



UFOP

Universidade Federal
de Ouro Preto

Marina de Alvarenga Silva

**Desenvolvimento e controle de um módulo
dinâmico sujeito a incertezas**

João Monlevade

2016

Marina de Alvarenga Silva

**Desenvolvimento e controle de um módulo
dinâmico sujeito a incertezas**

Trabalho de conclusão de curso para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica submetido à Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP.

Orientador: Víctor Costa da Silva Campos.
Coorientador: Márcio Feliciano Braga.

João Monlevade

2016



ANEXO X - TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado "Desenvolvimento e controle de um módulo dinâmico sujeito a incertezas" é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem a devida citação ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 19 de janeiro de 2017 .

Marino de Alvarango Silva
Nome completo do(a) aluno(a)



ANEXO II - ATA DE DEFESA

Aos 21 dias do mês de dezembro de 2016, às 19 horas, no bloco H deste instituto, foi realizada a defesa de monografia pela formanda Marina de Alvarenga Silva, sendo a comissão examinadora constituída pelos professores: Anny Verly, Márcio Feliciano Braga, Rodrigo Augusto Ricco e Vítor Costa da Silva Campos.

A candidata apresentou a monografia intitulada Desenvolvimento e controle de um módulo dinâmico sujeito a incertezas. A comissão examinadora deliberou, por unanimidade, pela **aprovação** da candidata, com a nota média 9,6, de acordo com a tabela 1. Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da comissão examinadora e pela formanda.

Tabela 1 – Notas de avaliação da banca examinadora

Banca Examinadora	Nota
Anny Verly	9,0
Márcio Feliciano Braga	9,5
Rodrigo Ricco	10,0
Vítor Costa da Silva Campos	10,0
Média	9,6

João Monlevade, 21 de dezembro de 2016.

Vítor Costa da Silva Campos
Professor Orientador

Márcio Feliciano Braga
Professor Coorientador

Marina de Alvarenga Silva
Aluna

Anny Verly
Professora Convidada

Rodrigo Ricco
Professor Convidado

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos que amo, em especial a Deus, aos meus pais, Artur e Elvira, aos meus irmãos, à vó Lucica, ao vô Juca (in memoriam), a toda minha família e amigos que acompanharam minha trajetória.

Marina de Alvarenga Silva

Agradecimentos

Agradeço a Deus, aos meus pais, aos meus irmãos Mariana, Artur, Ana Luiza e especialmente a Wanessa, ao Pedro, a Kim, a Natália, e aos professores Víctor e Márcio, pelo suporte e apoio incondicional durante a graduação e execução deste trabalho. Agradeço também a todos meus amigos por tudo que fizeram e fazem por mim, principalmente pelo apoio e carinho.

Marina de Alvarenga Silva

RESUMO

Sistemas de controle tem como objetivo regular ou manipular alguma variável, tal como fluxo de energia, informação, dinheiro, entre outras. Muitos controladores são construídos a partir do modelo do sistema ou planta, ou seja, quanto melhor for esse modelo melhor será o desempenho do controlador. A ineficiência de um controlador pode ser causada por modificações no comportamento da planta, que podem ser por perturbações, erros em função de variáveis ignoradas, ou presença de incertezas. Esses tipos de problemas são estudados e solucionados por métodos desenvolvidos na categoria designada Controle Robusto. Deste modo, esse trabalho consiste no desenvolvimento e implementação de um módulo dinâmico com incertezas em sua dinâmica e, posteriormente, propor estratégias de controle robusto para estabilizar o sistema, rejeitar perturbações e seguir referências. Os métodos utilizados são baseados na teoria de desigualdades matriciais lineares LMI (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*), teorias de controle clássico e na utilização do custo garantido da norma H_∞ . Ao fim do trabalho, o módulo dinâmico incerto e os métodos implementados para controle serão disponibilizados nos laboratórios de controle da Universidade Federal de Ouro preto, para uso nas disciplinas de controle e automação.

Palavras-chave: Módulo dinâmico incerto, sistemas instáveis, controle robusto, LMIs.

ABSTRACT

Control systems aim to regulate or manipulate some variable, such as energy stream, information, money, among others. Many controllers are built using the system or plant model, that is, the better the model, the better will be the performance of the controller. However, in case of any modification of the behavior of the plant, that may be induced by disturbance, or even errors caused by ignored variables in the process of modeling and the presence of uncertainties in the system that cause the plant to change its behavior, on lead to instability and causes the designed controller to become inefficient. These issues are studied and solved by methods developed in the designated category of Robust Control. In that regard, this work consists on the development and further improvements of an uncertain dynamic module and later to propose strategies of robust control to stabilize the system and to follow a reference. The methods used are based on the theory of Linear Matrix Inequalities (LMI), classical control theory and the use of the H_∞ guaranteed cost. At the end of this study, the uncertain dynamic module and the implemented methods to control will be available in the control laboratories of the Universidade Federal de Ouro Preto, for the use in control and automation subjects.

Keywords: Dynamic uncertain module, unstable systems, robust control, LMIs.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Válvula reguladora de Watt usada na Tower Bridge em Londres.	25
1.2	Sistema de controle em malha aberta.	26
1.3	Sistema de controle em malha fechada.	26
2.1	Ponto de equilíbrio estável.	34
2.2	Ponto de equilíbrio instável.	35
2.3	Ponto de equilíbrio assintoticamente estável.	35
3.1	Diagrama de blocos da configuração planta-controlador.	39
3.2	Diagrama de bode de um sinal.	41
3.3	Esquema em diagrama de blocos do controlador para rejeitar perturbação.	43
3.4	Diagrama de blocos do controlador com referência.	44
3.5	Diagrama de blocos do controlador com referência e integral do erro.	46
4.1	Configuração do primeiro módulo.	49
4.2	Configuração do segundo módulo.	50
4.3	Lugar geométrico das raízes quando $R_3 < R_2$	51
4.4	Lugar geométrico das raízes $R_3 > R_2$	51
4.5	Teste sem entrada aplicada para a configuração instável.	53
4.6	Teste sem entrada aplicada para a configuração estável.	54
4.7	Saída (azul) e sinal de controle (vermelho) da simulação do módulo com controlador estabilizante, em que, $R_2 = 10K\Omega$, $R_3 = 20K\Omega$ e $R_9 = 1,2K\Omega$	55
4.8	Saída da simulação do módulo com o controlador para rejeitar a perturbação (azul), em que $R_2 = 1K$, $R_3 = 20K$, $R_9 = 1,2K$	57
4.9	Saída da planta (azul) com o controlador para seguir uma referência senoidal de 1V de amplitude e frequência de 0.2Hz (verde).	58
4.10	Saída da planta (vermelho) com o controlador para seguir uma referência senoidal de 1V de amplitude e frequência de 0.2Hz (azul).	59
5.1	Resposta do sistema com o controlador estabilizante(azul), quando $R_2 = 5K\Omega$, $R_3 = 20K\Omega$, $R_9 = 3K\Omega$ e $x(0) = [2, 1, -2]^T$	61

5.2	Resposta do sistema com controlador H_∞ para rejeitar perturbação (azul), quando $R_2 = 5K\Omega$, $R_3 = 20K\Omega$, $R_9 = 3K\Omega$ e $x(0) = [2, 1, -2]^T$	62
5.3	Saída da simulação (azul) do módulo com perturbação adicionada ao sistema - Configuração instável, em que $R_2 = 10K\Omega$, $R_3 = 20K\Omega$, $R_9 = 1,2K\Omega$ e perturbação de 1V de amplitude.	63
5.4	Saída da simulação (azul) do módulo com o controlador estabilizante e perturbação adicionada ao sistema - Configuração instável, em que $R_2 = 10K\Omega$, $R_3 = 20K\Omega$, $R_9 = 1,2K\Omega$ e perturbação de 1V de amplitude.	64
5.5	Saída da simulação (azul) do módulo com controlador H_∞ e perturbação adicionada ao sistema - Configuração instável, em que $R_2 = 10K\Omega$, $R_3 = 20K\Omega$, $R_9 = 1,2K\Omega$ e perturbação de 1V de amplitude.....	65
5.6	Saída da simulação do módulo com perturbação adicionada ao sistema - Configuração estável, em que $R_2 = 20K\Omega$, $R_3 = 10K\Omega$ e $R_9 = 10K\Omega$ e uma perturbação de 1V.	65
5.7	Saída da simulação do módulo com o controlador estabilizante e perturbação adicionada ao sistema - Configuração estável, em que $R_2 = 20K\Omega$, $R_3 = 10K\Omega$ e $R_9 = 10K\Omega$ e uma perturbação de 1V.	66
5.8	Saída da simulação do módulo com o controlador H_∞ para rejeitar a perturbação adicionada ao sistema - Configuração estável, em que $R_2 = 20K\Omega$, $R_3 = 10K\Omega$ e $R_9 = 10K\Omega$ e uma perturbação de 1V.	66
5.9	Sinal de referência (azul) e saída do sistema com o controlador para seguir referência (vermelho).	68
5.10	Sinal de referência (azul) e saída do sistema com o controlador para seguir referência com integral do erro (vermelho).	68
5.11	Módulos ligados em série.....	69
5.12	Saída obtida para teste de bancada sem entrada aplicada.	69
5.13	Teste com entrada aplicada, em destaque, apresenta-se o subsinal na saída (curva em vermelho), característica de sistemas de fase não mínima.	70
5.14	Teste de bancada - Planta e controlador estabilizante.....	71
5.15	Saída dos módulos em série com o controlador estabilizante em lilás, saída somente do módulo 1 em azul e sinal de controle em amarelo - Teste de bancada.	72

5.16	Configuração do teste de bancada com controlador para seguir referência com ação integral.	73
5.17	Saída da planta com o controlador para seguir de referência - Teste de bancada. ..	74
5.18	Saída da planta com o controlador para seguir de referência - Teste de bancada. ..	74
5.19	Saída da planta com o controlador para seguir de referência - Teste de bancada. ..	75
5.20	Saída da planta com o controlador para seguir de referência - Teste de bancada. ..	75
7.1	Circuito do módulo I.....	79
7.2	Circuito do módulo II.....	81
7.3	Etapas da construção do módulo.....	84
7.4	Módulo I - Físico	84
7.5	Configuração em malha fechada com controlador estabilizante.	85
7.6	Configuração em malha fechada com controlador que rejeita perturbações.....	86
7.7	Configuração em malha fechada com controlador para seguir de referência.....	87
7.8	Configuração em malha fechada com controlador para seguir de referência com ação integral.	88

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos

A	Amplitude	[V]
I	Corrente elétrica	[A]
P	Potência elétrica	[W]
R	Resistência elétrica	[Ω]
t	Tempo	[s]
V	Tensão elétrica	[V]
Hz	Hertz	[Rad/s]

Subscritos

$rede$	rede elétrica
ref	referência
RMS	RMS (<i>Root Mean Square</i>)

LISTA DE SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
LMI	Desigualdades Matriciais Lineares <i>Linear Matrix Inequalities</i>
SISO	Entrada Única Saída Única (<i>Single Input Single Output</i>)
MIMO	Entradas Múltiplas Saídas Múltiplas (<i>Multiple Input Multiple Output</i>)
BIBO	Entrada Limitada Saída Limitada (<i>Bounded Input / Bounded Output</i>)
LQR	Regulador Linear Quadrático (<i>Linear Quadratic Regulator</i>)
LQG	Regulador Linear Quadrático Gaussiano (<i>Linear Quadratic Gaussian</i>)
PID	Proporcional Integral Derivativo (<i>Proportional Integral Derivative</i>)
UFOP	Universidade Federal de Ouro Preto

LISTA DE TABELAS

1.1	Síntese do desenvolvimento da teoria de controle	27
5.1	Tempo de acomodação e pico para condição a inicial $x(0) = [2, 1, -2]^T$	62
5.2	Respostas dos sistemas sujeitos a perturbação	67
7.1	Lista de materiais para construção dos módulos	83

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Estado da Arte	23
1.1.1	Controle	24
1.1.2	Controle Robusto	27
1.2	Justificativa	29
1.3	Objetivos	29
1.3.1	Objetivos específicos	29
1.4	Estrutura do Trabalho	30
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	31
2.1	Fundamentação Inicial	31
2.2	Controlabilidade e Observabilidade	32
2.3	Desigualdades Matriciais Lineares — LMI	33
2.4	Estabilidade	33
2.4.1	Estabilidade no sentido de Lyapunov — Estabilidade interna	34
2.4.2	Teorema de Estabilidade de Lyapunov (Método Direto) - Sistemas Autônomos	36
2.5	Sistemas Incertos	36
3	CONTROLADORES	39
3.1	Estabilizabilidade	39
3.2	Controlador H_∞ para rejeitar perturbação	40
3.3	Controlador H_∞ Aumentado para seguir referência	43
3.4	Controlador H_∞ Aumentado com integral do erro	45
3.5	Controladores para sistemas politópicos	47
4	DESENVOLVIMENTO E CONTROLE DE UM MÓDULO DINÂMICO SUJEITO A INCERTEZAS	49
4.1	Módulo dinâmico incerto	49
4.1.1	Desenvolvimento e modelagem em espaço de estados	49

4.1.2	Modelo Politópico da planta.....	52
4.1.3	Comportamento.....	53
4.2	Controladores robustos	54
4.2.1	Controlador estabilizante	54
4.2.2	Controlador H_{∞} - Rejeitar perturbação	56
4.2.3	Controlador H_{∞} Aumentado - Seguir referência.....	57
4.2.4	Controlador H_{∞} Aumentado com Integral do erro - Seguir referência	58
5	ANÁLISES DE DESEMPENHO DOS CONTROLADORES PROJETADOS....	61
5.1	Tempo de acomodação	61
5.2	Comportamento do sistema sujeito a perturbações	62
5.3	Erro em regime permanente da planta com o controlador para seguir referência	65
5.4	Testes de bancada	66
5.4.1	Controlador Estabilizante.....	69
5.4.2	Controlador para seguir referência com integral do erro	70
5.4.3	Controlador para seguir referência.....	71
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	77
6.1	Conclusões.....	77
6.2	Melhorias e Trabalhos futuros	78
7	ANEXOS	79
7.1	Anexo I	79
7.2	Anexo II	82
7.2.1	Lista de materiais para construção dos módulos.....	82
7.2.2	Montagem dos módulos	82
7.3	Anexo III	83
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	89

1 INTRODUÇÃO

1.1 ESTADO DA ARTE

Sistemas de controle estão altamente presentes na sociedade moderna, eles são considerados como subsistemas e processos construídos com propósito de regular ou manipular alguma variável seja ela, fluxo de energia, informação, dinheiro entre outros [Brogan 1982]. Esses sistemas são utilizados em uma extensa gama de aplicações, que vão desde aviões, naves espaciais e robôs, controle de processos industriais e hospitalares até aplicações mais simples como automação residencial. Na indústria, são principalmente utilizados para controle de temperatura, pressão, umidade, granulometria, velocidade, potência, posição, entre outras variáveis que influenciam no processo ou na qualidade do produto.

De modo geral, os sistemas de controle são utilizados por quatro razões principais, são elas: a amplificação de potência, muito utilizada, por exemplo, em antenas que exigem alta potência, no qual o sistema deve ser capaz de regular a energia necessária realizando um ganho em potência; controle remoto, muito útil em locais remotos ou onde a habilidade humana não é suficiente; conveniência da forma de entrada, pelo qual se torna possível alterar a forma da entrada ou saída. E a quarta razão é a compensação de perturbações, em que o sistema se torna capaz de fornecer a saída correta mesmo com a presença de interferências [Nise 2007].

As vantagens da utilização de sistemas de controle são vastas. Com eles, por exemplo, é possível movimentar equipamentos de grande porte com alta precisão. O que não seria possível caso esses equipamentos fossem controlados por pessoas, pois dependendo da aplicação e local, a operação poderia colocar a vida e saúde do operário em risco. O controle a longas distâncias também mostra vantagens evidentes, por meio deles é possível controlar satélites e antenas, o que seria manualmente impossível.

Por essa e outras razões, vários métodos de projeto de controladores tem sido desenvolvidos, os quais dependem da aplicação e complexidade do sistema. Em sua grande maioria, os métodos de projeto dependem do modelo matemático da planta, assim, é nítida a importância de se obter um modelo que represente bem a dinâmica do sistema a ser controlado [Brogan 1982].

Geralmente quando se realiza a modelagem de sistemas, considera-se que o modelo e o

comportamento da planta não se altera com o passar do tempo. Essas alterações mudam o comportamento da planta podendo tornar-la instável, assim fazendo com que o controlador não exerça sua função. Portanto, existe uma área da teoria de controle denominada controle robusto que se dedica a estudar esses sistemas. Essa vertente lida com incertezas que podem existir na própria planta ou na representação do modelo. Deste modo, ao se projetar um controlador utilizando técnicas de controle robusto, o mesmo têm a capacidade de superar pequenas diferenças entre o modelo real da planta e o modelo nominal utilizado para realizar o projeto [Brogan 1982].

1.1.1 Controle

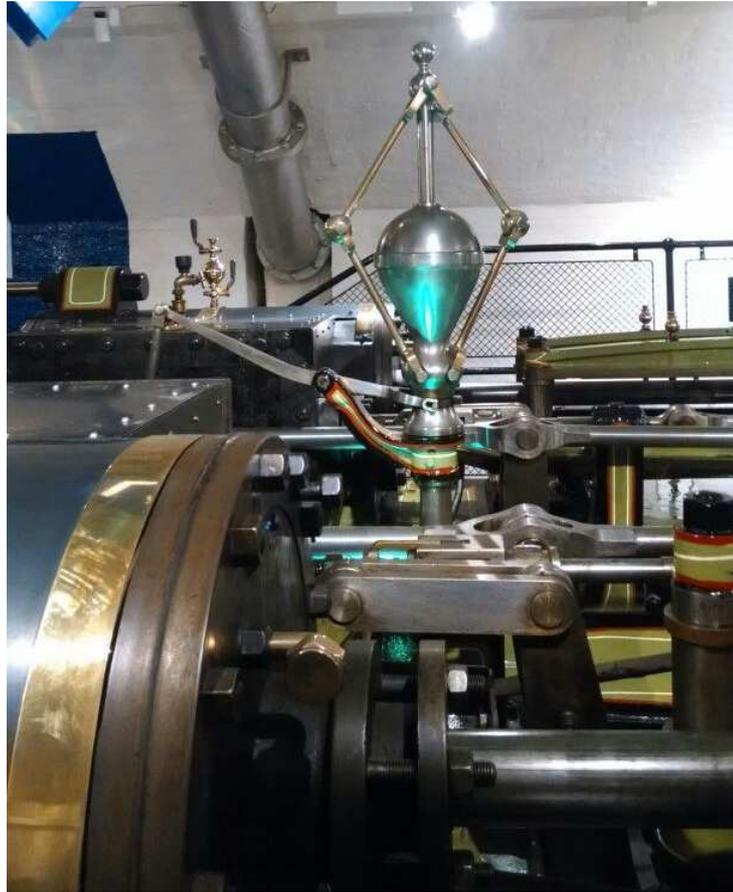
As teorias de controle são utilizadas principalmente em processos físicos, nos quais o controlador exerce a função de regular algum tipo de parâmetro. Um dos primeiros sistemas de controle em malha fechada de que se tem notícia foi a válvula governadora de James Watt, utilizada para regular a velocidade de máquinas a vapor, as quais alcançaram uma maturidade de desenvolvimento por volta de 1783 [Villça e Silveira 2013]. Um exemplo de seu uso pode ser visto na Figura 1.1. A válvula era utilizada para regular a velocidade do motor a vapor da Tower Bridge em Londres.

A Teoria de Controle Clássico surgiu nas décadas de 40 e 50, na qual desenvolveram-se, principalmente, estudos no domínio da frequência focados em sistemas SISO, uma entrada e uma saída (do inglês, *Single Input, Single Output*). Dentre algumas técnicas se destacam a resposta em frequência, o lugar das raízes, o critério de estabilidade de Routh, o diagrama de Nichols e o critério de estabilidade de Nyquist [Nise 2007].

Na Figura 1.2, está representado a forma geral de controle em malha aberta, no qual, o sinal de controle enviado ao processo é selecionado a partir dos objetivos e de um conhecimento *a priori* do processo. Nota-se também que a saída do sistema não influencia na entrada, deste modo caso ocorra algum distúrbio no sistema a saída não possuirá o comportamento desejado [Brogan 1982].

Outra estratégia de controle é o emprego de sistemas em malha fechada ou realimentados (Figura 1.3). Ao contrário do sistema em malha aberta, o sinal de controle é modificado pela informação do comportamento da saída do sistema. Essa configuração é capaz de lidar com distúrbios e incertezas sobre o comportamento do sistema dinâmico [Brogan 1982].

Figura 1.1: Válvula reguladora de Watt usada na Tower Bridge em Londres.

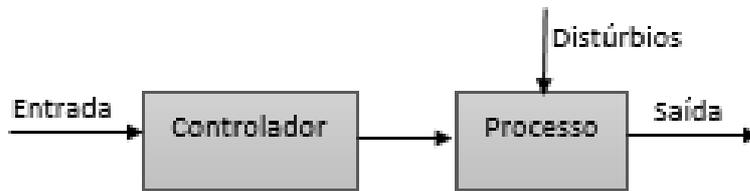


Fonte: Próprio autor, 2014.

Os controladores têm por finalidade atender alguma especificação pré-estabelecida. Em alguns casos, o principal objetivo é garantir a estabilidade do sistema, que pode ser analisada aplicando o método do lugar das raízes desenvolvido por Evans no final dos anos 50, ou simplesmente observando as margens de ganho e fase, considerando os conceitos de fase mínima e não mínima. No entanto essas estratégias se tornam inaplicáveis se os sistemas forem não lineares ou lineares e variantes no tempo. Para esses casos, emprega-se o método direto de Lyapunov cujo objetivo é analisar a estabilidade do sistema em análise.

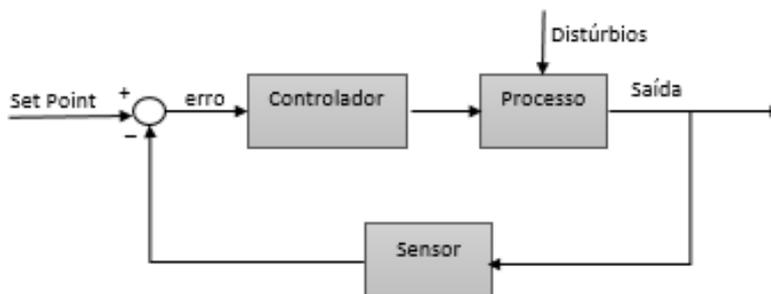
Com o decorrer do tempo, os sistemas e as exigências se tornavam cada vez mais complexos, aumentando exponencialmente o custo matemático e, em muitas vezes tornando o cálculo inviável. Essa situação mudou na década de 60 com o surgimento dos computadores digitais com alta velocidade de processamento, viabilizando assim a análise no domínio do tempo de sistemas multivariáveis. E justamente para atender a demanda imposta pelas aplicações industriais, em que os sistemas eram na grande maioria múltiplas-entradas-múltiplas-saídas (MIMO, do inglês *Multiple Input Multiple Output*), causou o desenvolvimento do que se chama hoje de

Figura 1.2: Sistema de controle em malha aberta.



Fonte: Adaptada [Nise 2007].

Figura 1.3: Sistema de controle em malha fechada.



Fonte: Adaptada [Nise 2007].

controle moderno. A partir dessa década as modelagens se desenvolveram principalmente sob a representação em espaço de estados, as formas canônicas e os conceitos de controlabilidade e observabilidade, técnicas de alocação de polos introduzidas respectivamente por Kalman e Ackermann [Santos 2005].

As técnicas de controle ótimo representadas, no domínio do tempo, pelos métodos LQR (do inglês, Regulador Linear Quadrático) e LQG (do inglês, Regulador Linear Quadrático Gaussiano) e, no domínio da frequência, pelos métodos H_2 e H_∞ , despontaram na década de 70. Nas referidas técnicas, considerava-se que a planta estaria bem representada por um modelo nominal. O controlador projetado atendia às especificações de desempenho para o modelo nominal de maneira ótima. Entretanto, na modelagem de plantas, não era levado em conta a possibilidade de modificações do modelo da planta em função de perturbações e distúrbios. Como solução para esses problemas, surgiu na década de 80 o conceito de robustez em estabilidade, a partir daí foram considerados as perturbações e distúrbios que atingem o modelo nominal [Zuben 2003].

Tabela 1.1: Síntese do desenvolvimento da teoria de controle

	Controle Clássico 1930 - 1960	Controle Moderno 1960 - 1980	Controle Robusto 1980 - dias atuais
Paradigma	Domínio da frequência SISO	Domínio do tempo MIMO	Domínio da frequência, com modelos por espaço de estados
Análise	Diagramas de Bode Critério de Nyquist Critério de Routh-Hurwitz Lugar das Raízes (Evans) Margens de Ganho e Fase	Modelo por Espaço de Estados Controlabilidade Observabilidade Processos Estocásticos	Decomposição em Valores Singulares Análise μ Fatorização Espectral Desigualdades Matriciais
Síntese	Controladores PID Compensação Lead-Lag	Filtro de Kalman LQR LQG	Síntese H_∞ Síntese H_2 Síntese μ

Fonte: Adaptado [Zuben 2003].

De forma sintética, a Tabela 1.1 mostra a teoria de controle dividida nos três períodos mais significativos, levando em conta o paradigma da época, a forma de realizar as análises e como executar a síntese dos controladores.

1.1.2 Controle Robusto

A grande maioria dos projetos de controladores se dão a partir do modelo do sistema ou planta, ou seja, depende diretamente de quão próximo do sistema real esse modelo se apresenta. Assim quanto melhor for o modelo, melhor será o desempenho do controlador. No entanto, esse tipo de projeto não prevê modificações no comportamento da planta, seja por perturbações externas, erros em função de variáveis ignoradas no processo de modelagem, ou pela presença de incertezas no sistema que mudam seu comportamento.

Estudos sobre controle robusto começaram a se desenvolver no final dos anos 70 [Dullerud e Paganini 2013]. Essa teoria visa a garantia da estabilidade (como no controle clássico), o atendimento de critérios de desempenho ótimos (como no controle ótimo) e devem garantir esses critérios mesmo na presença de incertezas no modelo da planta, na operação dos sensores

e atuadores ou na própria dinâmica do sistema [Zuben 2003].

Assim a categoria de controladores robustos tem como objetivo manter a saída do sistema como desejada, mesmo que alguma perturbação ou mudança aconteça na planta. Esse fato faz com que o sistema como um todo seja muito mais confiável e seguro. O que é desejado em diversas aplicações, principalmente naquelas que exigem precisão. De modo geral, um sistema é robusto, quando a sensibilidade e a mudanças à perturbações é baixa [Dorf e Bishop 2001].

Como descrito anteriormente, a teoria de controle robusto apresenta muitas vantagens em relação às aplicações indústrias. O que pode ser questionado, se de fato essa vertente apresenta vantagens, pois no ramo industrial ainda se utiliza as ferramentas de controle clássico. Isso pode ser explicado por dois motivos principais, sendo eles, inércia e custo, ambos entrelaçados pois a mudança gera custo. Além disso, as técnicas utilizadas atualmente atendem o processo sem influir fortemente na produtividade, assim a justificativa de se gastar com alguma melhoria não seria aprovada. Outros motivos, estão relacionados à escassez de mão de obra qualificada, principalmente aplicada a processos industriais, e a idealização acadêmica, pelo fato de muitos resultados publicados não considerarem as limitações práticas vinculadas a realidade e implementação [Zuben 2003].

Neste trabalho, serão utilizadas LMIs (Desigualdades Matriciais Lineares, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), as quais tiveram seu primeiro registro em 1890 no trabalho de Lyapunov [Boyd et al. 1994]. Posteriormente surge uma solução analítica para a LMI de Lyapunov via equação de Lyapunov. O uso de LMIs permite que uma grande variedade de problemas de controle possam ser reduzidos a problemas de otimização convexa ou quase convexa envolvendo desigualdades matriciais lineares. Os problemas de otimização podem ser resolvidos numericamente de forma eficiente, usando métodos de pontos interiores. Visto as vantagens do uso das LMIs, despontou a possibilidade de sua aplicação para problemas reais de engenharia de controle.

No começo eram utilizadas pequenas LMIs que eram resolvidas a mão, o que limitava seu uso. Por volta de 1980, surgiu a possibilidade de se solucionar as LMIs em computadores por programas convexos, assim facilitando e expandindo o uso das mesmas [Boyd et al. 1994]. Alguns trabalhos utilizando a teoria de Lyapunov em aplicações para sistemas de potência podem ser observados em [Pai e Sauer 1989] e [Barbazelli 2005].

1.2 JUSTIFICATIVA

Em sistemas controlados, principalmente industriais, nos quais a saída da planta deve seguir níveis de exigências é imprescindível que a planta tenha um modelo bem definido e estável. No entanto, nem sempre é possível obter um bom modelo e/ou evitar que o mesmo sofra alterações de variáveis ou até mesmo falha de algum sensor ou atuador. Desse modo, uma das motivações deste trabalho é desenvolver controladores utilizando técnicas de controle robusto para que a saída da planta seja estável e atenda as especificações determinadas.

Nas disciplinas de modelagem e controle, as simulações realizadas em *softwares* de programação são comumente utilizadas como a ferramenta principal de aplicação dos conceitos aprendidos. No entanto, é notável o grande potencial e a necessidade da realização de atividades práticas, pois elas, além de prover uma consolidação teórica, aproximam o aluno das dificuldades presentes nas execuções dos projetos no plano não ideal. Por isso, uma das motivações deste trabalho se trata do projeto e construção de um módulo didático incerto a fim de aproximar a teoria da prática.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é implementar e construir um módulo dinâmico sujeito a incertezas de baixo custo e, em seguida projetar controladores aplicando técnicas de controle robusto.

1.3.1 Objetivos específicos

- Realizar revisão bibliográfica sobre estabilidade, LMIs, uso das funções de custo garantido para projeto de controladores;
- Construir o módulo de forma didática, para ser disponibilizado para o laboratório de controle e automação da UFOP;
- Utilizar a teoria de Lyapunov para projetar um controlador estabilizante;
- Utilizar condições de síntese de custo garantido da norma H_∞ , para projetar um controlador para rejeitar perturbação, um para seguir referência, e um para seguir referência com ação integral;

- Simular todas as configurações em malha fechada utilizando o *software* *PROTEUS*;
- Obter resultados que concretizem a funcionalidade e a eficiência do módulo e das técnicas aplicadas.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho foi estruturado em 5 capítulos que visam, individualmente, a consecução de objetivos específicos, mas, de forma conjunta, permitem que o objetivo apresentado anteriormente seja atingido.

O Capítulo 2 trata, essencialmente, da revisão bibliográfica do trabalho e foi elaborado objetivando o fornecimento de informações úteis à compreensão deste trabalho.

No Capítulo 3, são apresentadas uma fundamentação teórica e as metodologias para os projetos dos controladores.

No Capítulo 4, são apresentados os desenvolvimentos e métodos utilizados para a elaboração do módulo e dos controladores propostos neste trabalho. Desta forma, este capítulo apresenta detalhadamente a descrição do sistema desenvolvido, sua modelagem, seu funcionamento e as ferramentas úteis à sua implementação.

O projeto desenvolvido sob proposta acadêmica visa à elaboração de um dispositivo que se torna instável facilmente. De posse de todo o embasamento teórico fornecido pelos capítulos prévios, o Capítulo 5 destina-se a descrever os processos utilizados e os resultados obtidos pelo sistema proposto. Os resultados são detalhados conjuntamente com seus respectivos métodos de obtenção, de maneira que se possa avaliar coerentemente a validade e a qualidade dos resultados obtidos. Idealiza-se que, até esta etapa de estudo, todos os conceitos relativos à análise dos sistemas expostos estejam estabelecidos.

Finalmente, o Capítulo 6 destina-se ao registro das conclusões finais do trabalho e das principais contribuições deste trabalho, e à indicação de sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros que acrescentem valor ao sistema explorado.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Sistemas de controle são utilizados em diversos lugares com diferentes aplicações, principalmente nas indústrias químicas, automobilísticas e em todas que envolvem tecnologia. Para qualquer tipo de aplicação é esperado que os controladores gerem respostas adequadas, atenuem ou eliminem perturbações e que o mesmo seja robusto, ou seja, que garanta um nível de desempenho quando o sistema estiver sujeito a variações diversas.

Um bom projeto depende de vários conceitos e condições que auxiliam e levam a uma boa execução. Dessa forma, uma base fundamentada é de extrema importância. A seguir são explicitados alguns dos principais conceitos teóricos utilizados na a execução e construção do módulo didático e implementação dos controladores.

2.1 FUNDAMENTAÇÃO INICIAL

Um conceito frequentemente utilizado neste trabalho está ligado a positividade de matrizes, pois é extensivamente utilizado pelo teorema de estabilidade de Lyapunov. Deste modo, define-se que uma matriz M é definida positiva quando $x^T M x > 0, \forall x \neq 0, x^* \in C^n$. E quando a solução trivial faz parte do conjunto de soluções, a matriz é dita como semidefinida positiva, ou seja, $x^t M x \geq 0, \forall x \neq 0, x^* \in C^n$ [Júdice e Patrício 1996].

De forma alternativa pode-se chegar a positividade da matriz atendendo somente uma das seguintes condições:

- Todos os autovalores de M devem ser positivos;
- Todos os menores principais líderes de M devem ser positivos;
- Se existir uma matriz não singular $N \in R^{n \times n}$, tal que $M = N * N$;
- Autovalores, traço, determinante e menores principais positivos.

2.2 CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

O conceito de controlabilidade é essencial para o projeto de controladores estabilizantes usando realimentação de estado. Um sistema instável, mas controlável, pode ser estabilizado e, conseqüentemente, controlado. Por isso, a importância desse conceito para o presente trabalho, pois os controladores a serem desenvolvidos para a planta projetada serão por realimentação de estados.

Dado um sistema contínuo de ordem n ,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}\tag{2.1}$$

em que A é a matriz dinâmica do sistema, B é a matriz de entrada, C é a matriz de saída e D é a matriz de transmissão direta. E x_i e x_f pontos do espaço de estados, o sistema é controlável se e somente se existe um sinal de controle $u(t)$, definido no intervalo finito $[t_0, t_0 + \tau]$, que leve o estado do ponto $x_i = x(t_0)$ para o ponto $x_f = x(t_0 + \tau)$, onde t_0 e τ são números reais, tais que, $\tau \geq 0$ [Dullerud e Paganini 2013].

A planta é controlável se o posto de linhas da matriz de controlabilidade Θ (2.2) for completo. Assim para o caso do sistema de ordem n , será controlável se o posto da matriz de controlabilidade for n .

$$\Theta = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{(n-1)}B \end{bmatrix}.\tag{2.2}$$

Para a execução de esquemas de seguimento robusto de referência, é necessário a utilização de controle por realimentação de estados. Quando o estado não é mensurável pode-se utilizar uma ferramenta, conhecida como observador de estado, que estima as variáveis de estado com base nos sinais de entrada e saída do sistema. Para essa aplicação é necessário que o sistema seja observável.

Dado um sistema contínuo de ordem n mostrado na Equação (2.1), é observável quando existe um número real e finito τ tal que o estado inicial $x(0)$ possa ser determinado a partir de $u(t)$ e $y(t)$ para $0 \leq t \leq \tau$. O sistema será observável se o posto de colunas da matriz de observabilidade (2.3) for completo. Assim para sistemas de ordem n , o posto de colunas da matriz de observabilidade deve ser igual a n [Brogan 1982].

$$\Phi = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

2.3 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES — LMI

Por volta de 1890, Lyapunov publicou seus principais trabalhos, conhecida atualmente como Teoria de Lyapunov [Boyd et al. 1994]. Ele mostrou que a equação diferencial, $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$, é estável (todas as trajetórias convergem para zero), se e somente se existir uma matriz definida positiva P que atende a Equação (2.4). O requerimento $P > 0$ e da Equação 2.4 é chamado de desigualdade de Lyapunov em P .

$$A^T P + P A < 0 \quad (2.4)$$

Dada uma $Q = Q^T > 0$, se a equação linear $A^T P + P A = -Q$ tiver uma solução $P > 0$ (P definida positiva), então o sistema A é estável. Em 1940, Lur'e, Postnikov, entre outros na União Soviética, aplicaram o método de Lyapunov em alguns problemas práticos em engenharia de controle, especialmente em problemas de estabilidade de sistemas de controle.

Outro grande passo foi em 1960 quando Yakubovich, Popov, Kalman e outros pesquisadores conseguiram reduzir a solução das LMIs que surgiram no problema de Lur'e com critérios gráficos simples, usando o que hoje chamamos de Lema da Positividade Real. Isto resultou no célebre critério Popov, o critério do círculo, o critério de Tsípkín, e muitas variações [Boyd et al. 1994].

2.4 ESTABILIDADE

A estabilidade é a especificação mais importante de um sistema, pois sem ela, os outros critérios, como resposta transiente e os erros do estado estacionário, não têm significado. Assim sem ela não é possível realizar o projeto de controladores usuais que atendam uma resposta transiente específica ou um requisito de erro de estado estacionário [Ogata 2001].

Existem diversas definições de estabilidade, a mais utilizada principalmente em cursos de graduação é a estabilidade BIBO (*do inglês, Bounded Input / Bounded Output*), a qual define que para qualquer entrada limitada aplicada ao sistema, a saída gerada será limitada. Caso alguma entrada gere uma saída ilimitada, o sistema é considerado instável [Lathi et al. 2005].

2.4.1 Estabilidade no sentido de Lyapunov — Estabilidade interna

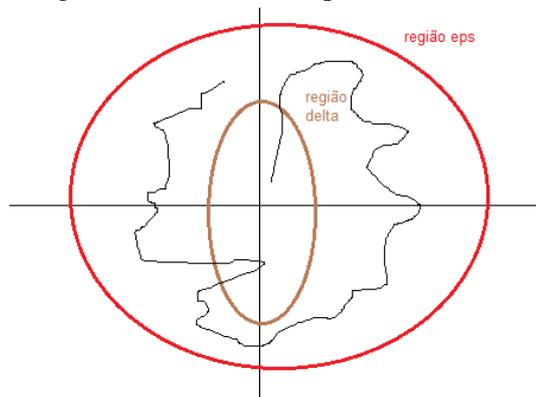
A estabilidade BIBO ignora completamente o comportamento interno dos estados do sistema. No presente trabalho, a preocupação é com a estabilidade interna, ou seja, com o comportamento dos estados em torno de um ponto de equilíbrio.

Desse modo, um ponto de equilíbrio é dito estável se, para todo $\xi > 0$, existir um $\delta > 0$, tal que atenda, $\|x(0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \xi, \forall t$. Caso contrário, o ponto é dito instável. Quando o ponto é estável, e pode-se escolher um valor δ tal que atenda a Equação (2.5). Nesse caso, ele é definido como assintoticamente estável [Dullerud e Paganini 2013].

$$\|x(0)\| < \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (2.5)$$

Graficamente, se torna mais fácil a compreensão de estabilidade. Pelo gráfico disposto na Figura 2.1 é possível notar que $x(t)$ é sempre menor que a região eps (ou pelas fórmulas acima região ξ), ou seja, quando t tende ao infinito a saída permanece limitada à região. O que não ocorre no gráfico disposto na Figura 2.2, no qual os estados $x(t)$ ultrapassam o valor da região eps tendendo a infinito.

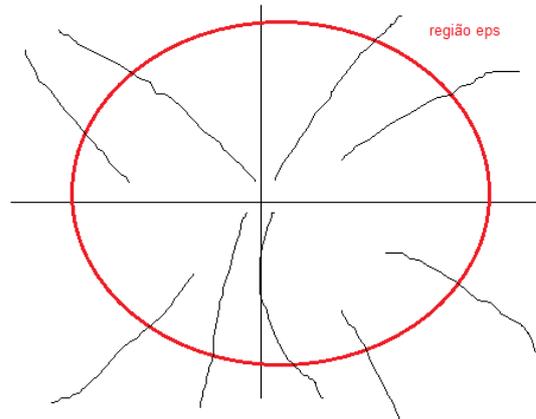
Figura 2.1: Ponto de equilíbrio estável.



Fonte: Notas de aula de Controle usando lógica nebulosa do Prof. Víctor Costa, 2016.

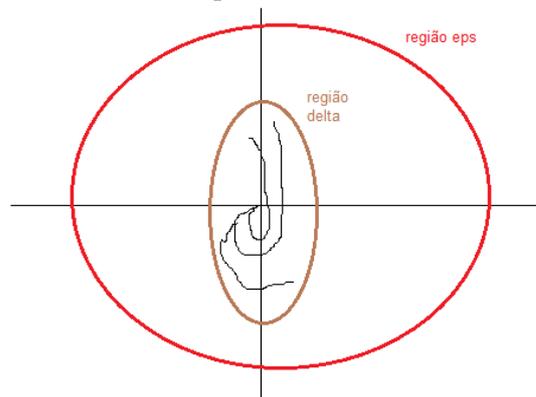
Na Figura 2.3 os estados sempre permanecem dentro da região eps (ξ) e δ , e tendem a origem

Figura 2.2: Ponto de equilíbrio instável.



Fonte: Notas de aula de Controle usando lógica nebulosa do Prof. Víctor Costa, 2016.

Figura 2.3: Ponto de equilíbrio assintoticamente estável.



Fonte: Notas de aula de Controle usando lógica nebulosa do Prof. Víctor Costa, 2016.

à medida que o tempo tende ao infinito. Caracterizando um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Uma forma de se confirmar a estabilidade se dá calculando todas as trajetórias possíveis em torno do ponto de equilíbrio e verificando se as especificações discutidas anteriormente são atendidas. Essa abordagem pode mostrar-se muito complexa ou até mesmo impossível em alguns casos devido ao número de soluções. Outra possibilidade para se verificar a estabilidade de um ponto de equilíbrio, sem ter de calcular as soluções da equação diferencial do sistema, é por meio dos Teoremas de Estabilidade de Lyapunov.

2.4.2 Teorema de Estabilidade de Lyapunov (Método Direto) - Sistemas Autônomos

Primeiramente, são ditos sistemas autônomos aqueles que o campo vetorial no espaço de estados, independe explicitamente do tempo, ou seja, $\dot{x} = f(x)$.

Considere a origem ($x = 0$) um ponto de equilíbrio do sistema e $D \subset R^n$ (uma região que inclui a origem). Assim se existir uma função $V(x) : D \rightarrow R$, tal que atenda, $V(0) = 0$, $V(x) > 0, \forall x \neq 0$ e $\dot{V}(0) = 0, \dot{V}(x) < 0$, o ponto de equilíbrio é estável no sentido de Lyapunov [Pai e Sauer 1989].

Se a derivada temporal da função candidata for somente menor que zero ($\dot{V}(0) = 0, \dot{V}(x) < 0$), ou seja, definida negativa o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. Deste modo, qualquer função que atenda as condições do teorema é chamada de função de Lyapunov [Pai e Sauer 1989].

De modo geral, o teorema diz que se for encontrada uma função semelhante à energia do sistema (definida positiva) cuja derivada temporal é sempre menor ou igual a zero, então a origem do sistema é estável. Se essa derivada for sempre menor do que zero, então o sistema é assintoticamente estável.

2.5 SISTEMAS INCERTOS

Sistemas incertos são sistemas que possuem parâmetros que podem variar ou não no tempo dentro de uma faixa de valores possíveis. Tais variações podem mudar a dinâmica da planta e levar a ineficiência de controladores que são projetados para um certo comportamento. Para esse tipo de planta o modelo de incerteza pode ser expresso por diferentes formas [Zuben 2003], sendo elas:

- Por intervalo de valores para os parâmetros físicos da planta (representação politópica);
- Por limites de variação no perfil de resposta em frequência;
- Por região de localização dos polos e zeros da planta.

No presente trabalho será utilizada a representação politópica que leva em conta um intervalo finito de possibilidades. A representação é descrita por $\dot{x} = (\hat{A} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \hat{A}_i)x + (\hat{B} +$

$\sum_{i=1}^r \alpha_i \hat{B})u$. Na qual se observa uma parte fixa dos parâmetros somada com uma que é incerta [Dorf e Bishop 2001].

Em uma representação politópica, considera-se que a dinâmica de um sistema é representada pelo fecho convexo de várias representações lineares. Assim a representação pode ser escrita da forma:

$$\dot{x} = \alpha_1 (A_1x + B_1u) + \alpha_2 (A_2x + B_2u) + \dots + \alpha_r (A_rx + B_ru). \quad (2.6)$$

Assim quando é conhecido os limites em que as incertezas variam, a representação do sistema pode ser realizada pela combinação das possibilidades de todos os limitantes de cada incerteza. Ou seja, se a planta possui n parâmetros incertos, a sua representação será por 2^n matrizes de possibilidades.

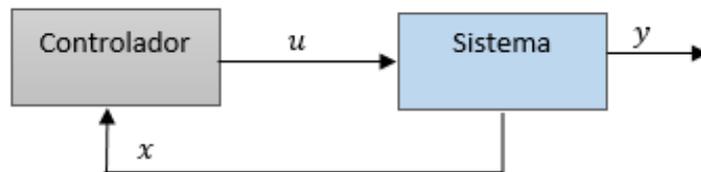
3 CONTROLADORES

Neste trabalho foram implementados quatro controladores por realimentação de estados. Então este capítulo é dedicado à descrição detalhada das teorias e dos os métodos utilizados para a realização dos projetos.

3.1 ESTABILIZABILIDADE

O controlador descrito nesta sessão tem como objetivo estabilizar uma planta ou sistema que esteja instável. A configuração controlador-planta é da forma disposta na Figura 3.1, na qual observa-se o vetor de estados do sistema $x(t)$, o sinal de controle $u(t)$ e o vetor de saída $y(t)$.

Figura 3.1: Diagrama de blocos da configuração planta-controlador.



Fonte: Adaptado [Nise 2007].

Considerando A , B , C e D , as matrizes que representam a dinâmica do sistema, descreve-se o comportamento do sistema como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

Para estabilizar a planta será utilizado a lei de controle $u(t) = Kx(t)$, onde K é o controlador. Substituindo a lei de controle na representação em espaço de estados descrita acima, encontram a as equações em malha fechada,

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t),$$

$$y(t) = (C + DK)x(t).$$

Utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov (Capítulo 2), escolheu-se a função de Lyapunov candidata $V = x^T P x$, em que $P > 0$. Procura-se condições para garantir que $\dot{V} < 0$. Assim tem-se que, $\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} < 0$. Realizando as respectivas substituições e simplificações em \dot{V} , encontra-se a inequação não linear disposta na Equação (3.1).

$$\dot{V} = x^T (A^T P + P A + K^T B^T P + P B K) x < 0,$$

$$A^T P + P A + K^T B^T P + P B K < 0. \quad (3.1)$$

Visto que a Equação (3.1) não é linear, realiza-se algumas manipulações para chegar a uma desigualdade linear. Assim, multiplica-se a desigualdade (3.1) à esquerda e à direita por P^{-1} . Em seguida, definindo a seguinte substituição $X = K P^{-1}$, e aplicando em (3.1), tem-se:

$$A P^{-1} + P^{-1} A^T + B X + X^T B^T < 0. \quad (3.2)$$

Note que a equação (3.2) é uma desigualdade de Lyapunov e que a transformação linearizante pode ser reescrita como $K = X P$, a qual é utilizada para encontrar o controlador K .

Por fim, definindo $P^{-1} = Y$, com $Y > 0$ e aplicando em (3.2), tem-se:

$$A Y + Y A^T + B X + X^T B^T < 0, \quad (3.3)$$

que é utilizada para encontrar o controlador K que estabiliza a planta.

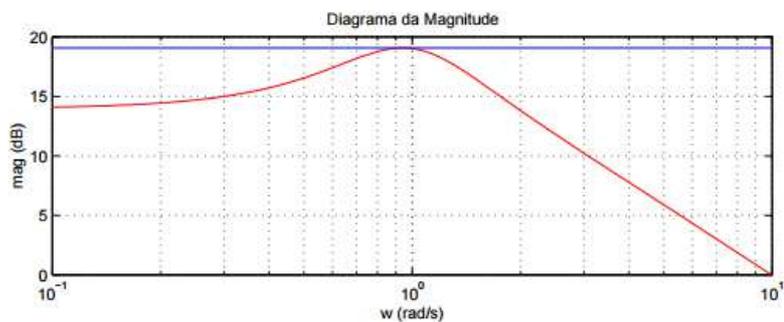
3.2 CONTROLADOR H_∞ PARA REJEITAR PERTURBAÇÃO

Para o projeto de um controlador que rejeite perturbação, são necessárias algumas informações iniciais. A primeira delas é o conceito de norma, a qual pode ser de sinal, vetor ou matriz. Norma nada mais é que uma forma de medida e pode ser calculada de diferentes formas.

A norma de interesse deste trabalho é a norma H_∞ ou norma \mathcal{L}_2 induzida. Ela indica o maior ganho (pico de energia, Figura 3.2) que o sistema gera. Ou seja, é capaz de monitorar a energia do sistema de interesse e, assim, verificar a eficiência do sistema de controle [Trofino, Barbosa e Coutinho 2000].

Ela é muito utilizada como uma função de custo do sistema a ser minimizada. No caso de projetos de controle H_∞ é considerado o pior caso de operação e o objetivo é minimizar o pico de energia da função de transferência no domínio da frequência do sistema analisado. E para sistemas incertos ou com perturbações, como o deste trabalho, pode-se utilizar a função de custo garantido para análise de desempenho, em que ao invés de minimizar a norma H_∞ , minimiza-se um limitante superior da norma. Assim garantindo que o sistema incerto atenda o limitante (por isso o nome custo garantido).

Figura 3.2: Diagrama de bode de um sinal.



Fonte: [Trofino, Barbosa e Coutinho 2000].

A Equação $\|G\|_\infty = \max \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma$ é definida para encontrar a norma H_∞ de w para z do sistema linear descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_w w(t), \\ z(t) &= C_z x(t) + D_w w(t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

no qual w é a entrada com distúrbio e z a saída do sistema.

A seguir são apresentados os passos necessários para encontrar o controlador. Os quais podem ser obtidos adaptando a teoria e metodologia apresentada em Dullerud e Paganini (2013) para a obtenção do problema de otimização H_∞ via LMIs.

Dado a Equação (3.5), multiplica-se ambos os lados por $\frac{1}{\gamma}$ e, pela definição de norma, a mesma equação pode ser descrita como disposto na Equação (3.6). Na qual é somada em ambos os lados, dentro da integral, a função de Lyapunov $\dot{V}(x)$, como disposto na Equação (3.7).

$$\|z(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w(t)\|_2^2, w(t) \in L_2, \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^\infty z(\tau)^T z(\tau) d\tau \leq \gamma \int_0^\infty w(\tau)^T w(\tau) d\tau. \quad (3.6)$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\gamma} z(\tau)^T z(\tau) - \gamma w(\tau)^T w(\tau) + \dot{V}(\tau) \right) d\tau \leq \int_0^\infty \dot{V}(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

Analisando a integral do lado direito, pode-se dizer que ela é nula, pois pode ser escrita como: $V(\infty) - V(0)$. Sabe-se que o sistema é relaxado, ou seja, as condições iniciais são nulas e, para valores no infinito, a função tende a zero por ser considerado apenas sistemas estáveis. Assim, (3.7) reduz-se a

$$\dot{V} + \frac{1}{\gamma} z^T z - \gamma w^T w < 0. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.4) em (3.8), chega-se a presente Equação (3.9).

$$\begin{bmatrix} x^T & w^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB_w \\ * & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_z & D_w \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma} I \begin{bmatrix} C_z \\ D_w \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0 \quad (3.9)$$

Em seguida, aplicando o complemento de Schur, tem-se

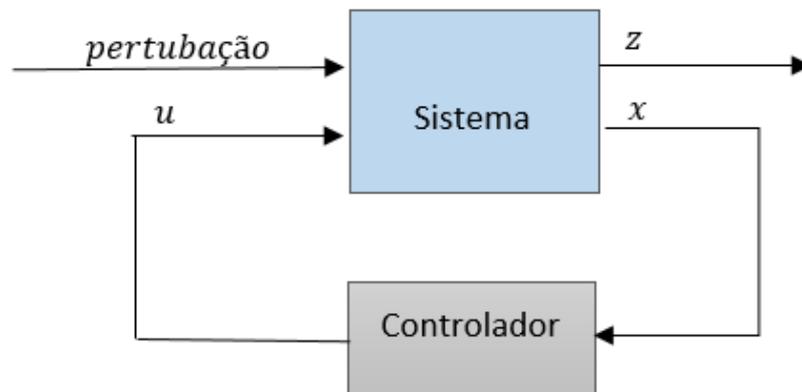
$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB_w & C_z^T \\ * & -\gamma I & D_w^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0. \quad (3.10)$$

Encontrada a LMI de análise o próximo passo é obter a LMI de síntese do controlador. O esquema em malha fechada pode ser observado pela Figura 3.3.

Utilizando a lei de controle $u = Kx$, em que K é o controlador, realiza-se a substituição para encontrar a função em malha fechada do sistema à ser utilizada na LMI disposta na Equação (3.10). Deste modo, depois de algumas manipulações, encontra-se a LMI de síntese do controlador disposta na Equação (3.11).

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + BY + Y^T B^T & B_w & XC_z^T + Y^T D_z^T \\ * & -\gamma I & D_w^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad X > 0. \quad (3.11)$$

Figura 3.3: Esquema em diagrama de blocos do controlador para rejeitar perturbação.



Fonte: Adaptado [Dullerud e Paganini 2013].

Desse modo, os ganhos do controlador para rejeitar perturbação podem ser obtidos por $K = YX^{-1}$.

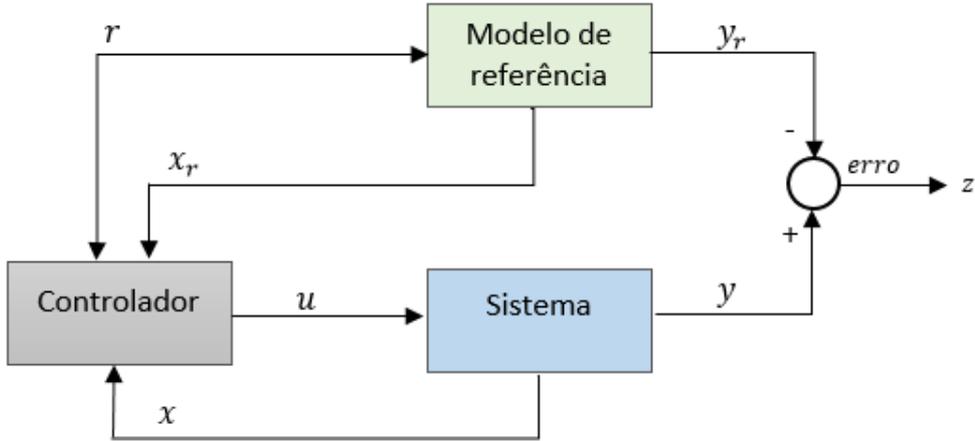
3.3 CONTROLADOR H_∞ AUMENTADO PARA SEGUIR REFERÊNCIA

Nesta seção será descrito o projeto do controlador para seguir referência. O modelo do controlador está esquematizado na Figura 3.4. Ou seja, diferentemente dos apresentados anteriormente, esse controlador recebe duas variáveis a mais, sendo elas, o sinal de referência desejado r e as variáveis de estado do modelo de referência x_r .

Ainda pela Figura 3.4, pode-se observar que a saída z utilizada é a diferença entre o sinal desejado e a saída real da planta (erro). Deste modo, o controlador tem o objetivo de minimizar $\|z\|_\infty$, ou seja, o erro. Em síntese, para encontrar o controlador, o primeiro passo é encontrar o novo modelo em espaço de estados do sistema, adicionado as novas variáveis, obtendo assim um modelo aumentado. Em seguida, definir a lei de controle e, por fim, substituir as matrizes aumentadas na LMI de análise descrita no projeto do controlador H_∞ para seguir referência. Deste modo, encontra-se a LMI de síntese do controlador, todo esse processo está disposto detalhadamente a seguir.

Inserindo as novas variáveis no sistema, e definindo que as matrizes aumentadas, como por

Figura 3.4: Diagrama de blocos do controlador com referência.



Fonte: Adaptado [Dullerud e Paganini 2013].

exemplo a matriz A , será nomeada como \bar{A} e assim por diante para as demais matrizes e vetores, então tem-se que:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_r = \begin{bmatrix} BN \\ B_r \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} C & -C_r \end{bmatrix} \text{ e } \bar{D} = [D_u + D_r].$$

Assim o novo modelo se apresenta da forma disposta em (3.4), observa-se a nova variável de estado x_r , o sinal de referência r e o N que representa um *feedforward*.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} BN \\ B_r \end{bmatrix} r, \\ z &= \begin{bmatrix} C & -C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix} + (D_u + D_r)r. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Portando, de forma análoga, a representação do modelo em espaço de estados pode ser observada na Equação (3.13).

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}\bar{u}(t) + \bar{B}r \\ , \bar{z}(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}r. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Definido a lei de controle como:

$$u = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix} = \bar{K}\bar{x},$$

realiza-se as contas para encontrar a equação em malha fechada do sistema. Feito isso, obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= (\bar{A} + \bar{B}\bar{K})\bar{x} + \bar{B}_w r, \\ \bar{z} &= (\bar{C}_z + \bar{D}\bar{K})\bar{x} + DN_r.\end{aligned}$$

Dado as equações em malha fechada, o próximo passo é realizar as devidas substituições na LMI de análise para gerar a LMI de síntese. Feito isso, encontra-se a LMI disposta na Equação (3.14).

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T P + PA + \bar{K}^T \bar{B}^T P + P \bar{B} \bar{K} & P \bar{B}_w & \bar{C}_z^T + \bar{K}^T D^T \\ * & -\gamma I & DN \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.14)$$

No entanto, a Equação (3.14) não é linear, deste modo faz-se uma transformação linearizante em que $X = P^{-1}$ e $Y = KP^{-1}$. Assim encontrando a LMI de síntese do controlador para seguir referência.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}X + X\bar{A}^T + \bar{B}Y + Y^T\bar{B} & \bar{B}_w & X\bar{C}_z^T + Y^T D^T \\ * & -\gamma I & DN \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad X > 0. \quad (3.15)$$

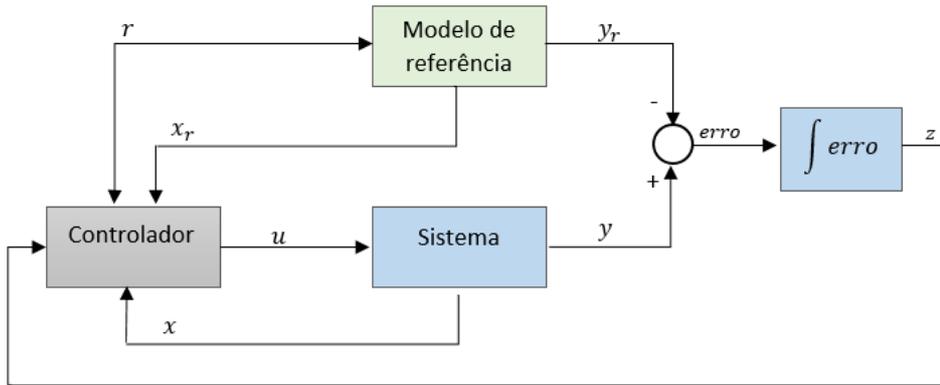
3.4 CONTROLADOR H_∞ AUMENTADO COM INTEGRAL DO ERRO

Idealmente, deseja-se que o sistema apresente erro nulo em regime permanente. Assim, para melhorar o erro em regime permanente, foi adicionado um bloco integrador ao sistema, como disposto na Figura 3.5.

Como disposto na Figura 3.5, o controlador receberá mais uma variável. Assim o processo para se obter o novo controlador segue o mesmo projeto como no anterior. No qual o primeiro passo é aumentar o sistema. Assim as matrizes aumentadas são:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A_r & 0 \\ C & -C_r & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_r = \begin{bmatrix} BN \\ B_r \\ DN \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} e \bar{D} = 0,$$

Figura 3.5: Diagrama de blocos do controlador com referência e integral do erro.



Fonte: Adaptado [Dullerud e Paganini 2013].

o que resultou nas Equações (3.16) e (3.17).

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_r \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A_r & 0 \\ C & -C_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_r \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} BN \\ B_r \\ DN \end{bmatrix} r \quad (3.16)$$

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_r \\ x_i \end{bmatrix} + 0r \quad (3.17)$$

Depois de levantar o modelo, define-se a lei de controle, que será de forma similar à lei do controlador anterior com mais um ganho, assim a sua forma é:

$$u = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_r \\ x_i \end{bmatrix} = \bar{K} \bar{x}.$$

Encontra-se a equação em malha fechada do sistema e substitui-se na LMI de análise para gerar a LMI de síntese. Realizando as manipulações necessárias encontra-se a LMI de síntese do controlador (Equação (3.18)).

$$\begin{bmatrix} \bar{A}X + X\bar{A}^T + \bar{B}Y + Y^T\bar{B} & \bar{B}_w & X\bar{C}_Z^T \\ * & -\gamma I & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad X > 0. \quad (3.18)$$

3.5 CONTROLADORES PARA SISTEMAS POLITÓPICOS

Para sistemas lineares incertos a estabilidade robusta pode ser garantida por uma função de Lyapunov que seja uma solução factível para o conjunto de LMIs descritas nos vértices do domínio de incertezas do sistema em questão [Leite et al. 2004]. O uso das LMIs para plantas com incertezas politópicas pode ser observado em [Shaked 2001], [Leite et al. 2004] e [Fu, Ni e Sun 2009].

Para o caso de sistema sujeitos a incertezas politópicas, pode-se estender todos os resultados apresentados neste capítulo, bastando considerar que as restrições sejam válidas para todos os vértices do sistema [Feron, Apkarian e Gahinet 1996].

4 DESENVOLVIMENTO E CONTROLE DE UM MÓDULO DINÂMICO SUJEITO A INCERTEZAS

4.1 MÓDULO DINÂMICO INCERTO

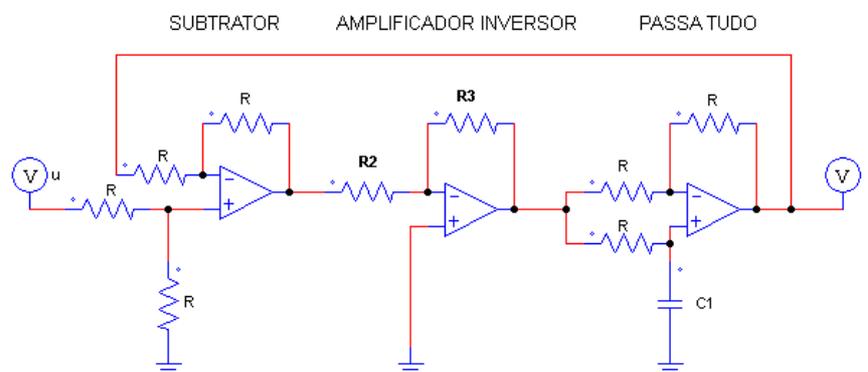
A primeira parte deste trabalho foi dedicada ao projeto e construção de um módulo dinâmico incerto de baixo custo, a qual foi desenvolvida em conjunto com a aluna Natália Augusto Kelles, do curso de Engenharia Elétrica da UFOP. O circuito projetado possui em sua composição elementos passivos, tais como, resistores, capacitores e indutores, os quais compõem circuitos em sua grande maioria estáveis ou marginalmente estáveis [Boylestad e Nashelsky 1998]. Também foram utilizados elementos ativos (amplificadores operacionais) tornando possível a permutação entre estabilidade e instabilidade, dependendo dos valores adotados.

A construção física dos módulos está disposta no Anexo II.

4.1.1 Desenvolvimento e modelagem em espaço de estados

O modelo proposto é formado basicamente por 4 estágios, são eles, circuito subtrator, circuito amplificador inverso, filtro passa-tudo, os quais estão dispostos na Figura 4.1 e, por fim, um filtro passa baixa de segunda ordem (Figura 4.2).¹

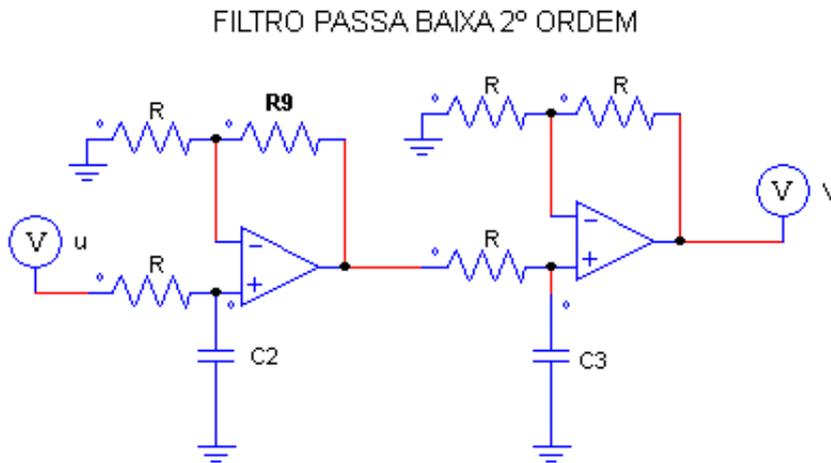
Figura 4.1: Configuração do primeiro módulo.



Fonte: Próprio autor, 2016.

¹Todos os desenhos de circuitos foram desenvolvidos no simulador *PSIM*

Figura 4.2: Configuração do segundo módulo.



Fonte: Próprio autor, 2016.

A modelagem do circuito foi realizada em espaço de estados, pois se mostra mais simples quando o sistema tem múltiplas entradas e saídas. Além de permitir observar o comportamento interno do sistema. Assim o modelo resultante tem a forma disposta na Equação (4.1). A modelagem encontra-se no Anexo I).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_3 - R_2}{RC_1(R_2 + R_3)} & 0 & 0 \\ \frac{1}{RC_2} \left(\frac{2R_2}{R_2 + R_3} \right) & \frac{-1}{RC_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{RC_3} \left(1 + \frac{R_9}{R} \right) & \frac{-1}{RC_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-R_3}{RC_1(R_2 + R_3)} \\ \frac{1}{RC_1} \frac{R_3}{(R_2 + R_3)} \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

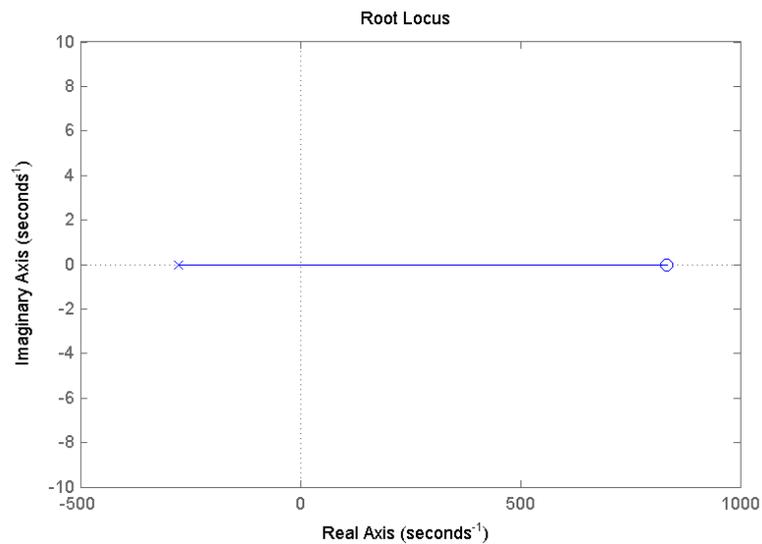
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \quad (4.1)$$

O circuito possui três estados, que são representados por x_1 , x_2 e x_3 , que são as tensões nos capacitores C_1 , C_2 e C_3 respectivamente. As incertezas presentes na planta são representadas pelas resistências R_2 , R_3 e R_9 (Figuras 4.1 e 4.2), assim dependendo dos valores que elas assumam, pode-se fazer com que o circuito se torne instável. Para melhor observar esse comportamento, foi simulado no MATLAB algumas possibilidades de valores para ambos.

Definido R_3 com um valor menor que R_2 , foi possível observar e comprovar a estabilidade do sistema, conforme observado na Figura 4.3, na qual apresenta-se o lugar das raízes para a configuração em que R_3 menor que R_2 . O sistema possui um polo do lado esquerdo do eixo $j\omega$, que caracteriza a estabilidade e um zero do lado direito do eixo imaginário, caracterizando um

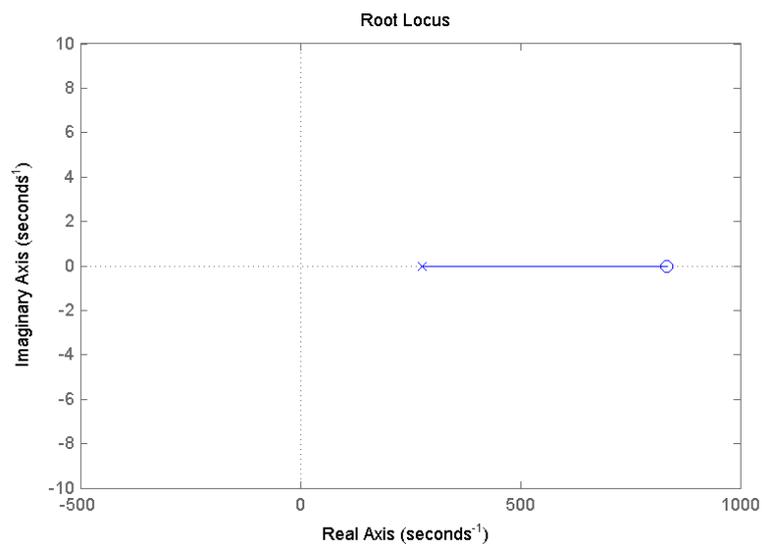
sistema de fase não mínima. Igualando o valor de R_3 a R_2 , o sistema se apresenta como de fase não mínima e marginalmente estável, pois o polo se localiza em cima do eixo imaginário e o zero permanece do lado direito do eixo $j\omega$. A partir da igualdade, qualquer valor que R_3 assuma maior que R_2 , o sistema permanece com a fase não mínima e torna-se instável pela existência de um polo localizado à direita do eixo $j\omega$, como disposto na Figura 4.4.²

Figura 4.3: Lugar geométrico das raízes quando $R_3 < R_2$.



Fonte: Próprio autor, 2016.

Figura 4.4: Lugar geométrico das raízes $R_3 > R_2$.



Fonte: Próprio autor, 2016.

²Simulações realizadas no software *MATLAB*

4.1.2 Modelo Politópico da planta

Até o momento foi realizado a modelagem por espaço de estados geral do sistema, ou seja, sem substituir os valores das variáveis. O próximo passo é encontrar o modelo que descreve realmente o comportamento da planta.

O sistema possui três estágios incertos representados pelos potenciômetros R_2 , R_3 e R_9 (Figuras 4.1 e 4.2). Assim neste trabalho o modelo de incertezas supõe que os valores dos parâmetros físicos pertencem a um intervalo conhecido, isto é, estão limitados superior e inferiormente.

Para encontrar as matrizes que representam o polítopo de incerteza do sistema, consideramos que R_2 e R_3 variam de 0 a $20K \Omega$ e R_9 de 0 a $10K \Omega$. Deste modo, o modelo politópico será formado por 8 matrizes. De acordo com a teoria descrita no Capítulo 3, foi realizado no MATLAB uma rotina para obter as matrizes que compõe o modelo real da planta, para isso ela utiliza a combinação dos limites de cada incerteza. As matrizes geradas pelo código implementado, que representam a dinâmica da planta, estão dispostas abaixo. Elas serão utilizadas para gerar os controladores nos métodos descritos nas próximas sessões.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 833,33 & -833,33 & 0 \\ 0 & 834,02 & -833,33 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 833,25 & 0 & 0 \\ 0,083 & -833,33 & 0 \\ 0 & 834,02 & -833,33 \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 833,25 & 0 & 0 \\ 0,083 & -833,33 & 0 \\ 0 & 7777 & -833,33 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 833,33 & -833,33 & 0 \\ 0 & 7777 & -833,33 \end{bmatrix}, \\
 A_5 &= \begin{bmatrix} -833,25 & 0 & 0 \\ 1666 & -833,33 & 0 \\ 0 & 834,02 & -833,33 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 833,33 & -83,333 & 0 \\ 0 & 834,02 & -833,33 \end{bmatrix}, \\
 A_7 &= \begin{bmatrix} -833,25 & 0 & 0 \\ 1666 & -833,33 & 0 \\ 0 & 7777 & -833,33 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 833,33 & -833,33 & 0 \\ 0 & 7777 & -833,33 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \begin{bmatrix} -416,66 \\ 416,66 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -833,29 \\ 833,29 \\ 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} -833,29 \\ 833,29 \\ 0 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} -416,66 \\ 416,66 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 B_5 &= \begin{bmatrix} -0,0417 \\ 0,0417 \\ 0 \end{bmatrix}, B_6 = \begin{bmatrix} -416,66 \\ 416,66 \\ 0 \end{bmatrix}, B_7 = \begin{bmatrix} -0,0417 \\ 0,0417 \\ 0 \end{bmatrix}, B_8 = \begin{bmatrix} -416,66 \\ 416,66 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

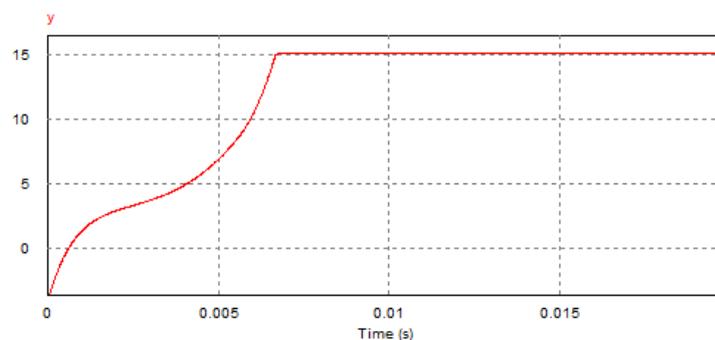
4.1.3 Comportamento

Simulação

Como citado, a planta pode transitar da estabilidade para a instabilidade por meio de modificações dos valores dos potenciômetros R_2 e R_3 . Esse comportamento pode ser melhor observado monitorando a saída do sistema. Para isso, foi realizado a implementação do circuito no *software* PSIM.

O primeiro teste realizado foi para a configuração em que $R_2 = 5K\Omega$, $R_3 = 15K\Omega$ e $R_9 = 1,2K\Omega$. Deste modo como explicitado na sessão anterior pela análise de polos e zeros o sistema deve se mostrar instável, para qualquer entrada limitada deve gerar uma saída ilimitada, a qual será limitada pelo valor de saturação dos amplificares operacionais, ou seja, $15V$. Para o teste sem entrada foi adicionado cargas iniciais em todos os capacitares da forma que $x(0)=[2, 1, -2]^T$, lembrando que o sistema está em malha aberta, obteve-se a saída disposta na Figura 4.5.

Figura 4.5: Teste sem entrada aplicada para a configuração instável.

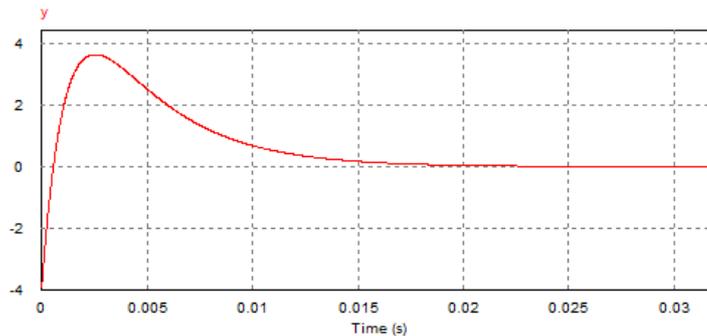


Fonte: Próprio autor, 2016.

Para a configuração estável foi escolhido, $R_2 = 18K\Omega$, $R_3 = 12K\Omega$ e $R_9 = 1,2K\Omega$, a saída

encontrada está disposta na Figura 4.6, por ela observa-se que quando a carga dos capacitores esgotam o sistema apresenta saída nula, como deveria ser, pois não existe entrada. O que não ocorre quando o sistema está na configuração instável, na qual a saída se mantém saturada mesmo sem entrada para a mesma condição inicial (Figura 4.5)

Figura 4.6: Teste sem entrada aplicada para a configuração estável.



Fonte: Próprio autor, 2016.

4.2 CONTROLADORES ROBUSTOS

Para o desenvolvimento desta sessão foram utilizados o *software* MATLAB e os pacotes computacionais *SeDuMi* e *Yalmip* para implementar as rotinas de acordo com as teorias do Capítulo 3 de projeto de controladores. Feito isso, foi utilizado o *software* PSIM para simular os controladores encontrados.

4.2.1 Controlador estabilizante

Desenvolvimento

Realizada a construção do módulo incerto, o primeiro controlador realizado é justamente para manter o sistema sempre estável, sejam quais forem os valores que R_2 e R_3 assumam.

Para se obter o controlador estabilizante para o modelo da planta, utiliza-se a teoria explicitada no Capítulo 3 para sistemas com incerteza potitópica. Feito isso o seguinte vetor de ganhos foi obtido:

$$K = \begin{bmatrix} 11,80 & 5,52 & -0,39 \end{bmatrix}.$$

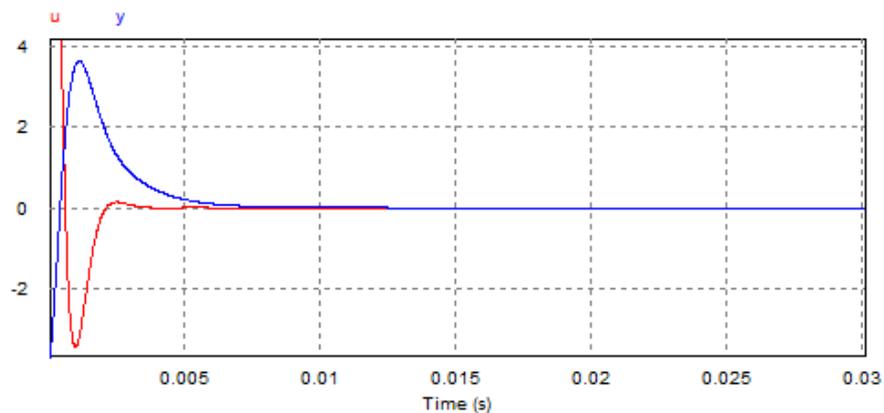
De acordo com o controlador K encontrado, foi estruturado o esquema planta controlador, o qual está disposto no Anexo III. O controlador é composto por dois estágios, um para inverter o sinal de entrada, caso o ganho seja negativo, ou garantir o isolamento do circuito, caso o ganho seja positivo. E o segundo para de fato realizar os ganhos. De modo geral o controlador recebe as tensões dos estados (V_{c1} , V_{c2} e V_{c3}), realiza os respectivos ganhos e efetua a soma desses sinais resultando no sinal de controle que será enviado para a entrada do módulo dinâmico.

Comportamento - Simulado

Para conferir a efetividade do controlador foi simulado no *software* PSIM, o circuito está disposto no Anexo III. Como o teste estabilizante será realizado sem entrada e o sistema precisa de um valor inicial para que a saída cresça ate saturar, para isso, foi adicionado como na simulação anterior valores de carga nos três capacitores da planta ($x(0)=[2,1, -1]^T$).

Realizada a simulação para uma configuração em que $R_2 = 10K\Omega$, $R_3 = 20K\Omega$ e $R_9 = 1,2K\Omega$, foi obtido o sinal de saída disposto na Figura 4.7, por ela pode-se notar uma oscilação até aproximadamente 0,03 segundos e, em seguida, a saída vai pra zero, não se apresentando saturada como no teste sem o controlador. Infere-se que o sistema se mostra estável mesmo quando R_3 é maior que R_2 , confirmando a eficácia do controlador.

Figura 4.7: Saída (azul) e sinal de controle (vermelho) da simulação do módulo com controlador estabilizante, em que, $R_2 = 10K\Omega$, $R_3 = 20K\Omega$ e $R_9 = 1,2K\Omega$.



Fonte: Próprio autor, 2016.

4.2.2 Controlador H_∞ - Rejeitar perturbação

Desenvolvimento

Utilizando a respectiva rotina implementada no MATLAB, de acordo com a LMI (3.11), e as matrizes levantadas para o modelo potitópico, obteve-se o vetor de ganhos:

$$K = \begin{bmatrix} 237,4K & 17,6M & 1,6M \end{bmatrix}.$$

Seguindo os mesmos procedimentos empregados no controlador anterior, foi implementada a estrutura do controlador, cuja composição está disposta no Anexo III.

Para verificar o comportamento do conjunto planta mais controlador quando existe perturbação no sistema, foi inserido um circuito somador entre o passa-tudo e o filtro passa baixa, assim à saída do primeiro módulo é somado um sinal que representa uma perturbação e enviada para a entrada do segundo módulo (filtro passa baixa).

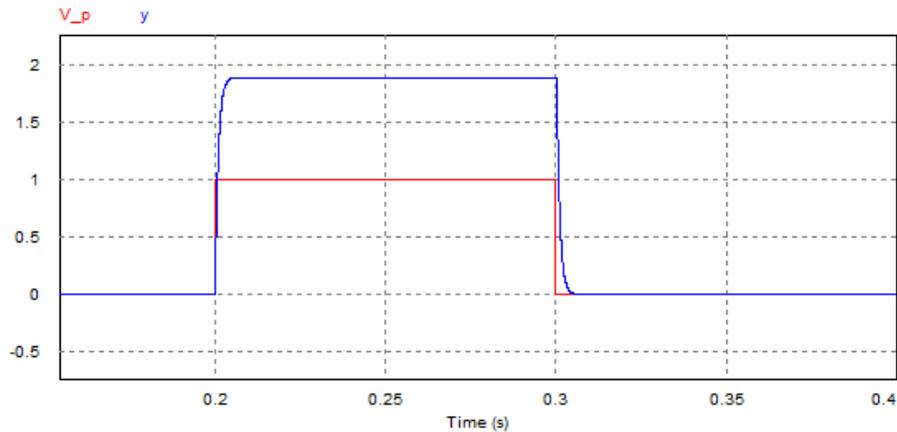
Como o controlador é robusto, ele não necessariamente é o melhor controlador em todos os pontos em termos de rejeição de perturbação. O controlador encontrado garante que todas as saídas para as diferentes possibilidades respeitem o ganho encontrado. Ou seja, sempre apresentaram amplitude menor que o custo garantido pelo controlador.

O melhor controlador encontrado, apresentou o custo garantido de 8,3. Desse modo, a perturbação inserida no sistema apresentará um ganho de no máximo 8,3. Esse fato pode ser melhor observado e discutido observando as saídas encontradas na simulação.

Comportamento - Simulado

Para a configuração, em que $R_2 = 1K$, $R_3 = 20K$, $R_9 = 1,2K$ e uma perturbação em forma de pulso com amplitude de $1V$ e duração de $0,1$ segundo. O sistema em malha fechada apresentou a resposta disposta na Figura 4.8. Por ela nota-se que o sinal de saída (curva em azul) tem uma amplitude de $1,8V$. Respeitando assim o custo garantido encontrado e não deixando o sistema saturar em nenhum dos momentos, antes durante e depois da perturbação, o que ocorreria caso não existisse o controlador.

Figura 4.8: Saída da simulação do módulo com o controlador para rejeitar a perturbação (azul), em que $R_2 = 1K$, $R_3 = 20K$, $R_9 = 1,2K$.



Fonte: Próprio autor, 2016.

4.2.3 Controlador H_∞ Aumentado - Seguir referência

Desenvolvimento

Como descrito no Capítulo 3, o controlador para seguir referência recebe os três estados da planta, um estado do modelo de referência e o próprio sinal a ser seguido. Implementada a rotina no MATLAB utilizando a LMI (3.15) e as matrizes levantadas pelo modelo politópico, encontrou-se o seguinte vetor de ganhos:

$$G = \begin{bmatrix} 20M & 15M & 2,6M & -5,6M & -1,6 \end{bmatrix},$$

que serão dados nos estados da planta, no estado no modelo de referência e no sinal de referência, respectivamente, de acordo com o vetor acima.

O custo garantido encontrado deste controlador foi de 0,8. Ou seja, o controlador garante que a saída da planta apresentará para o pior caso um erro de até 0,8 para um sinal de entrada unitário.

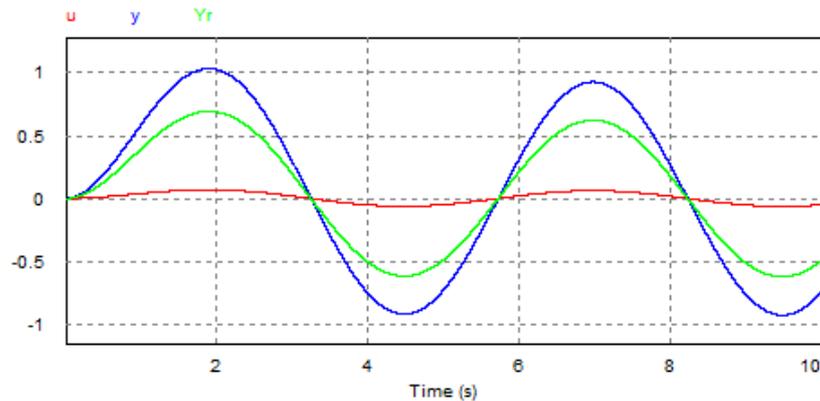
Foram denominados de K_2 e N , o ganho dado no estado do modelo de referência e o do próprio sinal de referência, respectivamente. A configuração pode ser observado no Anexo III, a qual apresenta a configuração do controlador em conjunto com a planta.

Comportamento - Simulado

Como referência foi utilizado um sinal senoidal de 1V de amplitude e frequência de 0,2Hz na entrada do modelo de referência. Notasse que o sinal de referência (curva em verde) da Figura 4.10 se apresenta atenuado, fato explicado pelo circuito utilizado para gerar o mesmo (filtro passa baixa).

Pode-se observar que o sinal de saída da planta (curva azul) segue o sinal de referência (curva verde) com mesma fase, mas com módulo maior, o que pode ser notado pela curva vermelha que representa o erro entre a referência e saída real (Figura 4.9).

Figura 4.9: Saída da planta (azul) com o controlador para seguir uma referência senoidal de 1V de amplitude e frequência de 0.2Hz (verde).



Fonte: Próprio autor, 2016.

4.2.4 Controlador H_∞ Aumentado com Integral do erro - Seguir referência

Desenvolvimento

Para minimizar o erro entre o sinal desejado e a saída da planta, foi implementado o controlador H_∞ aumentado, com ação integral. De acordo com a metodologia apresentada no Capítulo 3, pela rotina implementada, foi encontrado o controlador representado pelos ganhos:

$$G = \begin{bmatrix} 436,1K & 258,4K & 46,9K & -362,7K & 19,6M & -1,2 \end{bmatrix}.$$

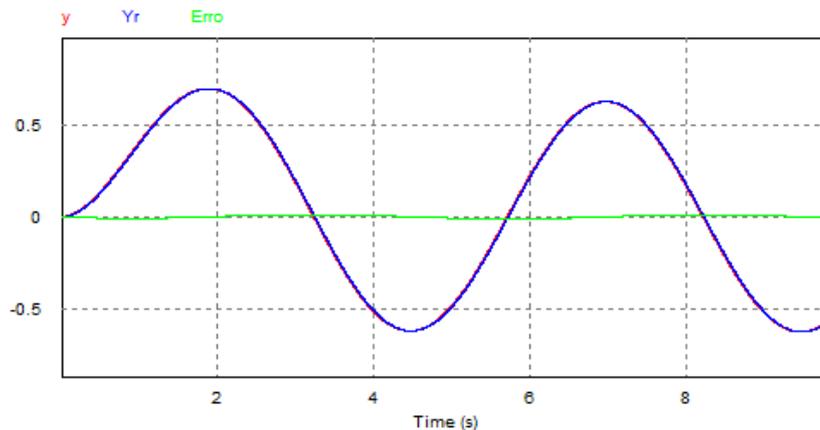
O vetor de ganhos é composto respectivamente, pelos três ganhos dos estados da planta, o ganho do estado do circuito de referência ($K2$), o ganho da integral do erro entre o sinal de saída do modelo de referência e a saída da planta ($K3$) e o ganho do sinal de referência (N).

No Anexo III pode-se compreender melhor como é a estrutura do controlador e como o sinal de controle é obtido. Ou seja, que o sinal de controle é formado pela soma dos ganhos dados nos sinais dos estados da planta, no estado do modelo de referência, do sinal de referência e da integral do erro.

Comportamento - Simulado

Para a simulação foi utilizado como referência um sinal senoidal de 1V de amplitude e frequência de 0.2Hz da mesma forma como no controlador sem a integral mostrado anteriormente a fim de comparação. Deste modo, observa-se pela Figura 4.10 a saída obtida (em vermelho) e a referência (em azul) praticamente uma por cima da outra, fato melhor observado quando olha-se para a curva do erro (em verde), a qual permanece praticamente em zero.

Figura 4.10: Saída da planta (vermelho) com o controlador para seguir uma referência senoidal de 1V de amplitude e frequência de 0.2Hz (azul).



Fonte: Próprio autor, 2016.

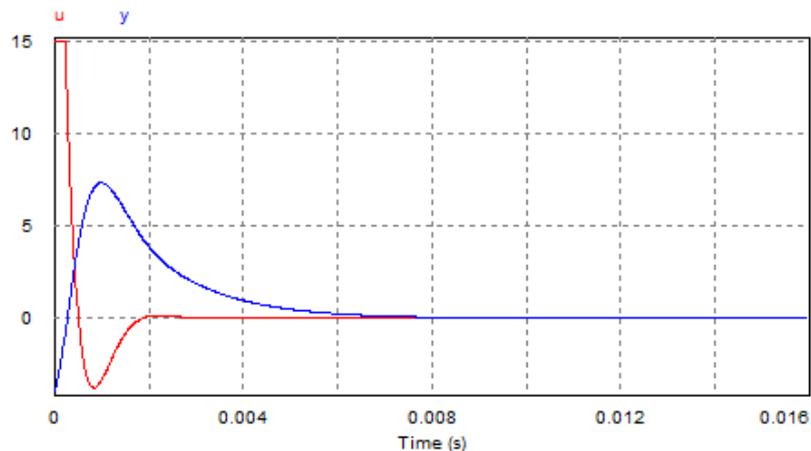
5 ANÁLISES DE DESEMPENHO DOS CONTROLADORES PROJETADOS

5.1 TEMPO DE ACOMODAÇÃO

A fim de observar o tempo que o sistema leva para de fato estabilizar e a amplitude das oscilações iniciais, foi implementado a mesma configuração de resistências e cargas iniciais nos capacitores. A comparação é realizada entre o sistema com controlador estabilizante e com o H_∞ para rejeitar perturbação.

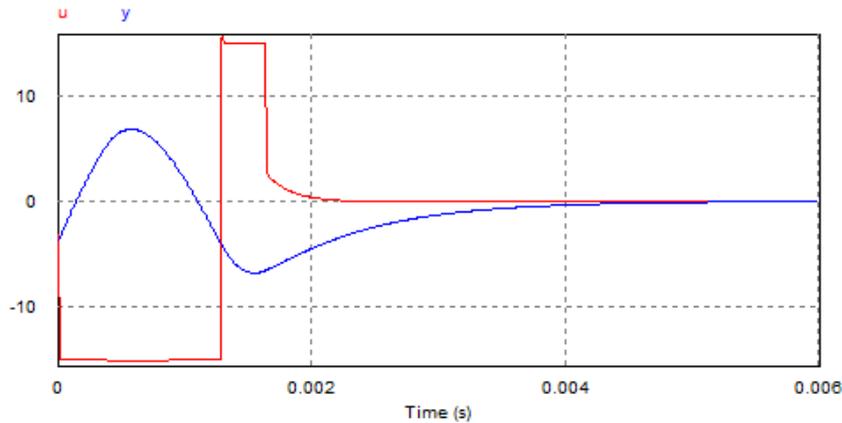
Para a configuração em que $R_2 = 5K\Omega$, $R_3 = 20K\Omega$, $R_9 = 3K\Omega$ e $x(0) = [2, 1, -2]^T$, foi possível obter as respostas dispostas nas Figuras 5.1 e 5.2. Para esse ponto o controlador para rejeitar perturbação apresentou menor amplitude de oscilação e menor tempo de acomodação, no entanto apresenta mais oscilações do que o controlador estabilizante. Mas como somente um ponto não é suficiente para se definir uma tendência, então foram levantados mais pontos, os quais estão dispostos na Tabela 5.1. Pela tabela, infere-se que o controlador H_∞ apresentou um tempo de acomodação para estabilizar menor para todos os pontos analisados e, quanto menos instável o circuito se torna, maior é a amplitude da oscilação.

Figura 5.1: Resposta do sistema com o controlador estabilizante(azul), quando $R_2 = 5K\Omega$, $R_3 = 20K\Omega$, $R_9 = 3K\Omega$ e $x(0) = [2, 1, -2]^T$.



Fonte: Próprio autor, 2016.

Figura 5.2: Resposta do sistema com controlador H_∞ para rejeitar perturbação (azul), quando $R_2 = 5K\Omega$, $R_3 = 20K\Omega$, $R_9 = 3K\Omega$ e $x(0) = [2, 1, -2]^T$.



Fonte: Próprio autor, 2016.

Tabela 5.1: Tempo de acomodação e pico para condição a inicial $x(0) = [2, 1, -2]^T$.

Parâmetros			Controlador Estabilizante		Controlador H_∞	
R_2 [k Ω]	R_3 [k Ω]	R_9 [k Ω]	Pico [V]	Tempo [s]	Pico [V]	Tempo [s]
1	20	3	7,23	0,01	5,69	0,005
5	20	3	7,36	0,01	6,82	0,004
10	20	3	7,46	0,009	8,85	0,004
20	20	3	7,61	0,009	8,93	0,005
20	10	3	7,59	0,009	9,10	0,005
20	1	3	7,73	0,01	7,51	0,006

Esta comparação mostrou que, no geral, o controlador para rejeitar perturbação apresenta melhores resultados, como esperado, pois o mesmo foi projetado para esse fim. No entanto isso não elimina a possibilidade de existir um ponto que o controlador estabilizante apresente um comportamento mais eficaz.

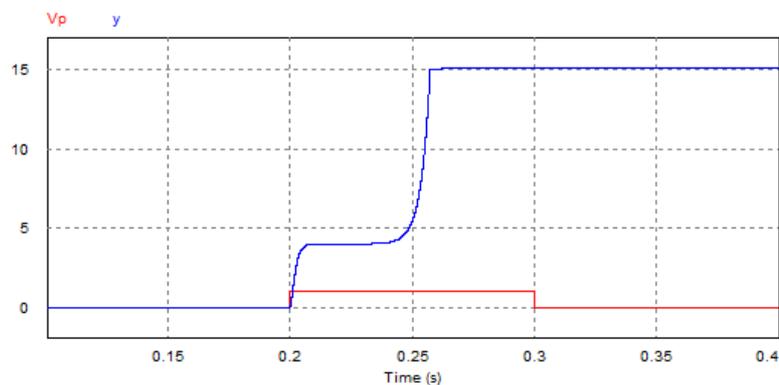
5.2 COMPORTAMENTO DO SISTEMA SUJEITO A PERTURBAÇÕES

De fato, ambos controladores (estabilizante e H_∞ para rejeitar perturbação) estabilizam o sistema para qualquer configuração que R_2 , R_3 e R_9 , assumam. Mas outro ponto importante para

análise é o comportamento da saída na existência de perturbações. Para isso, foram definidos valores para as três incertezas e uma perturbação para analisar e comparar os resultados.

Para a configuração instável em que $R_2 = 10K\Omega$, $R_3 = 20K\Omega$, $R_9 = 1,2K\Omega$ e uma perturbação com amplitude de $1V$ que dura $0,1$ segundo, pode-se observar pelas Figuras 5.3, 5.5 e 5.4 os diferentes comportamentos do sistema. As curvas em azul são as respectivas saídas da planta e a curva em vermelho a perturbação inserida. A saída encontrada para o sistema sem controlador satura com a presença da perturbação e, após o fim da perturbação, a saída se mantém saturada. Por outro lado, o controlador estabilizante apresenta uma saída de $2,68V$ durante o período em que a perturbação é aplicada, mas retorna ao ponto de equilíbrio com o fim da aplicação da perturbação. Note ainda que o controlador para rejeitar perturbação apresentou o melhor desempenho para esse teste, uma vez que a saída estabilizou em $1,89V$ durante a perturbação e, como era de se esperar, retornou ao ponto de equilíbrio com o fim da aplicação da perturbação.

Figura 5.3: Saída da simulação (azul) do módulo com perturbação adicionada ao sistema - Configuração instável, em que $R_2 = 10K\Omega$, $R_3 = 20K\Omega$, $R_9 = 1,2K\Omega$ e perturbação de $1V$ de amplitude.

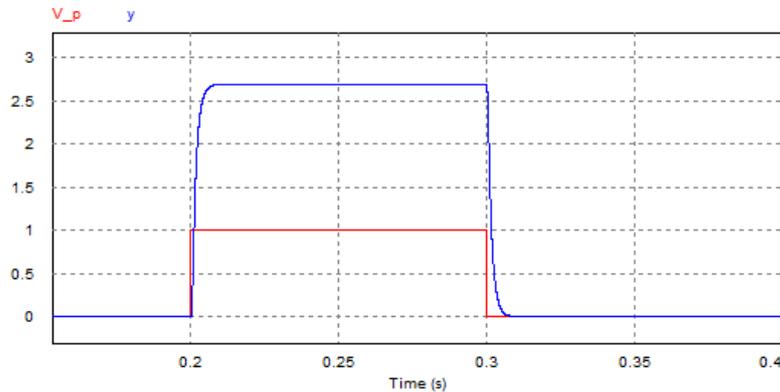


Fonte: Próprio autor, 2016.

Escolhendo uma configuração em que o sistema seja estável, $R_2 = 20K\Omega$, $R_3 = 10K\Omega$ e $R_9 = 10K\Omega$ e uma perturbação de $1V$ e duração de $0,1$ segundos, foram obtidas as saídas dispostas nas Figuras 5.6, 5.7 e 5.8. Nota-se que os sistemas sem controlador e com o controlador estabilizante saturam a saída durante o período da perturbação. Por outro lado, o controlador para rejeitar perturbação, como esperado, obedeceu o critério de custo garantido, apresentando uma saída de $7,29V$, não deixando o sistema saturar.

Como os controladores apresentam comportamentos diferentes dependendo do ponto ana-

Figura 5.4: Saída da simulação (azul) do módulo com o controlador estabilizante e perturbação adicionada ao sistema - Configuração instável, em que $R_2 = 10K\Omega$, $R_3 = 20K\Omega$, $R_9 = 1,2K\Omega$ e perturbação de $1V$ de amplitude.



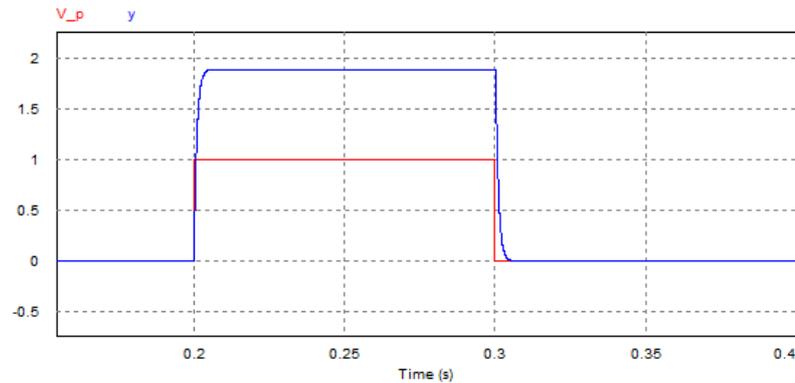
Fonte: Próprio autor, 2016.

lisado, foi criada a Tabela 5.2, a fim de observar e compreender melhor o comportamentos dos mesmos. Deste modo, para os pontos analisados, notou-se que, no geral, os sistemas com a presença dos controladores apresentaram melhores resultados tanto para a configuração estável quanto para a instável. Além disso, restringindo a comparação entre os dois controladores sintetizados, o que foi projetado para rejeitar perturbação apresentou os melhores resultados.

Lembrando que R_9 modifica o ganho do sistema, é importante destacar que para valores grandes de R_9 , a saída do controlador estabilizante se apresentou saturada, como visto na Figura 5.7 e pelos pontos dispostos na Tabela 5.2. Isso não quer dizer necessariamente que o controlador não estabilizou a planta, mas que o ganho dado pelo sistema gera uma saída maior que a capacidade do circuito ($15V$).

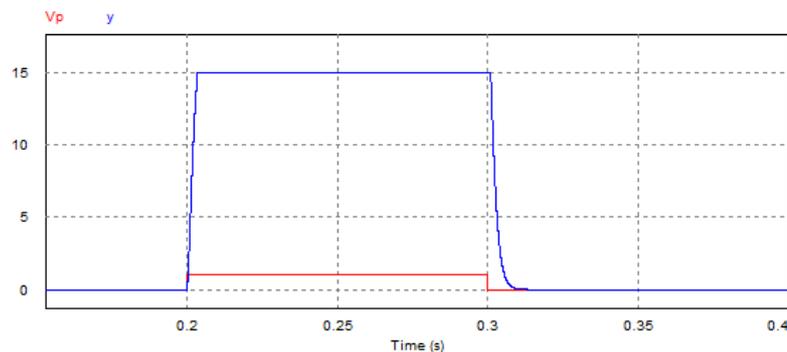
Desta maneira, como o controlador estabilizante não possui critério de custo garantido, para grandes valores de R_9 , ou perturbações com alta amplitude, a saída da planta se apresentará saturada. Por outro lado o controlador H_∞ para rejeitar a perturbação, obedeceu o critério de custo garantido, não deixando a saída saturar em nenhum dos pontos analisados.

Figura 5.5: Saída da simulação (azul) do módulo com controlador H_∞ e perturbação adicionada ao sistema - Configuração instável, em que $R_2 = 10K\Omega$, $R_3 = 20K\Omega$, $R_9 = 1,2K\Omega$ e perturbação de $1V$ de amplitude.



Fonte: Próprio autor, 2016.

Figura 5.6: Saída da simulação do módulo com perturbação adicionada ao sistema - Configuração estável, em que $R_2 = 20K\Omega$, $R_3 = 10K\Omega$ e $R_9 = 10K\Omega$ e uma perturbação de $1V$.



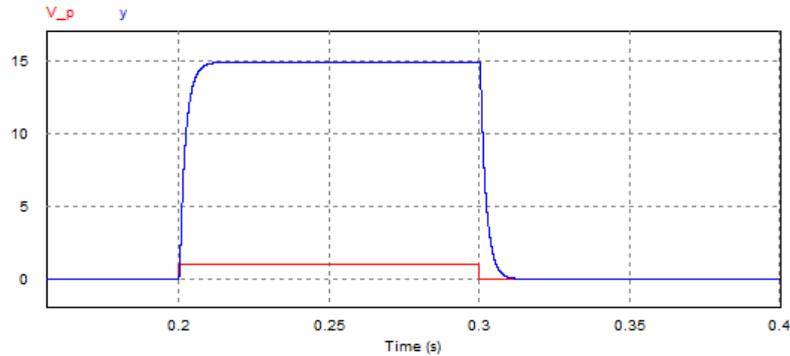
Fonte: Próprio autor, 2016.

5.3 ERRO EM REGIME PERMANENTE DA PLANTA COM O CONTROLADOR PARA SEGUIR REFERÊNCIA

Como observado no Capítulo 4, os controladores para seguir referência apresentaram erro em regime permanente. Para mensurar esse erro, foi realizado o teste com um sinal degrau como referência para ambos os controladores (com e sem ação integral).

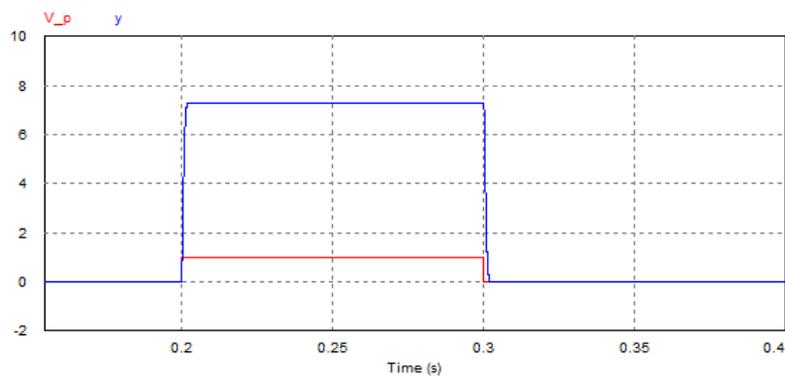
Pela Figura 5.9, observa-se que o sinal de referência foi um degrau de amplitude 1. Assim se torna intuitivo mensurar o erro que foi de $0,5V$. Já o controlador para seguir referência com o ação integral, apresentou um ótimo resultado. Como esperado o erro em regime permanente foi praticamente nulo, sendo por volta de $0,0001$, como observado na Figura 5.10, na qual as

Figura 5.7: Saída da simulação do módulo com o controlador estabilizante e perturbação adicionada ao sistema - Configuração estável, em que $R_2 = 20K\Omega$, $R_3 = 10K\Omega$ e $R_9 = 10K\Omega$ e uma perturbação de $1V$.



Fonte: Próprio autor, 2016.

Figura 5.8: Saída da simulação do módulo com o controlador H_∞ para rejeitar a perturbação adicionada ao sistema - Configuração estável, em que $R_2 = 20K\Omega$, $R_3 = 10K\Omega$ e $R_9 = 10K\Omega$ e uma perturbação de $1V$.



Fonte: Próprio autor, 2016.

curvas praticamente se sobrepõem.

5.4 TESTES DE BANCADA

Feito o projeto, análise e construções, foram feitos alguns testes de laboratório, os quais estão dispostos nesta seção. Para todos os testes o circuito da planta foi alimentada com uma fonte simétrica de $+15$ e $-15V$, e as saídas e sinais de interesse foram coletadas por um osciloscópio. Alguns testes possuem particularidades, as quais serão dispostas nos seus respectivos tópicos.

Tabela 5.2: Respostas dos sistemas sujeitos a perturbação

Parâmetros				Tensão de saída		
R_2 [k Ω]	R_3 [k Ω]	R_9 [k Ω]	Amp. da perturbação [V]	Sem Controlador [V]	Controlador Estabilizante [V]	Controlador H_∞ [V]
1	20	1,2	1	15	2,66	1,89
5	20	1,2	1	15	2,68	1,89
10	20	1,2	1	15	2,69	1,89
20	20	1,2	1	15	2,72	1,89
20	10	1,2	1	4	2,78	1,89
20	5	1,2	1	4	2,87	1,89
20	1	1,2	1	4	3,21	1,89
20	10	10	1	15	15	7,29
10	10	10	1	15	15	7,29
10	20	10	1	15	15	7,29

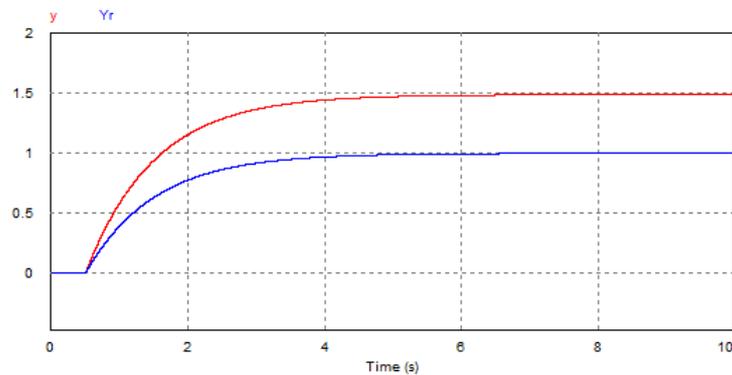
Resultados dos módulos

Os primeiros testes foram realizados para verificar o funcionamento e certificar que a placa projetada realmente se comporta como esperado. Na Figura 5.11 pode-se observar o sistema montado, pronto para a realização do teste.

O primeiro teste foi realizado para observar o comportamento quando não se aplica sinal de entrada. Na Figura 5.12 está disposto o comportamento observado. Em aproximadamente 1,0 segundo o sistema apresenta saída não nula que cresce até chegar ao valor $-15V$, que é o valor de saturação do sistema. Essa mudança de comportamento se deu justamente pela alteração dos valores do potenciômetro, ficando claro que a saída após o tempo de 1,0 segundo se torna "ilimitada", caracterizando assim o sistema como instável.

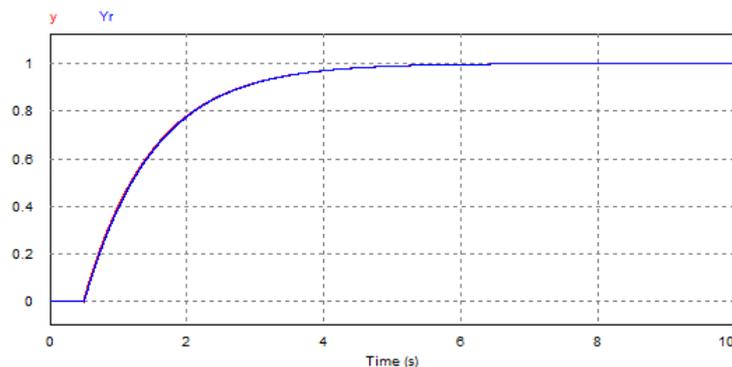
É válido destacar que se o sistema fosse ideal, não existiriam ruídos, portanto, para o caso sem entrada, o sistema deveria apresentar a mesma resposta (nula) anterior a mudança de R_3 , pois o sistema estaria em equilíbrio. Mas, como o módulo é real, os sinais existentes na planta, assim como os dados coletados, estão sujeitos a variadas interferências. Entre elas, destacam-

Figura 5.9: Sinal de referência (azul) e saída do sistema com o controlador para seguir referência (vermelho).



Fonte: Próprio autor, 2016.

Figura 5.10: Sinal de referência (azul) e saída do sistema com o controlador para seguir referência com integral do erro (vermelho).



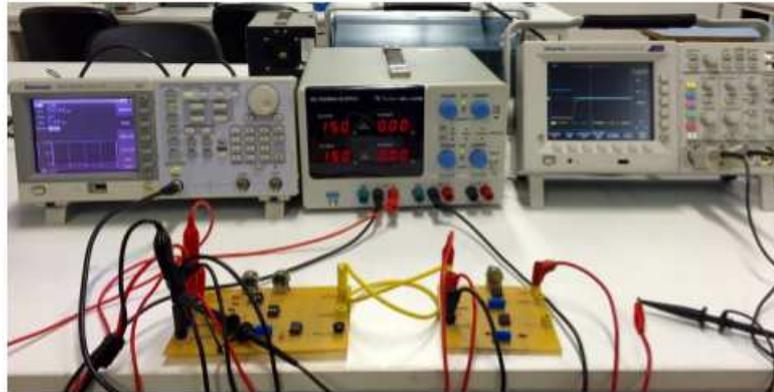
Fonte: Próprio autor, 2016.

se, a frequência da rede elétrica ($60Hz$), as perdas térmicas, precisões dos componentes do circuito, assim como as dos instrumentos de medição, entre outros.

Desse modo, a resposta do circuito se altera devido à presença desses fatores, que são agravados devido a realimentação, pois ela transporta esse ruído para entrada e essas pequenas variações, são interpretadas como pequenos sinais de entrada. Como o sistema está instável, devido aos ajustes realizados, a mínima variação nos terminais de entrada faz com que o sistema decresça até o valor da saída saturar. Assim observando que uma entrada limitada gerou uma saída "ilimitada".

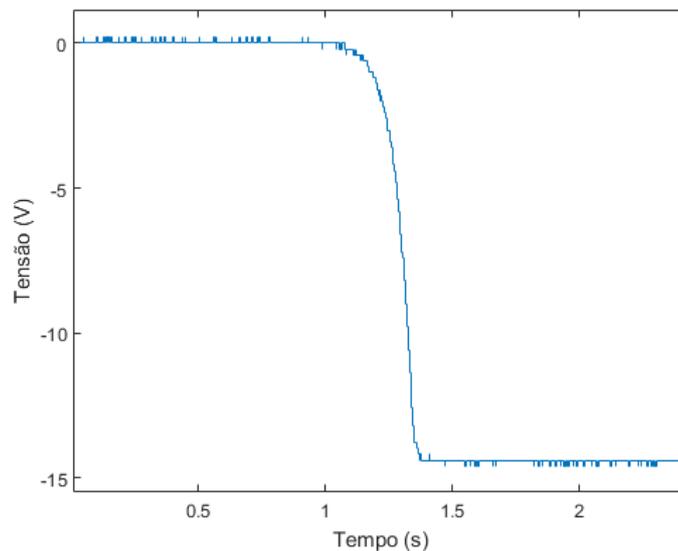
Também foi realizado um teste com uma entrada, para executá-lo foi utilizado o gerador de funções para obter uma onda quadrada de $5V$ pico a pico. O sinal gerado e a saída estão dispostos na Figura 5.13, por ela observa-se o sistema sempre estável, na qual a saída é invertida

Figura 5.11: Módulos ligados em série.



Fonte: Próprio autor, 2016.

Figura 5.12: Saída obtida para teste de bancada sem entrada aplicada.



Fonte: Próprio autor, 2016.

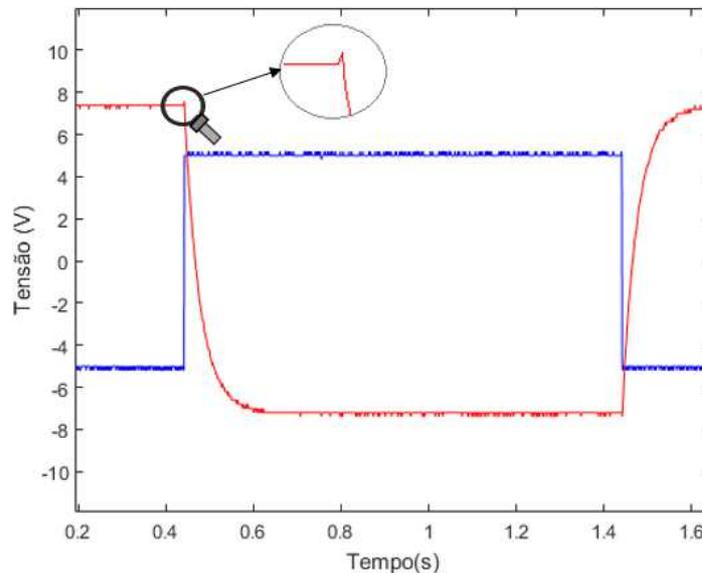
e com ganho de $1,5V$. Em destaque, está apresentada a identificação da fase não mínima do circuito, como prevista no projeto do circuito da placa.

5.4.1 Controlador Estabilizante

O segundo teste realizado foi para verificar o comportamento da planta com ação do controlador estabilizante, assim como no primeiro teste, este também é sem entrada aplicada, justamente para se comparar com resultado anterior. O circuito do controlador e todo o sistema montado está disposto na Figura 5.14.

Como explicado no primeiro teste, o sistema não é ideal e qualquer ruído por mais que

Figura 5.13: Teste com entrada aplicada, em destaque, apresenta-se o subsinal na saída (curva em vermelho), característica de sistemas de fase não mínima.



Fonte: Próprio autor, 2016.

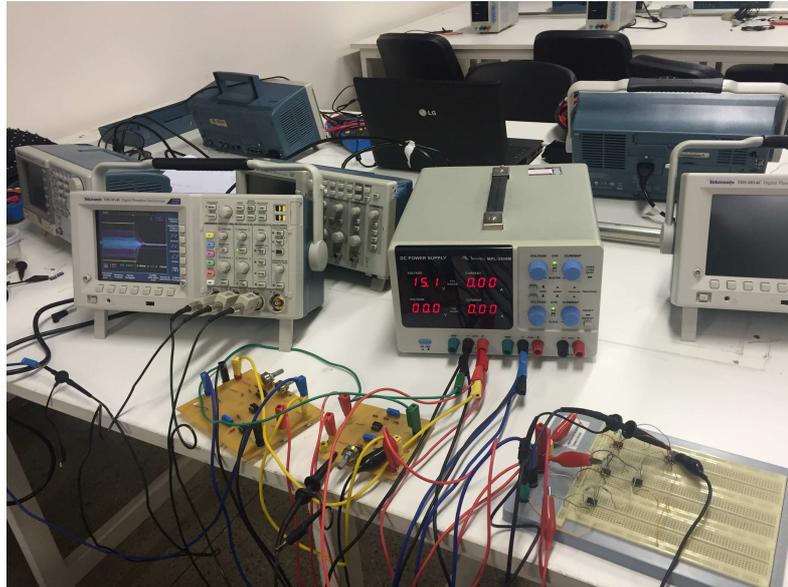
pequeno leva o sistema a saturação quando R_3 maior que R_2 , deste modo, para essa configuração, o sistema satura logo que a alimentação é ligada. Na Figura 5.15 pode se notar o sistema saturado em 15V até que o controlador é adicionado ao sistema. Quando isso ocorre, ambas as saídas (Azul - saída do primeiro estágio, Roxo - Saída do módulo completo) vão para zero, como esperado, pois o teste é sem entrada.

5.4.2 Controlador para seguir referência com integral do erro

Para o teste de bancada do controlador para seguir referência, foi utilizado somente o primeiro módulo. Com a rotina implementada e a modelagem da primeira parte do circuito, foi projetado o circuito e realizado sua montagem possibilitando os testes, como disposto na Figura 5.16.

O modelo de referência utilizado foi de primeira ordem e o sinal utilizado como referência foi uma onda quadrada. Pela Figura 5.17, é possível visualizar os sinais coletados pelo osciloscópio, a referência é a curva em vermelho e a saída da planta é a curva em azul. Durante o teste foi realizado a variação dos parâmetros incertos (potenciômetros R_2 e R_9), o controlador apresentou bons resultados para a maioria dos valores, no entanto o controlador não conseguiu controlar a planta para alguns pontos como disposto na Figura 5.18.

Figura 5.14: Teste de bancada - Planta e controlador estabilizante.



Fonte: Próprio autor, 2016.

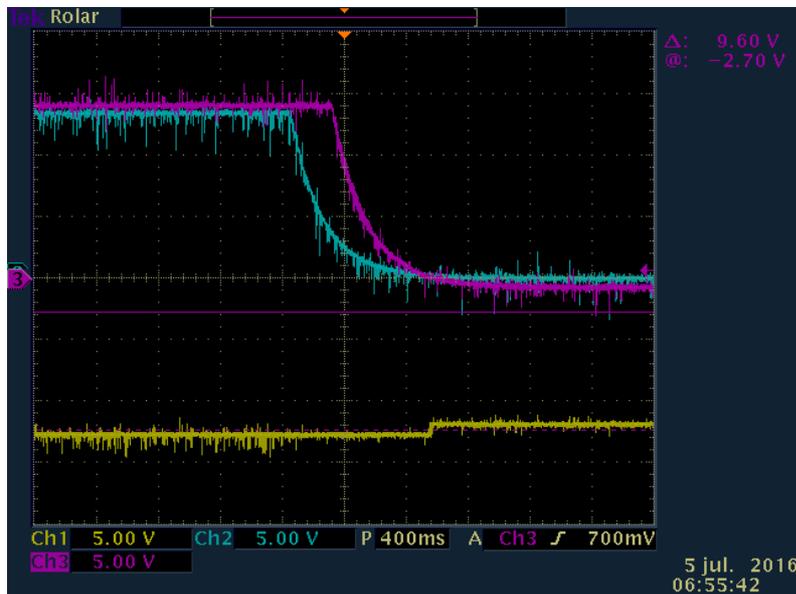
Notou-se que quanto mais instável o sistema se tornava mais o controlador apresentava dificuldade em controlar, fazendo da saída da planta um sinal "aleatório". Esse comportamento pode ser explicado por alguns motivos, um deles é que o controlador montado não é exatamente igual ao projetado, devido a dificuldade de encontrar um valor de resistência exatamente igual ao projetado, e mesmo se o valor fosse de fato o mesmo, ainda existe a tolerância dos componentes que varia de 10% a 25%. Mas o mais provável seja que, para a saída seguir a referência nesses pontos, seria necessário utilizar ganhos muito grandes para a composição do sinal de controle, fazendo com que partes do controlador saturem, assim gerando um sinal de controle ineficiente e, conseqüentemente gerando esse sinal alternado e aleatório disposto na Figura 5.18.

5.4.3 Controlador para seguir referência

Utilizando a mesma montagem disposta na Figura 5.16 e modificando somente o controlador, foram realizados os testes para o controlador para seguir referência sem a ação integral. Pelo projeto desenvolvido, somente para o primeiro módulo, o controlador apresentou um custo garantido de 0,4, ou seja, no pior caso ele apresentaria uma saída com erro em relação ao sinal de referência de 0,4 em módulo.

A resposta obtida para o sinal de referência degrau, ou pulso, e uma configuração em que R_2 era bem maior que R_3 pode ser observada na Figura 5.19. Nota-se uma boa resposta, a

Figura 5.15: Saída dos módulos em série com o controlador estabilizante em lilás, saída somente do módulo 1 em azul e sinal de controle em amarelo - Teste de bancada.



Fonte: Próprio autor, 2016.

qual segue bem o sinal de referência, mas apresenta um erro maior na parte inferior da curva. Assim como no teste anterior, variou-se os valores de R_2 e R_3 para observar a efetividade do controlador.

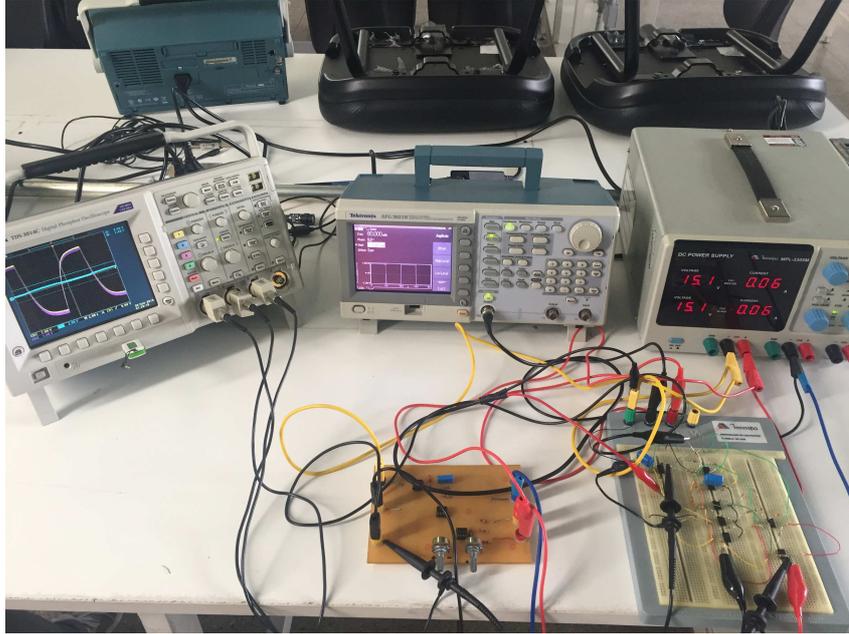
Notou-se que à medida que R_2 se tornava menor, ou seja, o circuito tendia a instabilidade, a resposta da planta piorava e o módulo do sinal de controle aumentava, justamente para tentar manter o erro da saída da planta pequeno, esse comportamento pode ser observado na Figura 5.20.

É importante destacar que mesmo a saída da planta apresentando o mesmo formato da referência, o erro apresentado é maior do que o custo garantido, ou seja, a saída não obedece as especificações do projeto. Como discutido no teste anterior do controlador com a ação integradora, isso pode ser explicado pela tolerância dos componentes, ou pelo fato de existir um estágio da formação do sinal de controle saturado devido a necessidade de um ganho maior do que a capacidade dos componentes eletrônicos, que limitam as tensões em $-15V/15V$.

Análises de desempenho dos controladores na prática

De modo geral os testes de bancadas apresentaram bons resultados. Em relação a construção dos módulos, ambos funcionaram como o projeto previa, ou seja, o sistema transita de estável

Figura 5.16: Configuração do teste de bancada com controlador para seguir referência com ação integral.

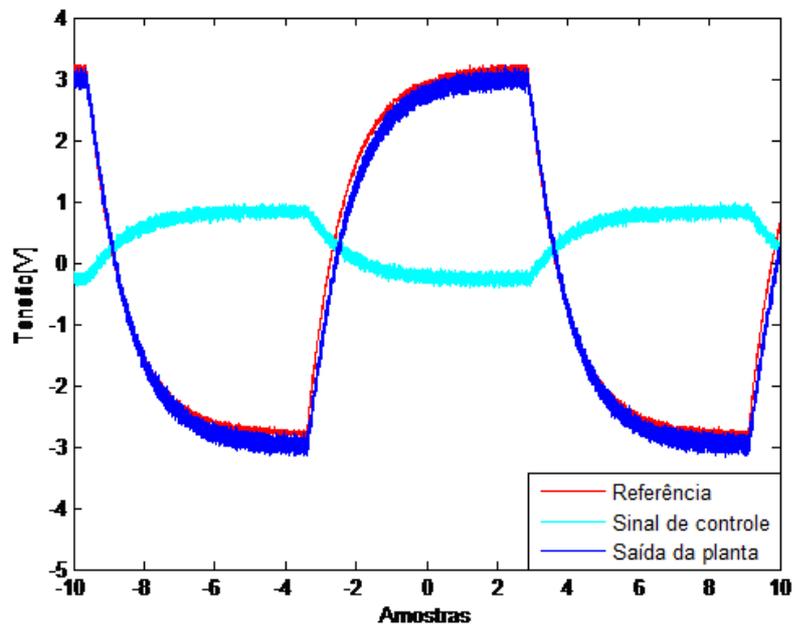


Fonte: Próprio autor, 2016.

para instável com a mudança de R_2 , R_3 e R_9 . Além disso, a sua saída apresenta a característica de sistemas com fase não mínima.

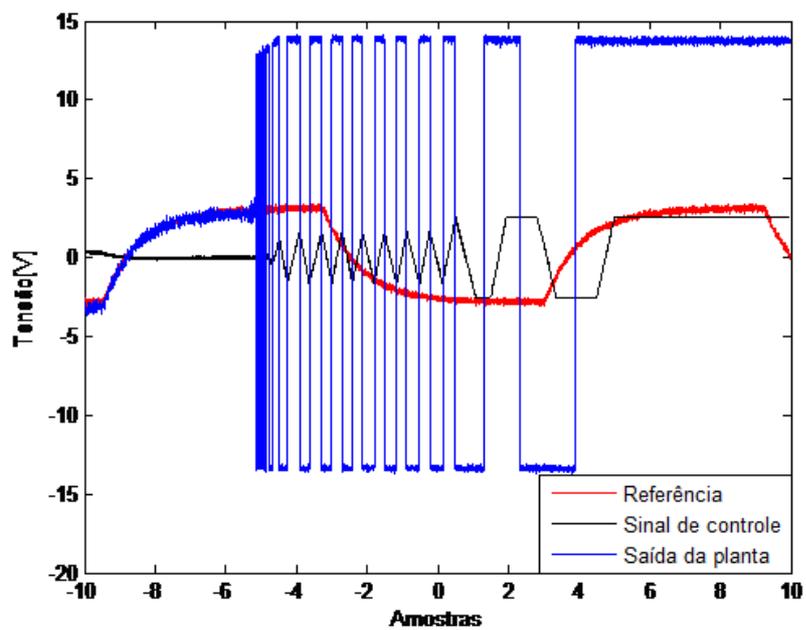
Os testes dos controladores, de modo geral, apresentaram bons resultados. O controlador estabilizante realizado para o sistema completo (os dois módulos) se comportou conforme projeto. Já os controladores para seguir referência apresentaram bons resultados, mas com algumas ressalvas, como já discutido.

Figura 5.17: Saída da planta com o controlador para seguir de referência - Teste de bancada.



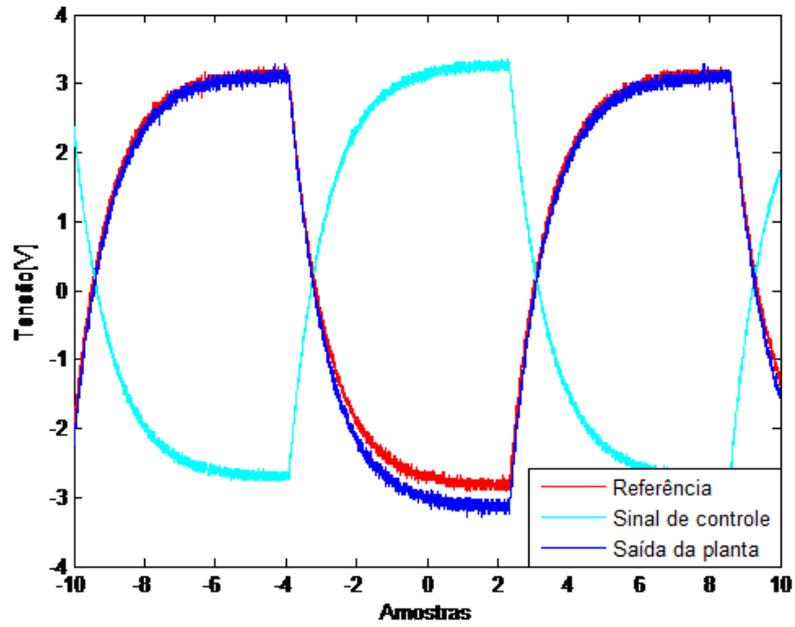
Fonte: Próprio autor, 2016.

Figura 5.18: Saída da planta com o controlador para seguir de referência - Teste de bancada.



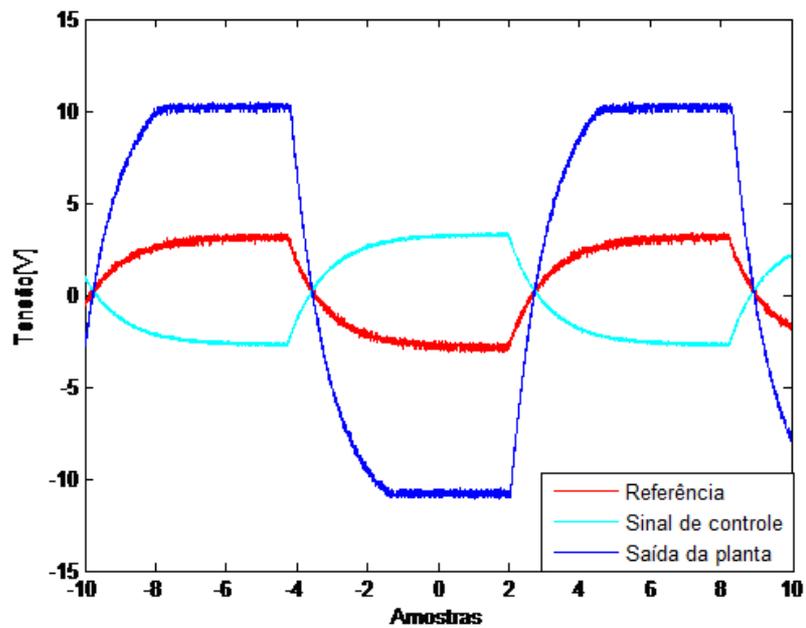
Fonte: Próprio autor, 2016.

Figura 5.19: Saída da planta com o controlador para seguir de referência - Teste de bancada.



Fonte: Próprio autor, 2016.

Figura 5.20: Saída da planta com o controlador para seguir de referência - Teste de bancada.



Fonte: Próprio autor, 2016.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

6.1 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou o desenvolvimento de um módulo controlável e também as características e os métodos de elaboração de quatro controladores para esse módulo. Os controladores sintetizados foram implementados sob as teorias de controle robusto utilizando LMIs e condições de síntese de custo garantido da norma H_∞ , a fim de manter a saída da planta sempre como desejada independente da existência de incertezas. O módulo construído é de fácil implementação e custo reduzido o que o torna um bom aliado para o ensino do conceito de controle robusto, o qual normalmente não se ensina em nível de graduação e pode ser de difícil assimilação. O trabalho exigiu conhecimentos adicionais aos aprendidos na graduação, assim possibilitando o conhecimento em outras áreas de controle, além de promover um maior contato e desenvolvimento de projetos e modelagens de circuitos e controladores.

As simulações realizadas permitiram concluir que a metodologia utilizada para o projeto foi adequada ao objetivo inicial do trabalho, além de possibilitar análises preliminares de desempenho dos controladores encontrados, o que facilita, caso seja necessário, escolher um tipo de controlador dependendo da aplicação.

Em relação à planta e aos controladores implementados fisicamente, todos atenderam as premissas dos respectivos projetos, com resultados similares entre simulação e experimento de bancada mas com algumas diferenças, pois na simulação não foram consideradas as perdas, ruídos e precisão dos componentes. Entretanto, a construção de um controlador capaz de se adaptar às variações da planta apresentaria melhores resultados se os componentes fossem de maior precisão e com maior limite de saturação. Desta maneira, a versatilidade e a robustez do sistema apresentaria uma melhor desempenho se aproximando dos resultados simulados.

Os sistemas foram implementados utilizando o amplificador operacional LM741. No entanto, o mesmo não apresentou bom desempenho, por mau funcionamento, e em muitos casos ele inseriu um *offset* ao sistema, tornando a saída muito incompatível com o esperado. Assim, foi realizado a troca do amplificador operacional LM741 pelo TL081. Desta maneira, foi possível realizar testes bem sucedidos com saídas mais coerentes.

Diante da exposição dos resultados obtidos mediante a implementação dos sistemas, observa-se a versatilidade, a importância e o valor de contribuição dos mesmos na área de controle robusto. As principais contribuições deste trabalho se dão, principalmente, em relação ao custo-benefício dos módulos e ao desenvolvimento de práticas de implementação de módulos de controle, as quais são escassas em nível de graduação.

6.2 MELHORIAS E TRABALHOS FUTUROS

Melhorias podem ser implementadas de acordo com as dificuldades enfrentadas no decorrer do trabalho.

Primeiramente em relação ao módulo, pode-se adicionar uma proteção em caso de se ligar erroneamente a alimentação do circuito. Assim como melhorar a qualidade dos pontos de acesso aos sinais do circuito.

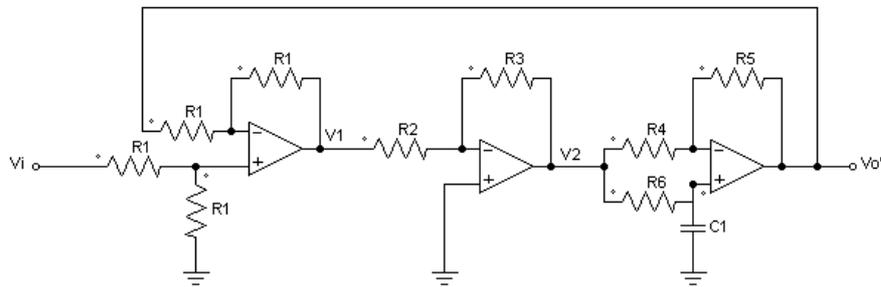
A implementação física dos controladores, apresentou diversas dificuldades, principalmente quando o número de estados e realimentações aumenta, assim acrescentando componentes e fios ao circuito. O que acentua diretamente os erros, tais como, a imprecisão dos próprios componentes, mau contato, até mesmo a dificuldade da montagem e detecção de erros. O que afeta significativamente o desempenho do controlador. Desta maneira, uma forma alternativa para realizar o controle pode ser por meio da utilização do controle robusto digital.

7 ANEXOS

7.1 ANEXO I

A modelagem dos módulos está descrita a seguir.

Figura 7.1: Circuito do módulo I.



Fonte: Próprio autor, 2016.

O primeiro estágio é o subtrator, ele é composto por 4 resistores R_1 de $1,2k\Omega$. Como todos os resistores são idênticos a saída desse estágio pode ser expressa por:

$$V_1 = V_i - V_o'. \quad (7.1)$$

O segundo estágio é o amplificador inversor no qual a saída é dada por:

$$V_2 = -V_1 \frac{R_3}{R_2}. \quad (7.2)$$

Substituindo V_1 , encontra-se:

$$V_2 = -\frac{R_3}{R_2}(V_i - V_o'). \quad (7.3)$$

Os componentes R_3 e R_2 são potenciômetros que variam de aproximadamente 0 a $20k\Omega$.

Um filtro passa tudo completa o primeiro módulo, o qual é composto por três resistores e um capacitor. Para fins de simplificação os resistores R_4 e R_5 possuem valores iguais. Para que os estados do modelo em espaço de estados tenham sentido físico e possam ser medidos, considerou-se a tensão sobre o capacitor C_1 como o estado do filtro. Fazendo as seguintes considerações:

$$\begin{aligned}x_1 &= V_c, \\u &= V_2, \\y &= V_o',\end{aligned}$$

Pode-se levantar o seguinte modelo em espaço de estados:

$$\dot{x} = \frac{-1}{R_6 C} x_1 + \frac{1}{R_6 C} u, \quad (7.4)$$

$$y = \left(1 + \frac{R_5}{R_4}\right) x_1 - \frac{R_5}{R_4} u. \quad (7.5)$$

Considerando que $R_4 = R_5$, chega-se a:

$$u = \frac{-R_3}{R_2 + R_3} V_1 + \frac{2R_3}{R_2 + R_3} x_1. \quad (7.6)$$

Substituindo u nas equações do filtro passa-tudo, encontram-se as equações em espaço de estados do primeiro módulo. Em que y define a saída do módulo principal.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \left(\frac{R_3 - R_2}{R_6 C(R_2 + R_3)}\right) x_1 - \left(\frac{R_3}{R_6 C(R_2 + R_3)}\right) V_i, \\y &= \left(\frac{2R_2}{R_2 + R_3}\right) x_1 - \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3}\right) V_i.\end{aligned} \quad (7.7)$$

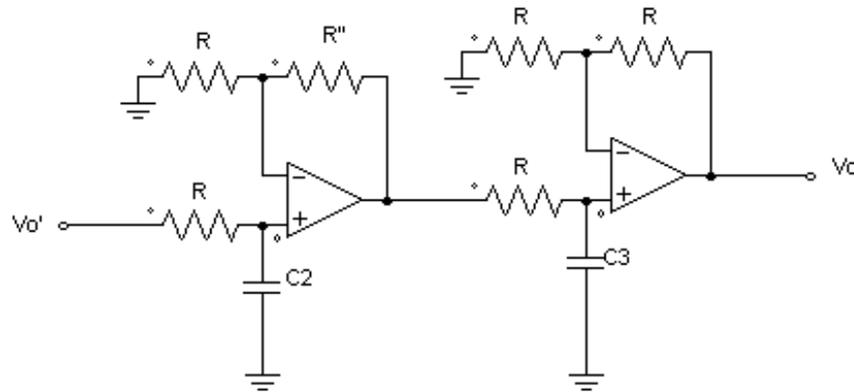
A saída da planta principal é acoplada na entrada do módulo dos filtros (ligando os dois sistemas em cascata). Então o próximo passo é realizar a modelagem do segundo módulo (Figura 7.2).

Considerando a entrada $u = V_o'$, V_3 a saída do primeiro filtro, x_2 a tensão no capacitor do primeiro filtro do módulo II, e $R'' = R_9$ tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \left(\frac{V_o'}{RC_2}\right) - \left(\frac{x_2}{RC_2}\right), \\V_3 &= \left(\frac{R_9 + R}{R}\right) x_2.\end{aligned} \quad (7.8)$$

$$(7.9)$$

Figura 7.2: Circuito do módulo II.



Fonte: Próprio autor, 2016.

Como a entrada deste módulo é a saída do primeiro, realiza-se a substituição da saída y (Equação 7.7) no V_o' da Equação 7.9. Assim encontra-se:

$$\dot{x}_2 = \left(\frac{2R_2}{RC_2(R_2 + R_3)} \right) x_1 - \left(\frac{1}{RC_2} \right) x_2 + \frac{R_3}{RC_2(R_2 + R_3)} u,$$

$$V_3 = \left(\frac{R_9 + R}{R} \right) x_2$$

Por fim, realiza-se a modelagem do segundo filtro, que é idêntica a do primeiro filtro. Onde a entrada u é a saída do primeiro filtro, $V_o = y$ é a saída do final de todo o sistema e x_3 é a tensão no capacitor do segundo filtro do módulo II. Deste modo tem-se:

$$\dot{x}_3 = \left(\frac{u - x_3}{RC_3} \right),$$

$$V_o = 2x_3.$$

Realizando a substituição de u , encontra-se a equação do terceiro estado, disposta na Equação (7.1).

$$\dot{x}_3 = \left(\frac{R_9 + R}{R} \right) \frac{1}{RC_3} x_2 - \left(\frac{1}{RC_3} \right) x_3,$$

$$y = 2x_3.$$

Assim organizando na forma de matricial, foi obtido o modelo em espaço de estados total

do sistema que é composto por três variáveis de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_3 - R_2}{R_6 C_1 (R_2 + R_3)} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_7 C_2} \left(\frac{2R_2}{R_2 + R_3} \right) & \frac{-1}{R_7 C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{11} C_3} \left(1 + \frac{R_9}{R_8} \right) & \frac{-1}{R_{11} C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-R_3}{R_6 C_1 (R_2 + R_3)} \\ \frac{1}{R_7 C_1} \frac{R_3}{(R_2 + R_3)} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (7.10)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 + \frac{R_{13}}{R_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \quad (7.11)$$

7.2 ANEXO II

7.2.1 Lista de materiais para construção dos módulos

Pra a construção dos módulos foram utilizados os componentes listados na Tabela 7.1, na qual também estão dispostos as respectivas quantidades e preços. Desse modo o custo total para a construção dos módulos foi de 89,10 reais.

7.2.2 Montagem dos módulos

Realizadas as modelagens, o próximo passo foi a construção do módulo. Primeiramente montado em *Protobord* e verificado o funcionamento, o circuito foi realizado no software PROTEUS para possibilitar a impressão em uma placa de fenolite e, em seguida soldar os componentes. Algumas das etapas estão dispostas na Figura 7.3.

O módulo construído possui pontos de acesso para todas as entradas, saídas e para as tensões dos capacitores, para facilitar o monitoramento dos estados e o uso quando adicionar os controladores, como se observa na Figura 7.4.

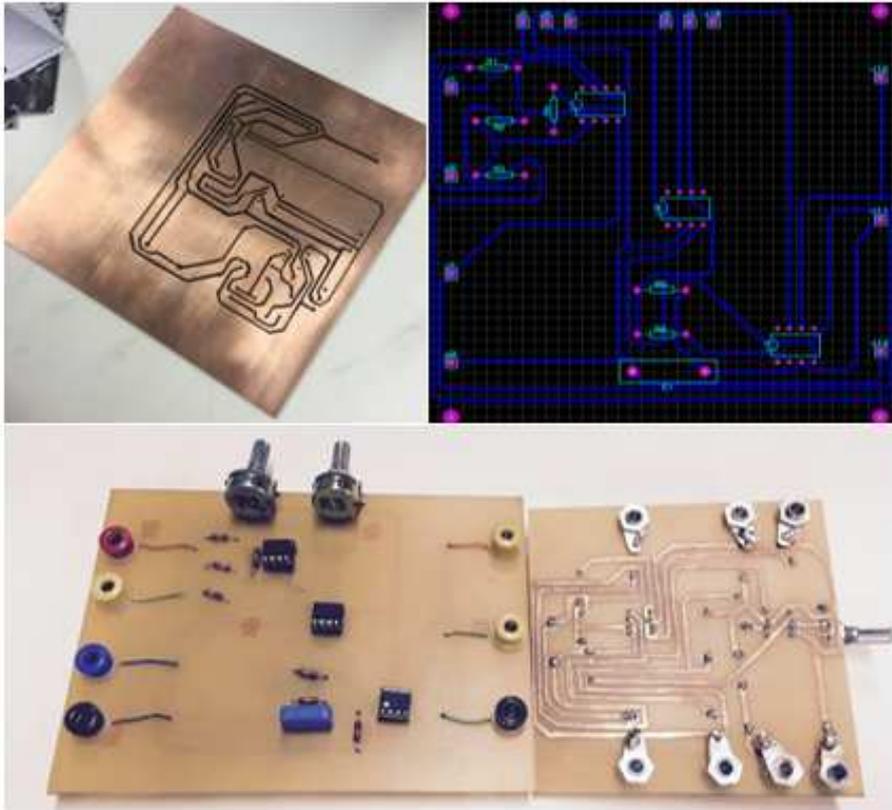
Tabela 7.1: Lista de materiais para construção dos módulos

Componente	Quantidade	Preço unitário (reais)	Total (reais)
Placa de fenilite 10x10cm	1	6,00	6,00
Placa de fenilite 10x15cm	1	8,00	8,00
AmpOp TL081	5	2,00	10,00
Potenciômetro 20K	2	1,80	3,60
Potenciômetro 10K	1	1,80	1,80
Capacitor 100 μF	3	0,40	1,20
Resistores 1.2K	15	0,10	1,50
Bornes	14	3,00	42,00
Soquetes	5	3,00	15,00
Total		89,10	

7.3 ANEXO III

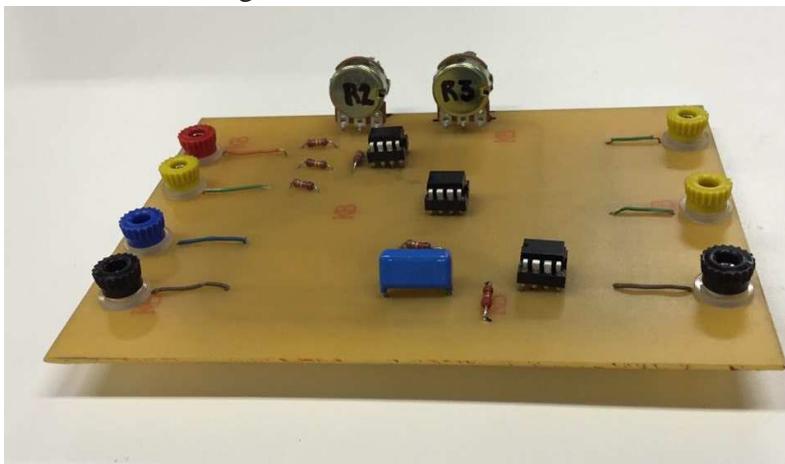
A seguir estão dispostos as configurações dos circuitos em malha fechada para todos os controladores implementados. Os desenhos foram realizados na ferramenta computacional PSIM.

Figura 7.3: Etapas da construção do módulo.



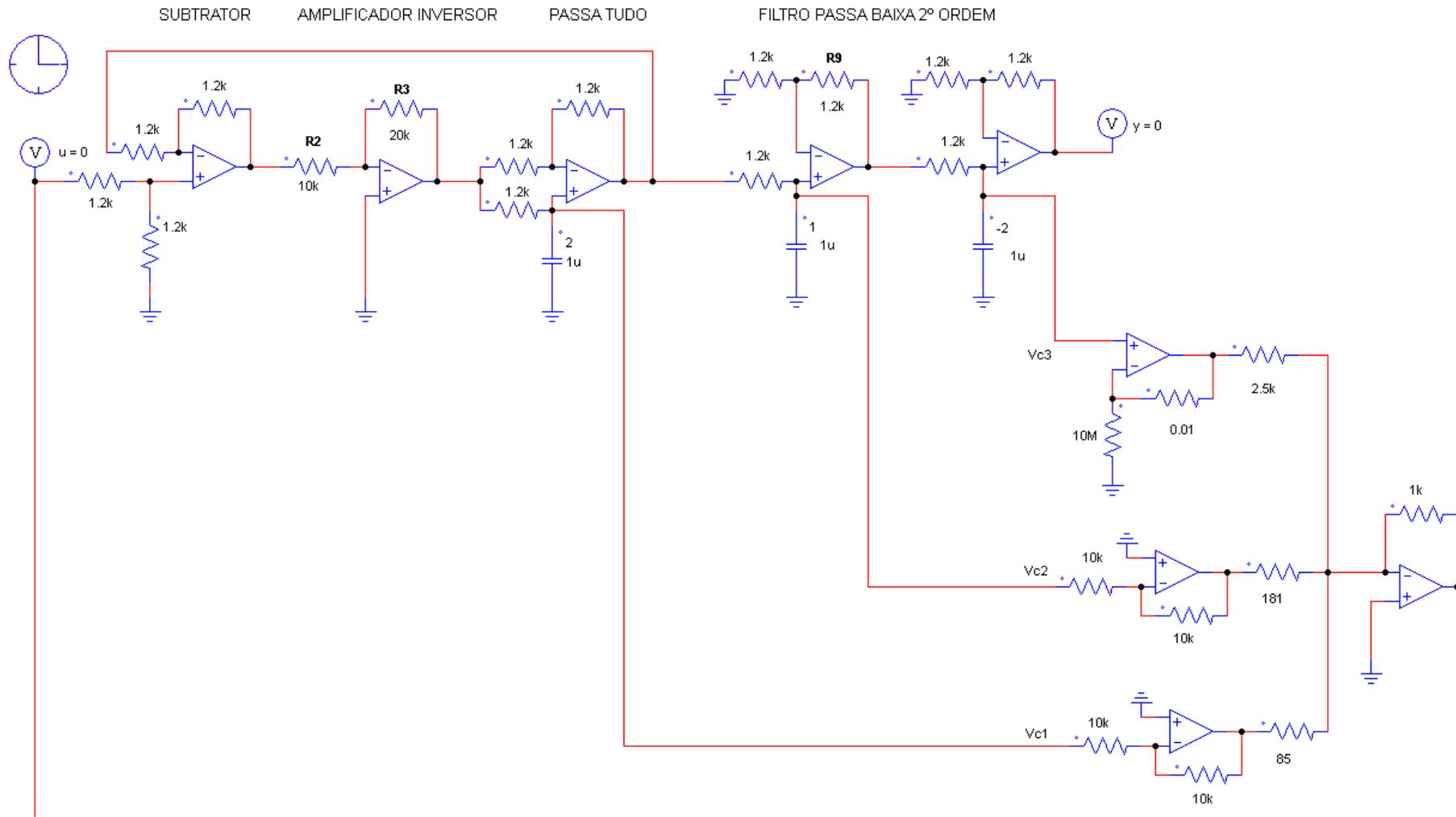
Fonte: Próprio autor, 2016.

Figura 7.4: Módulo I - Físico



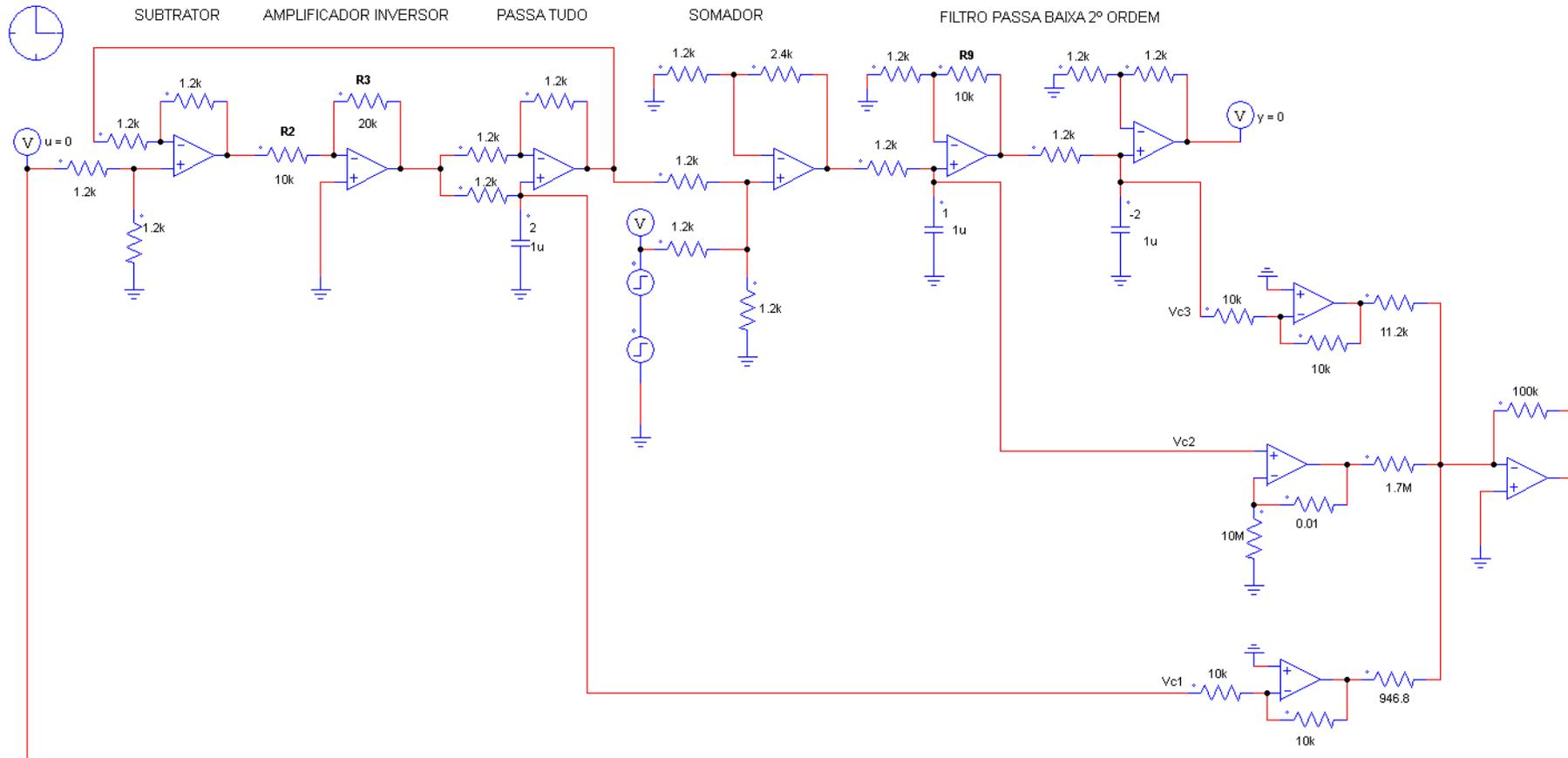
Fonte: Próprio autor, 2016.

Figura 7.5: Configuração em malha fechada com controlador estabilizante.



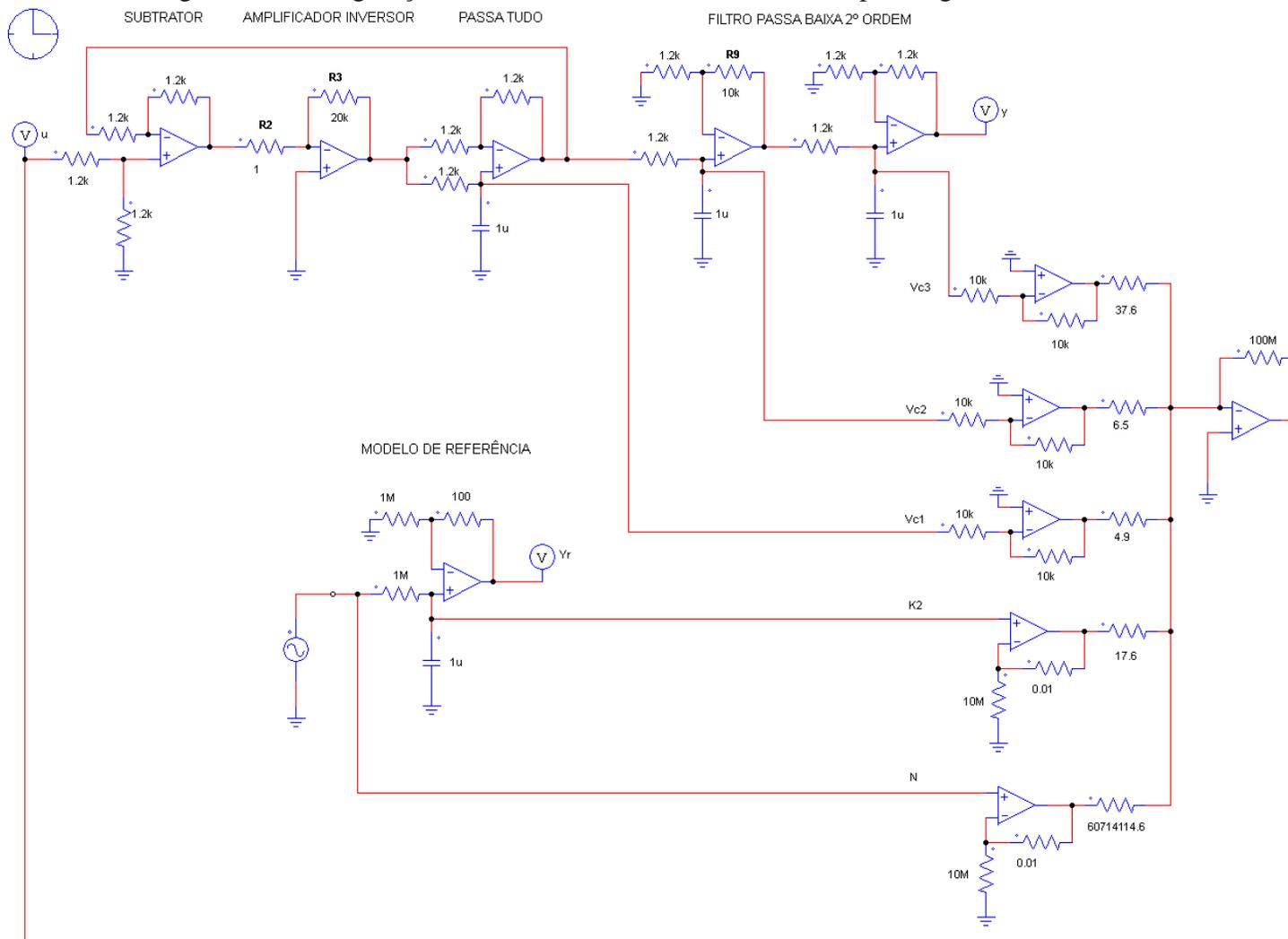
Fonte: Próprio autor, 2016.

Figura 7.6: Configuração em malha fechada com controlador que rejeita perturbações.



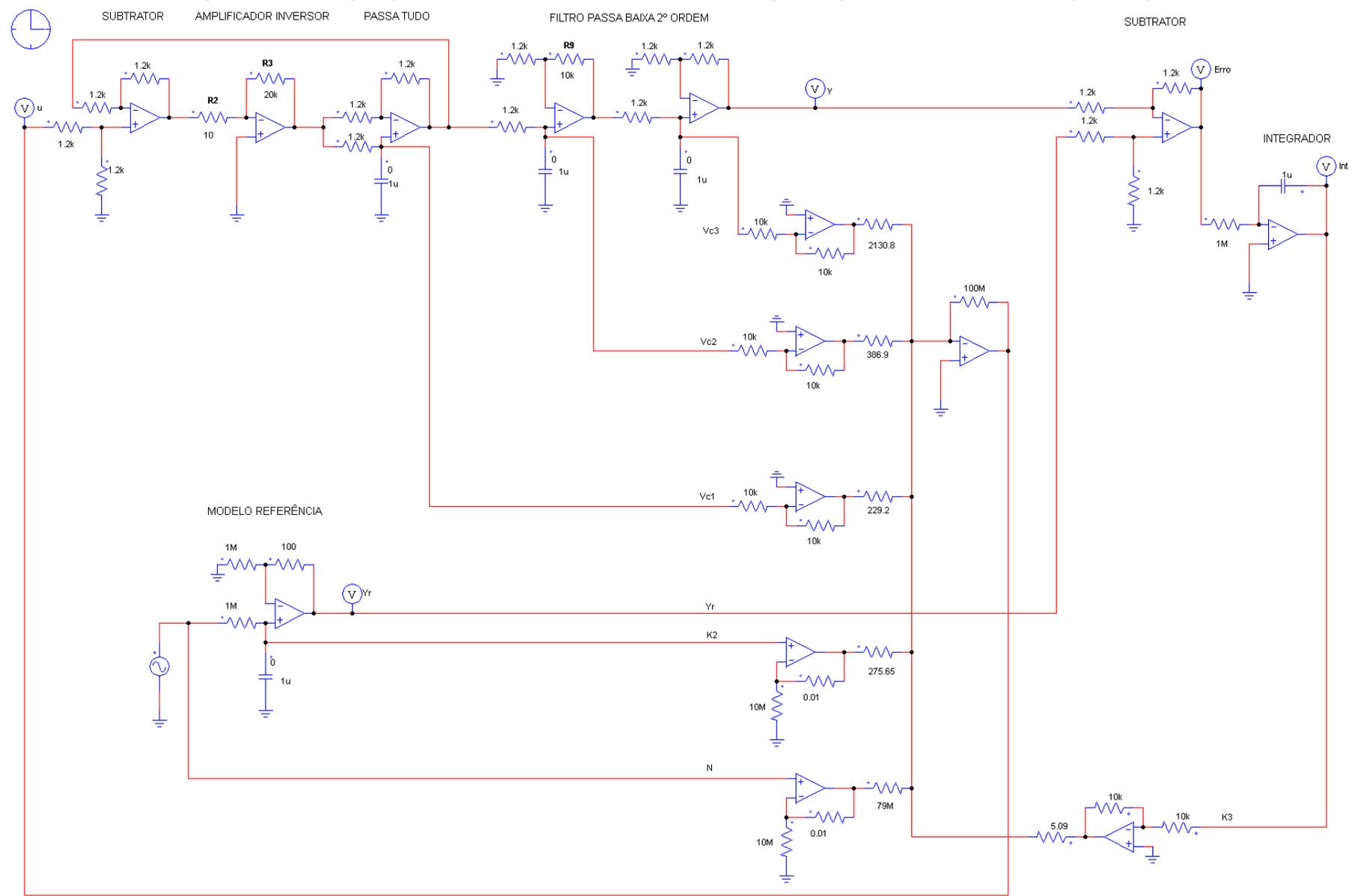
Fonte: Próprio autor, 2016.

Figura 7.7: Configuração em malha fechada com controlador para seguir de referência.



Fonte: Próprio autor, 2016.

Figura 7.8: Configuração em malha fechada com controlador para seguir de referência com ação integral.



Fonte: Próprio autor, 2016.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Barbazelli 2005]BARBAZELLI, R. C. *Estudo de Funções de Lyapunov para a Estabilidade de Sistemas de Potência*. Dissertação (Mestrado) — Ilha Solteira Ú SP: UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA Ú UNESP, 2005.
- [Boyd et al. 1994]BOYD, S. P. et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. [S.l.]: SIAM, 1994. v. 15.
- [Boylestad e Nashelsky 1998]BOYLESTAD, R.; NASHELSKY, L. Dispositivos eletrônicos e teoria de circuitos (6ª edição ed.). *Rio de Janeiro, RJ: Prentice-Hall do Brasil*, 1998.
- [Brogan 1982]BROGAN, W. L. *Modern control theory*. [S.l.]: Pearson Education India, 1982.
- [Dorf e Bishop 2001]DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de controle modernos*. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 2001.
- [Dullerud e Paganini 2013]DULLERUD, G. E.; PAGANINI, F. G. *A course in robust control theory: a convex approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 36.
- [Feron, Apkarian e Gahinet 1996]FERON, E.; APKARIAN, P.; GAHINET, P. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 7, p. 1041–1046, Jul 1996. ISSN 0018-9286.
- [Fu, Ni e Sun 2009]FU, D.; NI, S.; SUN, M. Robust h_∞/d -stability control of systems with polytopic uncertainty. In: *2009 IEEE International Conference on Control and Automation*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 513–518. ISSN 1948-3449.
- [Júdice e Patrício 1996]JÚDICE, J. J.; PATRÍCIO, J. M. *Sistemas de equações lineares*. *Coimbra: Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra*, 1996.
- [Lathi et al. 2005]LATHI, B. P. et al. *Linear systems and signals*. [S.l.]: Oxford University Press New York:, 2005. v. 2.
- [Leite et al. 2004]LEITE, V. J. et al. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, SciELO Brasil, v. 15, n. 1, p. 24–40, 2004.

- [Nise 2007]NISE, N. S. *CONTROL SYSTEMS ENGINEERING, (With CD)*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.
- [Ogata 2001]OGATA, K. *Modern control engineering*. Prentice Hall PTR, 2001.
- [Pai e Sauer 1989]PAI, M.; SAUER, P. W. Stability analysis of power systems by lyapunov's direct method. *IEEE Control Systems Magazine*, IEEE, v. 9, n. 1, p. 23–27, 1989.
- [Santos 2005]SANTOS, J. F. S. dos. *Problema de controle H_2/H_∞ - Estudo comparativo entre as técnicas EBPE/CGO e LMI*. Dissertação (Mestrado) — Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2005.
- [Shaked 2001]SHAKED, U. Improved lmi representations for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 4, p. 652–656, Apr 2001. ISSN 0018-9286.
- [Trofino, Barbosa e Coutinho 2000]TROFINO, A.; BARBOSA, K.; COUTINHO, D. *Controle robusto. Apostila da disciplina de controle robusto do curso de pós-graduação de engenharia elétrica da UFSC*, 2000.
- [Villaça e Silveira 2013]VILLAÇA, M. V. M.; SILVEIRA, J. L. Uma breve história do controle automático. *Revista Ilha Digital*, v. 4, p. 3–12, 2013.
- [Zuben 2003]ZUBEN, V. *Tópicos avançados: controle robusto, controle adaptativo e controle inteligente. Notas de aula EA932-Prof, DCA-FEEC-Unicamp*, 2003.