estática produz $\hat{y}_{2,k}$ em azul tracejado. Por fim, ao aplicar o sinal $\hat{y}_{2,k}$ na inversa não paramétrica, obtém-se o sinal $\tilde{v}_{2,k}$. Como esperado, a linearização produz $\hat{v}_{2,k} \approx \tilde{v}_{2,k}$, mostrando-a funcional para fazer controle na faixa em que se propôs.

Figura 48 – Resultado para aplicação de referências de diversas amplitudes no CSTR em malha fechada. As saídas sobrepostas estão em (a) e o sinais referentes à linearização da curva estática não linear em (b).



6 Conclusão e Trabalhos Futuros

Este trabalho propôs duas metodologias para inversão da curva não linear que compõe os modelos de blocos interconectados. A primeira metodologia foi uma inversão paramétrica para curvas modeladas como polinômios. De forma que quanto mais alta a ordem da função polinomial identificada para representar a não linearidade do modelo, mais complexo se torna o processo de inversão. Por sua natureza algébrica, a metodologia pode retornar resultados tão exatos quanto se queira, bastando que se utilize as casas decimais necessárias. Também é importante observar que a exatidão faz referência à linearização da composição entre a curva identificada e sua inversa, o que não garante exatidão entre a composição da planta real e a inversa.

A segunda metodologia proposta foi uma inversão não paramétrica. Por sua natureza, ela não necessita que a curva não linear do modelo de blocos interconectados seja parametrizada como um polinômio, pois ela utiliza os dados do gráfico para inverter os eixos e, em seguida, ajustar uma curva aos dados. Dessa forma, além de ser simples de ser obtida, a curva inversa pode incluir a facilidade de não ser necessário parametrizar a curva estática do sistema e sim possuir os pontos de um ensaio com degraus ascendentes. O ponto negativo é que algumas curvas que deveriam ser simples, como a de uma raiz quadrada podem requerer uma elevada ordem para a representação da inversa.

Para analisar se as metodologias se mostrariam eficazes em uma região suficientemente ampla para realizar controle, duas plantas foram simuladas, sendo a primeira um sistema de dois tanques em cascata e a segunda um CSTR. A planta dos dois tanques em cascata foi identificada na estrutura de Hammerstein empregando o algoritmo de uma etapa descrito por [Gómez e Baeyens \(2005\)](#). Como resultado, obteve-se um sistema dinâmico de ordem 2 estável em espaço de estados e um polinômio de ordem 2. A inversa aplicada nesse sistema foi a paramétrica e os resultados obtidos mostram que ela funciona com boa precisão na faixa que o sistema opera. Para controlá-lo foi necessário utilizar a limitação do sinal de controle tanto junto à \mathcal{D}_R -estabilidade quanto com a \mathcal{H}_∞ . Sem a limitação do sinal de controle, ocorria saturação e os critérios de desempenhos eram violados, porém, com sua inserção nos cálculos, o modelo passou a cumprir os requisitos. O modelo apresentou certa defasagem em relação à planta devido à identificação que, apesar dos bons índices, não tinha os mesmos ganhos estáticos da planta na região de teste.

Na planta do CSTR foi utilizado o algoritmo de identificação em duas etapas descrito em [de Paula \(2016\)](#) que resultou em um modelo de Wiener caracterizado por uma dinâmica linear de ordem 2 estável e dois polinômios de ordem 3, um para cada saída da planta. Utilizando a metodologia de linearização não paramétrica, pôde-se obter duas inversas que se mostraram eficazes ao longo da faixa na qual pretendia-se fazer controle.

O controle foi realizado utilizando a técnica de \mathcal{D}_R -estabilidade e \mathcal{H}_∞ . Nos dois casos, o modelo e a planta responderam corretamente tal como um sistema linear responderia, comprovando a eficácia da linearização não paramétrica desenvolvida, além de corroborar com a acurácia da identificação.

Com os experimentos, foi possível inverter a não linearidade de forma eficaz e com bom nível de precisão em uma ampla faixa utilizando as inversas propostas neste trabalho. O sucesso da linearização sobre a planta tem relação com a escolha do método mais adequado para cada caso, uma vez que os dois são eficazes e apresentam suas desvantagens.

Por fim, as técnicas de controle propostas apresentaram resultados em que o tempo de assentamento e a **MUP** atenderam aos critérios de projeto para o modelo. Os controladores obtidos apresentaram a propriedade de ser independentes e não necessitar de recálculo de ganhos a cada iteração, diminuindo o custo computacional ou mesmo contornando a limitação prática de que o ganho deve ser calculado antes que o período de amostragem se complete. Logo, as metodologias apresentadas trouxeram melhoras significativas nos resultados apresentados em [Rayouf, Ghorbel e Braiek \(2018\)](#) nas etapas de identificação, linearização e controle.

6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, destacam-se alguns pontos a serem considerados para a complementação desta pesquisa:

- implementar uma metodologia de identificação que possa estimar a matriz de entrada de ruídos;
- aplicar uma metodologia de controle \mathcal{H}_∞ e limitação do sinal de controle que possam ser utilizadas para seguimento de referência;
- implementar um exemplo prático das estratégias de controle a partir de um modelo identificado por meio de métodos de subespaços e linearizado pelas técnicas paramétrica e não paramétrica.

Referências

- AGUIRRE, L. A. *Introdução à identificação de sistemas – Técnicas lineares e não lineares aplicadas a sistemas reais*. 4^a. ed. Belo Horizonte, Brasil: Editora UFMG, 2015.
- AGUIRRE, L. A. et al. *Enciclopédia de automática: controle & automação*. 1^a. ed. São Paulo, Brasil: Blucher, 2007. v. 1.
- AGUIRRE, L. A.; COELHO, M. C. S.; CORREA, M. V. On the interpretation and practice of dynamical differences between Hammerstein and Wiener models. *IEEE Proceedings-Control Theory and Applications*, IET, v. 152, n. 4, p. 349–356, 2005.
- BAI, E.-W. An optimal two-stage identification algorithm for Hammerstein–Wiener nonlinear systems. In: *Block-oriented Nonlinear System Identification*. [S.l.]: Springer, 2010. p. 27–34.
- BIAGIOLA, S. I.; AGAMENNONI, O. E.; FIGUEROA, J. L. Robust control of Wiener systems: application to a pH neutralization process. *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, SciELO Brasil, v. 33, p. 145–153, 2016.
- BILLINGS, S. A.; FAKHOURI, S. Y. Identification of systems containing linear dynamic and static nonlinear elements. *Automatica*, v. 18, n. 1, p. 15–26, 1982. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000510988290022X>>.
- BORJAS, S. D. M.; GARCIA, C. Identificação de sistemas não lineares usando métodos por subespaços. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 1, n. 1, 2013.
- BOYD, S. et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. v. 15. (Studies in Applied and Numerical Mathematics, v. 15).
- CONTZEN, M. P. Robust PI design with pole allocation for MIMO systems using LMI. In: IEEE. *2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. [S.l.], 2017. p. 882–887.
- DE PAULA, M. V. *Identificação de Modelos de Hammerstein e Wiener para Sistemas Não Lineares Multivariáveis Utilizando Métodos de Subespaços*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2016.
- DE PAULA, M. V.; RICCO, R. A.; TEIXEIRA, B. O. S. Identificação de modelos de Hammerstein e Wiener para sistemas não lineares multivariáveis via métodos de subespaços. *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 2015.
- FRAÇZ, P. Nonlinear modeling of activated sludge process using the Hammerstein-Wiener structure. In: EDP SCIENCES. *E3S Web of Conferences*. [S.l.], 2016. v. 10, p. 00119.
- FREITAS, L.; BARBOSA, B. H.; AGUIRRE, L. A. Including steady-state information in nonlinear models: an application to the development of soft-sensors. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier, v. 102, p. 104253, 2021.

- GARCIA, C. *Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos*. 2^a. ed. [S.l.: s.n.], 2009.
- GÓMEZ, J. C.; BAEYENS, E. Subspace-based identification algorithms for Hammerstein and Wiener models. *European Journal of Control*, Elsevier, v. 11, n. 2, p. 127–136, 2005.
- HONG, X.; MITCHELL, R. J. A pole assignment controller for Bezier–Bernstein polynomial based Hammerstein model. In: *Proceedings of International Control Conference (ICC) 2006*. [S.l.: s.n.], 2006.
- HONG, X.; MITCHELL, R. J.; CHEN, S. Modelling and control of Hammerstein system using B-spline approximation and the inverse of De Boor algorithm. *International Journal of Systems Science*, Taylor & Francis, v. 43, n. 10, p. 1976–1984, 2012.
- JALALEDDINI, K.; KEARNEY, R. E. An identification algorithm for Hammerstein systems using subspace method. In: IEEE. *Proceedings of the 2011 American Control Conference*. [S.l.], 2011. p. 4793–4797.
- JALALEDDINI, K.; KEARNEY, R. E. Subspace identification of SISO Hammerstein systems: application to stretch reflex identification. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, IEEE, v. 60, n. 10, p. 2725–2734, 2013.
- LI, S.; LI, Y. Model predictive control of an intensified continuous reactor using a neural network Wiener model. *Neurocomputing*, Elsevier, v. 185, p. 93–104, 2016.
- LOFBERG, J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE. *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)*. [S.l.], 2004. p. 284–289.
- LUNING, M. et al. Disturbance observer based sliding mode control for a continuous stirred tank reactor (CSTR). In: IEEE. *2017 36th Chinese Control Conference (CCC)*. [S.l.], 2017. p. 3748–3753.
- LUNING, M.; ZHAO, D.; SPURGEON, S. K. Disturbance observer based discrete time sliding mode control for a continuous stirred tank reactor. In: IEEE. *2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*. [S.l.], 2018. p. 372–377.
- NAJAFABADI, H. A.; SHAHROKHI, M. Model predictive control of blood sugar in patients with type-1 diabetes. *Optimal Control Applications and Methods*, Wiley Online Library, v. 37, n. 4, p. 559–573, 2016.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 5^a. ed. [S.l.: s.n.], 2010.
- OGUNNAIKE, B. A.; RAY, W. H. *Process dynamics, modeling, and control*. 1^a. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 1994.
- PEAUCELLE, D. et al. A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 40, n. 1, p. 21–30, 2000.
- PHILLIPS, C. L.; NAGLE, H. T. *Digital Control System Analysis and Design*. 3^a. ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1995.
- RAYOUF, Z.; GHORBEL, C.; BRAIEK, N. A new Hammerstein model control strategy: feedback stabilization and stability analysis. *International Journal of Dynamics and Control*, v. 7, n. 4, p. 1453–1461, 2018.

- RICCO, R. A. *Identificação de Sistemas Utilizando Métodos de Subespaços*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.
- RICCO, R. A. *Identificação por Subespaços: Abordagem Caixa Cinza*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2016.
- ROSINOVÁ, D.; HYPIUSOVÁ, M. LMI pole regions for a robust discrete-time pole placement controller design. *Algorithms*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 12, n. 8, p. 167, 2019.
- ROY, P. et al. Level control of two tank system by fractional order integral state feedback controller tuned by PSO with experimental validation. In: IEEE. *2016 IEEE First International Conference on Control, Measurement and Instrumentation (CMI)*. [S.l.], 2016. p. 224–228.
- SANTOS, L. H.; BRAGA, M. F.; RICCO, R. A. Nova abordagem para linearização de modelos de Hammerstein identificados por métodos de subespaço. *XV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 2021.
- STEWART, J. *Calculus: concepts and contexts*. [S.l.]: Cengage Learning, 2009.
- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.
- VERHAEGEN, M.; DEWILDE, P. Subspace model identification part I: the output-error state-space model identification class of algorithm. *Internationa Journal of Control*, v. 56, n. 5, p. 1187–1210, 1992.
- VERHAEGEN, M.; VERDULT, V. *Filtering and system identification: a least squares approach*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.

DECLARAÇÃO DE CONFERÊNCIA DA VERSÃO FINAL

Declaro que conferi a versão final a ser entregue pelo aluno **Luís Henrique dos Santos**, autor do trabalho de conclusão de curso intitulado **Linearizações Paramétrica e não Paramétrica para Controle Robusto a partir de Modelos de Blocos Interconectados Identificados por Métodos de Subespaços** quanto à conformidade nos seguintes itens:

1. a monografia corresponde à versão final, estando de acordo com as correções sugeridas pela banca e seguindo as normas ABNT;
2. a versão final da monografia inclui a ata de defesa a ficha catalográfica e o termo de responsabilidade devidamente assinados.

João Monlevade, de de .

Rodrigo Augusto Ricco

TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado **Linearizações Paramétrica e não Paramétrica para Controle Robusto a partir de Modelos de Blocos Interconectados Identificados por Métodos de Subespaços** é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem a devida citação ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 20 de janeiro de 2022.

Luís Henrique dos Santos
Luís Henrique dos Santos