



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
ESCOLA DE MINAS
COLEGIADO DO CURSO DE ENGENHARIA DE CONTROLE
E AUTOMAÇÃO - CEAU**



WELLINGTON TEIXEIRA MARTINS

**APLICAÇÃO DE SINTONIA MULTIOBJETIVO PARA CONTROLE
PREDITIVO POR MODELO DE CIRCUITOS DE MOAGEM**

**MONOGRAFIA DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE CONTROLE E
AUTOMAÇÃO**

Ouro Preto, 2021

WELLINGTON TEIXEIRA MARTINS

**APLICAÇÃO DE SINTONIA MULTI OBJETIVO PARA CONTROLE
PREDITIVO POR MODELO DE CIRCUITOS DE MOAGEM**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para a obtenção do Grau de Engenheiro de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Thiago Antônio Melo Euzébio, Dr.Sc.

Coorientador: André Shigueo Yamashita, Dr.Sc.

Coorientadora: Prof. Adrielle de Carvalho Santana, Dr.Sc.

**Ouro Preto
Escola de Minas – UFOP
2021**

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

M386a Martins, Wellington Teixeira.

Aplicação de sintonia multiobjetivo para controle preditivo por modelo de circuitos de moagem. [manuscrito] / Wellington Teixeira Martins. - 2021.

59 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Dr. Thiago Antônio Melo Euzébio.

Coorientadores: Profa. Dra. Adrielle de Carvalho Santana, Prof. Dr. André Shigueo Yamashita.

Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Graduação em Engenharia de Controle e Automação .

1. Controle de processo - Modelo de controle preditivo. 2. Beneficiamento de minério - Circuito de moagem. 3. Otimização multiobjetivo. I. Euzébio, Thiago Antônio Melo . II. Santana, Adrielle de Carvalho . III. Yamashita, André Shigueo . IV. Universidade Federal de Ouro Preto. V. Título.

CDU 681.5:519.85

Bibliotecário(a) Responsável: Sione Galvão Rodrigues - CRB6 / 2526



ATA DA SESSÃO DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Aos 03 dias do mês de setembro do ano de 2021, às 9 horas, reuniu-se por meio de videoconferência (<https://meet.google.com/inm-tzfq-gzw>), a Comissão Avaliadora designada para julgar a Monografia do graduando Wellington Teixeira Martins do curso de Engenharia de Controle e Automação intitulada "Aplicação de Sintonia Multiobjetivo para Controle Preditivo por Modelo de Circuitos de Moagem", sob orientação do Prof. Thiago Antônio Melo Euzébio, coorientação do Prof. André Shigueo Yamashita e coorientação da Profa. Adrielle de Carvalho Santana sendo a referida Comissão composta pelos professores Thiago Antônio Melo Euzébio, André Shigueo Yamashita, Adrielle de Carvalho Santana, Paulo Marcos de Barros Monteiro e Bruno Nazário Coelho. A Comissão Avaliadora resolveu considerar o trabalho **aprovado** atendendo às exigências para defesa e recomendações da banca examinadora.

Ouro Preto, 03 de setembro de 2021.

Prof DSc. Thiago Antônio Melo Euzébio – Orientador

Profa. DSc. Adrielle de Carvalho Santana – Coorientadora

Prof. DSc. André Shigueo Yamashita – Coorientador

Prof. DSc. Paulo Marcos de Barros Monteiro – Professor Convidado

Prof. DSc. Bruno Nazário Coelho – Professor Convidado

Wellington Teixeira Martins - Aluno



Documento assinado eletronicamente por **Adrielle de Carvalho Santana, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 03/09/2021, às 10:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **THIAGO ANTONIO MELO EUZÉBIO, Usuário Externo**, em 03/09/2021, às 10:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Andre Shigueo Yamashita, Usuário Externo**, em 10/09/2021, às 03:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0 , informando o código verificador **0217129** e o código CRC **31CD2018**.

Referência: Caso responda este Memorando, indicar expressamente o Processo nº 23109.009191/2021-03

SEI nº 0217129

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar - Ouro Preto/MG, CEP 35400-000
Telefone: 3135591533 - www.ufop.br

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer e destinar essa monografia para as seguintes pessoas:

Agradeço aos meus pais Marta e José, aos meus irmãos Bruno, Gilmara e Silmara e a todos os meus amigos pelo apoio e incentivo para a realização deste sonho.

Agradeço ao professor e orientador Thiago Euzébio pelos ensinamentos, apoio e paciência, durante a condução deste trabalho e ao decorrer dos meus últimos anos de graduação. Agradeço também, aos coorientadores Adrielle e André pelas contribuições e auxílio para o desenvolvimento e finalização desta monografia.

Sou grato aos professores da Universidade Federal de Ouro Preto que por meio de seus ensinamentos possibilitaram a finalização deste trabalho.

Por fim, expresso minha gratidão à Universidade Federal de Ouro Preto e ao Instituto Tecnológico Vale por proporcionar o ambiente, as amizades, a experiência e o conhecimento que favoreceram o meu crescimento pessoal e profissional.

“Matéria é a parte accidental.” (Oliver Lodge)

RESUMO

Este trabalho consiste na aplicação de uma técnica de sintonia para um Controlador Preditivo por Modelo (MPC, *Model Predictive Control*) em circuitos de moagem. A técnica é baseada na otimização multiobjetivo e o problema é resolvido utilizando um algoritmo de programação por compromisso que minimiza uma distância euclidiana entre uma solução de Pareto e a solução Utópica. Para a demonstração da eficácia da sintonia, três exemplos de circuitos de moagem são apresentados, consistindo em dois modelos de circuitos de moagem lineares, 2×2 e 4×4 , e um modelo de circuito não-linear 3×3 simulado no *software* IDEAS da Andritz *Automation*. Para o desenvolvimento do algoritmo de controle e da técnica de sintonia é utilizado o *software* MATLAB. Por fim, são apresentados os resultados da metodologia proposta aos três circuitos, sendo que, para o circuito não-linear 3×3 são aplicadas perturbações que geralmente ocorrem nesse tipo de planta industrial.

Palavras-chaves: Sintonia de Controlador, Controlador Preditivo por Modelo, Circuito de Moagem.

ABSTRACT

This work consists of the application of a tuning technique for a Model Predictive Controller in grinding circuits. The technique is based on multi-objective optimization that uses a compromise programming algorithm to minimize a Euclidean distance between to find a Pareto solution that minimizes the Euclidian distance between it and the Utopic solution. Three examples of grinding circuits are presented to demonstrate the effectiveness of tuning, consisting of two linear grinding circuit models, 2x2 and 4x4, and a nonlinear 3x3 circuit model simulated in the IDEAS program from Andritz Automation. The MATLAB software is used to develop the control algorithm and tuning technique. Finally, the proposed methodology results are presented in simulated scenarios, in which typical disturbances that affect industrial plants are rejected or mitigated.

Key-words: Controller Tuning, Model Predictive Control, Grinding Circuits.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Moinho cilíndrico de bolas ou barras. (Fonte: (LUZ; SAMPAIO; FRANÇA, 2010))	22
Figura 2 – Esquemático de um moinho em circuito fechado. Adaptado de: Luz, Sampaio e França (2010).	23
Figura 3 – Representação esquemática de um hidrociclone. (Fonte: (LUZ; SAMPAIO; FRANÇA, 2010)).	24
Figura 4 – Esquema básico de estratégia do MPC. (Adaptado de: Kallemback (2012))	26
Figura 5 – Estrutura básica do MPC. (Adaptado de: Camacho e Alba (2013))	26
Figura 6 – Modelo de convolução para uma resposta ao degrau, $y(t)$ é a variável controlada, g_i são os coeficientes obtidos por meio da resposta ao degrau e N corresponde ao tempo para a variável controlada atingir o estado estacionário após uma perturbação. (Adaptado de: Camacho e Alba (2013))	27
Figura 7 – Dominância de pareto.	32
Figura 8 – Espaço de conjunto de soluções viáveis e o espaço de objetivos viáveis.	33
Figura 9 – Ilustração do método de otimização por compromisso para dois objetivos. (Adaptado de Yamashita, Zanin e Odloak (2016))	34
Figura 10 – Exemplo de um modelo de sistema de bombeamento de polpa de minério simulado no <i>software</i> IDEAS.	37
Figura 11 – Fluxograma dos passo para a obtenção da primeira etapa do projeto do controlador DMC.	38
Figura 12 – Fluxograma dos passo para a obtenção da segunda etapa do projeto do controlador DMC.	39
Figura 13 – <i>System Identification Toolbox</i> do MATLAB.	40
Figura 14 – Metodologia para a identificação do processo de remoagem.	40
Figura 15 – Caixa ferramentas para importação de dados da <i>System Identification Toolbox</i>	41
Figura 16 – Estimação dos modelos do processo por meio da <i>System Identification Toolbox</i>	41
Figura 17 – Esquemático da comunicação OPC entre o MATLAB e o IDEAS.	42
Figura 18 – Diagrama esquemático do circuito de moagem para a aplicação I. Fonte (IVEZIĆ; PETROVIĆ, 2003).	43
Figura 19 – Resultado da sintonia da aplicação I, entrada e saída do processo (linha sólida azul) e a trajetória de referência (linha tracejada preta).	45
Figura 20 – Diagrama esquemático do circuito de moagem para a aplicação II. Fonte (CHEN et al., 2007).	46
Figura 21 – Resultado da sintonia do circuito de moagem II, saída do processo (linha sólida azul) e a trajetória de referência (linha tracejada preta).	48

Figura 22 – Resultado da sintonia do circuito de moagem II, entrada do processo (linha sólida azul).	48
Figura 23 – Diagrama esquemático da estratégia do DMC para o circuito de remoagem.	49
Figura 24 – Circuito de remoagem simulado no IDEAS.	50
Figura 25 – Resultado da sintonia do circuito de moagem III, saída do processo (linha sólida azul) e a trajetória de referência (linha tracejada preta).	52
Figura 26 – Resultado da sintonia do circuito de moagem III, entrada do processo (linha sólida azul).	52
Figura 27 – Resultado do cenário I, saídas do processo.	53
Figura 28 – Resultado do cenário I, entradas do processo.	53
Figura 29 – Resultado do cenário II, saídas do processo.	54
Figura 30 – Resultado do cenário II, entradas do processo.	54
Figura 31 – Resultado do cenário III, saídas do processo.	55
Figura 32 – Resultado do cenário III, entradas do processo.	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Variáveis de entrada e saída do processo para aplicação 1, unidades e tags.	44
Tabela 2 – Resultados dos parâmetros da sintonia da aplicação I.	45
Tabela 3 – Variáveis de entrada e saída do processo para aplicação 2, unidades e tags.	46
Tabela 4 – Resultados dos parâmetros da sintonia da aplicação II.	48
Tabela 5 – MSE dos modelos identificados.	50
Tabela 6 – Variáveis de entrada e saída do processo para aplicação 3, unidades e tags.	51
Tabela 7 – Resultados dos parâmetros da sintonia da aplicação III.	52

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CTT	Técnica de Sintonia por Compromisso
CP	<i>Compromise Programming</i>
DMC	Controle por Matriz Dinâmica
FOPDT	<i>First Order Plus Dead Time</i>
IDEAS	<i>Integrated Design Engineering with Advanced Simulation</i>
MIMO	Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas
MPC	Controle Preditivo por Modelo
MSE	<i>Mean Squared Error</i>
OPC	<i>Open Platform Communications</i>
PID	Controlador Proporcional-Integral-Derivativo
SISO	Entrada Única e Saída Única

LISTA DE SÍMBOLOS

$\frac{dJ}{du}$	Derivada da função de custo em relação ao sinal de controle
e	Matriz de erro entre a saída predita e a referência futura
f	Vetor de respostas livres preditas
$f_w(x)$	w -ésima função objetivo para a variável de decisão x
$f_w^o(x)$	Ponto utópico no espaço de objetivos
$F_i(x)$	i -ésimo vetor de objetivos
F_i^o	i -ésimo ponto utópico
f_{res}	Fator de resposta
$f(t+k)$	Resposta livre do sistema no instante $t+k$
g_i	i -th coeficientes da resposta ao degrau; Sistemas SISO
G	Matriz dinâmica do sistema ao longo do horizonte de predição p
g_i^{kj}	Resposta da saída j ao degrau na entrada k
G_{ij}	i -ésima resposta ao degrau correspondente à j -ésima entrada
$g_j(x)$	j -ésima restrição genérica por desigualdade
$G_{des,i}(s)$	i -ésima diagonal da matriz de função de transferência da trajetória de referência
$h_k(x)$	k -ésima restrição genérica por igualdade
J	Função de custo
L_P	Norma de distância da família Minkowski
m	Horizonte de controle do MPC
n_u	Número de entradas do processo
n_y	Número de saídas do processo
N_k	Número de amostras da resposta ao degrau na entrada k quando atinge o seu estado estacionário

$\hat{n}(t + k t)$	Representação do distúrbio do modelo de resposta ao degrau no instante de tempo $t + k$
N	Horizonte do modelo do DMC
p	Horizonte de predição do MPC
Q	Pesos nas ações de controle
R	Pesos no erro nas variáveis controladas
s	Variável complexa usada na transformada de Laplace
t	Instante de tempo contínuo t
$u(t)$	Variável de entrada no instante t
$\Delta u(t - i)$	Acréscimo na entrada u entre os intervalos $t - i - 1$ e $t - i$
\mathbf{u}	Vetor de incrementos de controle futuro para o horizonte de controle m
$\Delta u_k(t - i)$	k -ésima entrada do processo entre os intervalos $t - i - 1$ e $t - i$
$w(t + k)$	Referências futuras do sistema no instante $t + k$
\mathbf{w}	Vetor de referências futuras
x_i^{LI}	Limite inferior da i -ésima variável de decisão
x_i^{LS}	Limite superior da i -ésima variável de decisão
x^*	Solução viável
\mathbf{X}	Conjunto de soluções viáveis
$y(t)$	Variável de saída no instante t
$\hat{y}(t + k t)$	Vetor de previsão da saída no instante de tempo $t + k$ calculado no instante de tempo t
$y_m(t)$	Saída atual do sistema no instante t
$\hat{\mathbf{y}}$	Vetor de previsão da saída para o horizonte de predição p
$y_j(t)$	j -ésima saída do processo no instante de tempo t
$y_{ref,i}(k)$	i -ésima diagonal da resposta em malha fechada da saída da trajetória de referência
\mathbf{Z}	Espaço de objetivos viáveis
Θ	Horizonte de sintonia

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Contexto	18
1.2	Revisão Bibliográfica	19
1.2.1	<i>Aplicação do MPC em Circuitos de Moagem</i>	19
1.2.2	<i>Aplicação de Técnicas de Sintonia em Controladores Preditivos por Modelo</i>	20
1.3	Objetivos	21
1.3.1	<i>Objetivos Gerais</i>	21
1.3.2	<i>Objetivos Específicos</i>	21
1.4	Estrutura do trabalho	21
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	22
2.1	O Processo de Moagem	22
2.1.1	<i>Moinhos Cilíndricos de Bolas ou Barras</i>	22
2.1.2	<i>Hidrociclones</i>	24
2.2	Controle Preditivo por Modelo (MPC)	25
2.2.1	<i>Controle por Matriz Dinâmica (DMC) sem Restrições</i>	26
2.2.1.1	Predição	27
2.2.1.2	Algoritmo de Controle	29
2.2.2	<i>Controle por Matriz Dinâmica (DMC) Multivariável sem Restrições</i>	30
2.3	Otimização Multiobjetivo	31
2.3.1	<i>Método de Programação por Compromisso</i>	33
2.4	Método de Sintonia CTT	34
2.4.1	<i>Objetivos da Sintonia</i>	35
2.4.2	<i>Algoritmo de Sintonia CTT</i>	36
3	METODOLOGIA	37
3.1	Simulador de Processos IDEAS	37
3.2	Projeto do Controlador DMC	38
3.3	Identificação do Processo	39
3.4	Comunicação OPC	42
4	RESULTADOS	43
4.1	Aplicação do Método de Sintonia - Circuito de Moagem I	43
4.1.1	<i>Modelo do Processo</i>	43
4.1.2	<i>Objetivos da Sintonia</i>	44
4.1.3	<i>Resultado da Sintonia</i>	44

4.2	Aplicação dos Resultados para o Circuito de Moagem II	45
4.2.1	<i>Modelo do Processo</i>	46
4.2.2	<i>Objetivos da Sintonia</i>	47
4.2.3	<i>Resultado da Sintonia</i>	47
4.3	Aplicação dos Resultados para o Circuito de Remoagem III	49
4.3.1	<i>Modelo do Processo</i>	50
4.3.2	<i>Objetivos da Sintonia</i>	51
4.3.3	<i>Resultado da Sintonia</i>	51
4.3.4	<i>Resultado do Cenário I</i>	52
4.3.5	<i>Resultado do Cenário II</i>	53
4.3.6	<i>Resultado do Cenário III</i>	55
5	CONCLUSÃO	56
5.1	Conclusão	56
5.2	Trabalhos Futuros	57
	REFERÊNCIAS	58

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contexto

O processo de moagem é uma das etapas fundamentais nas usinas de beneficiamento mineral. Essa operação é responsável pela cominuição do minério a tamanhos aceitáveis para então serem utilizados em processos posteriores. Os circuitos industriais de moagem são normalmente uma das atividades com maior custo energético na cadeia de processo mineral representando, aproximadamente, 50% do total gasto com energia em uma planta concentradora, sendo apenas 10% consumida efetivamente e assim contribuindo para a moagem do minério (CHEN et al., 2007).

Por esse motivo, sistemas de controle são extremamente importantes em circuitos de moagem para reduzir o alto consumo de energia, assim como, melhorar a eficiência do produto para os processos subsequentes. Entretanto, ainda há uma dificuldade no controle desses processos devido à sua dinâmica complexa, não linearidades, grande tempo morto e interações fortes entre as malhas de controle (RAMASAMY; NARAYANAN; RAO, 2005; CHEN et al., 2007).

Em muitos casos, os circuitos industriais são controlados por controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo) *multi-loop* desacoplados que evitam a interação entre as múltiplas entradas e as múltiplas saídas do processo (EUZEBIO et al., 2020). Porém, essa abordagem normalmente é problemática em circuitos de moagem por haver dificuldades no emparelhamento da entrada/saída, no ajuste da sintonia do controlador e na garantia de estabilidade por um longo do tempo (CHEN et al., 2007).

Alternativamente, para esse tipo de processo, é sugerido a utilização do PID como nível de controle regulatório e um controle avançado como nível de controle supervisorio, assim, as variáveis serão controladas de forma conjunta, otimizando toda a operação.

Entre as diversas estratégias de controle avançado utilizadas na indústria, destaca-se o MPC devido a sua imensa variedade de aplicações em diversos setores como: petroquímico, robótica, cimenteira, metalúrgico, entre outros. O termo Controle Preditivo por Modelo não designa uma estratégia de controle específica, mas uma ampla gama de métodos de controle que fazem uso explícito de um modelo do processo para obter o sinal de controle minimizando uma função objetivo (CAMACHO; ALBA, 2013).

Além disso, o MPC demonstra características notáveis quando aplicado a problemas com grande número de variáveis manipuladas e controladas, restrições impostas às variáveis manipuladas e controladas e em processos difíceis com grandes atrasos, características que variam no tempo e não linearidades (CHEN et al., 2007).

Todavia, a configuração adequada da sintonia de um MPC é muito importante para

garantir o sucesso desse controlador, visto que a abordagem utilizada nesse algoritmo de controle é baseada em otimização. Desse modo, em um circuito de moagem isso pode significar uma maximização dos lucros do processo, operações mais suaves das suas variáveis de importância, melhor qualidade do produto, entre outros. Por outro lado, a sintonia dos parâmetros desse controlador é um desafio em razão do número de parâmetros de ajuste existentes que podem afetar o desempenho do sistema em malha fechada.

Yamashita, Zanin e Odloak (2016), descrevem que os métodos de ajustes de sintonia de MPC, hoje existentes, podem ser classificados em dois grupos principais. O primeiro grupo é baseado em expressões analíticas obtidas por meio de algum nível de simplificação, seja pela descrição do processo ou do seu modelo, e na seleção arbitrária adicional de alguns parâmetros. Já o segundo grupo têm-se a utilização de técnicas baseadas em otimização multiobjetivo, nas quais os parâmetros de desempenho do controlador são reunidos em uma única função objetivo, além disso, essas técnicas podem ser diferenciadas de acordo com a definição do objetivo e qual algoritmo de otimização multiobjetivo utilizar para a resolução do problema de sintonia.

Este trabalho apresentará a aplicação de uma estratégia de sintonia multiobjetivo para a obtenção dos parâmetros de um controlador MPC em circuitos de moagem. O algoritmo de controle MPC definido foi um controlador DMC irrestrito, isto é, sem restrições nas variáveis de entrada e/ou saída. A sintonia é demonstrada em três processos multivariáveis simulados, sendo um deles realizado no *software* industrial de simulação de processos IDEAS. O desenvolvimento da sintonia, o controlador DMC e a identificação do modelo realizada em um dos processos simulados é feito no *software* MATLAB.

1.2 Revisão Bibliográfica

1.2.1 Aplicação do MPC em Circuitos de Moagem

Atualmente existem várias abordagens mencionadas na literatura científica a respeito da aplicação do MPC em circuitos de moagem. Em Chen et al. (2007) foi desenvolvido um MPC MIMO para aplicá-lo em um circuito de moagem com quatro entradas e quatro saídas, sendo as principais variáveis controladas, o tamanho da partícula do minério, a concentração de sólidos no moinho, a carga circulante e o nível da caixa de descarga do moinho.

Já em Chen et al. (2009) é apresentado um algoritmo MPC denominado ADMC (Controle Adaptativo por Matriz Dinâmica) aplicado a um circuito de moagem de moinhos de bolas. Para essa estratégia os autores buscaram o desenvolvimento de um sistema especialista inteligente para identificar a dureza atual do minério e, portanto, selecionar um modelo adequado para o ADMC.

Em relação a outras estratégias não lineares de DMC, essa abordagem foi capaz de demonstrar a possibilidade de se trabalhar com diversas variáveis de forma adequada e confiável, não introduzindo complexidade computacional a técnica tornando-a disponível para uma possível

aplicação industrial.

No trabalho de [Ramasamy, Narayanan e Rao \(2005\)](#) é apresentado a aplicação de um MPC multivariável irrestrito e restrito a um circuito de moagem de moinho de bolas de laboratório, além disso, é realizado a comparação do desempenho do MPC com o de controladores PI *multi-loop*. Do mesmo modo [Reis, Júnior e Euzébio \(2018\)](#), apresenta um comparativo entre o desempenho de um controlador MPC e um controlador PI, porém, isso é realizado em um circuito de remoagem, ou seja, quando o material que chega na alimentação do circuito de moagem já se encontra moído em decorrência de processos anteriores. Essa aplicação é realizado em uma plataforma de testes de *hardware-in-the-loop* e o circuito é simulado por meio de uma planta de processamento de minério de ferro da empresa mineradora Samarco.

Apesar de já existirem trabalhos de MPC aplicados a moagem, nenhum dos que foram encontrados na literatura fizeram uma análise sobre a sintonia do MPC. Sendo assim, a seguir, serão apresentadas algumas técnicas de sintonia tanto analíticas quanto por otimização, porém, sem levar em consideração a aplicação em circuitos de moagem.

1.2.2 Aplicação de Técnicas de Sintonia em Controladores Preditivos por Modelo

Os métodos de sintonia de Controladores Preditivos por Modelo normalmente são baseados em técnicas por expressões analíticas ou técnicas por otimização multiobjetivo. [Bagheri e Khaki-Sedigh \(2011\)](#) demonstram uma expressão de ajuste analítico para o controlador preditivo DMC derivada de uma metodologia de análise de variância (ANOVA) e regressão não linear. O método proposto é testado por meio de simulações e trabalho experimental sendo a sua implementação prática em uma planta de pH não linear em escala de laboratório.

Já [Dougherty e Cooper \(2003\)](#) apresentam a derivação de uma expressão analítica para calcular os parâmetros do controlador que correspondem ao peso sobre erros nas variáveis de controle, ao peso nas variáveis manipuladas com base no modelo do processo e os outros parâmetros de projeto do controlador preditivo DMC. Por outro lado, [Wojsznis et al. \(2003\)](#) apresentam regras de ajuste para MPC baseado em uma abordagem heurística.

Em relação a técnicas de sintonia por otimização multiobjetivo [Yamashita, Zanin e Odloak \(2016\)](#), apresentam dois métodos de ajuste baseados em otimização multiobjetivo para MPC. A primeira abordagem baseia-se na classificação das saídas do processo de acordo com a sua importância, e a sintonia é realizada por meio de um algoritmo de otimização lexicográfico. Já o segundo método é baseado em um problema de otimização por compromisso. Ambas as técnicas consideram como objetivo de ajuste a minimização do erro entre a resposta em malha fechada e uma trajetória de referência da saída.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivos Gerais

O objetivo geral deste trabalho é apresentar a aplicação da técnica de sintonia CTT (*Compromise Tuning Technique*), baseada em otimização multiobjetivo, a fim de obter um ajuste adequado dos parâmetros de sintonia, para o bom desempenho de um controlador preditivo por matriz dinâmica (DMC, *Dynamic Matrix Control*) multivariável (MIMO, *Multiple Input, Multiple Output*) quando aplicado a circuitos de moagem.

Esse trabalho tem como propósito demonstrar a capacidade de funcionamento dessa técnica para cumprir certos requisitos de desempenho, como a configuração de resposta do sistema de acordo com uma trajetória desejada, em três diferentes configurações multivariáveis de processos de moagem.

1.3.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos são:

- Sintonia do DMC MIMO pela técnica CTT.
- Implementar um controlador DMC MIMO a três aplicações de circuitos de moagem.
- Utilizar o controlador DMC MIMO sintonizado pela CTT em simulação de três exemplos de circuitos de moagem.
- Analisar os resultados obtidos dos diferentes cenários propostos de simulação do controlador DMC MIMO.

1.4 Estrutura do trabalho

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, onde o capítulo 1 apresenta a introdução, os objetivos a serem alcançados e a revisão bibliográfica. No capítulo 2 é abordada a fundamentação teórica utilizada para a construção deste trabalho, para a posterior aplicação da metodologia proposta no capítulo 3. O capítulo 4 apresentará os resultados do controlador sintonizado pela técnica CTT e a sua simulação em circuitos de moagem. Por fim, no capítulo 5 conclui-se o trabalho juntamente com a sugestão de trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O capítulo a seguir irá expor os principais elementos teóricos e matemáticos utilizados para prosseguir com esta pesquisa. Primeiramente, o processo de moagem é discutido brevemente, em seguida, a segunda parte irá exibir os conceitos e a estrutura de um MPC, assim como, a formulação matemática da predição para variável controlada, e o algoritmo de controle para o DMC em sistemas SISO e MIMO. Por último, é apresentado os conceitos que envolvem a otimização multiobjetivo e o seu método de resolução de programação por compromisso.

2.1 O Processo de Moagem

A moagem na atividade mineradora é a etapa responsável pela fragmentação fina do minério e representa geralmente o último estágio de sua redução granulométrica no processo de cominuição. O seu estudo é muito importante visto que é considerada uma operação fundamental para o bom desempenho de uma instalação de tratamento mineral. Por este motivo, é imprescindível a atenção no seu dimensionamento, na escolha do equipamento e o seu controle na etapa de operação da usina.

2.1.1 Moinhos Cilíndricos de Bolas ou Barras

Um dos equipamentos mais utilizados no processo de moagem são os Moinhos Cilíndricos de Bolas ou Barras. Estes moinhos são constituídos de uma carcaça cilíndrica de ferro, revestida internamente com placas de aço ou borracha, que gira sobre mancais e contém no interior uma carga de barras ou bolas de ferro ou aço como ilustrado na Figura 1. Os corpos moedores são elevados pelo movimento da carcaça até um certo ponto de onde caem, seguindo uma trajetória parabólica, sobre as outras bolas que estão na parte inferior do cilindro e sobre o minério que ocupa os interstícios das bolas (LUZ; SAMPAIO; FRANÇA, 2010).

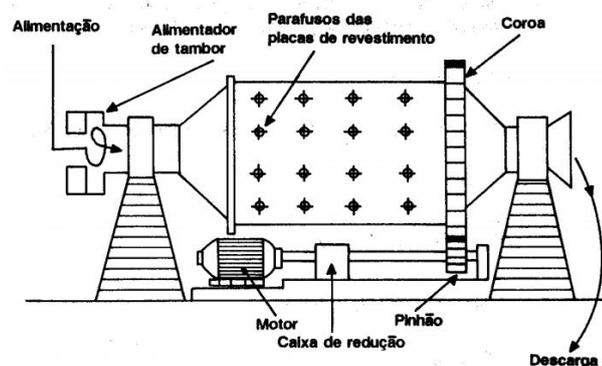


Figura 1 – Moinho cilíndrico de bolas ou barras. (Fonte: (LUZ; SAMPAIO; FRANÇA, 2010))

O processo de moagem pode ser classificado em dois modos de operação, via a seco e via a úmido. A moagem via a seco, em geral, é adotada em processos em que o minério não pode ser entregue molhado em razão de uma possível reação com a água, ou em situações onde a utilização do minério, nas próximas etapas de tratamento, seja inviável a secagem da polpa, sendo essencial a entrega do minério a seco. A operação via a úmido é caracterizado pela mistura entre a água e os grãos particulados no qual se obtém uma polpa de minério. Entre as diferenças principais em relação a moagem a seco tem-se a necessidade de uma potência menor de trabalho e de equipamentos adicionais para o tratamento de particulados, porém, o consumo do revestimento é normalmente maior.

O processo de moagem também pode ser classificado em dois grupos: circuito aberto e circuito fechado. O circuito aberto consiste em uma inserção do material na alimentação direta no moinho, assim o produto sai pela descarga em uma só passagem pelo moinho sem classificação.

O circuito aberto é pouco utilizado, uma vez que não possui nenhum tipo de controle da distribuição de tamanho do produto, pois, a taxa de alimentação tem que ser suficientemente baixa para assegurar que todas as partículas da polpa sejam quebradas, assim muitas partículas do produto sofrem sobremoagem, o que consome uma energia desnecessária e pode dificultar o tratamento subsequente (LUZ; SAMPAIO; FRANÇA, 2010).

No circuito fechado a descarga do moinho é levada ao equipamento de classificação, geralmente uma peneira ou um classificador, posteriormente o material é retornado à alimentação do moinho até a partícula do material atingir o tamanho desejado. A carga circulante é definida como a razão do material no retorno feito pelo classificador e a alimentação nova que chega no moinho. Geralmente esse parâmetro é expresso em porcentagem.

O esquemático de um moinho em circuito fechado pode ser visualizado na Figura 2.

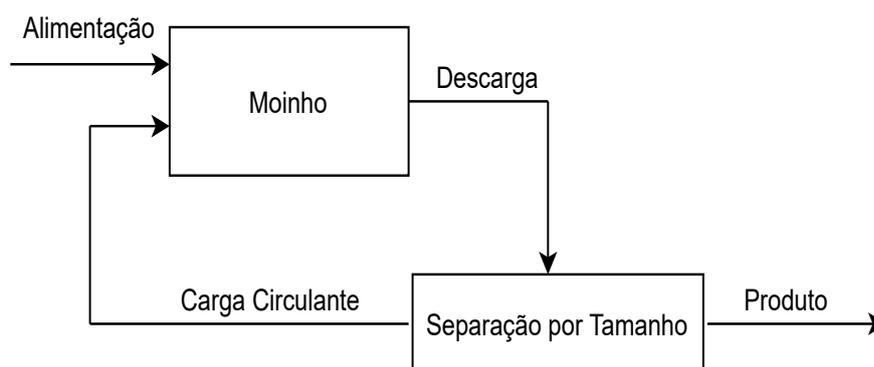


Figura 2 – Esquemático de um moinho em circuito fechado. Adaptado de: Luz, Sampaio e França (2010).

O minério particulado deve ser moído até um tamanho apropriado para processos subsequentes, como, a flotação, que requer uma granulometria adequada para uma boa recuperação efetiva. Por outro lado, um tamanho de particulado muito pequeno pode trazer desvantagens

como, maior potência consumida na moagem e dificuldades de recuperação nas etapas de concentração e filtração. Por esse motivo, entre as variáveis controladas mais importantes no processo de moagem destaca-se o tamanho da partícula.

O percentual de sólidos que alimenta o moinho também é outra variável controlada que merece destaque. O controle do percentual de sólidos é dependente da quantidade de água na alimentação, que por sua vez depende da granulometria da alimentação e do tipo de moinho.

A diluição excessiva da polpa pode acarretar em uma moagem pouco eficiente, pois as partículas sólidas se encontram muito dispersas na polpa, sendo poucos os choques efetivos entre as partículas e as bolas. Já a elevação no percentual de sólidos, produz um aumento da eficiência da moagem com uma redução considerável no consumo de bolas, porém, essa melhora vai até um certo ponto quando então a eficiência começa decrescer (LUZ; SAMPAIO; FRANÇA, 2010).

2.1.2 Hidrociclones

Na maioria das vezes a separação por tamanho em um circuito fechado de moagem é realizado por classificadores mecânicos chamados de hidrociclones, sua principal aplicação é em separações sólidos-líquidos e separações de partículas pela diferença de tamanho (KRAIPECH et al., 2005). O princípio básico de separação empregado é a sedimentação centrífuga (LUZ; SAMPAIO; FRANÇA, 2010).

Na Figura 3 é apresentado um esquemático do hidrociclone que é composto por um cone cilíndrico e três orifícios. O primeiro orifício é uma entrada tangencial onde a polpa do material é injetada (*INLET*); o segundo orifício, é chamado de *VORTEX FINDER*, localizado na parte central do hidrociclone é responsável pelas partículas mais finas e menos densas e grande parte da fase líquida constituindo o *overflow*; por último o terceiro orifício, denominado *ÁPEX*, é a saída das partículas mais grossas e densas que são descarregadas na parte inferior que constituem o *underflow*.

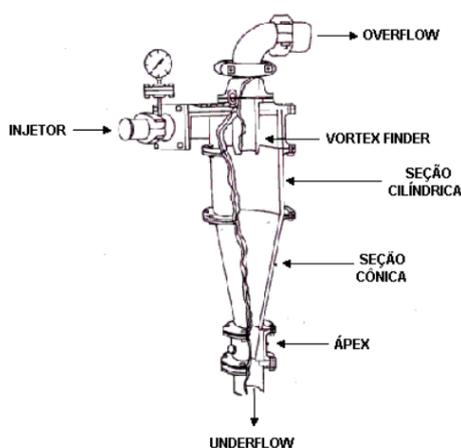


Figura 3 – Representação esquemática de um hidrociclone. (Fonte: (LUZ; SAMPAIO; FRANÇA, 2010)).

2.2 Controle Preditivo por Modelo (MPC)

Originado ao final dos anos setenta o controle preditivo por modelo é fundamentado em uma ampla gama de métodos de controle que faz o uso explícito de um modelo do processo a fim de obter o sinal de controle, minimizando uma função objetivo (CAMACHO; ALBA, 2013). De acordo com Camacho e Alba (2013) a família dos MPCs tem as seguintes ideias básicas:

- Uso de um modelo para prever a saída do processo em instantes de tempo futuros (horizonte);
- Cálculo de uma sequência de ações de controle minimizando uma função objetivo que considera a previsão das saídas;
- Uma estratégia de recuo, de forma que a cada instante de tempo aplica-se a primeira ação de controle da sequência ótima e repete-se o processo para o instante de tempo seguinte.

Ao contrário da teoria de controle clássica, em que, a lei de controle é pré calculada, a estratégia de controle preditivo calcula a sequência de ações de controle em cada instante de tempo (COETZEE; CRAIG; KERRIGAN, 2009). Dessa forma, o MPC apresenta diversas vantagens em relação a outros métodos, entre as quais temos:

- Pode ser usado para o controle de diversos processos, desde aqueles com dinâmicas simples até os mais complexos com longos tempos de atraso, ou fase não mínimas ou instáveis;
- Facilidade no tratamento de sistemas multivariáveis.
- O controlador resultante é uma lei de controle de fácil implementação
- Sua extensão para o tratamento de restrições na amplitude e/ou taxa de variação da entrada e na amplitude da saída é conceitualmente simples.

Um esquemático da aplicação do controle preditivo pode ser visualizado na Figura 4.

O horizonte de previsão (p) pode ser definido como o intervalo de tempo futuro onde as saídas do sistema serão estimadas usando um modelo e o horizonte de controle (m) como o intervalo de tempo futuro, onde as ações de controle podem variar. Após m assume-se que o sistema estará sujeito a mesma ação de controle do instante anterior.

O modelo do processo é aplicado para determinar as saídas previstas da planta, levando em conta os valores passados e atuais da ação de controle. Tais ações são calculadas por um otimizador com base em uma função de custo, onde o erro futuro e as restrições são considerados. A representação da estrutura interna básica do controlador preditivo pode ser visualizado na Figura 5.

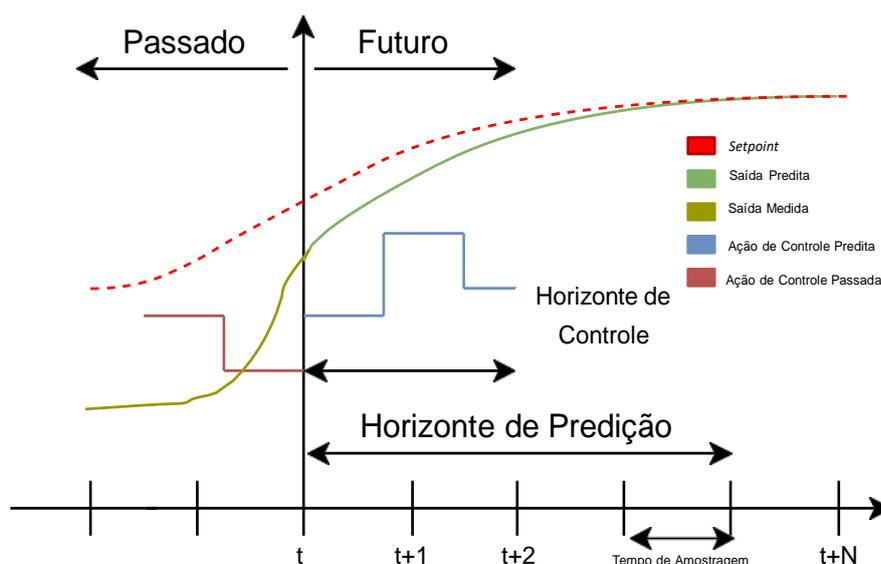


Figura 4 – Esquema básico de estratégia do MPC. (Adaptado de: [Kallemback \(2012\)](#))

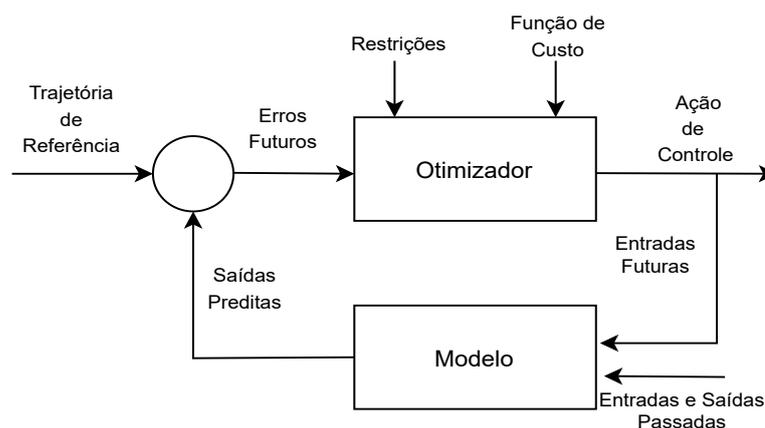


Figura 5 – Estrutura básica do MPC. (Adaptado de: [Camacho e Alba \(2013\)](#))

2.2.1 Controle por Matriz Dinâmica (DMC) sem Restrições

O controlador DMC é caracterizado pelo uso de um modelo de convolução dinâmico e discreto do processo a fim de obter os coeficientes de resposta ao degrau como ilustrado na Figura 6. O modelo tem como objetivo prever os valores futuros das variáveis de entrada de acordo com os valores passados dessas mesmas variáveis, assim como, os valores atuais das variáveis de saída. Já as ações de controle futuras do DMC são realizadas a partir da minimização de uma função objetivo quadrática que envolve o erro entre a trajetória de referência ou *setpoint* e as saídas preditas. A fundamentação teórica dessa seção assim como a seção 2.2.2 é retirada de [Camacho e Alba \(2013\)](#).

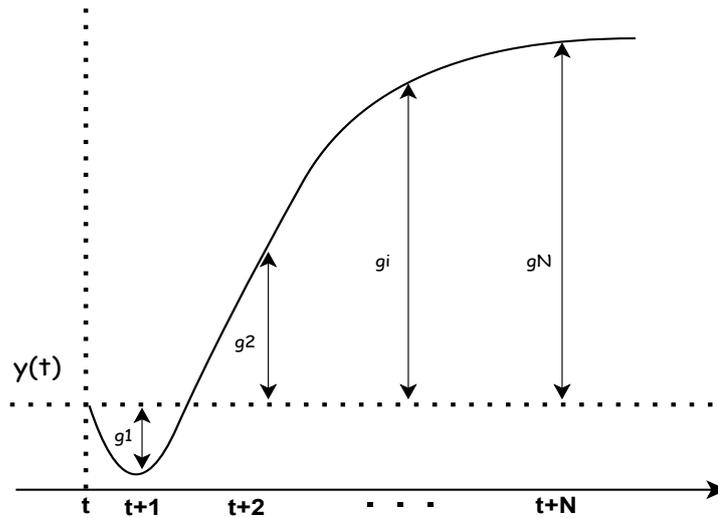


Figura 6 – Modelo de convolução para uma resposta ao degrau, $y(t)$ é a variável controlada, g_i são os coeficientes obtidos por meio da resposta ao degrau e N corresponde ao tempo para a variável controlada atingir o estado estacionário após uma perturbação. (Adaptado de: [Camacho e Alba \(2013\)](#))

2.2.1.1 Predição

A formulação generalizada do modelo do processo obtido por meio da resposta ao degrau pode ser representado pela equação (2.1).

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t - i). \quad (2.1)$$

Onde:

$y(t)$ é a saída no instante t ;

g_i são os coeficientes obtidos por meio da resposta ao degrau;

$\Delta u(t - i)$ é o acréscimo na entrada u entre os intervalos $t - i - 1$ e $t - i$.

A predição da saída \hat{y} no instante de tempo $(t + k)$, considerando \hat{n} o distúrbio e y_m é a saída do modelo é dada por,

$$\hat{y}(t + k|t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t + k - i) + \hat{n}(t + k|t) = \sum_{i=1}^k g_i \Delta u(t + k - i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \Delta u(t + k - i) + \hat{n}(t + k|t) \quad (2.2)$$

O distúrbio é considerado constante, por esse motivo temos $\hat{n}(t + k|t) = \hat{n}(t|t) =$

$y_m(t) - \hat{y}(t|t)$. Então a equação (2.2) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+k|t) &= \sum_{i=1}^k g_i \Delta u(t+k-i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+k-i) + y_m(t) - \\ &\quad \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) = \sum_{i=1}^k g_i \Delta u(t+k-i) + f(t+k) \end{aligned} \quad (2.3)$$

em que $f(t+k)$ é a resposta livre do sistema, isto é, a parcela independente das ações de controle futuras

$$f(t+k) = y_m(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (g_{k+i} - g_i) \Delta u(t-i). \quad (2.4)$$

Para um processo assintoticamente estável, os coeficientes g_i obtidos na resposta ao degrau tendem a um valor constante após N períodos de amostragem, por esse motivo, podemos considerar que

$$g_{k+i} - g_i \approx 0, \quad i > N \quad (2.5)$$

e assim a resposta livre pode ser reescrita como,

$$f(t+k) = y_m(t) + \sum_{i=1}^N (g_{k+i} - g_i) \Delta u(t-i). \quad (2.6)$$

Agora, as predições podem ser calculadas ao longo do horizonte de previsão ($k = 1, \dots, p$), considerando m ações de controle:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1|t) &= g_1 \Delta u(t) + f(t+1) \\ \hat{y}(t+2|t) &= g_2 \Delta u(t) + g_1 \Delta u(t+1) + f(t+2) \\ &\quad \vdots \\ \hat{y}(t+p|t) &= \sum_{i=p-m+1}^p g_i \Delta u(t+p-i) + f(t+p) \end{aligned}$$

Esse sistema de equações de predição generalizada pode ser representada na forma de vetores:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1|t) \\ \hat{y}(t+2|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+p|t) \end{bmatrix} & \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+p-i) \end{bmatrix} & \mathbf{f} &= \begin{bmatrix} f(t+1) \\ f(t+2) \\ \vdots \\ f(t+p) \end{bmatrix} \\ & & \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f} & & (2.7) \end{aligned}$$

onde \mathbf{G} é definida como a matriz dinâmica do sistema ao longo de um horizonte de predição p que contém os coeficientes da resposta ao degrau. Ela pode ser descrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m & g_{m-1} & \dots & g_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_p & g_{p-1} & \dots & g_{p-m+1} \end{bmatrix}$$

É interessante observar que \mathbf{G} é composto por um tamanho m (horizonte de controle) versus p (horizonte de predição). $\hat{\mathbf{y}}$ é um vetor p -dimensional contendo as predições do sistema ao longo do horizonte, \mathbf{u} representa o vetor m -dimensional de incrementos de controle e \mathbf{f} é o vetor de resposta livre.

2.2.1.2 Algoritmo de Controle

Nessa seção é apresentado o algoritmo de controle para o caso monovariável sem restrições, e, na seção seguinte, é demonstrado o algoritmo para o caso multivariável sem restrições.

O objetivo de um controlador DMC é conduzir a saída o mais próximo possível do *setpoint* com a possibilidade da inclusão de um termo de penalidade nos movimentos de entrada. Portanto, as variáveis manipuladas são selecionadas para minimizar uma função objetivo quadrática J que pode considerar apenas a minimização dos erros futuros entre a saída predita $\hat{\mathbf{y}}$ e as referências futuras w

$$J = \sum_{j=1}^p \|\hat{\mathbf{y}}(t+j|t) - w(t+j)\|^2 \quad (2.8)$$

ou pode incluir uma penalidade sobre o esforço no controle, em que, λ é um parâmetro de sintonia que corresponde ao coeficiente de supressão de movimento

$$J = \sum_{j=1}^p \|\hat{\mathbf{y}}(t+j|t) - w(t+j)\|^2 + \sum_{j=1}^m \lambda \|\Delta u(t+j-1)\|^2 \quad (2.9)$$

onde sua forma matricial é representada como:

$$J = \mathbf{e}\mathbf{e}^T + \lambda\mathbf{u}\mathbf{u}^T \quad (2.10)$$

Em que \mathbf{e} é o vetor de erros futuros ao longo de um horizonte de predição e \mathbf{u} é o vetor dos incrementos futuros na ação de controle, que pode ser obtido para o caso sem restrição derivando-se a função de custo (2.10) e igualando-o a 0.

$$\frac{dJ}{d\mathbf{u}} = 2\mathbf{G}^T\mathbf{G}\mathbf{u} + 2\mathbf{G}^T(\mathbf{f} - w) + 2\lambda\mathbf{u} = 0 \quad (2.11)$$

A solução analítica resultante de (2.11) implica em um lei de controle descrita como

$$\mathbf{u} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T (w - \mathbf{f}) \quad (2.12)$$

É importante destacar que somente o primeiro elemento do vetor \mathbf{u} é de fato utilizado. Isso acontece devido a impossibilidade de se estimar perfeitamente o vetor de perturbação, fazendo com que a saída real seja diferente da saída predita, o qual é utilizada para o cálculo das sequências de ações de controle. Além disso, a trajetória de referência pode ser alterada ao longo dos m intervalos.

2.2.2 Controle por Matriz Dinâmica (DMC) Multivariável sem Restrições

Na maior parte das plantas industriais muitas variáveis necessitam ser controladas (saídas) e muitas variáveis necessitam ser manipuladas (entradas). E esse tipo de processo é denominado sistema multivariável. Por esse motivo, o DMC é um sucesso na indústria devido à sua grande capacidade de lidar com processos multivariáveis (CAMACHO; ALBA, 2013). Nesse sentido, o método DMC pode ser facilmente estendido para lidar com sistemas multivariáveis.

Os modelos de resposta ao degrau podem ser generalizados para lidar com processos multivariáveis com n_u entradas refletidas em cada saída j e são representados da seguinte maneira,

$$y_j(t) = \sum_{k=1}^{n_u} \sum_{i=1}^{N_k} g_i^{kj} \Delta u_k(t - i), \quad (2.13)$$

onde:

y_j é a j -ésima saída do processo;

g_i^{kj} é a resposta da saída j ao degrau na entrada k ;

Δu_k é a k -ésima entrada do processo;

N_k é o número de amostras em que a resposta ao degrau na entrada k atinge o seu estado estacionário.

A predição ao longo do tempo dada pela equação (2.3) descrita na subseção 2.2.1.1 pode ser generalizada para sistemas multivariáveis $n_u \times n_y$ utilizando o princípio da superposição na obtenção das n_y saídas preditas provocadas pelas n_u entradas do sistema. Isso pode ser visualizado por meio do vetor de saídas preditas definidos por

$$\hat{\mathbf{y}} = [y_1(t + 1|t), \dots, y_1(t + p_1|t), \dots, y_{n_y}(t + 1|t), \dots, y_{n_y}(t + p_{n_y}|t)]^T \quad (2.14)$$

Os vetores dos futuros sinais de controle e da resposta livre podem, respectivamente, ser definidos como

$$\mathbf{u} = [\Delta u_1(t), \dots, \Delta u_1(t + m - 1), \dots, \Delta u_{n_u}(t), \dots, u_{n_u}(t + m - 1)]^T \quad (2.15)$$

$$\mathbf{f} = [f_1(t+1|t), \dots, f_1(t+p_1|t), \dots, f_{n_y}(t+1|t), \dots, f_{n_y}(t+p_{n_y}|t)]^T \quad (2.16)$$

A dinâmica total do processo é descrita pela matriz \mathbf{G} , que é composta por submatrizes G_{ij} que relacionam a i -ésima resposta ao degrau correspondente à j -ésima entrada.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n_u} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n_y 1} & G_{n_y 2} & \dots & G_{n_y n_u} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

A lei de controle é obtida a partir da minimização da função de custo, dada por

$$J = \sum_{j=1}^p \|\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)\|_R^2 + \sum_{j=1}^m \|\Delta u(t+j-1)\|_Q^2, \quad (2.18)$$

onde sua forma matricial é representada como

$$\mathbf{J} = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{w})^t R (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{w}) + \Delta \mathbf{u}^t Q \Delta \mathbf{u}, \quad (2.19)$$

onde R e Q são matrizes de pesos para o erro no segmento de referência e os incrementos no sinal de controle, respectivamente.

Já para a sequência de referências futuras \mathbf{w} , tem-se

$$\mathbf{w} = [w_1(t+1), \dots, w_1(t+p_1), \dots, w_{n_y}(t+1), \dots, w_{n_y}(t+p_{n_y})]^T \quad (2.20)$$

A solução analítica encontrada derivando-se a equação (2.19) pode ser analisada pela lei de controle

$$\mathbf{u} = (\mathbf{G}^T R \mathbf{G} + Q)^{-1} \mathbf{G}^T R (\mathbf{w} - \mathbf{f}). \quad (2.21)$$

O incremento de controle é calculado multiplicando-se a primeira linha de $(\mathbf{G}^T R \mathbf{G} + Q)^{-1} \mathbf{G}^T R$ e a diferença entre o *setpoint* e a resposta livre dada em (2.21).

2.3 Otimização Multiobjetivo

Os problemas de otimização multiobjetivo podem ser compreendidos como a busca de uma solução que satisfaça um conjunto de restrições, e otimize uma função que contenha diversas funções objetivos concorrentes.

Portanto, um problema de otimização multiobjetivo pode ser definido da seguinte maneira:

$$\min_x f_w(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)] \quad w = 1, \dots, p \quad (2.22)$$

Sujeito a:

$$g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, J \quad (2.23)$$

$$h_k(x) = 0 \quad k = 1, \dots, K \quad (2.24)$$

$$x_i^{LI} \leq x_i \leq x_i^{LS} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.25)$$

$$x_i \in \mathfrak{R}^n \quad (2.26)$$

Onde (2.22) é o vetor composto das p funções objetivo que se deseja otimizar; E (2.23), (2.24) são as representações das restrições por desigualdade e igualdade, respectivamente, (2.25) são os limites inferiores e superiores nas variáveis de decisão e (2.26) representa o vetor de variáveis de decisão.

Consequentemente, o conjunto viável do problema de otimização pode ser definido, como $\mathbf{X} = \{x_i \in \mathfrak{R}^n \mid g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, J \cap h_k(x) = 0 k = 1, \dots, K\}$ e a imagem de \mathbf{X} ou o espaço dos objetivos viáveis pode ser definido, como $\mathbf{Z} = \{z \in \mathfrak{R}^p \mid z = f_w(x), w = 1, \dots, p, x \in \mathbf{X}\}$.

As definições das soluções ótimas (Ótimo de Pareto) de um problema de otimização multiobjetivo podem ser descritas da seguinte maneira:

Definição 1: Dominância

Uma solução $x^* \in \mathbf{X}$ é dominante se não houver outra solução $x \in \mathbf{X}$ de modo que $f_w(x) \leq f_w(x^*)$ e $f_w(x) < f_w(x^*)$, $\forall w = 1, \dots, p$ para pelo menos uma função objetivo w . A Figura (7) demonstra para um problema de minimização com dois objetivos a região que é dominada por x representado por C, a região que domina x representado por B e a região em vermelho que é indiferente para x que é representado por A e D.

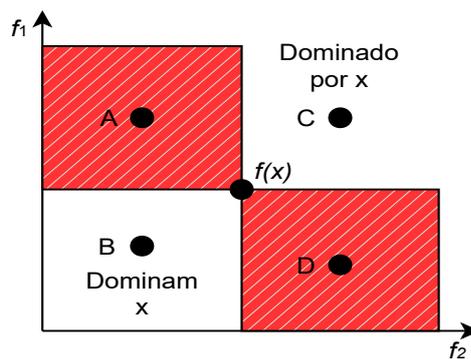


Figura 7 – Dominância de Pareto.

Definição 2: Solução Ótima de Pareto

Uma solução viável é chamada Ótimo de Pareto ou não dominada para o caso em que não há outra solução viável em \mathbf{X} . O conjunto de todas as soluções não dominadas que são viáveis em \mathbf{X} é denominado como o conjunto Ótimo de Pareto, e para um dado conjunto Ótimo de

Pareto, os valores da função objetivo que são correspondentes no espaço objetivo são chamados de fronteira de Pareto (KONAK; COIT; SMITH, 2006).

Na Figura 8 é ilustrado a Fronteira de Pareto assim como a representação do espaço de objetivos viáveis e o espaço do conjunto de soluções viáveis para um problema de minimização com dois objetivos.

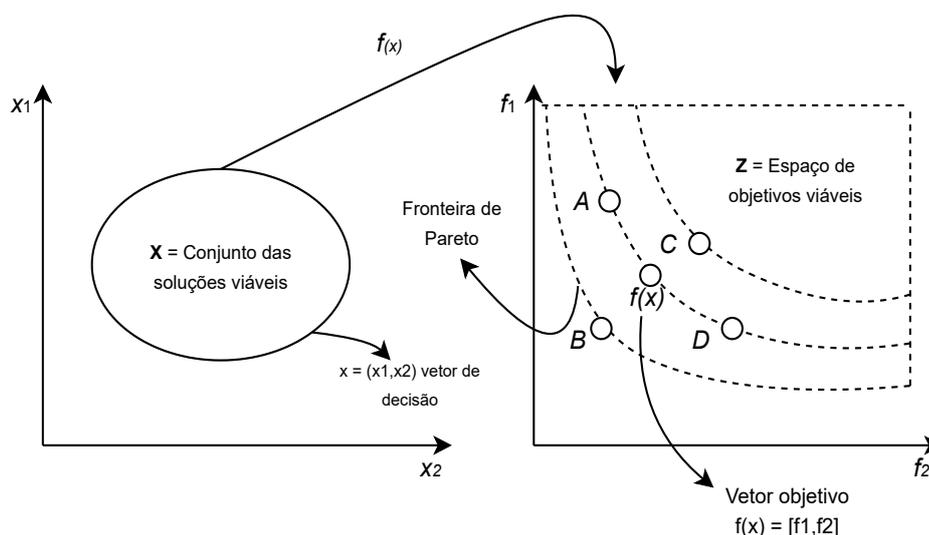


Figura 8 – Espaço de conjunto de soluções viáveis e o espaço de objetivos viáveis.

Uma solução dita ótima é aquela que minimiza simultaneamente todas as funções objetivas do problema, porém, na maioria das vezes esses objetivos são conflitantes, ou seja, não há uma única solução que seja ótima em relação a todos os objetivos.

Entretanto, é possível determinar uma solução próxima localizada na fronteira de Pareto que atenda todas as funções objetivas utilizando uma solução utópica como referencial. Essa solução é dita utópica quando todos os objetivos são minimizados simultaneamente e de forma independente, podendo ser definida formalmente como $f_w^o(x) \in \mathbf{Z}$ para $w = 1, \dots, p$ de tal forma que $f_w^o(x) = \min_x \{f_w(x) \mid x \in \mathbf{X}\}$.

Essa é a ideia principal do método de programação por compromisso que será discutido na próxima subseção.

2.3.1 Método de Programação por Compromisso

A Programação por Compromisso (Compromise Programming – CP) é uma abordagem de tomada de decisão de múltiplos critérios que classifica as alternativas de acordo com a proximidade em relação ao ponto ideal (CHENG; HUANG; CAI, 2013). Ainda, de acordo com Zeleny (1973), o método de programação por compromisso consiste de forma iterativa em obter uma solução que está próxima de uma solução de referência, o que é ilustrado na Figura 9.

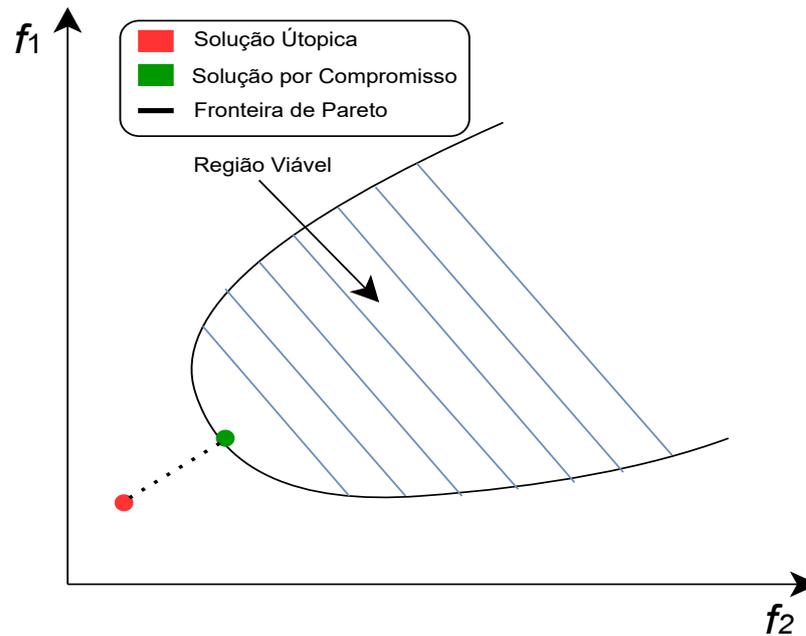


Figura 9 – Ilustração do método de otimização por compromisso para dois objetivos. (Adaptado de Yamashita, Zanin e Odloak (2016))

A formulação para o método de programação por compromisso pode ser expressa da seguinte forma:

$$\min L_P = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i [Z_i^* - Z_i(x)]^P \right\}^{1/P} \quad (2.27)$$

L_P é uma norma de distância da família Minkowski, e α_i representa os pesos atribuídos a cada função objetivo $Z_i(x)$, em que, a soma deles deve ser igual a 100%, Z_i^* é o valor de referência, P é um parâmetro que indica a maior ou a menor importância dos desvios da função objetivo em relação ao seu valor ideal $Z_i(x)$. Para $P = 1$, tem-se a distância de Manhattan, para $P = 2$ têm-se a distância Euclidiana que é a geralmente adotada e para $2 < P < \infty$ a função objetivo L_P se torna não linear sendo difícil a sua interpretação.

2.4 Método de Sintonia CTT

Nesta seção é apresentado o método de sintonia de programação por compromisso proposto por Yamashita, Zanin e Odloak (2016) a fim de obter o desempenho desejado para um controlador MPC. Também serão expostas as etapas a serem seguidas para a obtenção do objetivo de sintonia e, por último, o algoritmo de sintonia propriamente dito.

Os principais parâmetros de sintonia de um controlador MPC são o horizonte de previsão (p), o horizonte de controle (m), o peso no erro no segmento de referência (R) e o peso nos incrementos no sinal de controle (Q). Sendo assim, o bom desempenho de um controlador MPC

está intimamente ligado à escolha correta desses parâmetros, porém, o ajuste desse controlador geralmente é realizado com base na tentativa e erro, o que pode se tornar exaustivo dependendo da complexidade do sistema que o usuário irá trabalhar e em vista da quantidade de parâmetros utilizados nesse tipo de controlador. Assim, a estratégia que será apresentada nessa seção se mostra uma boa alternativa para se ter os parâmetros apropriados de forma ótima visto que a obtenção deles será encarada como um problema de otimização.

2.4.1 Objetivos da Sintonia

Os objetivos da sintonia são definidos de acordo com a dinâmica desejada da saída do processo. Destarte, as seguintes etapas são necessárias para sua obtenção:

- Definir em ordem de importância de acordo com o usuário as saídas do processo;
- Definir o pareamento entrada-saída mais forte, de acordo com a ordem do item anterior;
- Definir funções de transferências, $G_{des,i}(s) = \frac{1e^{-\theta_i s}}{1+\tau_{is} \times f_{res}}$, $i = 1, \dots, ny$, de primeira ordem com ganho unitário, um tempo morto se houver no processo, uma constante de tempo, e por fim um fator de resposta $f_{res}(i)$, $i = 1, \dots, ny$, no qual, para valores menores que 1 têm-se uma trajetória de referência mais rápida, e para valores maiores que 1 têm-se uma resposta mais lenta. Essas funções de transferência FOPDT (*First Order Plus Dead Time*) irão determinar a trajetória desejada, onde, não havendo esse tipo de modelo no pareamento desejado, uma aproximação é requerida. Portanto, o objetivo de ajuste pode ser definido como:

$$F_i(x) = \sum_{k=1}^{\Theta} (y_{ref,i}(k) - y_i(k))^2, \quad i = 1, \dots, ny \quad (2.28)$$

Onde Θ é o horizonte de sintonia, em que sua escolha deve ser grande o bastante para contemplar toda a dinâmica do processo; $y_{ref,i}(k)$ é a saída i desejada em malha fechada de acordo com a função de transferência $G_{des,i}$; $y_i(k)$ é a saída i em malha fechada do controlador que será sintonizado; $x = (r_1, \dots, r_{ny}, q_1, \dots, q_{nu})$ é o vetor de variáveis de decisão dos parâmetros de sintonia que consistem nas entradas da diagonal principal das matrizes R e Q ; e w é o número de pares entrada-saída.

Percebe-se que nessa sintonia não é incluído o horizonte de predição p e o horizonte de controle m . Isso ocorre pelos seguintes fatores:

1. Os limites superiores das restrições do problema de otimização da sintonia para p e m podem ser limitados, de acordo com o poder computacional e a dinâmica do processo;
2. Os parâmetros p e m são variáveis inteiras, o que, para um problema de otimização, resulta em um problema de programação inteiro podendo tornar a solução NP-difícil e mais complexa computacionalmente;

3. Geralmente p e m são determinados por meio de suposições iniciais, baseando-se na dinâmica do processo, o que normalmente, já garante resultados apropriados.

2.4.2 Algoritmo de Sintonia CTT

O algoritmo CTT é baseado na programação por compromisso já explicado na subseção 2.3.1. Sendo assim, podemos determinar a solução utópica do problema da seguinte maneira,

$$F_i^\circ = \min_x F_i(x), \quad i = 1, \dots, w \quad (2.29)$$

sujeito a (2.28) e:

$$LI \leq x \leq LS \quad (2.30)$$

Nos quais, LI e LS representa os limites inferiores e superiores das variáveis de decisão. Determinado a solução utópica podemos calcular a solução por compromisso utilizando o ponto mais próximo da solução utópica. Esse ponto pode ser determinado por meio da distância euclidiana entre (2.29) e (2.28), como pode ser observado na equação (2.31):

$$\min_x \|F^\circ - F(x)\|^2 \quad (2.31)$$

sujeito a (2.28) e (2.30). Onde F° é um vetor de componentes $F_i^\circ(x)$.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo serão abordados todos os aspectos metodológicos para o desenvolvimento da aplicação de sintonia do MPC e a implementação do controlador DMC.

O algoritmo da sintonia, o algoritmo do controlador e os modelos de circuito de moagem lineares são simulados no *software* MATLAB, já o modelo de circuito não-linear é simulado no *software* IDEAS. A comunicação entre o controlador e o IDEAS é estabelecida via OPC (*Open Platform Communications*).

3.1 Simulador de Processos IDEAS

O IDEAS é um simulador dinâmico que possui uma interface gráfica baseada em objetos, em que, os modelos são criados por meio de conexões entre objetos pré-programados. Os equipamentos do processo (tubulações, válvulas, controles, entre outros) simbolizados pelos objetos, são representados por ícones, onde o usuário tem a possibilidade de montar o seu modelo, conectando por meio de linhas de conexão de acordo com as bibliotecas específicas.

Segundo a [ANDRITZ \(2021\)](#), com o IDEAS é possível realizar balanços de massa e de energia *steady-state*, monitorar a concentração e o fluxo de componentes, compostos e até elementos; permite também trabalhar com distribuições granulométricas (PSD), calcular propriedades termodinâmicas (tais como peso específico, temperatura, entalpia, dentre outras).

Além disso, de acordo com [ANDRITZ \(2021\)](#) o *software* IDEAS pode ser empregado no setor de mineração para simular plantas complexas, incluindo operações com caminhões, transportadores de correia, britagem, peneiramento, moagem, deslamagem, flotação, lixiviação ácida, circuitos de recuperação de calor, neutralização, decantação, autoclaves, precipitação, filtração, separação, extração por solventes, eletrodeposição, entre outras. Na Figura 10 é ilustrado um modelo exemplo de um processo de bombeamento de polpa de minério simulado no IDEAS.

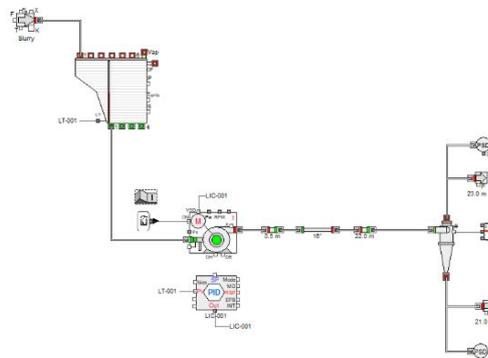


Figura 10 – Exemplo de um modelo de sistema de bombeamento de polpa de minério simulado no *software* IDEAS.

3.2 Projeto do Controlador DMC

A primeira etapa do projeto do controlador consiste na determinação dos três modelos de convolução a partir das funções de transferência do circuito de moagem, sendo que, para os processos lineares de moagem os modelos foram retirados diretamente da literatura, já para o processo de moagem simulado no IDEAS foi necessário a identificação do processo.

Como descrito anteriormente na subseção 2.2.1, os algoritmos do DMC utilizam um modelo de convolução a partir da resposta ao degrau em malha aberta do processo. Na sequência temos a determinação dos parâmetros de sintonia Q e R , no qual, serão definidos nesse trabalho de acordo com o método descrito na seção (2.4). Já os parâmetros p e m foram determinados mediante tentativa e erro.

Na Figura 11 é apresentado o fluxograma contendo os passos necessários para a obtenção da primeira etapa do projeto do controlador DMC, em que consiste na obtenção do vetor de ganhos que será utilizado na ação de controle.

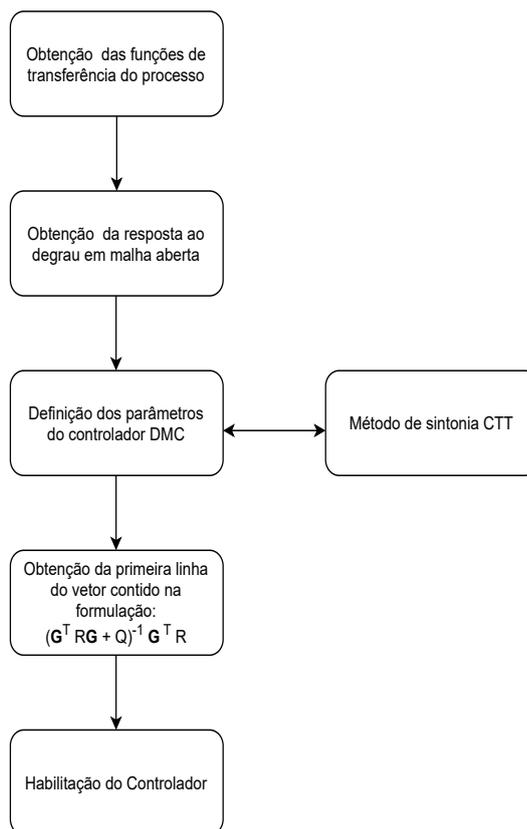


Figura 11 – Fluxograma dos passo para a obtenção da primeira etapa do projeto do controlador DMC.

A segunda etapa, a partir dos ganhos calculados para a ação de controle, descrito anteriormente na Figura 11, as ações de controle são calculadas a a partir da saída predita e a leitura da variável controlada, isso pode ser visualizado no fluxograma apresentado na Figura 12.

É importante destacar que as duas etapas do projeto de controlador foram realizados no *software* MATLAB.

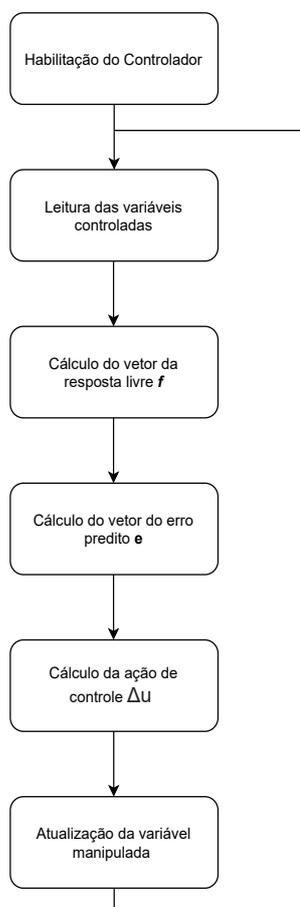


Figura 12 – Fluxograma dos passos para a obtenção da segunda etapa do projeto do controlador DMC.

3.3 Identificação do Processo

A identificação do processo consiste em uma aproximação matemática (modelo) do sistema dinâmico, isso é realizado por meio de perturbações ao processo para a análise do seu comportamento na saída. Esse modelo aproximado pode ser verificado por meio de funções de transferência, que são representações matemáticas da relação entre a saída e a entrada do sistema, ou seja, entre as variáveis manipuladas e as variáveis controladas. Para isso esses modelos devem ser capazes de descrever de forma fidedigna o sistema real.

De acordo com Aguirre (2004) a identificação de um sistema consiste nos seguintes procedimentos: testes dinâmicos e coleta de dados, escolha da representação matemática a ser usada, determinação da estrutura do modelo, estimação de parâmetros e validação do modelo.

Para a identificação do processo não linear, neste trabalho, foi utilizado o software MATLAB, que por meio da sua *System Identification Toolbox* fornece um aplicativo *System Identification* (Figura 13) utilizado para construir modelos lineares e não lineares matemáticos de

sistemas dinâmicos de maneira interativa a partir de dados de entrada-saída medidos (MATLAB, 2021).

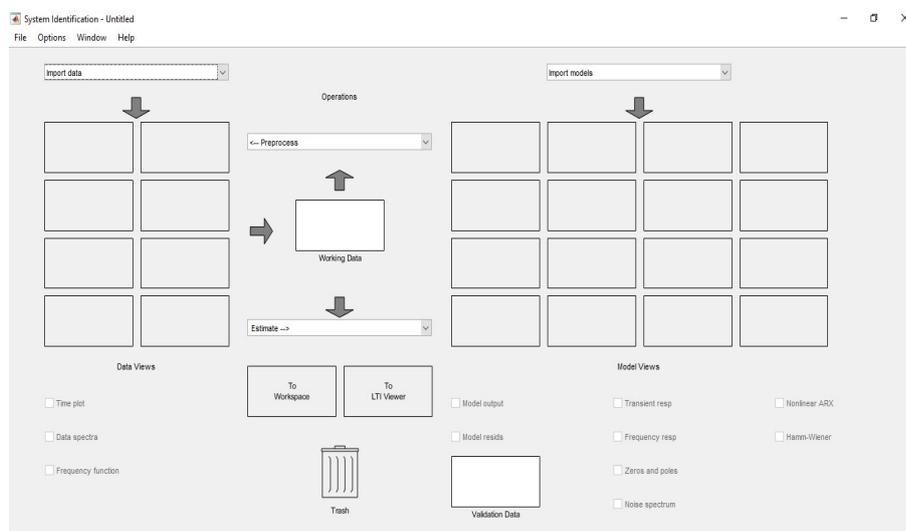


Figura 13 – *System Identification Toolbox* do MATLAB.

As etapas para a determinação da identificação do processo foi conduzido conforme a metodologia apresentada na Figura 14.



Figura 14 – Metodologia para a identificação do processo de remoagem.

O procedimento descritivo de cada etapa da metodologia apresentada na Figura 14:

- Teste dinâmico - Por meio do MATLAB foram aplicados variações em cada entrada do processo no formato de resposta ao degrau.

- Aquisição dos dados via OPC - Os dados da resposta são coletados via OPC e enviados para a *toolbox* da Figura 13, por meio da sua caixa de ferramentas de importação de dados (Figura 15).

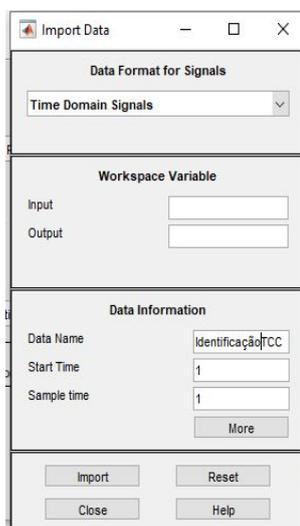


Figura 15 – Caixa ferramentas para importação de dados da *System Identification Toolbox*.

- Estimação do modelo - Nesta etapa é realizado a estimação do modelo em função de transferência como pode ser observado na tela a direita do *toolbox* na Figura 16. Nota-se que há a possibilidade de estimar em outros modelos como espaço de estados, modelos ARX não lineares, modelos Hammerstein-Wiener, entre outros.

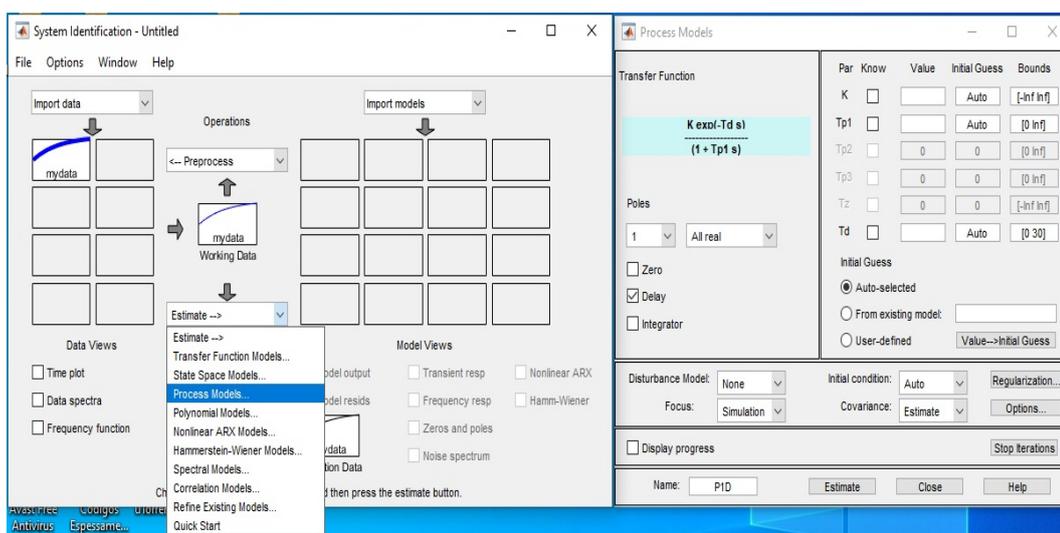


Figura 16 – Estimação dos modelos do processo por meio da *System Identification Toolbox*.

- Validação do modelo - Por fim verifica-se a capacidade do modelo identificado em representar o processo real. O método de validação utilizado ocorreu por meio do MSE entre a saída estimada e a saída real do processo para cada conjunto de dados de saída.

3.4 Comunicação OPC

OPC é um protocolo de comunicação interoperável para a troca segura e confiável de dados no ramo da automação industrial e em outras indústrias. É independente de plataforma e garante o fluxo contínuo de informações entre dispositivos de vários fornecedores [Foundation \(2021\)](#). Além disso, de acordo com [Pan \(2013\)](#), em processos de mineração é normal a utilização do protocolo OPC para a comunicação entre controladores dinâmicos e obtenção de variáveis de interesse que são externos ao sistema de controle.

A utilização do OPC é justificada neste trabalho, pelo fato do mesmo se diferenciar em relação a outros protocolos, possuindo uma maior facilidade de integração entre sistemas e a sua interoperabilidade.

Para a integração do controlador DMC e o IDEAS foi utilizado o OPC Toolbox do MATLAB, onde há possibilidade de ler, gravar e registrar dados OPC de dispositivos, como sistemas de controle distribuído, controle de supervisão e sistemas de aquisição de dados e controladores lógicos programáveis ([MATHWORKS, 2021](#)).

O esquemático da comunicação realizada entre o IDEAS e o MATLAB por meio do *OPC Toolbox* para leitura e escrita das variáveis, pode ser visualizado na Figura 17.

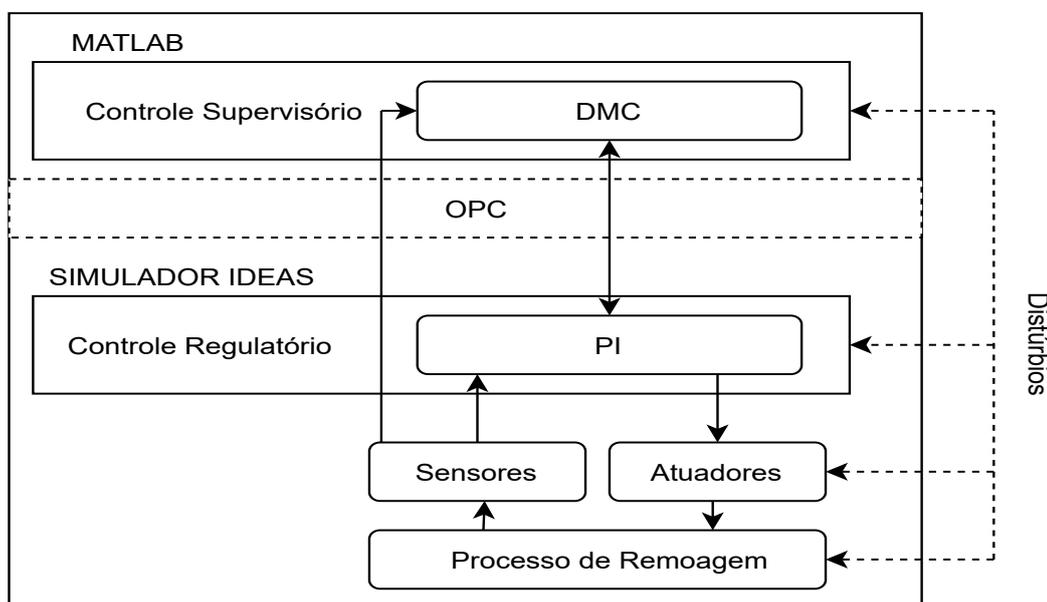


Figura 17 – Esquemático da comunicação OPC entre o MATLAB e o IDEAS.

Em resumo, o controlador DMC lê as variáveis do IDEAS (sensores), e produz a nova saída, calculada pelo algoritmo de controle DMC, que serão os *setpoints* dos controladores PI. Por último, as saídas dos controladores PI serão escritas nas variáveis manipuladas que irão atuar diretamente no processo simulado de remoagem.

4 RESULTADOS

Este capítulo apresentará a implementação do método de sintonia para MPC descrito na seção 3 em três aplicações de circuitos de moagem. Para a aplicação I é sintonizada a configuração mais básica, tratando de um circuito com apenas duas entradas e duas saídas. Na aplicação II a sintonia é implementada em um circuito com quatro entradas e quatro saídas caracterizando um sistema 4x4. Por fim, a aplicação III é realizada em um circuito de remoagem que é definido quando o material que alimenta o moinho já se encontra moído em decorrência de etapas anteriores, além disso esse circuito é simulado em um software de simulação industrial IDEAS. Para esse último caso o sistema é não-linear e com três entradas e três saídas, se tratando, desse modo, de um sistema 3x3.

4.1 Aplicação do Método de Sintonia - Circuito de Moagem I

Na primeira aplicação o circuito de moagem utilizado é proposto por [Ivezić e Petrović \(2003\)](#) tratando de um concentrador de mina de cobre localizado em Majdanpek um município da Sérvia, este é um circuito de moagem composto por dois moinhos de bolas primários e dois moinhos de bolas secundários fechados por hidrociclones, conforme ilustrado na Figura 18.

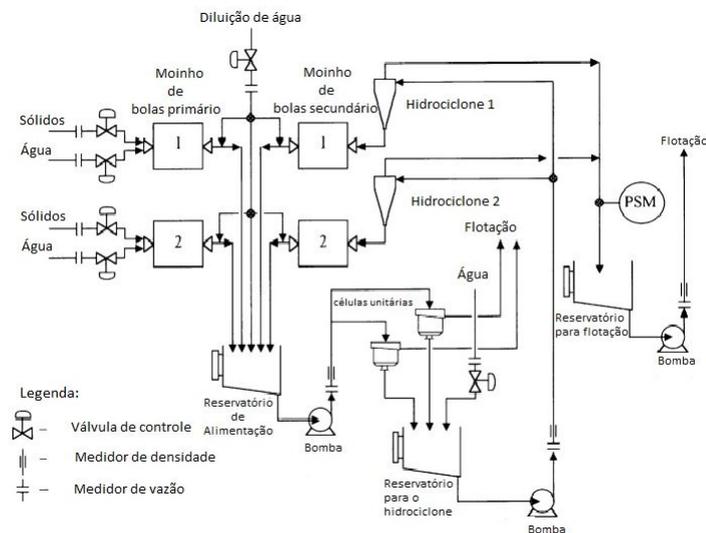


Figura 18 – Diagrama esquemático do circuito de moagem para a aplicação I. Fonte ([IVEZIĆ; PETROVIĆ, 2003](#)).

4.1.1 Modelo do Processo

Na Tabela 1 são apresentadas as variáveis de entrada e saída do circuito. A equação (4.1) apresenta as funções de transferência do modelo obtidas pelo autores [Ivezić e Petrović \(2003\)](#).

Variáveis de Interesse	Unidade	Tag
Taxa de alimentação do minério	—	u_1
Diluição no ciclone	—	u_2
Tamanho da Partícula do Minério	—	y_1
Taxa na alimentação para o ciclone	—	y_2

Tabela 1 – Variáveis de entrada e saída do processo para aplicação 1, unidades e tags.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0,9362e^{-350s}}{1164s+1} & \frac{(10,252s+2,819 \times 10^{-3})e^{-200s}}{(80218s^2+652s+1)} \\ \frac{36,49}{792s+1} & \frac{1,1405}{179s+1} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

4.1.2 Objetivos da Sintonia

De acordo com objetivos descritos na seção (2.4.1) a primeira etapa da sintonia é a escolha do pareamento apropriado, logo, neste trabalho foram selecionados o pareamento $y_1 - u_1$ e $y_2 - u_2$. As funções de transferência selecionadas no pareamento (Eq. 4.2) já estão no formato FOPDT portanto não houve a necessidade de uma aproximação.

$$G(s)_{des} = \begin{bmatrix} \frac{1e^{-350s}}{1164s \times f_1 + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{179s \times f_2 + 1} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Os fatores de resposta f_1 e f_2 foram escolhidos para se ter uma resposta suave em ambas as malhas, logo, temos $f_{res} = [0,5 \ 1]$. Esse tipo de parâmetro é importante, visto que, tem a capacidade de escolha de qual variável terá a resposta mais agressiva, ou qual variável terá um controle mais suave de acordo com a necessidade do usuário.

Assumi-se o horizonte de sintonia, Θ , igual a 8000 segundos, isso permitiu que a trajetória (y_1, y_2) do processo em malha fechada se acomodasse apropriadamente à trajetória de referência. Para o vetor inicial das variáveis de decisão, $x = [R \ Q]^T$, foi escolhido $x_0 = [0,1 \ 0,1 \ 10 \ 10]^T$ e os limites inferiores e superiores foram $x_{Inferior} = [0,1 \ 0,1 \ 0,1 \ 0,1]^T$ e $x_{Superior} = [100 \ 100 \ 100 \ 100]^T$, respectivamente. O horizonte de predição utilizado foi $p = 300$, o horizonte de controle foi $m = 3$ e o tempo de amostragem foi de 1 segundo.

O problema de otimização da sintonia foi resolvido pela função *fmicon* do *software* MATLAB para as seguintes configurações: *sqp* algorithm, 10^{-4} TolX, 10^{-4} TolFun, 4×10^4 MaxFunEvals e 10^4 MaxIter.

4.1.3 Resultado da Sintonia

Na Figura 19 é ilustrado o resultado da sintonia para a primeira aplicação, onde as duas saídas do processo em malha fechada são comparadas às suas respectivas trajetórias de referência desejadas.

A simulação ocorre no instante inicial $y_0 = [0 \ 0]$ e $u_0 = [0 \ 0]$ com uma variação de 1 unidade no primeiro *setpoint* em 0 segundos para a variável y_2 e uma variação de 0,1 unidade para a variável y_1 no instante 3000 segundos. É possível observar na Tabela 2 os parâmetros ótimos R e Q encontrados na sintonia, os fatores de resposta aplicados e o erro quadrático médio (MSE) entre trajetória de referência e a saída de ambas as malhas.

Nota-se uma penalização menor nas ações de controle (Q) para u_2 ocasionando uma ação mais rápida na variável manipulada para essa malha, por outro lado, há uma penalização maior no erro entre a trajetória e a saída do processo (R) para a malha y_1 , ou seja, a saída y_1 tentará seguir de forma mais próxima o *setpoint* em relação a malha y_2 , esse comparativo pode ser visualizado quantitativamente de acordo com o MSE de ambas as variáveis onde nota-se um valor extremamente menor de y_1 em relação a y_2 .

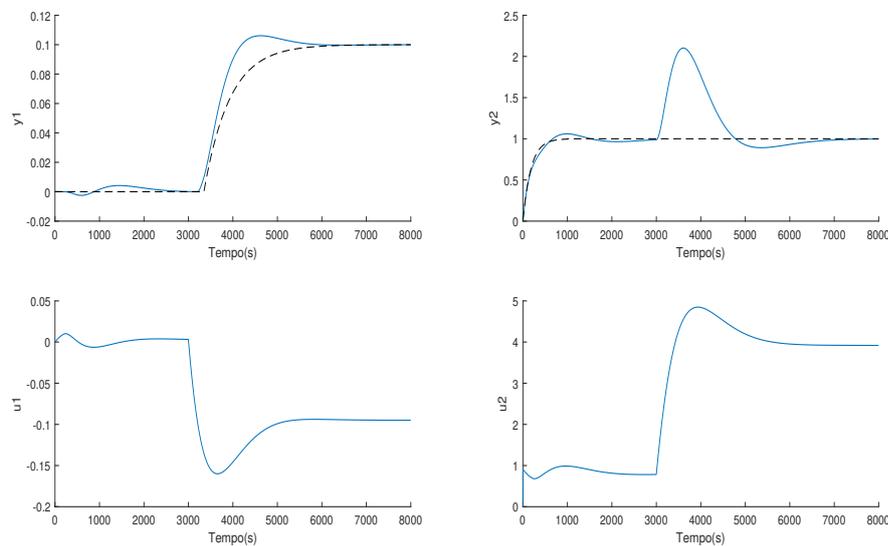


Figura 19 – Resultado da sintonia da aplicação I, entrada e saída do processo (linha sólida azul) e a trajetória de referência (linha tracejada preta).

Sumário da Sintonia		
f	0,5	1
Q	100	11,3830
R	11,6324	0,3145
MSE	$5,3982 \times 10^{-5}$	0,1962

Tabela 2 – Resultados dos parâmetros da sintonia da aplicação I.

4.2 Aplicação dos Resultados para o Circuito de Moagem II

Na segunda aplicação do método de sintonia o processo utilizado foi o proposto por [Chen et al. \(2007\)](#). O circuito é constituído por um moinho de bolas, uma bomba de água, com a função

de transferir o material com a água do reservatório do sistema, para o classificador/hidrociclone e um transportador vibratório para a alimentação de sólidos no moinho, conforme ilustrado na Figura 20.

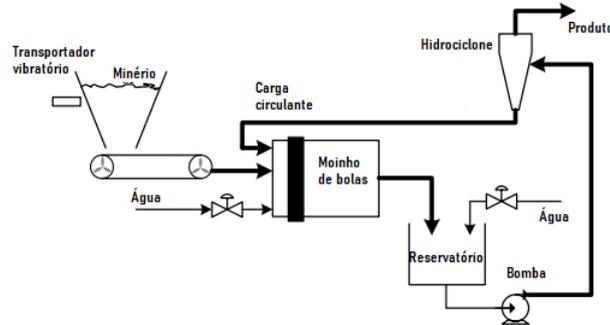


Figura 20 – Diagrama esquemático do circuito de moagem para a aplicação II. Fonte (CHEN et al., 2007).

Neste problema o objetivo foi aplicar a técnica em um cenário de processo com maior dificuldade, assim, nesta seção foi escolhido um circuito de moagem com um sistema com quatro entradas e quatro saídas.

4.2.1 Modelo do Processo

Na tabela 3 são apresentadas as variáveis de entrada e saída do circuito. A equação (4.3) apresenta as funções de transferência obtidas pelo autor.

Variáveis de Interesse	Unidade	Tag
Taxa de alimentação do minério fresco	ton/h	u_1
Taxa de fluxo de água na alimentação do moinho de bolas	m^3/h	u_2
Taxa de fluxo de água na diluição	m^3/h	u_3
Velocidade da bomba	Hz	u_4
Tamanho da partícula	$\% - 200 \text{ mesh}$	y_1
Concentração de sólidos no moinho	$\% \text{ solidos}$	y_2
Carga circulante	ton/h	y_3
Nível do reservatório	m	y_4

Tabela 3 – Variáveis de entrada e saída do processo para aplicação 2, unidades e tags.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0,58e^{-41s}}{83s+1} & \frac{0,97e^{-40s}(1-1,08e^{-232s})}{(125s+1)(195s+1)} & \frac{0,67e^{-8s}(1-1,07e^{-214s})}{(20s+1)(92s+1)} & \frac{0,50e^{-2s}}{18s+1} \\ \frac{0,62}{123s+1} & \frac{-1,75}{118s+1} & \frac{0,51e^{-87s}}{(81s+1)(182s+1)} & \frac{0,64e^{-9s}}{137s+1} \\ \frac{2,61e^{-45s}}{110s+1} & \frac{9,52e^{-93s}}{(98s+1)(137s+1)} & \frac{2,83e^{-8s}}{128s+1} & \frac{2,81e^{-5s}}{(108s+1)} \\ \frac{0,001e^{-30s}}{s(150s+1)} & \frac{0,011e^{-30s}}{s(100s+1)} & \frac{0,032}{s} & \frac{-0,031}{s} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

4.2.2 Objetivos da Sintonia

Nesta etapa a escolha do pareamento foi $y_1 - u_1$, $y_2 - u_2$ e $y_3 - u_3$. O y_4 que representa nessa aplicação o nível no reservatório do circuito foi deixada livre, ou seja, sem obedecer uma trajetória desejada, facilitando o problema de otimização e tornando-o menos complicado computacionalmente, já que o nível do reservatório em um circuito de moagem tende a ser a variável de menor importância em relação a todas as outras variáveis. As funções de transferência selecionadas no pareamento já estão no modelo FOPDT, não houve a necessidade de uma aproximação para esse caso.

As funções de transferência para a trajetória desejada podem ser visualizadas na equação (4.4).

$$G(s)_{des} = \begin{bmatrix} \frac{1e^{-41s}}{83s \times f_1 + 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{118s \times f_2 + 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1e^{-8s}}{128s \times f_3 + 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Novamente, como descrito na seção anterior, para se ter uma saída suave para ambas as variáveis, os fatores de resposta f_1 , f_2 , f_3 selecionados nesse trabalho foram $f_{res} = [2 \ 1 \ 1, 5]$. O horizonte de sintonia, Θ , utilizado foi igual a 5000 segundos proporcionando a possibilidade do processo de se acomodar de forma adequada. Para o vetor inicial das variáveis de decisão $x = [R \ Q]^T$ foi escolhido $x_0 = [0, 001 \ 0, 001 \ 0, 001 \ 0, 001 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10]^T$ e os limites inferiores e superiores foram $x_{Inferior} = [10^3 \ 10^3 \ 10^3 \ 10^3 \ 10^3 \ 10^3 \ 10^3 \ 10^3]^T$ e $x_{Superior} = [10^{-4} \ 10^{-4} \ 10^{-4} \ 10^{-4} \ 10^{-4} \ 10^{-4} \ 10^{-4} \ 10^{-4}]^T$, respectivamente. O horizonte de predição utilizado foi $p = 40$, o horizonte de controle foi $m = 3$ e o tempo de amostragem foi de 10 segundos.

O problema de otimização da sintonia foi resolvido pela função *fmicon* do *software* MATLAB para as seguintes configurações: *sqp* algorithm, 10^{-4} TolX, 10^{-4} TolFun, 4×10^4 MaxFunEvals, 10^4 MaxIter.

4.2.3 Resultado da Sintonia

O resultado da segunda aplicação pode ser visualizado nas Figuras 21 e 22 onde temos as saídas do processo em comparação com as trajetórias de referência desejadas. Para essa simulação o instante inicial para y_0 e u_0 foi em $[0 \ 0 \ 0 \ 0]$ segundos, tendo uma variação de 0,1 % para o primeiro *setpoint* no tamanho da partícula (y_1) no instante 0 segundos. O segundo *setpoint* ocorre com uma variação de 0,1 % no instante 1500 segundos na concentração de sólidos no moinho (y_2) e o terceiro *setpoint* ocorre com uma variação de 0,1 *ton/h* no instante 3000 segundos na variável carga circulante (y_3). Na tabela 4 é apresentado os parâmetros ótimos Q e R, os fatores de resposta e o MSE entre a trajetória de referência e as saídas do sistema.

Sumário da Sintonia				
f	2	1	1.5	—
Q	0,0001	24,7334	26,8158	14,7946
R	0,0163	0,0057	0,0001	0,0696
MSE	$1,0779 \times 10^{-4}$	$3,1492 \times 10^{-4}$	$3,2513 \times 10^{-4}$	$5,8924 \times 10^{-4}$

Tabela 4 – Resultados dos parâmetros da sintonia da aplicação II.

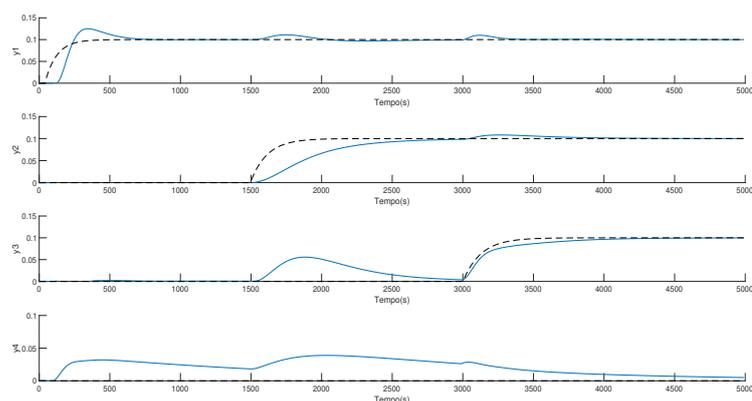


Figura 21 – Resultado da sintonia do circuito de moagem II, saída do processo (linha sólida azul) e a trajetória de referência (linha tracejada preta).

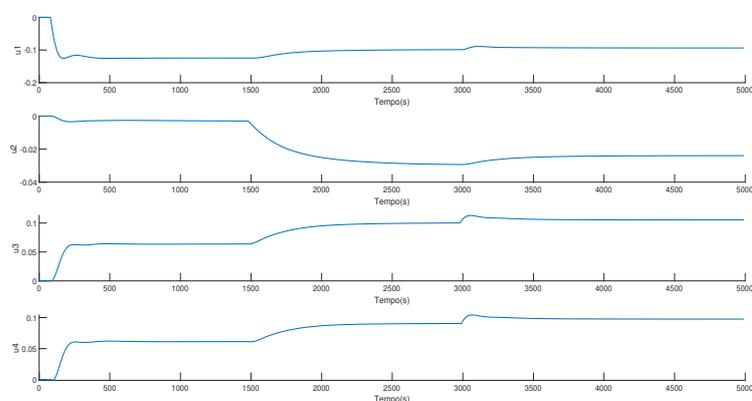


Figura 22 – Resultado da sintonia do circuito de moagem II, entrada do processo (linha sólida azul).

Observa-se nas Figuras 21 e 22 que tanto as saídas quanto as entradas do sistema ficaram estáveis e bem próximas das trajetórias desejadas. Porém, há uma demora maior na estabilização do nível do reservatório, isso se dá pelo fato de não consideramos um trajetória para essa malha, pois, geralmente, sua importância em um circuito de moagem é manter o nível, a ponto de não ocorrer o transbordo ou o esvaziamento completo da caixa, para não danificar a bomba.

4.3 Aplicação dos Resultados para o Circuito de Remoagem III

Na terceira aplicação o circuito utilizado é desenvolvido por [Reis, Júnior e Euzébio \(2018\)](#). Trata-se de um processo não-linear, consistindo em um circuito de remoagem simulado no *software* dinâmico de processos de mineração IDEAS. O processo é baseado no circuito de remoagem na planta do Concentrador 3, da mina de minério de ferro da Samarco, localizada na cidade de Mariana, Minas Gerais, Brasil.

A Figura 23 ilustra o esquemático da estratégia para o DMC e a Figura 24 ilustra o circuito de remoagem simulado no *software* IDEAS. A malha da carga circulante não foi considerada para a sintonia e controle nesse trabalho, sendo assim, sugerido para trabalhos futuros a inclusão dessa malha ao sistema. Esta aplicação será reduzida à um sistema 3x3.

Nesta seção além dos resultados da sintonia serão realizados três experimentos consistindo na aplicação de distúrbios ao processo. Esses distúrbios aplicados ao sistema foram baseados em situações reais que ocorrem em uma usina de mineração. Então temos os seguintes cenários propostos:

- Cenário I: Aumento do percentual de sólidos da polpa da alimentação da remoagem.
- Cenário II: Redução no percentual de sólidos da alimentação da remoagem, que é caracterizado pela queda brusca na taxa de alimentação da usina.
- Cenário III: Variação da granulometria da alimentação da remoagem.

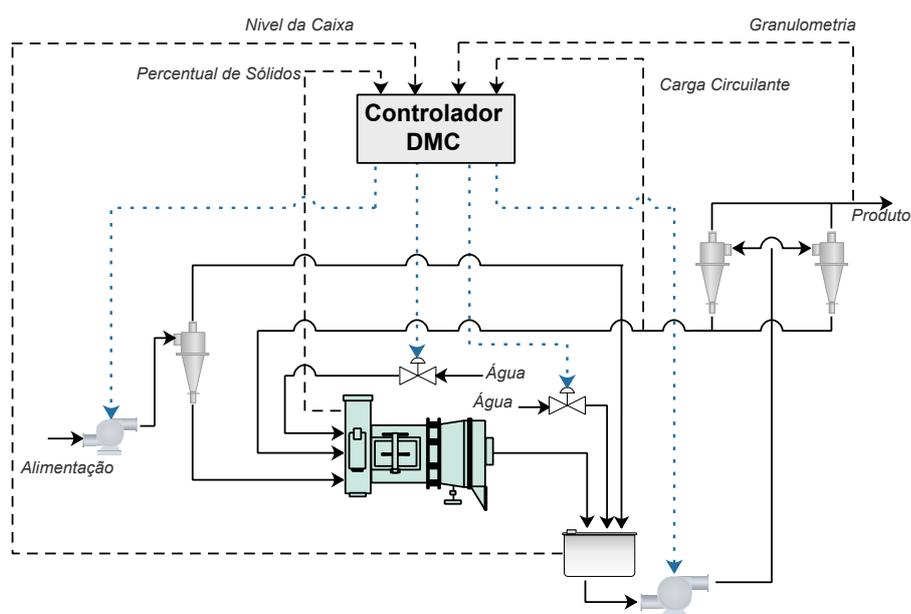


Figura 23 – Diagrama esquemático da estratégia do DMC para o circuito de remoagem.

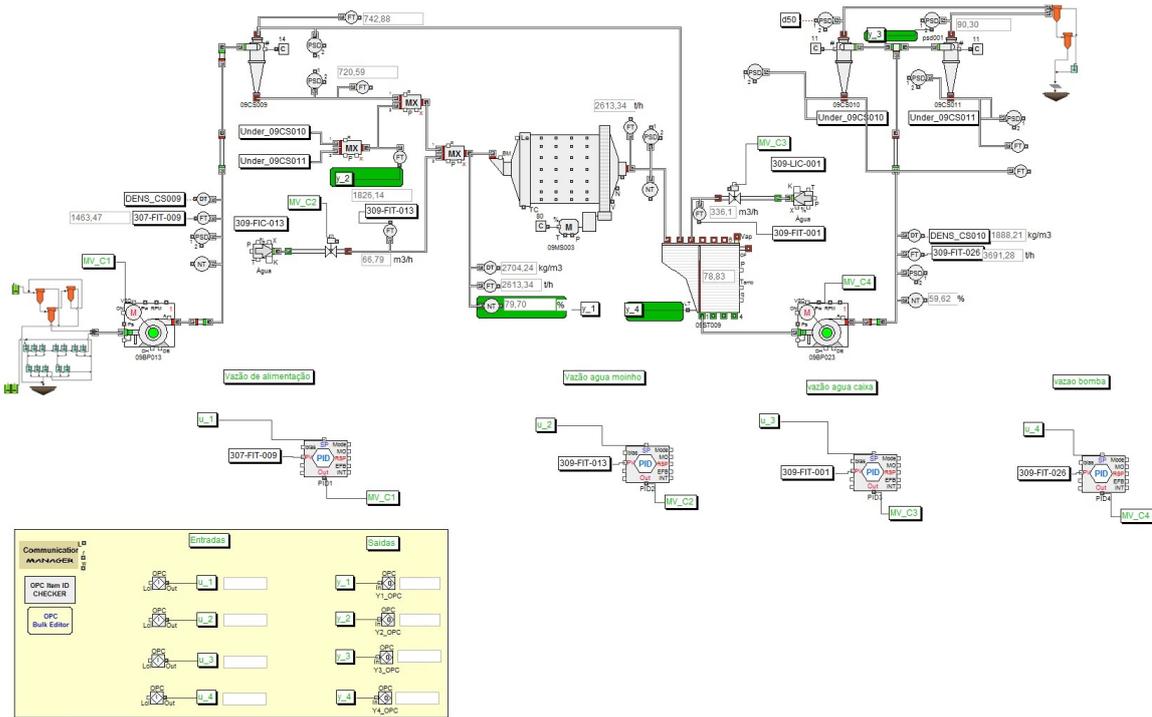


Figura 24 – Circuito de remoagem simulado no IDEAS.

4.3.1 Modelo do Processo

Para a determinação do modelo do processo para o circuito de remoagem da Figura 24 fez-se necessário a sua identificação, como descrito na subseção 3.3. Diante disso, as nove funções de transferência obtidas por meio da identificação, podem ser analisadas de acordo com a matriz de transferência (4.5).

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{3,122 \times 10^{-6}}{(s+0,002088)} & \frac{1,2623 \times 10^{-5}(s-0,0002111)}{(s+0,005045)(s+0,00305)} & \frac{4,2277 \times 10^{-5}(s+0,05186)}{(s^2+0,003367s+5,075 \times 10^{-6})} \\ \frac{-0,00013244(s+0,003742)}{(s+0,02107)(s+0,002236)} & \frac{4,115 \times 10^{-5}(s+0,01047)}{(s+0,01786)(s+0,005719)} & \frac{0,00026657(s+0,002584)}{(s^2+0,001264s+1,011 \times 10^{-6})} \\ \frac{0,00017648(s+0,005106)}{(s+0,05774)(s+0,002563)} & \frac{0,00020268(s+0,00103)}{(s+0,05485)(s+0,003747)} & \frac{-169,85e^{-2s}}{s(s+10^6)} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

O MSE do modelo identificado em (4.5) pode ser analisado de acordo com a Tabela 5, podendo ser observado uma boa representação da dinâmica do sistema visto que o MSE é extremamente pequeno.

MSE	Vazão na Alimentação	Vazão de Água na Caixa	Vazão na Descarga da Caixa
Percentual de Sólidos	$2,90 \times 10^{-5}$	$45,67 \times 10^{-5}$	19060×10^{-5}
Granulometria	$75,28 \times 10^{-5}$	$30,48 \times 10^{-5}$	20880×10^{-5}
Nível	$56,09 \times 10^{-5}$	$61,95 \times 10^{-5}$	48220×10^{-5}

Tabela 5 – MSE dos modelos identificados.

4.3.2 Objetivos da Sintonia

Na Tabela 6 são apresentadas as variáveis de entrada e saída do circuito.

Variáveis de Interesse	Unidades	Tag
Percentual de Sólidos	%	y_1
Granulometria	%325mesh	y_2
Nível	%	y_3
Vazão na Alimentação	t/h	u_1
Vazão de Água na Caixa	m^3/h	u_2
Vazão na Descarga da Caixa	t/h	u_3

Tabela 6 – Variáveis de entrada e saída do processo para aplicação 3, unidades e tags.

O pareamento da sintonia foi $y_1 - u_1$ e $y_2 - u_2$, novamente, deixando a variável representada pelo nível, livre, sem obedecer uma trajetória desejada, para facilitar a metodologia e encontrar os parâmetros do controlador. A malha $y_2 - u_2$ por não estar no formato FOPDT necessitou de uma aproximação. As funções de transferência para a trajetória podem ser visualizadas na equação (4.6).

$$G(s)_{des} = \begin{bmatrix} \frac{1}{478,9272s \times f_1 + 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{505,56s \times f_2 + 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Os fatores de resposta f_1 e f_2 selecionados foram $f_{res} = [1 \ 0,6]$. O horizonte de sintonia, Θ , utilizado foi igual a 7000 segundos proporcionando a possibilidade do processo de se acomodar de forma adequada com um pequeno erro em regime. Para o vetor inicial das variáveis de decisão $x = [R \ Q]^T$ foi escolhido $x_0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ e os limites inferiores e superiores foram $x_{Inferior} = [50 \ 50 \ 50 \ 50 \ 50 \ 50]^T$ e $x_{Superior} = [10^{-4} \ 10^{-4} \ 10^{-4} \ 10^{-4} \ 10^{-4} \ 10^{-4}]^T$, respectivamente. O horizonte de predição utilizado foi $p = 20$ e o horizonte de controle foi $m = 3$.

O problema de otimização da sintonia foi resolvido pela função *fmicon* do *software* MATLAB para as seguintes configurações: *sqp* algorithm, 10^{-3} TolX, 10^{-3} TolFun, 4×10^3 MaxFunEvals, 10^3 MaxIter.

4.3.3 Resultado da Sintonia

Os resultados da terceira aplicação podem ser visualizados nas Figuras 25 e 26, nas quais, se têm as trajetórias desejadas e suas respectivas saída para o sistema 3x3. A simulação foi iniciado no instante y_0 e u_0 em $[0 \ 0 \ 0]$ segundos, com uma variação de 0,1 % no primeiro *setpoint* para a variável y_1 no instante de 0 segundos, já para a variável y_2 essa variação ocorreu no instante 4000 segundos com uma variação de 0,1 %, a variável y_3 não é realizado variação como já foi descrito.

Na Tabela 7 são apresentados os parâmetros ótimos do controlador Q e R, encontrados no problema de otimização, os fatores de resposta já mencionados anteriormente e o MSE entre a trajetória de referência e as saídas do processo.

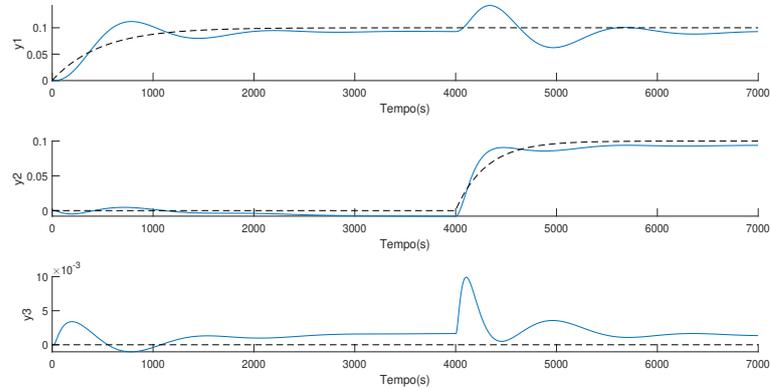


Figura 25 – Resultado da sintonia do circuito de moagem III, saída do processo (linha sólida azul) e a trajetória de referência (linha tracejada preta).

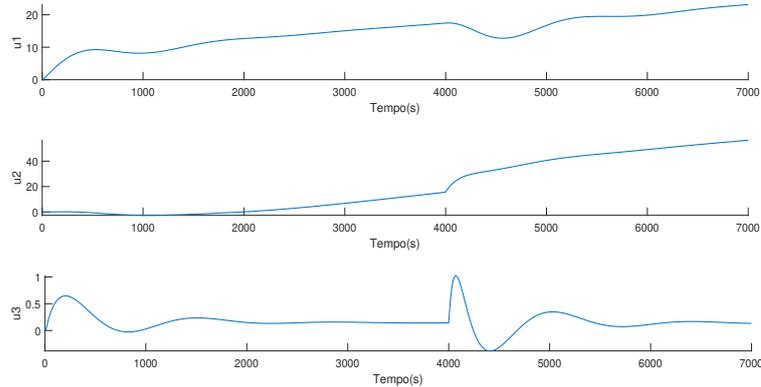


Figura 26 – Resultado da sintonia do circuito de moagem III, entrada do processo (linha sólida azul).

Sumário da Sintonia			
f	1	0,6	-
Q	3,2163	1,1629	0,1494
R	48,2903	0,0001	49,9732
MSE	$0,2603 \times 10^{-5}$	$4,8056 \times 10^{-5}$	$47,6770 \times 10^{-5}$

Tabela 7 – Resultados dos parâmetros da sintonia da aplicação III.

4.3.4 Resultado do Cenário I

No primeiro cenário é realizado um aumento no percentual de sólidos na alimentação de 48% para 50% da polpa que alimenta o circuito.

Na Figura 27 são apresentadas as variáveis controladas e o setpoint, e na Figura 28 são apresentadas as variáveis manipuladas do processo.

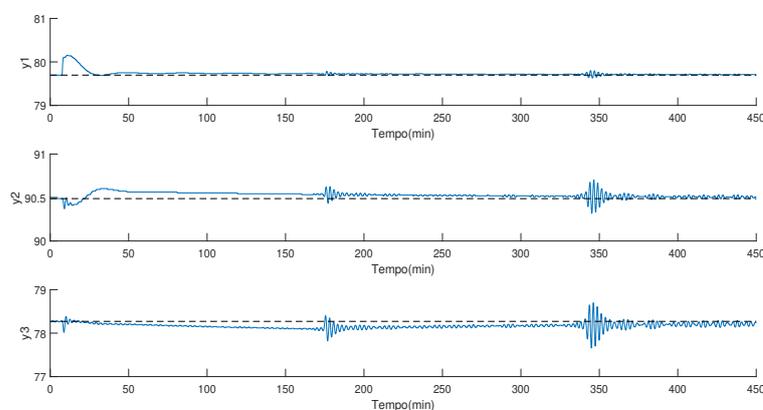


Figura 27 – Resultado do cenário I, saídas do processo.

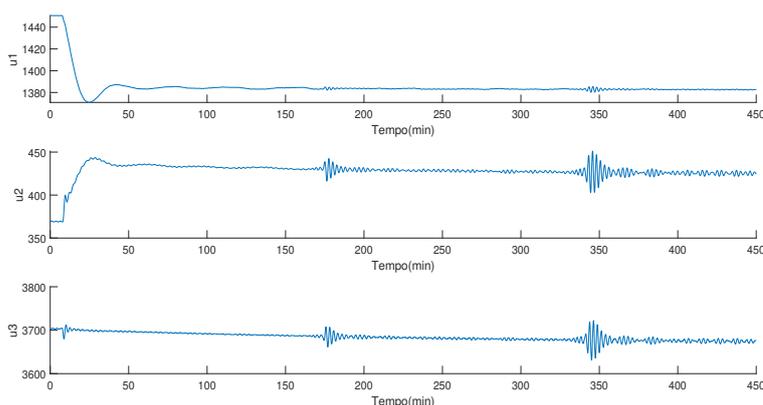


Figura 28 – Resultado do cenário I, entradas do processo.

Como pode ser observado, as variáveis controladas são afetadas pela perturbação após o aumento no percentual de sólidos no moinho (y_1), após isso, conseguem retornar a referência definida. O controlador DMC causa um aumento de água no moinho (u_2) e ao mesmo tempo reduz a taxa de alimentação que entra no circuito (u_1).

O *setpoint* no nível na caixa do reservatório é corrigido, ocorrendo uma redução na vazão da descarga da caixa e posteriormente um acréscimo. Por fim, após a estabilização do percentual de sólidos o *setpoint* da variável da granulometria do produto também se estabiliza.

4.3.5 Resultado do Cenário II

No segundo cenário o percentual de sólidos da polpa que alimenta o circuito é reduzido de 48% para 46%, isso geralmente ocorre quando se tem uma redução na alimentação da usina, o que é compensado pela adição de mais água ao sistema.

Na Figura 29 são apresentadas as variáveis controladas e o *setpoint* e na Figura 30 são apresentadas as variáveis manipuladas do processo.

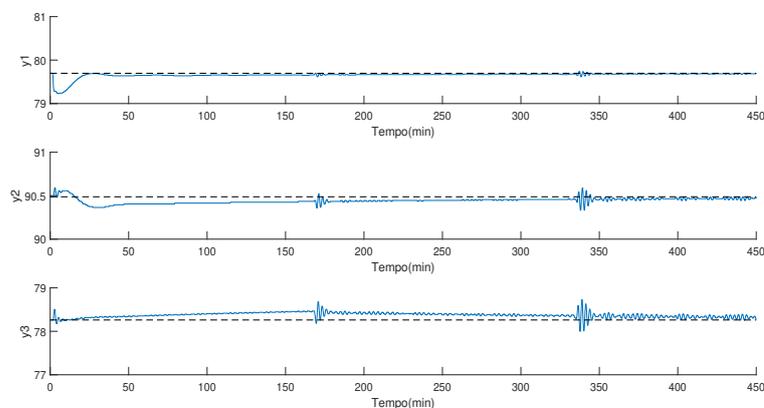


Figura 29 – Resultado do cenário II, saídas do processo.

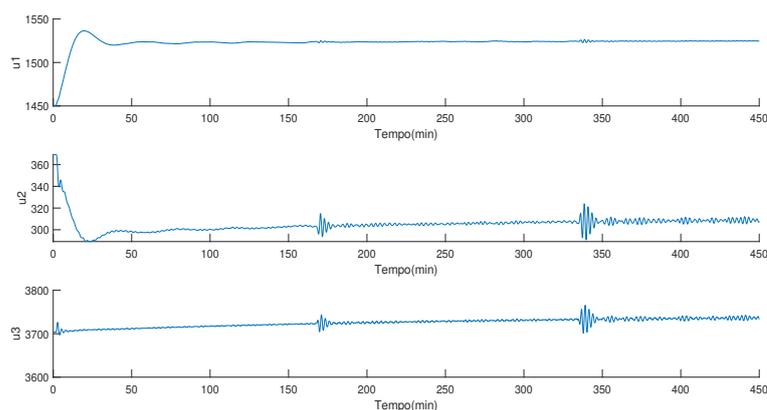


Figura 30 – Resultado do cenário II, entradas do processo.

Neste experimento é possível observar uma queda no percentual de sólidos (y_1), ocorrendo uma sobreoagem, ou seja, quando o circuito produz um material com uma granulometria (y_2) menor do que a estabelecida, o que pode ocasionar gastos energéticos desnecessários a usina, porém, essa perturbação rapidamente é corrigida pelo controlador DMC como pode ser observado pela ação nas variáveis manipuladas na Figura 30.

A redução no percentual é corrigida com uma redução de água no moinho (u_2) e um aumento na taxa da polpa que alimenta o circuito (u_1). Já a perturbação ocorrida no nível do reservatório é compensada pelo aumento na vazão na descarga de água do reservatório (u_3). Por último, após o percentual de sólidos se estabilizar a granulometria também se aproxima do seu *setpoint*.

4.3.6 Resultado do Cenário III

O terceiro cenário consiste na alteração física do minério que alimenta o circuito de remoagem. Então, a alteração ocorreu no tamanho médio da partícula de $46,7 \mu m$ para $49,1 \mu m$.

Na Figura 31 são apresentadas as variáveis controladas e o *setpoint*, e na Figura 32 são apresentadas as variáveis manipuladas do processo.

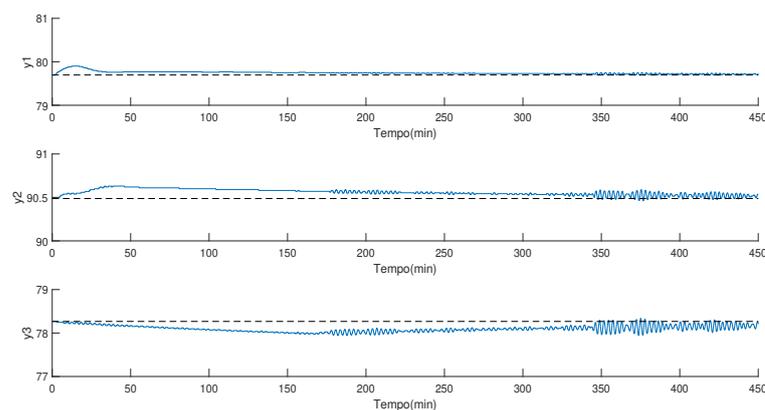


Figura 31 – Resultado do cenário III, saídas do processo.

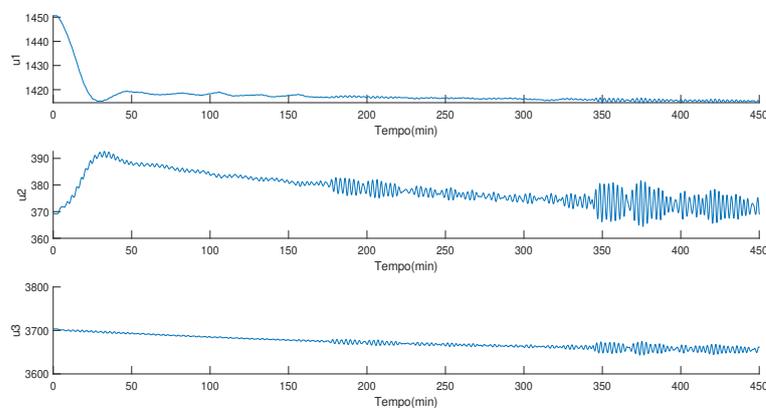


Figura 32 – Resultado do cenário III, entradas do processo.

Neste cenário, para o início da simulação há um aumento do percentual de sólidos, no qual, o controlador compensa reduzindo-se a taxa de alimentação ($u1$), assim como, a taxa de água que entra no circuito ($u2$).

O distúrbio provocado pelas alterações mencionadas anteriormente geram uma redução no nível do reservatório, que é compensado reduzindo igualmente a vazão que sai na descarga do reservatório ($u3$). Apesar do nível do reservatório ter tido uma resposta mais lenta, pode ser observado o seu retorno ao *setpoint* assim como as saídas percentual de sólidos e granulometria.

5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

5.1 Conclusão

Neste trabalho foi apresentado a implementação de uma técnica de sintonia multiobjetivo para controladores MPC aplicado a circuitos de moagem. Para isso, buscou-se uma maior compreensão de conceitos e ferramentas importantes como: a otimização multiobjetivo, a identificação de processos, o protocolo de comunicação OPC, o método de programação por compromisso e o Controlador por Matriz Dinâmica pertencente a classe do Controlador Preditivo por Modelo.

As aplicações foram feitas em três exemplos distintos, assim, os resultados dessas aplicações demonstraram, a partir de diferentes configurações multivariáveis lineares e não linear, a capacidade de funcionamento da técnica de ajuste de sintonia CTT de forma prática e simples.

Além disso, foi possível, definir a resposta em malha fechada do processo de forma direta apenas definindo uma trajetória desejada, tornando possível configurar essa resposta mais lenta ou mais rápida por meio das funções de transferência em malha aberta do processo, evidenciando a vantagem de se configurar os parâmetros de ajuste da sintonia ao contrário da configuração direta dos parâmetros Q e R do controlador DMC MIMO.

É importante ressaltar que por meio da sintonia foi possível destacar as variáveis de mais interesse comercial ao controle do processo de moagem como, a granulometria e o percentual de sólidos, possibilitando produzir um produto com uma boa qualidade, além de selecionar as de menor irrelevância ao processo, como o nível, no qual, o controle desta variável é relevante apenas para o bom desempenho das outras malhas de controle, não sendo necessário uma trajetória de referência, assim, diminuindo o custo computacional do problema de otimização que envolve a sintonia.

Foi possível demonstrar o bom desempenho dos controladores DMC, MIMO após a aplicação da técnica de sintonia CTT, sendo capaz de ter como referência para a implementação em um circuito de moagem real, como exemplo na terceira aplicação, onde, a técnica de sintonia CTT explorou o controle DMC MIMO em um processo de moagem realizado no simulador dinâmico IDEAS, quando sujeito a diferentes cenários de distúrbios baseados em situações reais que ocorrem nesse tipo de circuito industrial. Essa técnica também serve como referência para a aplicação em outros processos que do mesmo modo apresentem desafios no ajuste dos parâmetros de sintonia de um controlador preditivo.

5.2 Trabalhos Futuros

Em trabalhos futuros, deseja-se:

- Aplicar o controlador DMC em um processo de moagem real.
- Adicionar restrições nas entradas e/ou saídas do controlador DMC.
- Realizar um comparativo com outros métodos de sintonia.
- Adicionar a variável controlada carga circulante ao sistema de controle.

REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. *Introdução à identificação de sistemas—Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. [S.l.]: Editora UFMG, 2004. Citado na página 39.
- ANDRITZ, A. *IDEAS Soluções em simulação para indústria*. 2021. Disponível em: <<https://www.andritz.com/resource/blob/17202/059dbeb66deab017fc6ed92a305d26c5/aa-simulation-general-pt-data.pdf>>. Citado na página 37.
- BAGHERI, P.; KHAKI-SEDIGH, A. Tuning of dynamic matrix controller for fopdt models using analysis of variance. *IFAC Proceedings Volumes*, 2011. Elsevier, v. 44, n. 1, p. 12319–12324, 2011. Citado na página 20.
- CAMACHO, E. F.; ALBA, C. B. *Model predictive control*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 10, 18, 25, 26, 27 e 30.
- CHEN, X.-s. et al. Expert system based adaptive dynamic matrix control for ball mill grinding circuit. *Expert systems with Applications*, 2009. Elsevier, v. 36, n. 1, p. 716–723, 2009. Citado na página 19.
- CHEN, X.-s. et al. Application of model predictive control in ball mill grinding circuit. *Minerals Engineering*, 2007. Elsevier, v. 20, n. 11, p. 1099–1108, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 10, 18, 19, 45 e 46.
- CHENG, H.; HUANG, W.; CAI, J. Solving a fully fuzzy linear programming problem through compromise programming. *Journal of Applied Mathematics*, 2013. Hindawi, v. 2013, 2013. Citado na página 33.
- COETZEE, L.; CRAIG, I.; KERRIGAN, E. Rnmpc applied to a nonlinear model of a rom ore milling circuit. *IFAC Proceedings Volumes*, 2009. Elsevier, v. 42, n. 23, p. 19–24, 2009. Citado na página 25.
- DOUGHERTY, D.; COOPER, D. J. Tuning guidelines of a dynamic matrix controller for integrating (non-self-regulating) processes. *Industrial & engineering chemistry research*, 2003. ACS Publications, v. 42, n. 8, p. 1739–1752, 2003. Citado na página 20.
- EUZEBIO, T. A. et al. Siso approaches for linear programming based methods for tuning decentralized pid controllers. *Journal of Process Control*, 2020. Elsevier, v. 94, p. 75–96, 2020. Citado na página 18.
- FOUNDATION, O. *What is OPC?* 2021. Disponível em: <<https://opcfoundation.org/about/what-is-opc/>>. Citado na página 42.
- IVEZIĆ, D. D.; PETROVIĆ, T. B. New approach to milling circuit control—robust inverse nyquist array design. *International journal of mineral processing*, 2003. Elsevier, v. 70, n. 1-4, p. 171–182, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 43.
- KALLEMBACK, G. M. *OTIMIZAÇÃO E CONTROLE PREDITIVO NÃO LINEAR DE CIRCUITO DE MOAGEM A SECO*. 29 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Abril 2012. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 26.

KONAK, A.; COIT, D. W.; SMITH, A. E. Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial. *Reliability engineering & system safety*, 2006. Elsevier, v. 91, n. 9, p. 992–1007, 2006. Citado na página 33.

KRAIPECH, W. et al. An investigation of the effect of the particle–fluid and particle–particle interactions on the flow within a hydrocyclone. *Chemical Engineering Journal*, 2005. Elsevier, v. 111, n. 2-3, p. 189–197, 2005. Citado na página 24.

LUZ, A. B. d.; SAMPAIO, J. A.; FRANÇA, S. C. A. *Tratamento de minérios*. [S.l.]: CETEM/MCT, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 10, 22, 23 e 24.

MATHWORKS, I. T. *OPC Toolbox*. 2021. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/products/opc.html>>. Citado na página 42.

MATLAB. *System Identification Toolbox*. 2021. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/products/sysid.html>>. Citado na página 40.

PAN, X. System integration of automated mine optimization system. *IFAC Proceedings Volumes*, 2013. Elsevier, v. 46, n. 16, p. 148–154, 2013. Citado na página 42.

RAMASAMY, M.; NARAYANAN, S.; RAO, C. D. Control of ball mill grinding circuit using model predictive control scheme. *Journal of Process Control*, 2005. Elsevier, v. 15, n. 3, p. 273–283, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 20.

REIS, L.; JÚNIOR, Ê.; EUZÉBIO, T. Hardware-in-the-loop testing platform of a predictive controller applied to a simulated regrinding circuit. In: *6th International Congress on Automation in Mining. GECAMIN*. [S.l.: s.n.], 2018. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 49.

WOJSZNIS, W. et al. Practical approach to tuning mpc. *ISA transactions*, 2003. Elsevier, v. 42, n. 1, p. 149–162, 2003. Citado na página 20.

YAMASHITA, A.; ZANIN, A.; ODLOAK, D. Tuning of model predictive control with multi-objective optimization. *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, 2016. SciELO Brasil, v. 33, n. 2, p. 333–346, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 10, 19, 20 e 34.

ZELENY, M. Compromise programming. *Multiple criteria decision making*, 1973. University of South Carolina, 1973. Citado na página 33.