



Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Engenharia Elétrica



Trabalho de Conclusão de Curso

Um Estudo de Diferentes Metodologias de Controle Nebuloso

Hugo César de Azevedo Barros

João Monlevade, MG
2017

Hugo César de Azevedo Barros

**Um Estudo de Diferentes Metodologias de
Controle Nebuloso**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientador: Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos

**Universidade Federal de Ouro Preto
João Monlevade
2017**



ANEXO IV - ATA DE DEFESA

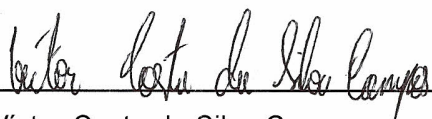
Aos 06 dias do mês de abril de 2017, às 13 horas e 30 minutos, no bloco B deste instituto, foi realizada a defesa de monografia pelo (a) formando (a) Hugo César de Azevedo Barros, sendo a comissão examinadora constituída pelos professores: Anny Verly, Márcio Feliciano Braga, Victor Costa da Silva Campos

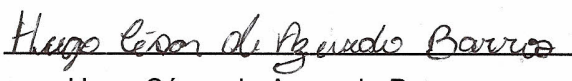
O (a) candidato (a) apresentou a monografia intitulada: Um estudo de diferentes metodologias de controle nebuloso. A comissão examinadora deliberou, por unanimidade, pela aprovação do(a) candidato(a), com a nota média 8,0, de acordo com a tabela 1. Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da comissão examinadora e pelo (a) formando(a).

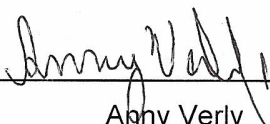
Tabela 1 – Notas de avaliação da banca examinadora

| Banca Examinadora | Nota |
|------------------------------|------------|
| Anny Verly | 9,0 |
| Márcio Feliciano Braga | 8,0 |
| Víctor Costa da Silva Campos | 8,0 |
| Média | 8,0 |

João Monlevade, 06 de abril de 2017.


Víctor Costa da Silva Campos
Professor(a) Orientador(a)


Hugo César de Azevedo Barros
Aluno (a)


Anny Verly
Professor(a) Convidado(a)


Márcio Feliciano Braga
Professor(a) Convidado(a)

B277e Barros, Hugo César de Azevedo.
Um estudo de diferentes metodologias de controle nebuloso [manuscrito] /
Hugo César de Azevedo Barros. - 2017.

33f.: il.: color; tabs; mapas.

Orientador: Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de
Ciências Exatas e Aplicadas. Departamento de Engenharia Elétrica.

1. Engenharia Elétrica. 2. Controle de processo. 3. Sistemas de controle
ajustável . 4. Lógica difusa. I. Campos, Víctor Costa da Silva. II. Universidade
Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 681.5



ANEXO X - TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado “Um Estudo de Diferentes Metodologias de Controle Nebuloso” é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem a devida citação ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 18 de Abril de 2017

Hugo César de Aguiar Barros
Nome completo do(a) aluno(a)

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, que me deu forças para seguir em frente quando muitas vezes pensei não ser possível.

Agradeço a meus pais, José Márcio de Barros e Lindaura Maria de Freitas Barros, por serem minha base e por sempre me incentivar e apoiar em meus estudos e decisões.

Agradeço ao meu orientador, o professor doutor Víctor Costa da Silva Campos, que me proporcionou a realizar esse trabalho e me conduziu de forma brilhante à conclusão do mesmo, contribuindo muito para o enriquecimento de meus conhecimentos.

Agradeço aos amigos e amigas que fiz durante a graduação, pelo companheirismo dentro e fora das atividades acadêmicas e por todos momentos vividos durante essa etapa da minha vida. E agradeço também a todos professores com os quais estudei, por contribuírem significativamente em minha formação.

"Suas notas não definem do que você é capaz".

Resumo

A teoria de controle nebuloso teve início em 1965 com Lotfi A. Zadeh, que percebeu que a teoria clássica encontraria dificuldades em lidar com sistemas mais complexos. Desde então essa teoria passou por várias evoluções até os dias atuais. Baseados em conhecimento humano sobre a dinâmica do sistema, os controladores nebulosos possuem diversas aplicações nos diversos ramos da engenharia, sobretudo nos problemas de controle. Devido a larga aplicabilidade não há uma teoria padrão para sistemas nebulosos, então, nesse trabalho são apresentadas duas metodologias, uma baseada em métodos linguísticos por sistemas Mamdani e outra em métodos adaptativos por aproximação utilizando a técnica *backstepping*. Em seguida é apresentado um estudo de caso, que é um modelo de um pêndulo invertido, em que aplicam-se os estudos realizados e simulam-se controladores nebulosos baseados nos mesmos. Por fim, é feita a comparação dos resultados obtidos pelos dois controladores e conclui-se o trabalho.

Palavras-chave: Controle nebuloso, controle fuzzy, controle nebuloso adaptativo.

Abstract

The fuzzy control theory began in 1965 with Lotfi A. Zadeh, who realized that classical theory would find difficulties in dealing with more complex systems. Since then this theory has undergone several evolutions until the current days. Based on human knowledge of the system dynamics, fuzzy controllers have many applications in various fields of engineering, especially in control problems. Due to the wide applicability there is no standard theory for fuzzy systems, then, in this work are presented two methodologies, one based on linguistic methods by Mamdani systems and the other in adaptive methods by approximation using the backstepping technique. Then, a case study is presented, which is a model of an inverted pendulum, in which we apply the theory presented and fuzzy controllers based on them are simulated. Finally, the results obtained by the two controllers are compared and the work is completed.

Keywords: Fuzzy control, adaptive fuzzy control.

Lista de ilustrações

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Funções de pertinência para os conjuntos quente e frio. | 3 |
| Figura 2 – Exemplo da operação Complemento | 7 |
| Figura 3 – Exemplo da operação Interseção | 7 |
| Figura 4 – Exemplo da operação União | 8 |
| Figura 5 – Configuração básica de um sistema com fuzzificador e defuzzificador. . . | 11 |
| Figura 6 – Exemplos de diferentes formas de estabilidade para diferentes sistemas de primeira ordem. | 16 |
| Figura 7 – Diagrama de um pêndulo invertido sobre um carro. | 20 |
| Figura 8 – Funções de pertinência para posição angular. | 21 |
| Figura 9 – Funções de pertinência para velocidade angular. | 22 |
| Figura 10 – Funções de pertinência para força aplicada sobre o carro. | 23 |
| Figura 11 – Resultados estudo de caso 1 por controlador Mamdani. | 24 |
| Figura 12 – Forma das funções de pertinência para o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ para os parâmetros x e y | 25 |
| Figura 13 – Forma das funções de pertinência para o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ para os parâmetros θ | 25 |
| Figura 14 – Filtro de geração de trajetória | 26 |
| Figura 15 – Diagrama de blocos do controlador. | 28 |
| Figura 16 – Resultados estudo de caso 2 por controlador nebuloso adaptativo por aproximação. | 29 |
| Figura 17 – Posições angulares do pêndulo para os dois controladores projetados. . . | 30 |
| Figura 18 – Velocidades angulares do pêndulo para os dois controladores projetados. | 30 |
| Figura 19 – Forças aplicadas ao carro para os dois controladores projetados. | 30 |

Lista de tabelas

| | |
|---|---|
| Tabela 1 – Conjunto de temperaturas e pertinências. | 3 |
|---|---|

Sumário

| | | |
|------------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 | Objetivos | 5 |
| 1.2 | Estrutura do Trabalho | 5 |
| 2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA | 6 |
| 2.1 | Métodos linguísticos | 6 |
| 2.1.1 | Regras SE-ENTÃO e sistemas Mamdani | 8 |
| 2.1.2 | Sistemas de inferência | 9 |
| 2.1.3 | Fuzzificadores e Defuzzificadores | 10 |
| 2.2 | Sistemas Takagi-Sugeno | 12 |
| 2.3 | Método adaptativo por aproximação | 13 |
| 2.3.1 | Estabilidade de Lyapunov | 13 |
| 2.3.2 | Backstepping | 16 |
| 2.3.3 | Backstepping adaptativo | 17 |
| 3 | ESTUDO DE CASO E APLICAÇÃO DOS MÉTODOS | 20 |
| 3.1 | Sistema modelo | 20 |
| 3.2 | Controlador Mamdani | 21 |
| 3.3 | Controlador Nebuloso Adaptativo por Aproximação | 23 |
| 3.4 | Comparação entre os métodos utilizados | 28 |
| 4 | CONCLUSÕES | 31 |
| | REFERÊNCIAS | 32 |

1 Introdução

A teoria de controle nebuloso se iniciou na década de sessenta com Lotfi A. Zadeh, mais precisamente no ano de 1965 com seu artigo *Fuzzy Sets* (ZADEH, 1965), o qual propôs uma nova maneira de lidar com sistemas complexos, pois a teoria clássica de controle havia posto muito esforço em trabalhar na precisão e não mais conseguiria lidar facilmente com tais sistemas. Entretanto, como não haviam aplicações práticas para tais teorias, as mesmas estavam passando por várias controvérsias e foram refutadas por vários pesquisadores durante muitos anos (WANG, 1997).

Nos anos setenta, apareceram os primeiros controladores nebulosos para sistemas práticos. (MAMDANI; ASSILIAN, 1975) publicaram os resultados obtidos da aplicação de um controlador nebuloso em uma máquina a vapor, onde a lógica nebulosa foi utilizada para transformar regras de controle descritas por operação humana em estratégias automáticas de controle. Ainda nessa mesma década foi criado o primeiro controlador nebuloso aplicado a um processo industrial de larga escala, o *fuzzy cement kiln controller* por Holmblad e Ostergaard, que fazia o controle de uma fornalha em uma fábrica de cimento (HOLMBLAD; OSTERGAARD, 1995).

Nos anos oitenta, começaram as grandes aplicações que fizeram enorme diferença no ramo da teoria de controle nebuloso. Engenheiros japoneses perceberam que tais controladores funcionavam muito bem, eram relativamente fáceis de serem implementados e que podiam ser aplicados a diversos sistemas, onde controladores clássicos não poderiam ser utilizados devido à falta e dificuldade em se estabelecer modelos matemáticos de tais sistemas. Sugeno foi o pioneiro no Japão ao criar um controlador para uma planta elétrica de purificação de água em 1980 e, em 1983, começou a trabalhar em metodologia nebulosa aplicada à robótica e juntamente com Nishida (SUGENO; NISHIDA, 1985) deu origem a um modelo de um carro em miniatura auto-estacionável que era controlado por comandos externos. Também nessa década, Yasunobu e Miyamoto criaram um sistema de controle nebuloso para o metrô da cidade de Sendai, que foi finalizado em 1987 tornando-se o sistema de metrô mais desenvolvido do planeta naquela época (WANG, 1997). Além disso (YAMAKAWA, 1989) desenvolveu um controlador nebuloso que conseguia estabilizar um pêndulo invertido.

Devido ao sucesso dos sistemas nebulosos desenvolvidos no Japão, pesquisadores europeus e americanos passaram a considerar mais seriamente a teoria de controle nebuloso e, em 1992, ela foi aceita pela maior organização de engenharia elétrica, o IEEE (Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos), inaugurando no ano seguinte o *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* que é um dos maiores periódicos nessa área (WANG, 1997).

Ao longo dos últimos anos grandes esforços foram aplicados no estudo e desenvolvimento de controladores nebulosos, sobretudo, na análise de estabilidade e problemas no

desenvolvimento de tais controladores. A ideia principal é utilizar o controlador nebuloso como um controlador não linear, embasado na estabilidade, para o controle de sistemas em uma análise convencional da estabilidade de sistemas não lineares (FENG, 2006).

Atualmente, e como uma das ênfases deste trabalho, um ramo importante da teoria de controle nebuloso é a utilização do controle nebuloso adaptativo. A ideia principal é realizar o controle de um sistema, onde se conhece apenas uma parte da dinâmica, utilizando algum tipo de adaptação para a parte desconhecida através de aproximação (WANG et al., 2015). Algumas dessas técnicas podem ser observadas em Lee e Tomizuka (2000), onde os autores propõem o método de controle robusto adaptativo para sistemas não lineares de única entrada e única saída (do inglês *Single-Input Single-Output*, SISO) e utilizam um sistema com a técnica de lógica nebulosa adaptativa e também a técnica *backstepping*. Lee (2011) também apresenta o método de controle robusto por aproximação para sistemas não lineares utilizando também as técnicas *backstepping* e lógica nebulosa adaptativa, mas dessa vez para multi entradas e multi saídas (MIMO). Outro trabalho relevante é o de Chen, Liu e Ge (2012), onde os autores utilizam controle nebuloso adaptativo para uma classe de sistemas não lineares e propõe um controlador de lógica nebulosa baseado nas técnicas de aproximação e *backstepping*, entretanto nesse trabalho não é a dinâmica do sistema que é aproximada e sim funções dos estados.

Os sistemas Takagi-Sugeno também são muito utilizados como aproximadores para sistemas não lineares juntamente com algumas técnicas de controle, como descrito por (LI; TONG; FENG, 2010), que nesse trabalho utiliza sistemas nebulosos Takagi-Sugeno para aproximar as funções desconhecidas do sistema e tratam das diferenças entre dois métodos de controle: o *feedback-linearization* e o *backstepping* adaptativo, o qual possui uma estrutura recursiva.

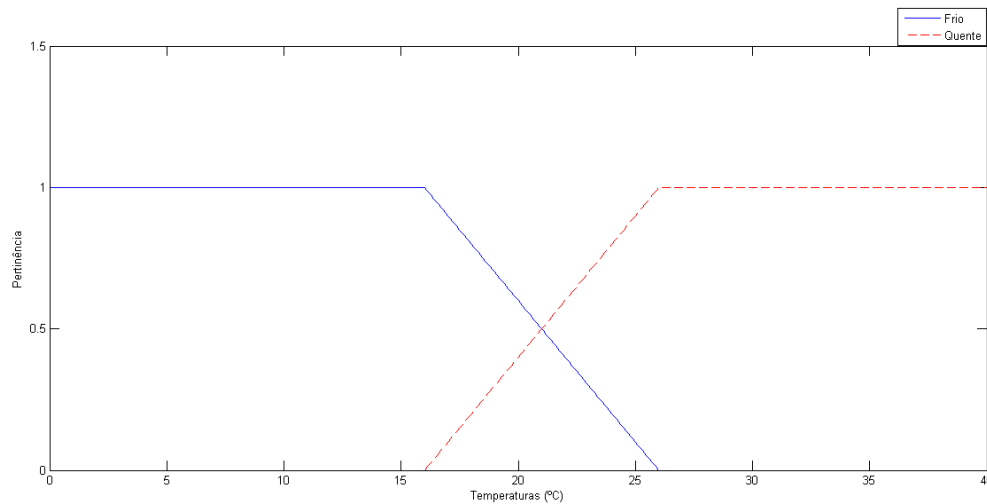
Como aplicação prática recente, tem-se como exemplo, a utilização de um sistema nebuloso Takagi-Sugeno aplicado a um conversor monofásico CC/CA (corrente contínua/corrente alternada) bidirecional, que controla o fluxo de potência entre uma micro-rede CC de energia solar e uma rede CA (YU; LAI; LIU, 2016).

Para a compreensão de sistemas nebulosos, comumente chamados sistemas *fuzzy*, primeiro deve-se entender a teoria de conjuntos nebulosos, ou conjuntos *fuzzy*. Esses são conjuntos de objetos, onde cada um destes possui um nível de pertinência relacionado ao conjunto. Tais níveis de pertinência são dados em valores de um intervalo que vai de zero a um (ZADEH, 1965).

Como exemplo da organização de objetos em conjuntos suponha o caso onde se deseja organizar temperaturas como sendo dois conjuntos quente ou frio. Definiu-se que temperaturas quentes são a partir de 26 graus Celsius, do ponto de vista da lógica clássica 25.9 não seria mais quente, ou se definiu-se frio como sendo menor do que 16 graus Celsius. Do ponto de vista clássico 16.1 não mais seria frio. Entretanto, utilizando a teoria de conjuntos nebulosos pode-se atribuir valores de pertinência para as temperaturas que estão

fora dos intervalos estabelecidos para os conjuntos e esses valores são definidos com base em funções de pertinência escolhidas previamente. A Figura 1 ilustra tais funções para este exemplo, e a Tabela 1 contém os valores de pertinência de cada temperatura para cada conjunto.

Figura 1 – Funções de pertinência para os conjuntos quente e frio.



Percebe-se que as temperaturas contidas nos intervalos enunciados acima para quente ou frio contêm pertinência de valor 1, e quando ultrapassam tais intervalos decaem o valor de pertinência com base na função escolhida.

Tabela 1 – Conjunto de temperaturas e pertinências.

| | Frio | Quente |
|-------------|-------------|-------------|
| Temperatura | Pertinência | Pertinência |
| 16 | 1 | 0 |
| 18 | 0.8 | 0.2 |
| 20 | 0.6 | 0.4 |
| 22 | 0.4 | 0.6 |
| 24 | 0.2 | 0.8 |
| 26 | 0 | 1 |

Assim, pode-se dizer que sistemas nebulosos são sistemas que utilizam bases de conhecimento, geralmente conhecimento humano, e consistem de regras do tipo SE-ENTÃO, onde tais regras são caracterizadas por funções contínuas de pertinência.

Dessa forma três tipos de sistemas nebulosos são comumente utilizados na literatura, sendo eles:

1. Sistemas nebulosos puros, cujas entradas e saídas são conjuntos nebulosos consistindo apenas de palavras.

2. Sistemas nebulosos Takagi-Sugeno (T-S) (TAKAGI; SUGENO, 1985), que em relação aos sistemas puros apresentam a vantagem de possuir variáveis de entrada e saída como valores reais. Entretanto tais características podem fazer com que o sistema perca a naturalidade de representar conhecimento humano.
3. Sistemas nebulosos com *fuzzificador* e *defuzzificador*, onde o fuzzificador transforma uma variável de entrada de valor real em um conjunto nebuloso. O conjunto de regras nebulosas consiste de todas regras do tipo SE-ENTÃO, o sistema de inferência nebulosa faz o mapeamento do conjunto de regras com o conjunto de entrada baseado no princípio de lógica nebulosa e produz um conjunto de saída. Por fim, o defuzzificador transforma o conjunto nebuloso de saída em uma variável de saída de valor real (WANG, 1997).

De acordo com (WANG, 1997), certos sistemas nebulosos podem ser escritos na forma de fórmulas compactas não lineares que podem simplificar os cálculos e permitem analisar tais sistemas mais detalhadamente. Percebe-se que os sistemas nebulosos são casos particulares de funções não lineares e utilizando o "Teorema Universal da Aproximação" pode-se provar que os mesmos são aproximadores universais, inclusive os sistemas Takagi-Sugeno que serão os vistos com ênfase neste trabalho. Então, isso significa que, analisando tais sistemas do ponto de vista da aproximação, eles podem aproximar qualquer função não linear em um conjunto compacto com precisão arbitrária.

Por serem aproximadores universais, os sistemas nebulosos tornam-se muito úteis em variadas aplicações, pois a maioria dos casos práticos da engenharia são formados por sistemas não lineares (KHALIL, 2002). Como deseja-se um nível elevado da performance para os sistemas desse tipo que possuem uma grande região de operação, suas não linearidades devem ser inseridas durante o projeto dos controladores e dependendo do tipo das não linearidades e de como afetam os sistemas, existem diversos métodos de controle não linear que podem ser utilizados, como o *Feedback Linearization* e o *Backstepping*, por exemplo (KANELLAKOPOULOS; KOKOTOVIC; MORSE, 1991). Devido ao fato das não linearidades causarem empecilhos e afetarem diretamente o desempenho, nesses casos o desempenho pode ser melhorado fazendo o uso de técnicas adaptativas com função de aproximação para melhorar a precisão dos modelos. Tais métodos estão inclusos na área de estudo do controle nebuloso (FARRELL; POLYCARPOU, 2006).

O controle nebuloso adaptativo trabalha com a ideia de utilizar os dados de entrada e saída, a fim de encontrar leis de controle atualizadas que se encaixem nas mudanças do processo ou dos parâmetros do controlador (LI; TONG; LI, 2014). Baseando-se nas funções nebulosas utilizadas como funções de aproximação universais, existem duas formas de realizar o controle nebuloso adaptativo: direta e indireta (GUERRA; SALA; TANAKA, 2015). No método direto, sistemas nebulosos aproximam diretamente a lei de controle e seus parâmetros são adaptados para atingirem diretamente seus objetivos. No método

indireto, sistemas nebulosos são utilizados para aproximar parâmetros de estimação da lei de controle.

A teoria de sistemas nebulosos é de fundamental importância quando utilizam-se modelos *fuzzy* como aproximadores universais, sobretudo na engenharia, pois fornece procedimentos que permitem transformar conhecimento base em mapeamentos não lineares. Tal teoria permite usar os sistemas nebulosos de maneira semelhante a que se usa medidas de sensores e modelos matemáticos em sistemas de controle, sistemas de comunicação ou processamento de sinais, circuitos integrados, medicina, etc. (WANG, 1997).

1.1 Objetivos

- Os objetivos deste trabalho são os seguintes:
- Como objetivo principal, discutir o que são e como funcionam os sistemas nebulosos e suas aplicações em sistemas de controle;
- Discutir como sistemas nebulosos podem ser utilizados como aproximadores universais;
- Discutir a aplicação de sistemas Takagi-Sugeno como aproximadores universais em leis de controle adaptativas;
- Por fim, após compreendida a teoria nebulosa, aplicar as metodologias abordadas em um estudo de caso de um modelo de um pêndulo invertido simulado e comparar os resultados.

1.2 Estrutura do Trabalho

- O Capítulo 1 faz a introdução de como surgiram os sistemas nebulosos, seu princípio de funcionamento, aplicações no passado e na atualidade.
- O Capítulo 2 apresenta um referencial teórico das metodologias estudadas no trabalho, os sistemas Mamdani e o método adaptativo por aproximação.
- O Capítulo 3 traz um estudo de caso de um modelo de um pêndulo invertido em que são aplicados os métodos descritos no Capítulo 2 através de simulações. Também são feitas considerações e comparações dos resultados obtidos.
- Por fim, o Capítulo 4 traz as conclusões desse trabalho.

2 Fundamentação Teórica

No Capítulo 1 introduziu-se a teoria de conjuntos nebulosos, ou conjuntos *fuzzy*, onde tal conjunto quando representado em um universo de discurso U é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_A(x)$ em um intervalo $[0,1]$ (WANG, 1997). Então, uma função de pertinência é uma função contínua que caracteriza todos pontos $x \in U$ para o conjunto A podendo assumir qualquer valor no intervalo $[0,1]$, o que é diferente do ponto de vista clássico, onde o comportamento da função de pertinência seria discreto, ou seja, poderia assumir os valores 0 ou 1.

Existe uma variedade de funções que podem ser usadas como função de pertinência e a escolha pode ser feita de duas formas: a primeira é escolher a função de pertinência com base em conhecimento humano. Como os conjuntos nebulosos são de certa forma a representação de conhecimento humano, então a função de pertinência também é parte desse conhecimento e pode ser melhor definida a partir de um conhecimento prévio sobre o sistema dando assim uma forma mais rústica de função de pertinência que posteriormente deve ser refinada. A segunda forma consiste em construir a função a partir de dados obtidos diretamente através de sensores. Essa forma pode ser utilizada para refinar a função obtida na primeira implicação (WANG, 1997).

2.1 Métodos linguísticos

A tradução de conhecimento humano para conjuntos nebulosos é feita através do uso de variáveis linguísticas que são as representações fundamentais de tal conhecimento. Essas variáveis são o uso da linguagem natural ou artificial para descrever, de forma aproximada mas ainda efetiva, o comportamento de conjuntos em um universo de discurso (ZADEH, 1973). Pode-se usar o exemplo do Capítulo 1 para demonstrar como são utilizadas as variáveis linguísticas, onde pode-se ter os termos quente e frio e ainda atribuir adjetivos a esses termos como: muito quente, pouco quente, mais ou menos frio, etc. Existem três grupos para a classificação desses termos (WANG, 1997):

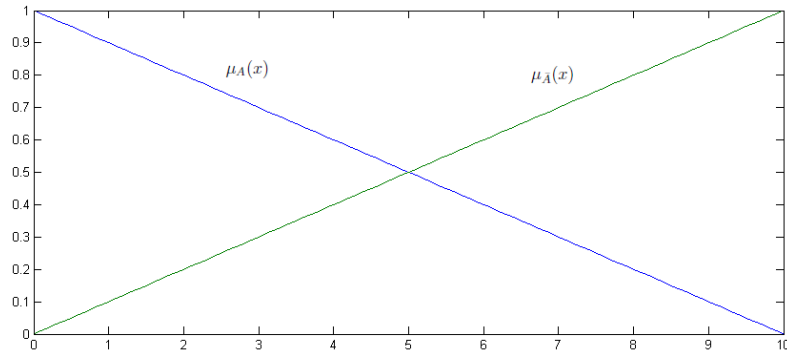
1. Termos primários - que fazem o mapeamento direto nos conjuntos nebulosos e no exemplo anterior são os termos quente e frio.
2. Conectores dos tipos: não, e e ou — fazem uso de três das operações definidas para conjuntos nebulosos por (ZADEH, 1965), que são:

Para o conjunto $A = \{(X, \mu_A(x)), x \in X\}$.

Complemento ou negação de A dado por (2.1) e ilustrado pela Figura 2 .

$$C : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad C(\mu_A(x)) = \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad (2.1)$$

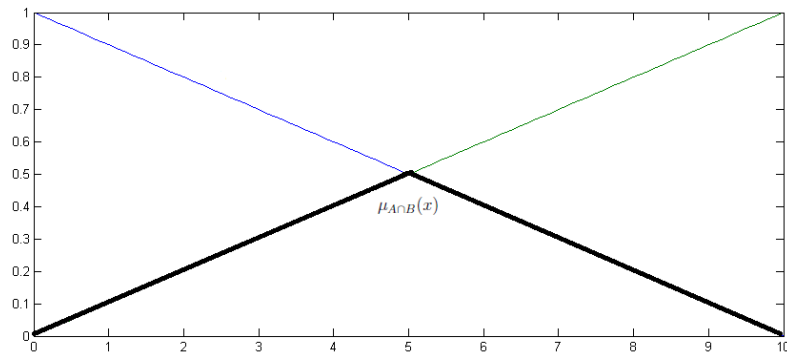
Figura 2 – Exemplo da operação Complemento



Interseção de A com B dado, por exemplo, por (2.2) e ilustrado pela Figura 3.

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad (2.2)$$

Figura 3 – Exemplo da operação Interseção



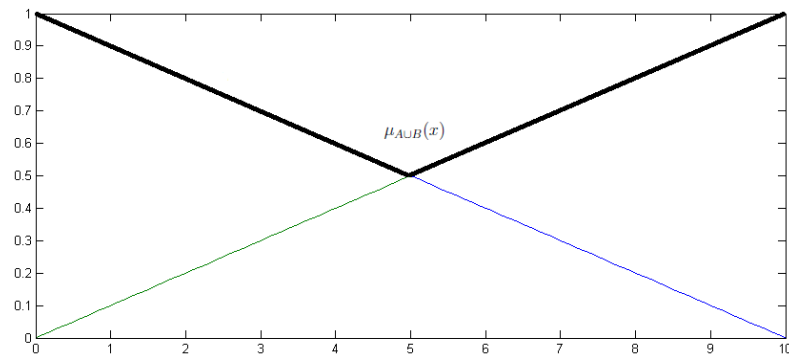
União de A com B dado, por exemplo, por (2.3) e ilustrado pela Figura 4.

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad (2.3)$$

Em que, A e B são conjuntos nebulosos em um mesmo universo de discurso e $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$ são suas respectivas funções de pertinência para todos valores de x .

3. Adjetivos de quantificação — por exemplo: muito, pouco, mais ou menos, etc.

Figura 4 – Exemplo da operação União



2.1.1 Regras SE-ENTÃO e sistemas Mamdani

Como visto no Capítulo 1, sistemas nebulosos são representados por regras do tipo SE-ENTÃO que são descritas através de proposições e são dadas por (2.4) (WANG, 1997):

$$SE \text{ proposição}_1, ENTÃO \text{ proposição}_2 \quad (2.4)$$

Onde as proposições podem ser do tipo simples com apenas um estado ou do tipo composto com estados ligados por conectores ("não", "e", "ou"). Como existem diversos operadores nebulosos do tipo complemento, interseção e união e como os sistemas são transcritos com base em conhecimento humano, então, existem também diversas interpretações para as regras SE-ENTÃO originando assim implicações diferentes.

A implicação mais utilizada em sistemas de controle nebuloso é a implicação de Mamdani e é a que é utilizada neste trabalho. Ela trata as regras do tipo SE-ENTÃO como sendo locais, ou seja, diferentes regras tem diferentes interpretações. Por exemplo: SE temperatura é baixa, ENTÃO aumenta aquecimento. Esse tipo de regra poderia deixar implícito que SE temperatura é alta, ENTÃO diminui aquecimento. Entretanto, não necessariamente a regra contrária precisa seguir esse padrão.

Do ponto de vista da lógica nebulosa as proposições podem assumir quaisquer valores verdade no intervalo $[0,1]$ e, com isso, podem-se deduzir conclusões nebulosas (imprecisas) com um raciocínio aproximado a partir de premissas imprecisas. Com isso têm-se as tautologias (funções que sempre retornam verdadeiro), podendo ser chamadas de regras de inferência e as três mais utilizadas, como descrito em (WANG, 1997), são:

- **Modus Ponens** - suficiência, pode ser representada por:

x é A

SE x é A , ENTÃO y é B

y é B

- **Modus Tollens** - Necessidade, pode ser representada por:

y não é B

SE x é A , ENTÃO y é B
 x não é A

- **Silogismo hipotético** - pode ser representada por:

SE x é A , ENTÃO y é B
 SE y é B , ENTÃO z é C
 SE x é A , ENTÃO z é C

Então, pode-se dizer que um conjunto de regras nebulosas é o componente principal de um sistema como o representado pela Figura 5 no Capítulo 1, pois todos componentes desse sistema em algum momento fazem uso das regras. Para isso consideram-se as regras descritas da seguinte forma:

$$\text{Regra } k : \text{ SE } x_1 \text{ é } A_1^k \text{ e } x_2 \text{ é } A_2^k \text{ e...e } x_n \text{ é } A_n^k, \text{ ENTÃO } y \text{ é } B^k. \quad (2.5)$$

O descritivo de regra em (2.5) é utilizado em sistemas que são usualmente denominados sistemas Mamdani, onde tanto as partes SE das regras quanto as ENTÃO são conjuntos nebulosos.

O conjunto de regras, para satisfazer as relações entre si e atender os sistemas, deve obedecer as seguintes propriedades:

Completo: Um conjunto de regras nebulosas é completo se, para quaisquer variáveis premissas pertencentes ao universo de discurso, $x_i \in U_i$, existir pelo menos uma regra, tal como:

$$\mu_{A_i^k}(x_i) \neq 0, \forall i \in 1, 2, \dots, n; \quad (2.6)$$

Para um conjunto de regras completo, sabe-se que, para quaisquer variáveis premissas tomadas dentro do universo de discurso pelo menos uma regra vai estar ativa.

Consistência: Um conjunto de regras nebulosas é dito consistente se não houverem regras com um mesmo SE mas com ENTÃO diferente, ou seja, não há contradição entre as regras.

Continuidade: Um conjunto de regras nebulosas é dito contínuo se não houverem regras vizinhas cujos "ENTÃO" tem interseção vazia.

2.1.2 Sistemas de inferência

Como dito no Capítulo 1, um sistema de inferência nebulosa faz o mapeamento do conjunto nebuloso de entrada para um conjunto nebuloso de saída utilizando um banco de regras nebulosas, e existem duas formas de se fazer a inferência das regras (WANG, 1997).

Inferência baseada na composição - onde todas as regras são combinadas em uma única relação nebulosa, ou seja, é vista como apenas uma única regra. Essa forma de combinação pode ser feita de duas formas: A combinação de Mamdani, onde as regras são tratadas como condições independentes e sua fusão é feita pela união de relações correspondentes às regras; a outra forma é a combinação de Gödel, onde todas as regras são atendidas simultaneamente e sua fusão é feita pela interseção das relações correspondentes às regras.

Inferência individual de cada regra - onde encontra-se a saída para cada regra separadamente e então é feita a fusão das saídas utilizando união ou interseção.

Existem dois tipos de inferência nebulosa que são comumente utilizadas:

- Inferência do produto, onde utiliza-se: i) inferência individual de cada regra com fusão feita pela união; ii) implicação do produto de Mamdani; iii) produto algébrico para todas as interseções e *máximo* para todas as uniões.
- Inferência do mínimo, onde utiliza-se: i) inferência individual de cada regra com fusão feita pela união; ii) implicação do mínimo de Mamdani; iii) *mínimo* para todas as interseções e *máximo* para todas as uniões.

Contudo, em ambos os casos para sistemas Mamdani, não fará diferença se for utilizada a inferência individual ou a inferência baseada na composição e ainda podem ser simplificados ao se utilizar um conjunto nebuloso de entrada que corresponde a apenas um ponto de saída (*singleton*).

2.1.3 Fuzzificadores e Defuzzificadores

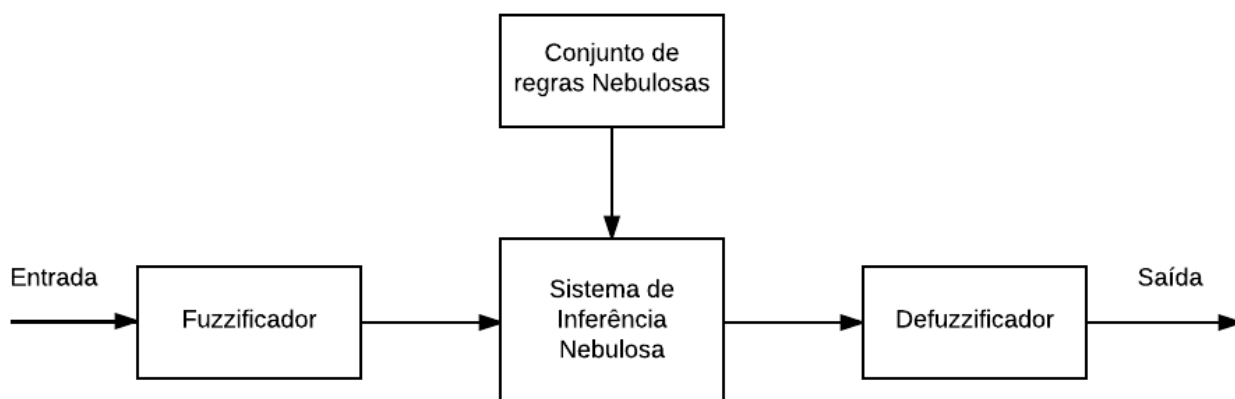
Como podem ser representados pela Figura 5, os sistemas com fuzzificador e defuzzificador utilizam um sistema de inferência nebulosa, que fazem o mapeamento de um conjunto nebuloso de entrada em um conjunto nebuloso de saída. Entretanto, quando as entradas são valores numéricos, como ocorre com os sistemas práticos, é necessário uma adaptação desses valores para conjuntos nebulosos.

Então, um fuzzificador tem o papel de receber um elemento do universo de discurso, seja um ponto ou um vetor, e o transforma em um conjunto nebuloso e, de acordo com (WANG, 1997) é necessário que atenda as seguintes características:

1. Ter valor de pertinência alto no ponto de entrada x^* .
2. Ser capaz de suprimir ruído proveniente ao valor de entrada x^* .
3. Ajude a simplificar os cálculos do sistema de inferência.

Os fuzzificadores mais comuns são:

Figura 5 – Configuração básica de um sistema com fuzzificador e defuzzificador.



Fonte: adaptado de (WANG, 1997).

- **Singleton:** onde o mesmo produz um conjunto nebuloso que corresponde apenas à um ponto.
- **Gaussiano:** onde utilizam-se conjuntos nebulosos gaussianos com o centro no ponto de entrada.
- **Triangular:** onde são utilizados conjuntos nebulosos triangulares com o centro no ponto de entrada.

Para todos os fuzzificadores apresentados anteriormente a função de pertinência tem valor 1 no ponto de entrada x^* .

Agora, os defuzzificadores fazem o papel contrário dos fuzzificadores. Eles tem o objetivo de mapear um conjunto nebuloso para um único ponto do universo de discurso, ou seja, transformam a saída que é conjunto nebuloso em um valor numérico, e também de acordo com (WANG, 1997) é desejável que apresentem as seguintes características:

1. Sejam plausíveis, onde, o valor de saída y^* represente o conjunto nebuloso de saída por um ponto (como média, máximo ou ponto de cruzamento).
2. Apresentem simplicidade computacional, permitindo assim cálculos mais rápidos do sistema nebuloso.
3. Apresentem continuidade, onde variações pequenas no conjunto nebuloso de saída não impliquem em grandes variações do valor de saída y^* .

Os defuzzificadores mais comuns são:

- **Centro de gravidade:** onde analisando as funções de pertinência como funções de distribuição de probabilidade, o defuzzificador encontra o valor do ponto de saída

y^* como sendo a média da distribuição. Tem como vantagem ser bem intuitivo mas apresenta a desvantagem de ter cálculos complexos.

- **Média central:** realiza a média ponderada dos conjuntos nebulosos de saída, onde os pesos são os valores das pertinências nos centros. Tem o intuito de ser intuitivo como o defuzzificador por centro de gravidade mas com cálculos mais simples.
- **Máximo:** escolhe o ponto em que a função de pertinência de saída tem seu valor máximo, e quando existir mais de um máximo pode-se escolher o maior, o menor ou o ponto médio dos máximos. É o defuzzificador mais simples proposto, mas é o menos intuitivo entre os apresentados.

2.2 Sistemas Takagi-Sugeno

Em meados da década de oitenta, dois japoneses, Takagi e Sugeno, propuseram uma nova ferramenta matemática para a construção de um modelo de um sistema nebuloso, que nos dias de hoje é conhecido como sistema Takagi-Sugeno (T-S) (TAKAGI; SUGENO, 1985). Esse modelo atua na premissa de que as implicações nebulosas eram formadas por variáveis linguísticas e viu-se necessário uma forma de convertê-las em valores numéricos, pois assim poderia ser feita uma melhor aplicação nos problemas relacionados à engenharia.

Como visto por (2.5), tanto as proposições da parte SE quanto da parte ENTÃO dos sistemas Mamdani são formadas por conjuntos nebulosos. Nos sistemas Takagi-Sugeno tem-se uma alteração na parte ENTÃO, onde ao invés de conjuntos nebulosos têm-se funções dependentes das entradas do sistema nebuloso e de outras variáveis externas. As regras para esses sistemas são consideradas sendo da forma descrita por (2.7).

$$\text{Regra } k : \text{ SE } x_1 \text{ é } A_1^k \text{ e } x_2 \text{ é } A_2^k \text{ e...e } x_n \text{ é } A_n^k, \text{ ENTÃO } y = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.7)$$

Apesar de diferir dos sistemas Mamdani, pode-se aplicar todas as ferramentas até então descritas para os sistemas Takagi-Sugeno. Isso pode ser feito considerando que os conjuntos nebulosos de saída para cada regra agora são conjuntos *singleton* possuindo valor de pertinência igual a 1 no ponto em que estão e zero para o restante do universo de discurso. Pode-se observar também que o conjunto *singleton* para sistemas Mamdani representa um único ponto, enquanto para sistemas Takagi-Sugeno representa uma função.

Ao utilizar sistemas Takagi-Sugeno as ferramentas mais usuais são o fuzzificador *singleton*, a inferência do produto e o defuzzificador de média central. Com isso pode-se encontrar a saída desses sistemas seguindo os seguintes passos (FENG, 2006):

1. Encontra-se a função de pertinência da parte SE para cada regra de acordo com (2.8).

$$\mu_{A_k}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^k}(x_i). \quad (2.8)$$

2. Como as saídas não são conjuntos nebulosos e utiliza-se fuzzificador *singleton*, a pertinência de cada regra é calculada utilizando a função de pertinência do passo 1, (2.8).
3. Como a parte central das funções de pertinência de cada regra é dada por $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$, ao utilizar o defuzzificador de média central têm-se (2.9).

$$\mathbf{y} = \frac{\sum_{k=1}^r \mu_{A_k}(\mathbf{x}) f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)}{\sum_{k=1}^r \mu_{A_k}(\mathbf{x})} = \sum_{k=1}^r h_k(\mathbf{x}) f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta), \quad (2.9)$$

$$h_k(\mathbf{x}) = \frac{\mu_{A_k}(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \mu_{A_i}(\mathbf{x})}, \quad (2.10)$$

$$h_k(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \sum_{k=1}^r h_k(\mathbf{x}) = 1. \quad (2.11)$$

Com isso as funções $h_k(\mathbf{x})$ dadas por (2.10) são chamadas funções de pertinência normalizadas de cada regra e possuem as propriedades descritas em (2.11).

2.3 Método adaptativo por aproximação

Como visto no Capítulo 1, sistemas nebulosos fazem uma aproximação do comportamento de sistemas reais com base em lógica nebulosa. Isto é, para sistemas não lineares onde suas dinâmicas são parcialmente ou totalmente desconhecidas, deve-se utilizar funções nebulosas para aproximar as partes não conhecidas, mais especificamente, utilizar sistemas do tipo Takagi-Sugeno como funções de aproximação.

Um método de controle nebuloso adaptativo por aproximação deve, assim como todo sistema de controle, garantir a estabilidade do sistema em malha fechada e da resposta a distúrbios e erros de condições iniciais. Então, juntamente com as técnicas de controle deve-se fazer uma análise de estabilidade e verificar a viabilidade do método à ser aplicado.

2.3.1 Estabilidade de Lyapunov

A teoria de estabilidade de Lyapunov é um dos métodos mais utilizados para se investigar as propriedades de estabilidade de sistemas não lineares. A ideia principal é determinar se o estado de equilíbrio de um sistema dinâmico é ou não estável sem resolver a equação diferencial (FARRELL; POLYCARPOU, 2006).

Um ponto de equilíbrio é estável se todas soluções que começam em pontos próximos permanecem próximas, e assintoticamente estável se essas soluções também tendem ao ponto de equilíbrio à medida que o tempo aumenta (KHALIL, 2002).

Como exemplo, pode-se considerar um ponto de equilíbrio, de um sistema autônomo, na origem $\dot{x} = 0$, esse ponto é:

Estável se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

Instável se ele não é estável.

Assintoticamente estável se ele é estável e δ pode ser escolhido tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Para fazer análises sobre a propriedades de estabilidade de um sistema deve-se encontrar uma função $V(x, t)$, chamada de função de Lyapunov, que se encaixe em termos das variáveis de estados x e do tempo t , e também investigar sua derivada temporal, de acordo com (2.12).

$$\frac{d}{dt}V(x, t) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Então, novamente considerando $\dot{x} = 0$ como sendo um ponto de equilíbrio, $D \in \mathbb{R}^n$ um domínio contendo esse ponto de equilíbrio e $V(x)$ uma função continuamente diferenciável tal que:

$$V(0) = 0 \text{ e } V(x) > 0, \forall x > 0, \text{ em } D \text{ (função definida positiva)}$$

$$\text{então, } x = 0 \text{ é estável se } \dot{V}(0) = 0 \text{ e } \dot{V}(x) \leq 0,$$

$$\text{e } x = 0 \text{ é assintoticamente estável se } \dot{V}(0) = 0 \text{ e } \dot{V}(x) < 0.$$

Em geral, não existe uma regra para se definir um método específico de seleção de função de Lyapunov. Entretanto, para problemas de controle adaptativo existem funções candidatas pré definidas, muitas vezes funções que expressam energia (FARRELL; POLYCARPOU, 2006).

A análise de estabilidade de Lyapunov pode ser usada para mostrar limites das soluções das equações de estados, mesmo quando não há um ponto de equilíbrio na origem para as mesmas. Como exemplo (KHALIL, 2002), considere a Equação (2.13), a qual não possui nenhum ponto de equilíbrio.

$$\dot{x} = -x + \delta \text{sen}(t), \quad x(t_0) = a, \quad a > \delta > 0, \quad (2.13)$$

Cuja solução é dada por:

$$x(t) = e^{-(t-t_0)}a + \delta \int_{t_0}^t e^{-(t-\tau)} \text{sen}(\tau) d\tau \quad (2.14)$$

E a solução satisfaz

$$|x(t)| \leq e^{-(t-t_0)}a + \delta \int_{t_0}^t e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-(t-t_0)}a + \delta[1 - e^{-(t-t_0)}] \leq a, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.15)$$

Pela Equação (2.15) percebe-se que a solução é uniformemente limitada para todo $t \geq t_0$, ou seja, seu limite não depende de t_0 . Agora, utilizando um número b tal que: $\delta < b - a$, tem-se a equação:

$$|x(t)| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + \ln \left(\frac{a - \delta}{b - \delta} \right). \quad (2.16)$$

Agora pela Equação (2.16), observa-se que o limite b também é independente de t_0 e oferece uma melhor estimativa da solução. Assim, a solução é chamada de uniformemente finalmente limitada (do inglês UUB, *Ultimately Uniformly Bounded*), sendo b o limite final.

As análises anteriores mostram que o resultado da Equação (2.13) é uniformemente finalmente limitada e essa propriedade pode ser encontrada via análise de Lyapunov sem usar a solução explícita da equação de estados. Então, de acordo com (KHALIL, 2002), têm-se as seguintes definições:

- As soluções de um sistema são uniformemente limitadas se existe uma constante $c > 0$ independente de $t_0 > 0$ e que $\forall a \in (0, c)$ existe um $\beta = \beta(a) > 0$ independente de t_0 , tal que:

$$\|x(t_0)\| \leq a \rightarrow \|x(t)\| \leq \beta, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.17)$$

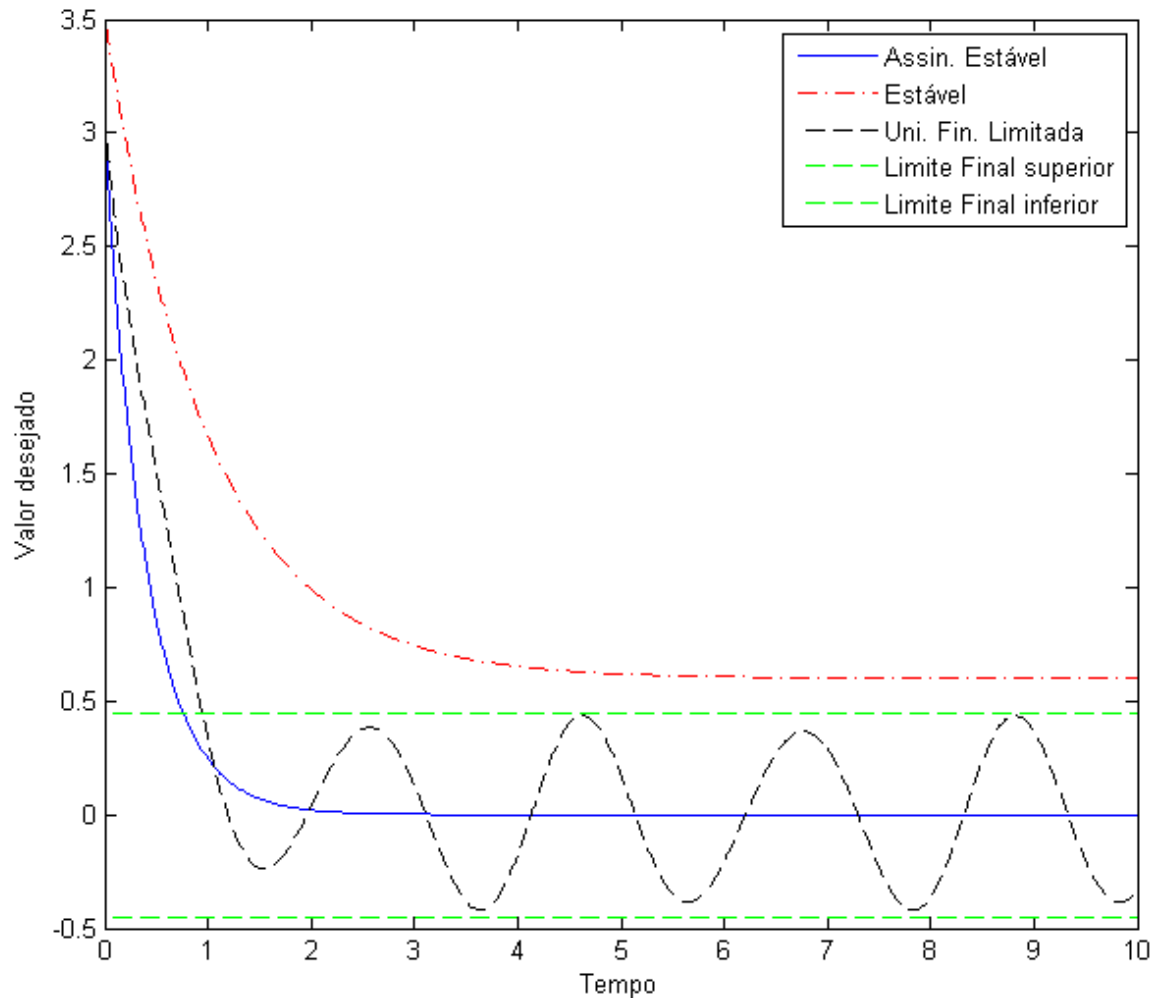
- As soluções de um sistema são uniformemente finalmente limitadas com limite final b , se existem constantes b e $c > 0$ independentes de $t_0 > 0$ e que $\forall a \in (0, c)$ existe um $T = T(a, b) \geq 0$, independente de t_0 , tal que:

$$\|x(t_0)\| \leq a \rightarrow \|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (2.18)$$

A Figura 6 exemplifica toda a teoria explicada anteriormente com três exemplos de sistemas de primeira ordem. Um sistema que é assintoticamente estável representado por uma linha contínua e tende a se estabilizar em zero; um sistema que é estável representado por uma linha pontilhada e tracejada e tende para um valor diferente de zero; e, por último, um sistema uniformemente finalmente limitado representado por uma linha tracejada, em que pode-se perceber que o mesmo não se estabiliza para um determinado valor, mas fica preso dentro de uma região marcada pelo limite final.

Um sistema uniformemente finalmente limitado possui uma informação de estabilidade mais pobre do que um sistema dito estável ou assintoticamente estável via análise de Lyapunov. Entretanto, tal característica faz com que tais sistemas sejam mais simples de terem suas propriedades provadas, visto que nem sempre é viável provar a estabilidade de sistemas não lineares complexos.

Figura 6 – Exemplos de diferentes formas de estabilidade para diferentes sistemas de primeira ordem.



2.3.2 Backstepping

A técnica *backstepping* é uma técnica de controle desenvolvida no início dos anos 90 com a finalidade de projetar controladores para uma classe de sistemas dinâmicos não lineares (KANELLAKOPOULOS; KOKOTOVIC; MORSE, 1991). O método apresenta uma estrutura recursiva, onde o desenvolvedor do controlador pode iniciar o processo de projeto em uma parte conhecida do sistema onde o mesmo é estável e retornar novos controladores que vão estabilizando progressivamente a cada iteração. O processo finaliza ao se alcançar o controle externo final, tendo assim, o nome de *backstepping* (KOKOTOVIC, 1992).

Para melhor compreensão da técnica *backstepping* considere o seguinte sistema

adaptado de (KOKOTOVIC, 1992) como exemplo:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2, \quad (2.19)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)x_3, \quad (2.20)$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)u, \quad (2.21)$$

$$y = x_1. \quad (2.22)$$

Considerando que as funções $f(x)$ e $g(x)$ são conhecidas, ou seja, o modelo do sistema é conhecido, o objetivo é fazer com que a saída y siga uma determinada referência $y_d(t)$. Ao aplicar a técnica *backstepping* os seguintes passos devem ser continuamente seguidos para, $i = 1$ até $i = n$.

1. Na equação i , o erro deve ser definido como $z_i = x_i - x_{i,d}$, onde $x_{i,d} = y_d$.
2. Reescrever a equação i utilizando o erro z_i , onde agora x_i será $z_i + x_{i,d}$.
3. Considerar controle virtual x_{i+1} como se fosse a entrada de controle.
4. Encontrar uma função de Lyapunov de controle para o sistema, da equação 1 até a equação i .
5. Usar a função de Lyapunov para obter a derivada da expressão $x_{i,d}$, que é a função de estabilização, para o controle virtual x_{i+1} . Para a equação n usa-se a entrada u no lugar de x_{n+1} .

2.3.3 Backstepping adaptativo

Devido à complexidade dos sistemas não lineares atuais nem sempre toda a dinâmica do sistema é conhecida. Nessa seção é descrito um modelo de controle adaptativo nebuloso utilizando a técnica *backstepping*, que nos últimos anos é uma das mais utilizadas nessa área (FENG, 2006).

Com base em (CHEN; LIU; GE, 2012), considera-se o sistema da seguinte forma:

$$\dot{x}_i = f_i(x) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1}, \quad (2.23)$$

$$\dot{x}_n = f_n(x) + g_n u, \quad (2.24)$$

$$y = x_1. \quad (2.25)$$

Em que, $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T$, $x \in R^n$ são as variáveis de estado do sistema; $u \in R$ é a entrada do sistema; $y \in R$ é a saída do sistema; $f_i(\cdot)$ e $g_i(\cdot)$ são funções não lineares desconhecidas com $f_i(0) = 0$ e $f_i(x) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} \neq 0$.

O objetivo de controle é projetar um controlador adaptativo em que a saída y siga um sinal de referência desejado y_d enquanto todos os sinais do sistema em malha fechada permaneçam limitados. Para isso deve-se assumir que o sinal de referência y_d e o sistema se comportem da seguinte forma:

1. Para $1 \leq i \leq n$, a função $g_i(\bar{x}_i)$ é desconhecida mas seu sinal é conhecido e existe uma constante desconhecida b_i de forma que:

$$0 < b_i \leq |g_i(\bar{x}_i)|. \quad (2.26)$$

Fazendo com que $g_i(\cdot)$ seja estritamente negativa ou positiva.

2. O sinal de referência desejado $y_d(t)$ deve possuir suas derivadas contínuas e limitadas, e assume-se que exista uma constante positiva d de forma que:

$$|y_d(t)| \leq d, \quad |\dot{y}_d(t)| \leq d. \quad (2.27)$$

3. Existem funções limitantes $\phi_i(\cdot) : R^+ \rightarrow R^+$ que se incrementam, em que $\phi_i(0) = 0$ tal que:
 $i = 1, 2, \dots, n - 1$

$$|f_i(x)| \leq \phi_i(\|x\|). \quad (2.28)$$

Agora é desenvolvido o projeto de controle, cuja análise de estabilidade é provada em (CHEN; LIU; GE, 2012). Os autores ao invés de aproximar a dinâmica do sistema, como geralmente é realizado de acordo com (FENG, 2006), aproximam funções dos estados da entrada e da referência desejada facilitando assim a prova da estabilidade. Além disso, os autores também utilizam uma metodologia em que se estima a norma dos parâmetros do aproximador ao invés do aproximador propriamente dito, reduzindo assim o número de estimações necessárias.

Para o subsistema de ordem i é definido um controle virtual α_i dada por (2.29).

$$\alpha_i = -(\lambda_i + 0,5)z_i - \frac{1}{2a_i^2}z_i\theta_i S_i^T(Z_i)S_i(Z_i), \quad (2.29)$$

em que, a_i e λ_i são constantes positivas a serem escolhidas durante o projeto; θ_i é a estimativa de θ_i^* que é o valor ótimo do parâmetro θ_i e é desconhecido, sendo estimado na

lei de controle; $S_i(Z_i)$ é o vetor com a função do sistema nebuloso de ordem i que é usado para aproximar a função não linear desconhecida no passo i ; z_i representa o sinal de erro no passo i , em que $z_i = x_i - \alpha_{i-1}$.

A lei de controle escolhida é descrita por

$$u(Z_n) = -(\lambda_i + 0,5)z_n - \frac{1}{2a_n^2}z_n\theta_n S_n^T(Z_n)S_n(Z_n). \quad (2.30)$$

Assim como na Equação (2.29), a_n e λ_n são constantes positivas a serem escolhidas durante o projeto; θ_n é a estimação de θ_n^* que é o valor ótimo do parâmetro θ_n e é desconhecido, sendo estimado na lei de controle; $S_n(Z_n)$ é o vetor com a função do sistema nebuloso de ordem n que é usado para aproximar a função não linear desconhecida no passo n .

Em seguida, a lei de adaptação dos parâmetros θ_i é dada pela Equação diferencial (2.31).

$$\dot{\theta}_i = \frac{r_i}{2a_i^2}z_i^2 S_i^T(Z_i)S_i(Z_i) - \sigma_i\theta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.31)$$

Em que, r_i e σ_i são constantes positivas a serem escolhidas durante o projeto.

Considerando o sistema descrito pelas Equações (2.23), (2.24) e (2.25), funções auxiliares f_i da análise de estabilidade podem ser aproximadas por sistemas de lógica nebulosa, de forma que o erro de aproximação δ_i é limitado. Ou seja, o erro δ_i aparece quando utilizam-se os parâmetros ótimos θ_i^* , e o mesmo diminui à medida que se aumenta o número de funções de pertinência dentro do intervalo.

Então, para condições iniciais limitadas, a lei de controle $u(Z_n)$ descrita na Equação (2.30), o controle virtual intermediário α_i descrito pela Equação (2.29) e as leis adaptativas $\dot{\theta}_i$ descritas pela Equação (2.31) garantem que todos os sinais em malha fechada são limitados e o limite final é dado pela seguinte inequação:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_1^2 \leq 2 \frac{d_0}{a_0}, \quad (2.32)$$

com $a_0 = \min(2\lambda_i b_i, \sigma_i : 1 \leq i \leq n)$ e $d_0 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(a_i^2 + \frac{\varepsilon_i^2}{b_i}) + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{2r_i} \sigma_i \theta_i^2 + \sum_{i=1}^n \epsilon_i \delta$, em que ϵ e ε são parâmetros de erro que aparecem durante a aproximação na análise de estabilidade do controlador e que, geralmente, são desconhecidos e fixos, ou seja não é possível mudá-los.

A prova do limite final mostrado na Equação (2.32) é descrita em (CHEN; LIU; GE, 2012) através da análise de estabilidade de Lyapunov.

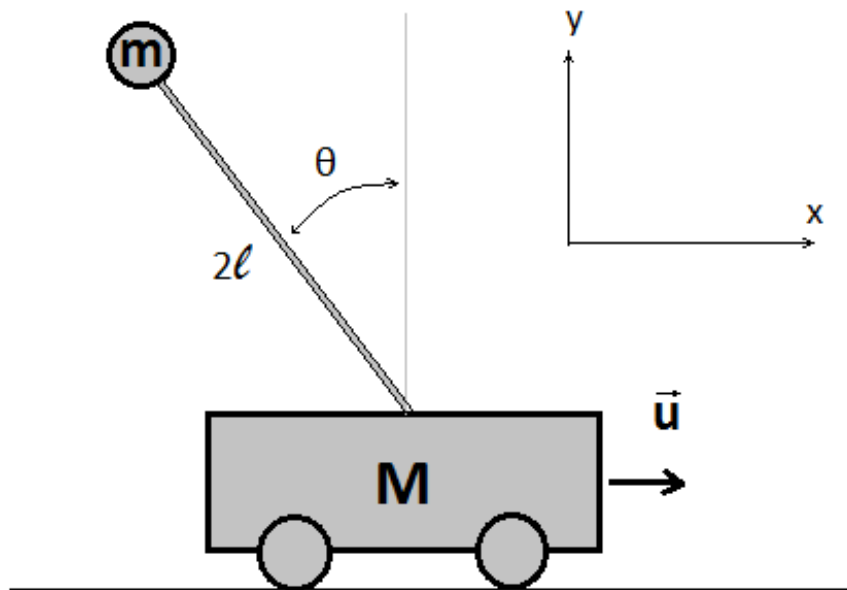
3 Estudo de Caso e Aplicação dos Métodos

Para melhor compreensão das metodologias apresentadas no Capítulo 2, nesse capítulo são apresentados dois estudos de caso para os quais é feita a análise dos métodos aplicados a um sistema modelo.

3.1 Sistema modelo

Considera-se o modelo, adaptado de Tanaka e Wang (2001), de um pêndulo invertido sobre um carro, onde o pêndulo se move livremente para à esquerda ou à direita fazendo um ângulo θ com o eixo vertical e o carro ao ser submetido uma força u se move no eixo horizontal. Este sistema é representado pela Figura 7 e seu modelo em espaço de estados é descrito de acordo com as Equações (3.1) e (3.2).

Figura 7 – Diagrama de um pêndulo invertido sobre um carro.



$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (3.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{g \operatorname{sen}(x_1(t)) - \frac{amlx_2^2(t) \operatorname{sen}(2x_1(t))}{2} - a \cos(x_1(t))u(t)}{\frac{4l}{3} - aml \cos^2(x_1(t))}. \quad (3.2)$$

Em que $x_1(t)$ representa a posição angular do pêndulo em relação ao eixo vertical em radianos (o ângulo θ na Figura 7); x_2 representa a velocidade angular em radianos por segundo; u é a força aplicada ao carro em Newtons; $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ representa a aceleração

da gravidade; $m = 0,1$ kg é a massa do pêndulo; $M = 0,3$ kg é a massa do carro; $2l = 1$ m é o comprimento do pêndulo; $a = 1/(m + M)$. Nas Equações (3.1) e (3.2), foram desconsideradas a dinâmica do carro e a resistência ao ar.

3.2 Controlador Mamdani

O objetivo da aplicação desse método é conseguir estabilizar o pêndulo na posição vertical e para cima (x_1 e $x_2 = 0$) a partir de diferentes valores iniciais para x_1 e x_2 , aplicando-se uma força u sobre o carro na direção horizontal.

Utilizou-se um sistema nebuloso com regras do tipo Mamdani nesse estudo de caso para estabilização do modelo do pêndulo invertido. Para a simulação das equações de espaço de estados do modelo utilizou-se o *Simulink* do *software* Matlab e o sistema de lógica nebulosa utilizado foi o *Fuzzy Logic Design* também do Matlab. Consideraram-se duas entradas para o controlador nebuloso, a posição angular x_1 e a velocidade angular x_2 , e como saída tem-se o valor da força u a ser aplicada no carro.

Para as duas entradas foram utilizadas três funções de pertinência triangulares, onde a da esquerda e da direita representam quando a posição e velocidade angular estão para à esquerda e à direita, respectivamente, e a do centro representa o pêndulo parado na vertical e para cima. Foram definidos os limites para posição angular no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ radianos e para velocidade angular no intervalo $[-2.5, 2.5]$ radianos por segundo. Ambos os casos estão representados pelas Figuras 8 e 9.

Figura 8 – Funções de pertinência para posição angular.

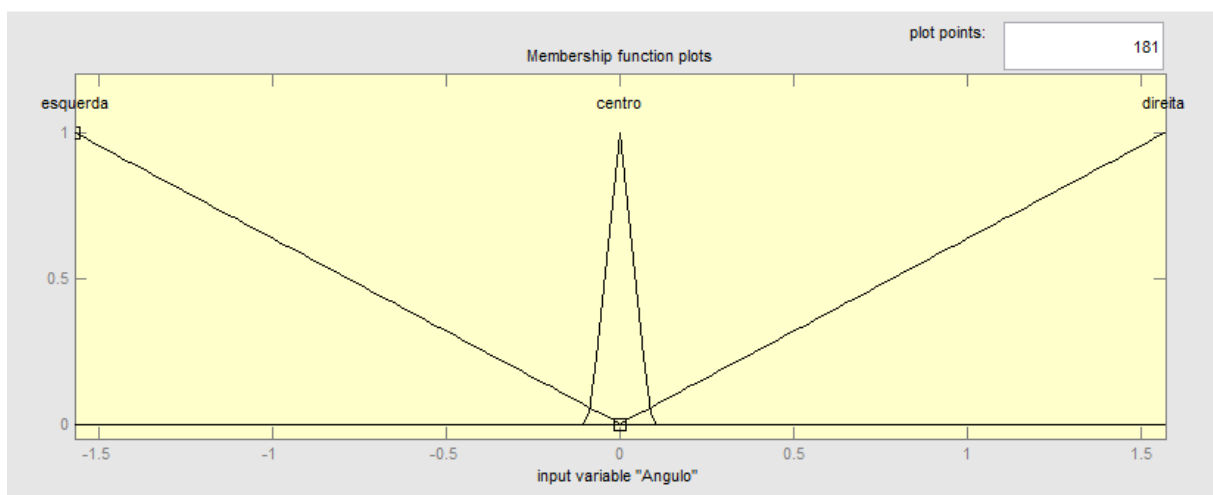
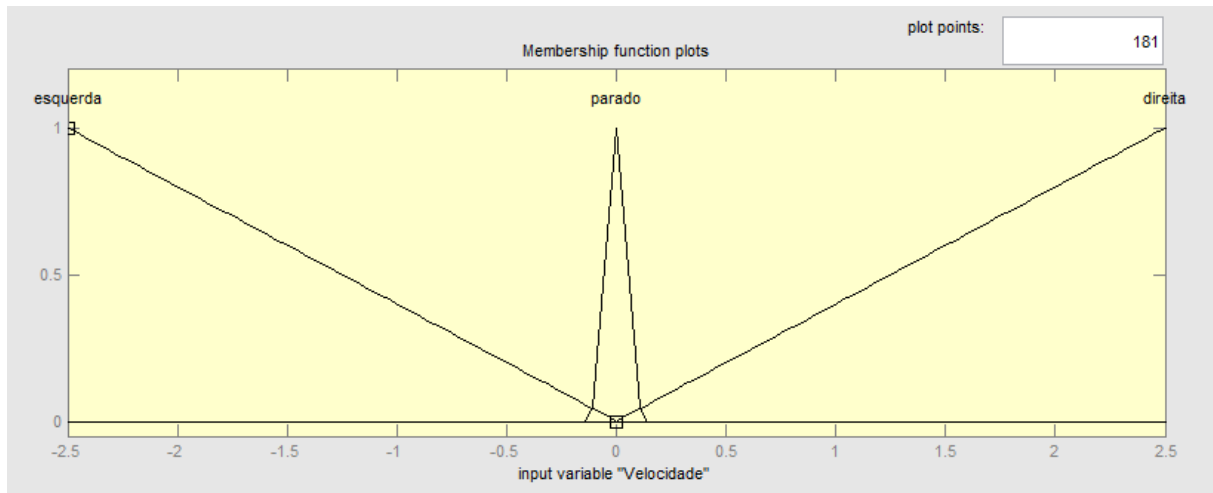


Figura 9 – Funções de pertinência para velocidade angular.



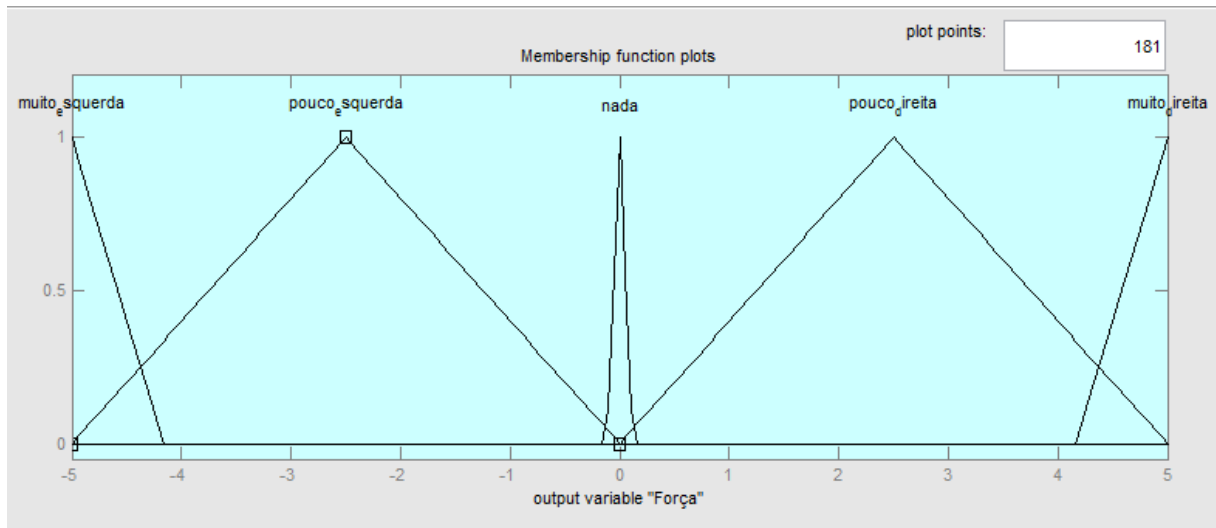
O conjunto de regras do controlador nebuloso é formado por nove regras e as duas variáveis de entrada são ligadas por um conector "e", sendo elas:

1. SE ângulo está para esquerda e velocidade é para esquerda, ENTÃO a força é muita para a esquerda.
2. SE ângulo está para esquerda e velocidade é parado, ENTÃO a força é muita para esquerda.
3. SE ângulo está para esquerda e velocidade é para direita, ENTÃO a força é muita para esquerda.
4. SE ângulo está no centro e velocidade é para esquerda, ENTÃO a força é pouca para esquerda.
5. SE ângulo está no centro e velocidade é parado, ENTÃO a força é nada.
6. SE ângulo está no centro e velocidade é para direita, ENTÃO a força é pouca para direita.
7. SE ângulo está para direita e velocidade é para esquerda, ENTÃO a força é muita para direita.
8. SE ângulo está para direita e velocidade é parado, ENTÃO a força é muita para direita.
9. SE ângulo está para direita e velocidade é para direita, ENTÃO a força é muita para direita.

Para a saída do sistema foram utilizadas cinco funções de pertinência triangulares, onde da esquerda para direita representam os conjuntos "muita força para esquerda, pouca

força para esquerda, sem força, pouca força para direita e muita força para direita". Os limites de força foram definidos no intervalo $[-5, 5]$ Newtons e na Figura 10 representam-se os conjuntos de saída.

Figura 10 – Funções de pertinência para força aplicada sobre o carro.



Todas as funções de pertinência, das variáveis de entrada e de saída foram definidas com base em vários testes feitos no sistema, a fim de encontrar a melhor alocação possível que permitisse que o sistema se estabilizasse para o maior valor de ângulo possível. Com isso conseguiu-se estabilizar o pêndulo para ângulos de até 0,87 radianos, o que corresponde à aproximadamente 49,85 graus, como pode-se observar na Figura 11.

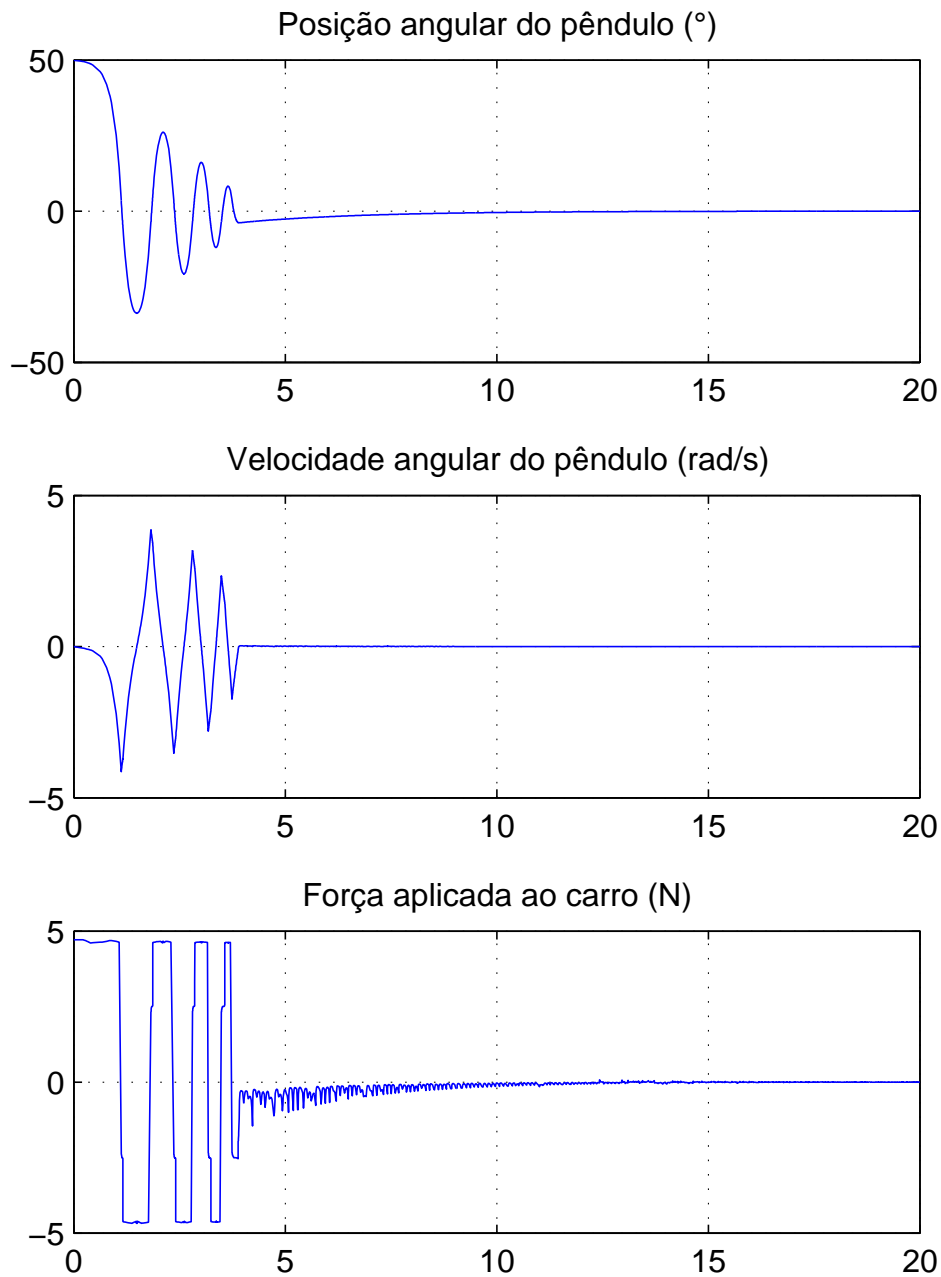
3.3 Controlador Nebuloso Adaptativo por Aproximação

O objetivo da aplicação deste método é conseguir fazer com que a saída do sistema do pêndulo descrito pelas Equações (3.1) e (3.2) siga uma referência desejada y_d . Para isso, utiliza-se a metodologia proposta em (CHEN; LIU; GE, 2012) apresentada no Capítulo 2. O controlador desenvolvido foi simulado utilizando o *Simulink* do *software Matlab*.

Assim como no controlador Mamdani mostrado na seção anterior, optou-se por utilizar funções de pertinência triangulares, visto que são mais fáceis de serem implementadas e apresentam resultados satisfatórios.

Ao analisar a dinâmica do sistema, definiu-se dois intervalos para os conjuntos nebulosos para a construção das funções de pertinência, sendo o intervalo 1 $[-\pi/2, \pi/2]$ e o intervalo 2 $[-1,5]$. A escolha do primeiro intervalo faz referência à posição angular do pêndulo que só pode atingir esses valores e será utilizado para as variáveis de estado de entrada x_i e saída desejada y_d . A escolha do segundo intervalo é feita de forma a atender as especificações impostas às leis de adaptação $\dot{\theta}_i \geq 0$ e que coincidam com o mesmo

Figura 11 – Resultados estudo de caso 1 por controlador Mamdani.



número de pertinências do conjunto 1, mas fazendo com que o centro da primeira função de pertinência esteja em zero.

Portanto, foram utilizadas cinco funções de pertinência para cada intervalo e as formas das mesmas são ilustradas nas Figuras 12 e 13.

Visto que o sistema do pêndulo apresenta dois estados, então, são necessárias duas iterações do método. Para a primeira iteração, o vetor de funções nebulosas $S_1(Z_1)$

Figura 12 – Forma das funções de pertinência para o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ para os parâmetros x e y .

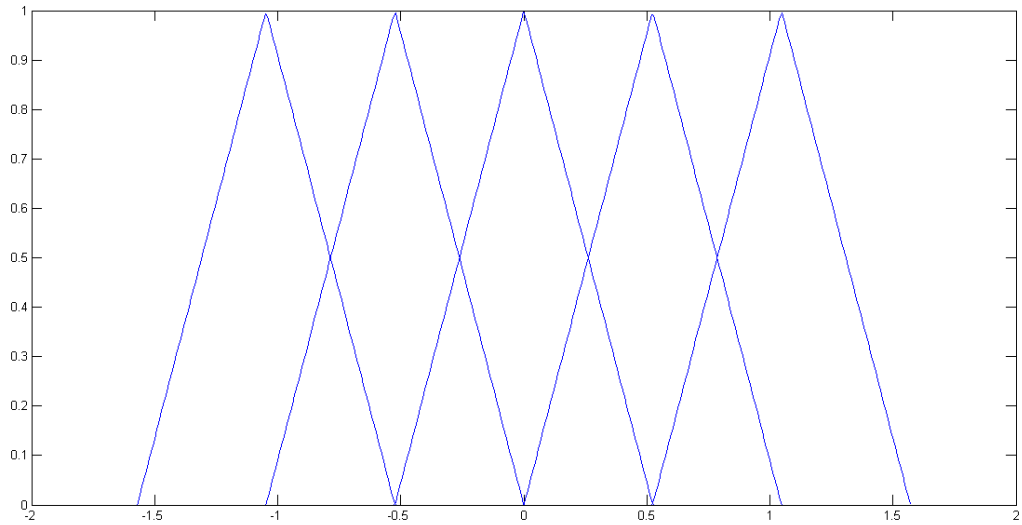
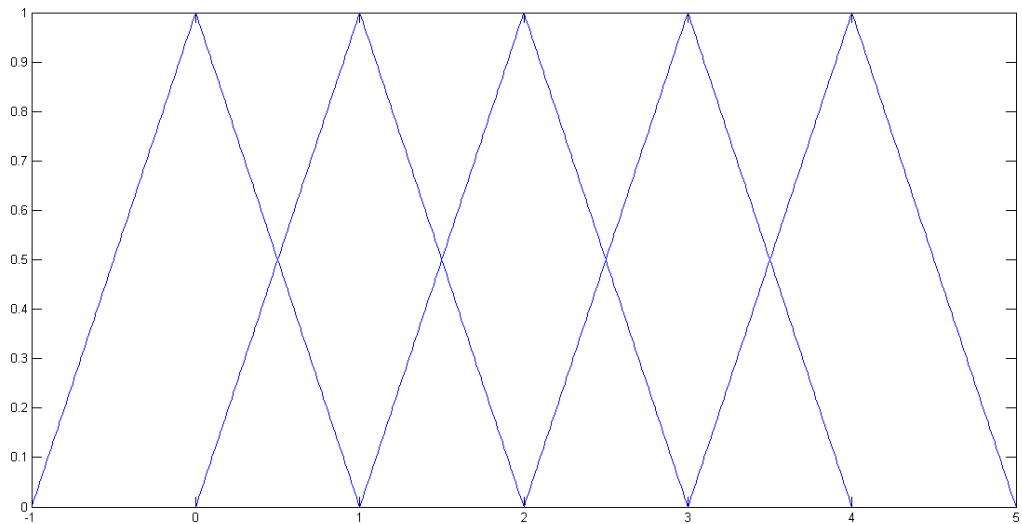


Figura 13 – Forma das funções de pertinência para o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ para os parâmetros θ .



é construído com $Z_1 = [x_1, \theta_1, y_d]$, com x_1 e y_d utilizados na construção de funções de pertinência no intervalo da Figura 12, e θ_1 utilizado na construção das funções de pertinência no intervalo da Figura 13.

Logo após, o erro $z_i = x_i - \alpha_{i-1}$ é calculado para a primeira iteração, ficando na forma $z_1 = x_1 - \alpha_0$ e para esse caso $\alpha_0 = y_d$ (o valor do controle virtual é a saída desejada). Assim pode-se agora utilizar as Equações (2.29) e (2.31) para a definição do

signal de controle virtual e lei de adaptação para o primeiro subsistema como descritos nas Equações (3.3) e (3.4) respectivamente.

$$\alpha_1 = -(\lambda_1 + 0,5)z_1 - \frac{1}{2a_1^2}z_1\theta_1S_i^T(Z_1)S_i(Z_1), \quad (3.3)$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{r_1}{2a_1^2}z_1^2S_1^T(Z_1)S_1(Z_1) - \sigma_1\theta_1. \quad (3.4)$$

Agora na segunda iteração, para o vetor de funções nebulosas $S_2(Z_2)$, tem-se que $Z_2 = [x_1, \theta_1, y_d, x_2, \theta_2, \dot{y}_d]$. E novamente como na primeira iteração, x_1, y_d e acrescentando x_2 e \dot{y}_d utilizados na construção de funções de pertinência no intervalo da Figura 12, e θ_1 e θ_2 utilizado na construção das funções de pertinência no intervalo da Figura 13.

Para obtenção dos parâmetros y_d e \dot{y}_d projetou-se um filtro de geração de trajetória de ordem 2, que recebe como entrada o sinal de referência escolhido y_r , e então passa-se a seguir o sinal de referência filtrado y_d , como mostrado pela Figura 14. O filtro projetado é de segunda ordem porque necessita-se da primeira derivada do sinal de referência e função de transferência do filtro é representada por (3.5) com ganho DC = 1.

$$\frac{Y_d(s)}{Y_r(s)} = \frac{a_0}{s^2 + a_1s + a_0}. \quad (3.5)$$

Para garantir que não ocorra uma grande perda de desempenho, utiliza-se um filtro cuja banda passante seja maior que a maior frequência que deseja-se restaurar. Então, o filtro possui a forma das Equações (3.6) e (3.7), que são suas equações em espaço de estados.

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_0 \end{bmatrix} y_r, \quad (3.6)$$

$$\begin{bmatrix} y_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Figura 14 – Filtro de geração de trajetória



Com isso tem-se o erro $z_2 = x_2 - \alpha_1$ e agora pode-se calcular a verdadeira variável de controle u utilizando a Equação (2.30) e a nova lei de adaptação $\dot{\theta}_2$, ambas descritas nas Equações (3.8) e (3.9), respectivamente.

$$u = (\lambda_2 + 0,5)z_2 + \frac{1}{2a_2^2}z_2\theta_2S_2^T(Z_2)S_2(Z_2), \quad (3.8)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{r_2}{2a_2^2} z_2^2 S_2^T(Z_2) S_2(Z_2) - \sigma_2 \theta_2. \quad (3.9)$$

Como o sistema do pêndulo possui realimentação negativa e o sistema base do método proposto no Capítulo 2 possui realimentação positiva, o sinal da variável de controle u foi invertido, como pode-se perceber ao comparar as Equações (2.30) e (3.8).

As constantes utilizadas no controlador foram: $r_1 = 3$, $a_1 = 1$, $\lambda_1 = 60$, $\sigma_1 = 0,05$, $r_2 = 3$, $a_2 = 1$, $\lambda_2 = 1000$ e $\sigma_2 = 0,05$. As constantes a_i e σ_i foram escolhidas de forma a serem reduzidas no sentido em que se aumenta r_i , pois isso influencia diretamente na redução do erro de rastreamento.

Uma abordagem importante a ser analisada é o fato de que: foram definidas cinco funções de pertinência para todas variáveis de estados e os vetores Z_1 e Z_2 apresentam três e seis variáveis, respectivamente. Como é feita uma combinação dessas variáveis com as funções de pertinência, então, obtêm-se um total de $5^3 + 5^6 = 15750$ estimações. Entretanto, no Capítulo 2, mencionou-se que para essa metodologia é estimada a norma dos parâmetros do aproximador ao invés do aproximador propriamente dito, as normas de Z_1 e Z_2 . Ou seja, o número de estimações necessárias é drasticamente reduzido de 15750 para 2, fazendo com que o processo de simulação seja bem mais simples e com um custo computacional bem menor.

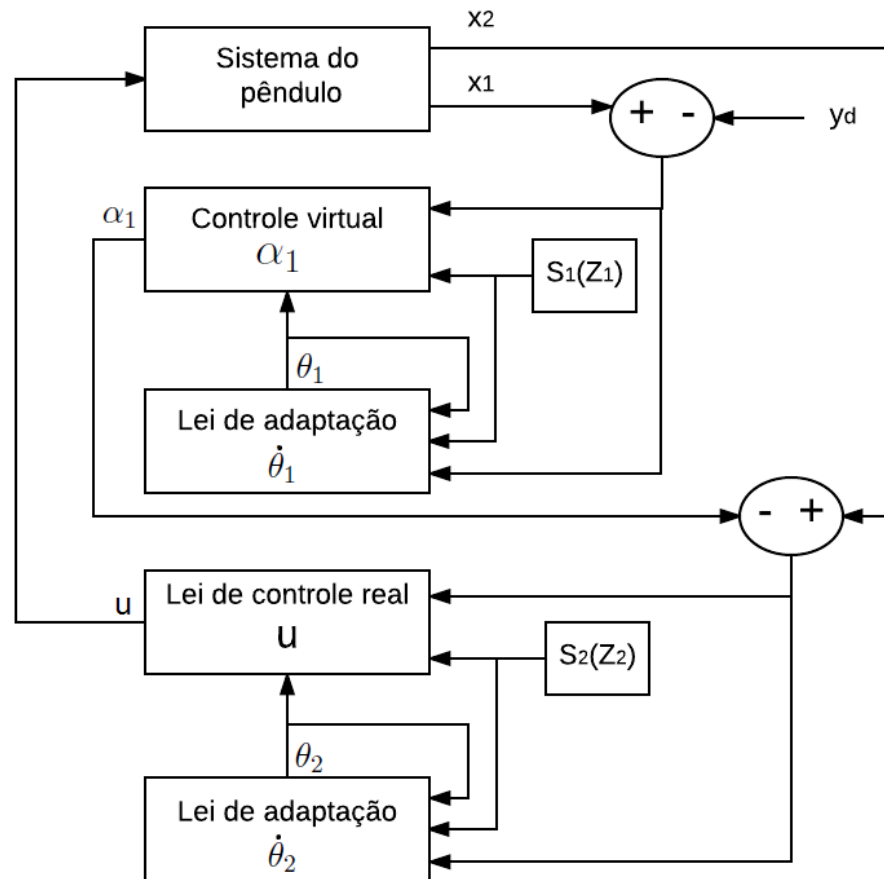
A Figura 15 ilustra o diagrama de blocos do controlador nebuloso adaptativo por aproximação utilizando a técnica *backstepping*.

Para o início da simulação, utilizaram-se as condições iniciais de $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$, ou seja, o pêndulo estava inicialmente parado e estabilizado na posição horizontal = zero graus, e a condição inicial do parâmetro $\theta(0) = 0$ também foi a mesma.

Para o sinal de referência, primeiro utiliza-se um sinal senoidal para fazer o pêndulo oscilar sua posição entre $-1,256$ e $1,256$ radianos, em seguida leva-se o sinal para o ponto de equilíbrio ($x = 0$) e, por último, aplicou-se um degrau positivo e outro negativo, ambos com amplitude de 1 radiano. O sinal de referência é gerado assim para poder analisar o comportamento do sistema sob diversas condições.

A Figura 16 apresenta os resultados da simulação. No primeiro gráfico é representado o sinal de referência desejado para a posição angular do pêndulo (em linha contínua) e a posição seguida pelo pêndulo (em linha tracejada). Observa-se que o sinal do sistema segue satisfatoriamente o sinal de referência, fazendo praticamente a mesma trajetória. Os outros gráficos mostram o comportamento da velocidade angular do pêndulo e da força aplicada ao carro respectivamente.

Figura 15 – Diagrama de blocos do controlador.



3.4 Comparação entre os métodos utilizados

Para fins de comparação entre os dois estudos de caso utilizados neste trabalho, simulou-se novamente o controlador nebuloso adaptativo por aproximação, dessa vez com a condição inicial de posição angular do pêndulo $x = 0,87$ radianos (aproximadamente 49,85 graus), que foi a posição máxima que o controlador Mamdani conseguiu estabilizar o sistema.

As Figuras 17, 18 e 19 apresentam as simulações dos controladores feitas sob mesmas condições. O controlador 1 indicado nas legendas (em linhas pontilhadas) corresponde aos resultados do Controlador Mamdani e o Controlador 2 (em linhas contínuas) corresponde aos resultados do Controlador nebuloso adaptativo por aproximação.

Percebe-se que para mesma posição angular inicial o controlador adaptativo por aproximação estabiliza o modelo do pêndulo em um tempo muito menor que o controlador Mamdani. Entretanto, para isso é necessário elevar muito a força aplicada ao carro, o que por consequência aumenta muito a velocidade angular do pêndulo.

Figura 16 – Resultados estudo de caso 2 por controlador nebuloso adaptativo por aproximação.

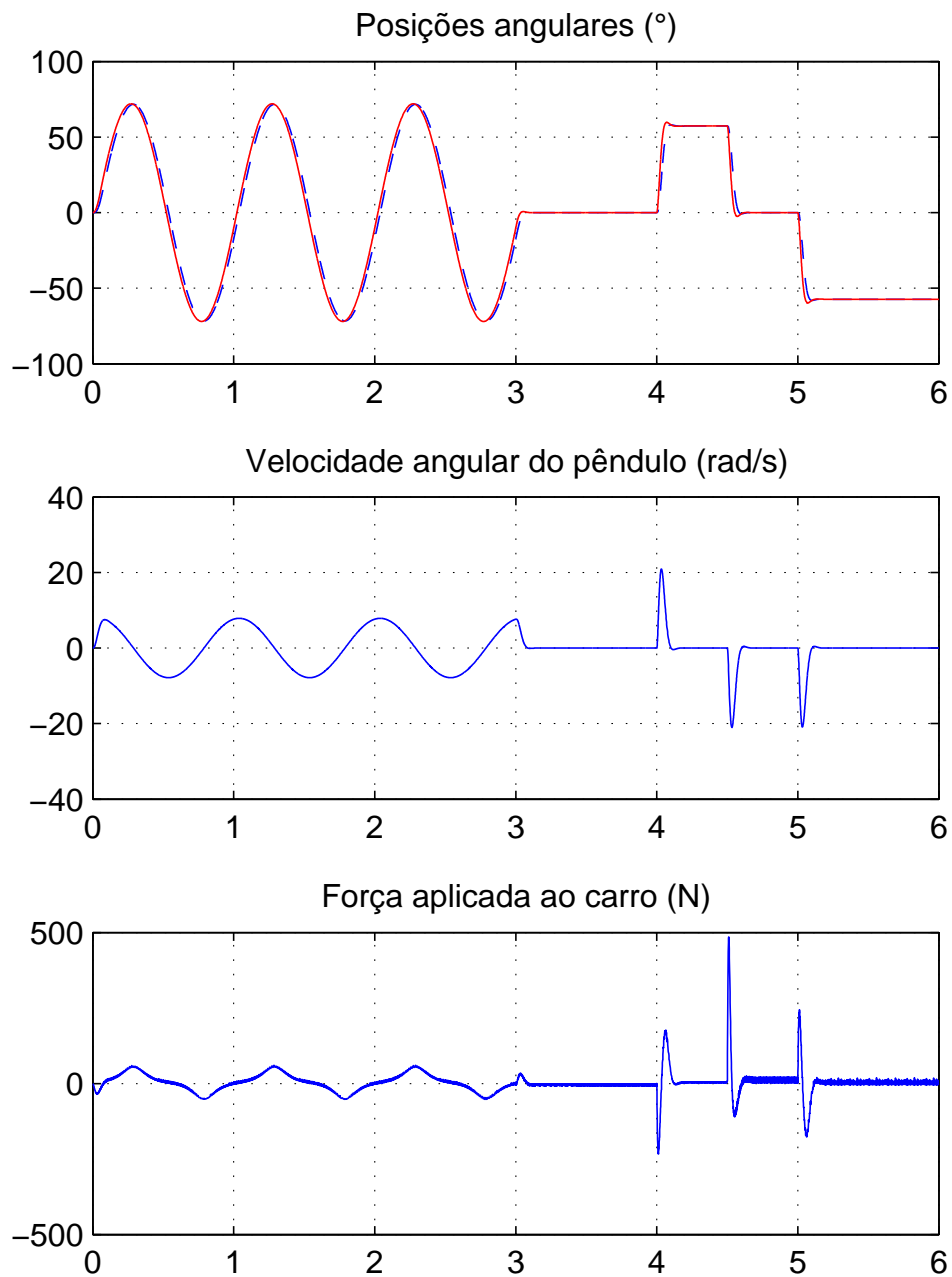


Figura 17 – Posições angulares do pêndulo para os dois controladores projetados.

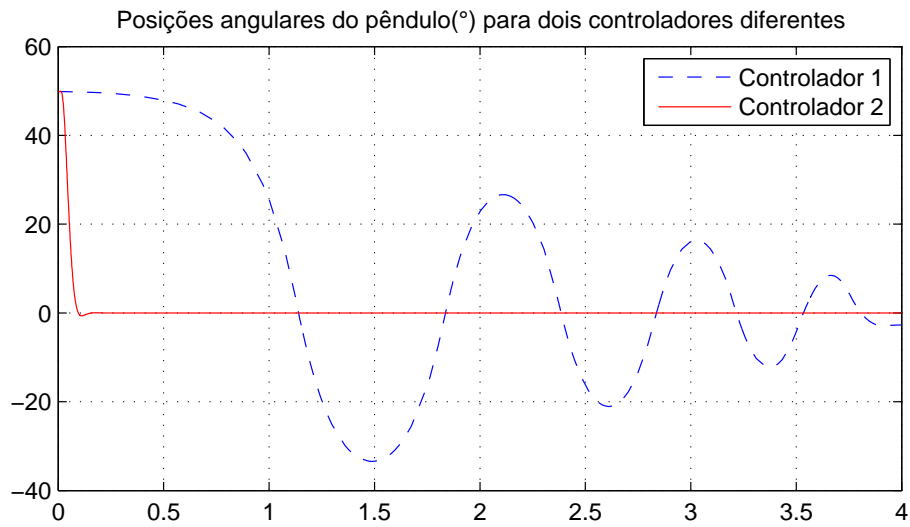


Figura 18 – Velocidades angulares do pêndulo para os dois controladores projetados.

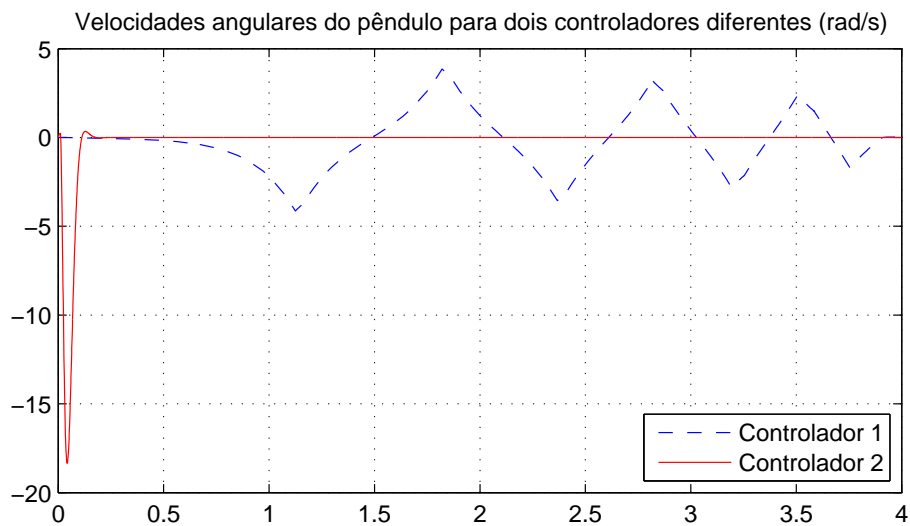
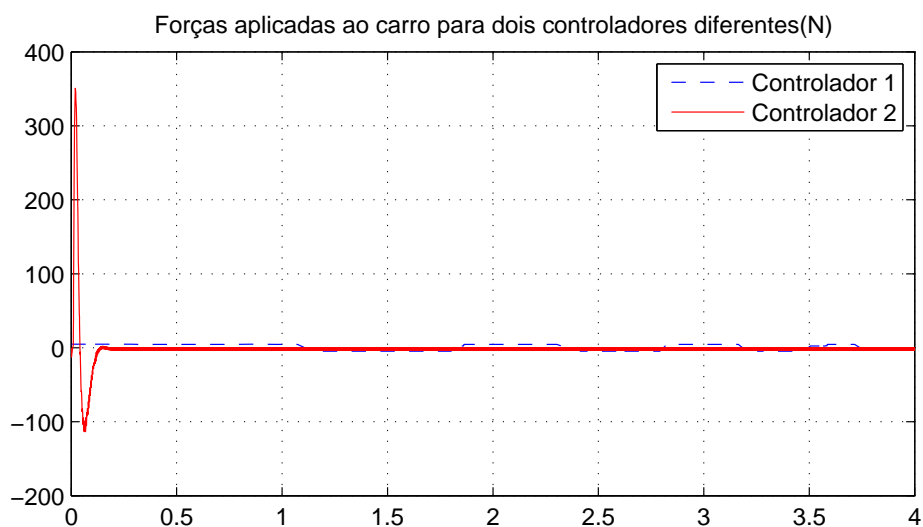


Figura 19 – Forças aplicadas ao carro para os dois controladores projetados.



4 Conclusões

As metodologias apresentadas neste trabalho mostram-se eficientes para o estudo de caso proposto.

Na primeira metodologia, em que utilizou-se um controlador baseado em sistemas Mamdani, percebe-se que para o desenvolvimento dos mesmos deve haver um conhecimento de como todo o sistema se comporta de forma a se fazer a melhor representação linguística desse sistema e, além disso deve-se ajustar os parâmetros do controlador nebuloso (funções de pertinência, regras e a quantidade das mesmas) com base em testes. Para esse primeiro método, quanto mais detalhes forem inseridos no controlador melhor será sua precisão, porém, quanto mais informações mais complexo é o processo de simulação. Um aspecto negativo desse controlador foi a necessidade do uso do *toolbox* do *software Matlab* para fazer o mapeamento das entradas com as funções de pertinência de acordo com as regras inseridas, visto que a complexidade de simular tal ferramenta é muito grande.

Na segunda metodologia, um controlador baseado em métodos adaptativos por aproximação e utilizando a técnica *backstepping*, não há necessidade de se lidar diretamente com a dinâmica do sistema, pois a mesma é aproximada de forma iterativa através de parâmetros do controlador. Entretanto, o conhecimento humano do comportamento do sistema, mesmo que não passado de forma linguística, se faz presente através das funções de pertinência que foram escolhidas para aproximar o sistema com base nos valores de saída que o mesmo deve apresentar.

Comparando os métodos aplicados, conclui-se através das simulações que o controlador nebuloso adaptativo é uma alternativa melhor. Existe um equacionamento matemático para a construção do mesmo ao invés de testar todos parâmetros intuitivamente a fim de se obter os melhores possíveis e ele também estabiliza o modelo do pêndulo em um tempo muito menor. Entretanto, esse controlador eleva a força u aplicada ao carro a um valor muito alto e, por consequência, a velocidade angular do pêndulo também é incrementada. Nesse aspecto, o controlador Mamdani leva vantagem, pois no mesmo é possível limitar os parâmetros a serem controlados, por exemplo, parâmetros físicos.

Como consideração final para esse trabalho, conclui-se que controladores baseados em lógica nebulosa são ótimas alternativas para sistemas complexos. Embora também atendam bem as expectativas em sistemas simples, suas implementações para tais aplicações é mais complexa que as técnicas de controle mais convencionais.

Como continuação para este trabalho, pode-se aprimorar ambos os controladores. Para o controlador Mamdani, pode-se ajustar o mesmo para que este passe a seguir uma trajetória e não seja mais limitado a apenas estabilizar o pêndulo. Por fim, O controlador adaptativo por aproximação pode ser ajustado para serem inseridos limites dos parâmetros, respeitando assim os limites físicos de um sistema real.

Referências

- CHEN, B.; LIU, X. P.; GE, S. S. Adaptive fuzzy control of a class of nonlinear systems by fuzzy approximation approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 20, n. 6, DECEMBER 2012. 2, 17, 18, 19, 23
- FARRELL, J. A.; POLYCARPOU, M. M. *ADAPTIVE APPROXIMATION BASED CONTROL - Unifying Neural, Fuzzy and Traditional Adaptive Approximation Approaches*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2006. 4, 13, 14
- FENG, G. A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 14, n. 5, 2006. 2, 12, 17, 18
- GUERRA, T. M.; SALA, A.; TANAKA, K. Fuzzy control turns 50: 10 years later. *Fuzzy Sets and Systems*, n. 281, p. 168–182, 2015. 4
- HOLMBLAD, L. P.; OSTERGAARD, J.-J. The first application of fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 70, p. 135–146, 1995. 1
- KANELLAKOPOULOS, I.; KOKOTOVIC, P. V.; MORSE, A. S. System design of adaptive controller for feedback linear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 36, n. 11, NOVEMBER 1991. 4, 16
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. Third edition. [S.l.]: Prentice Hall, 2002. 4, 13, 14, 15
- KOKOTOVIC, P. V. The joy of feedback: Nonlinear and adaptive. *IEEE Control Systems Magazine*, n. 12, p. 7–17, 1992. 16, 17
- LEE, H. Robust adaptive fuzzy control by backstepping for a class of mimo nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 19, n. 2, APRIL 2011. 2
- LEE, H.; TOMIZUKA, M. Robust adaptive control using a universal approximator for siso nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 8, n. 1, FEBRUARY 2000. 2
- LI, T.-S.; TONG, S.-C.; FENG, G. A novel robust adaptive-fuzzy tracking control for a class of nonlinear multi-input/multi-output systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 18, n. 1, FEBRUARY 2010. 2
- LI, Y.; TONG, S.-C.; LI, T.-S. Adaptive fuzzy output-feedback control for output constrained nonlinear systems in the presence of input saturation. *Fuzzy Sets and Systems*, n. 248, p. 138–155, 2014. 4
- MAMDANI, E. H.; ASSILIAN, S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *Int. J. Man-Machine Studies*, v. 7, p. 1–13, 1975. 1
- SUGENO, M.; NISHIDA, M. Fuzzy control of model car. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 16, p. 103–113, 1985. 1
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to model and control. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, SMC-15, n. 1, p. 116–132, 1985. 4, 12

- TANAKA, K.; WANG, H. O. *Fuzzy Control Systems Design And Analysis - A Linear Matrix Inequality Approach*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2001. 20
- WANG, L.-X. *A Course in Fuzzy Systems and Control*. International edition. [S.l.]: Prenatice Hall International, Inc., 1997. 1, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11
- WANG, T. et al. Adaptive fuzzy backstepping control for a class of nonlinear systems with sampled and delayed measurements. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2015. 2
- YAMAKAWA, T. Stabilization of an inverted pendulum by a high-speed fuzzy logic controller hardware system. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 32, p. 161–180, 1989. 1
- YU, G.-R.; LAI, J.-J.; LIU, J.-Y. T-s fuzzy control of a single-phase bidirectional inverter. *IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*, p. 1462–1467, MARCH 2016. 2
- ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, p. 338–353, 1965. 1, 2, 6
- ZADEH, L. A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, smc-3, n. 1, January 1973. 6