



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO**  
**ESCOLA DE MINAS**  
**ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**



**GUILHERME ANDRADE VICENTE**

**ANÁLISE DOS EFEITOS DA PANDEMIA DO COVID-19 SOBRE UM MODELO DE  
ALOCÇÃO DE ATIVOS EM UMA CARTEIRA DE INVESTIMENTOS**

**OURO PRETO**  
**2020**

**GUILHERME ANDRADE VICENTE**

**ANÁLISE DOS EFEITOS DA PANDEMIA DO COVID-19 SOBRE UM MODELO DE  
ALOCÇÃO DE ATIVOS EM UMA CARTEIRA DE INVESTIMENTOS**

**Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Curso de Engenharia  
de Produção da Universidade Federal  
de Ouro Preto como requisito parcial  
para obtenção do grau de Engenheiro  
de Produção.**

**Orientador: Prof. Dr. Helton Cristiano  
Gomes.**

**OURO PRETO**

**2020**

**SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO**

V632a Vicente, Guilherme Andrade .

Análise dos efeitos da pandemia do covid-19 sobre um modelo de alocação de ativos em uma carteira de investimentos. [manuscrito] / Guilherme Andrade Vicente. - 2020.

96 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Helton Cristiano Gomes.

Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Graduação em Engenharia de Produção .

1. Otimização estrutural. 2. Mercado financeiro - COVID-19. 3. Investimentos. 4. Simulação (computadores) - Alocação de ativos. I. Gomes, Helton Cristiano. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

Bibliotecário(a) Responsável: Maristela Sanches Lima Mesquita - CRB:1716



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
REITORIA  
ESCOLA DE MINAS  
COLEGIADO DO CURSO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO



**FOLHA DE APROVAÇÃO**

Guilherme Andrade Vicente

**ANÁLISE DOS EFEITOS DA PANDEMIA DO COVID-19 SOBRE UM MODELO DE ALOCAÇÃO DE ATIVOS EM UMA CARTEIRA DE INVESTIMENTOS**

Membros da banca

Helton Cristiano Gomes - Dr. - UFOP  
Jorge Luiz Brescia Murta - Dr. - UFOP  
Claver Antônio Fontes Vilela - Me. - UFOP  
Davi das Chagas Neves - Me. - UFOP

Versão final  
Aprovado em 29 de setembro de 2020

De acordo

Prof. Dr. Helton Cristiano Gomes



Documento assinado eletronicamente por **Helton Cristiano Gomes, COORDENADOR DO CURSO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO – OP**, em 27/10/2020, às 14:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0096482** e o código CRC **AAF981E9**.

Referência: Caso responda este documento, indicar expressamente o Processo nº 23109.008152/2020-08

SEI nº 0096482

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35400-000  
Telefone: - www.ufop.br

# Agradecimentos

Gratidão a Deus por se fazer presente em absolutamente tudo;

Gratidão a meus pais Jurandir e Ângela que se esforçaram além da conta para tornar esse sonho possível;

Aos meus irmãos Bruno e Gabriel por darem forças e fazer companhia nos momentos solitários dessa caminhada;

À minha namorada Vanessa, pelo amor, compreensão e paciência;

Ao Prof. Dr. Helton pela ajuda, ideias, amizade e orientação;

À UFOP, Escola de Minas e professores da Engenharia de Produção, pelas inúmeras experiências de aprendizado, amizades e conselhos;

Aos amigos da Engenharia de Produção;

À Monetus pelas oportunidades de crescimento pessoal e aprendizado profissional;

Aos demais familiares e amigos pelo apoio e carinho;

O meu muito obrigado!

## RESUMO

Este estudo teve como objetivo analisar de que forma os efeitos da pandemia do COVID-19 influenciam a aplicação da modelagem matemática para alocação de ativos em uma carteira de investimentos. Considerou-se necessário apresentar o problema de otimização de carteiras e os principais modelos matemáticos que visam representá-lo, além de analisar ativos financeiros para compor uma e aplicar modelagem matemática visando otimizá-la. Foram utilizadas técnicas de previsão para o retorno dos ativos, o que permitiu comparar os resultados do modelo com e sem os efeitos da pandemia. Para tanto, foi utilizado como método para coleta de dados consultas a bancos de dados de *softwares on-line* com apoio de gestores profissionais de recursos financeiros, considerando os tipos de dados necessários de acordo com os modelos matemáticos mais conhecidos para otimização de carteiras e que foram levantados no referencial teórico. A partir da análise de dados foi possível perceber diferenças significativas na alocação ótima sugerida pelo modelo considerando um cenário de pandemia e que pode dificultar mais a tomada de decisões de investimentos. Enfim, por meio de todo o estudo realizado foi possível identificar que os efeitos do COVID-19 sobre o mercado financeiro juntamente a diferentes expectativas dos investidores sobre os ativos podem inviabilizar a utilização de modelos matemáticos para otimização de uma carteira de investimentos.

**Palavras-chave:** Otimização; COVID-19; Investimentos; Alocação de ativos.

## ABSTRACT

This study aimed at analyzing how the COVID-19 pandemic effects influence the application of mathematical models for asset allocation in an investment portfolio. It was considered necessary to introduce the portfolio optimization problem and the main mathematical models which aim to solve it. Forecasts techniques have been used for the assets return, which allowed a comparison of the model results with and without the pandemic effects. In order to do that, as a method to collect data, online softwares were used with the support of professional asset managers, considering the necessary type of data accordingly with the most known mathematical models for portfolio optimization and that have been mentioned in theoretical reference. From data analysis it was possible to notice great differences in the optimal allocation suggested by the model considering the pandemic scenario, which can make it more difficult to make investment decisions. Finally, throughout the performed study it was possible to identify that the COVID-19 together with different expectations of the investors about the assets can make it unfeasible to apply mathematical models for portfolio optimization.

**Keywords:** Optimization; COVID-19; Investments; Asset allocation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Fronteira Eficiente .....	32
Figura 2 - Retorno acumulado dos fundos de renda fixa .....	44
Figura 3 - Retorno acumulado dos fundos multimercado .....	45
Figura 4 - Retorno acumulado dos fundos de ações .....	46
Figura 5 - Volatilidade anualizada dos fundos de renda fixa .....	47
Figura 6 - Volatilidade anualizada dos fundos multimercado .....	48
Figura 7 - Volatilidade anualizada dos fundos de ações .....	48
Figura 8 - Número de cotistas dos fundos de renda fixa .....	50
Figura 9 - Evolução do patrimônio dos fundos de renda fixa .....	51
Figura 10 - Número de cotistas dos fundos multimercado .....	52
Figura 11 - Evolução do patrimônio dos fundos multimercado .....	52
Figura 12 - Número de cotistas dos fundos de ações .....	53
Figura 13 - Evolução do patrimônio dos fundos de ações .....	53
Figura 14 - Underwater dos fundos de renda fixa .....	54
Figura 15 - Underwater dos fundos multimercado .....	55
Figura 16 - Underwater dos fundos de ações .....	55
Figura 17 - Série temporal dos retornos mensais do fundo de renda fixa escolhido .....	59
Figura 18 - Série temporal dos retornos mensais do fundo de renda fixa escolhido considerada para previsões .....	60
Figura 19 - <i>Boxplot</i> do fundo de renda fixa escolhido .....	61
Figura 20 - Função de autocorrelação do fundo de renda fixa .....	62
Figura 21 - Função de autocorrelação parcial do fundo de renda fixa .....	63

Figura 22 - Ajuste e previsão de retorno para o fundo de renda fixa.....	64
Figura 23 - Série temporal dos retornos mensais do fundo multimercado escolhido	65
Figura 24 - Série temporal dos retornos mensais do fundo multimercado escolhido considerada para previsões .....	66
Figura 25 - <i>Boxplot</i> do fundo multimercado escolhido.....	67
Figura 26 - Série temporal após uma diferenciação dos retornos mensais do fundo multimercado escolhido.....	68
Figura 27 - Série temporal após uma diferenciação dos retornos mensais do fundo multimercado considerada para previsões .....	69
Figura 28 - <i>Boxplot</i> da série temporal diferenciada do fundo multimercado.....	69
Figura 29 - Função de autocorrelação da série multimercado diferenciada .....	70
Figura 30 - Função de autocorrelação parcial da série multimercado diferenciada ..	71
Figura 31- Ajuste e previsões para a série multimercado diferenciada .....	72
Figura 32 - Resíduos das previsões para a série multimercado.....	73
Figura 33 - Função de autocorrelação dos resíduos das previsões para a série multimercado.....	74
Figura 34 - Função de autocorrelação parcial para os resíduos das previsões para a série multimercado .....	74
Figura 35 - Série temporal dos retornos mensais do fundo de ações escolhido .....	75
Figura 36 - Série temporal dos retornos mensais do fundo de ações escolhido considerada para previsões .....	76
Figura 37 - <i>Boxplot</i> do fundo de ações.....	76
Figura 38 - Função de autocorrelação para série de retornos do fundo de ações ....	77
Figura 39 - Função de autocorrelação parcial para série de retornos do fundo de ações.....	78
Figura 40 - Ajuste e previsões para o fundo de ações .....	79

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 - Índice de Sharpe dos fundos de renda fixa .....	49
Tabela 2 - Índice de Sharpe dos fundos multimercado .....	49
Tabela 3 - Índice de Sharpe dos fundos de ações .....	50
Tabela 4 - Estatísticas simples dos fundos de renda fixa.....	56
Tabela 5 - Estatísticas simples dos fundos multimercado .....	57
Tabela 6 - Estatísticas simples dos fundos de ações.....	57
Tabela 7 - Testes de estacionariedade da série de retornos do fundo de renda fixa	61
Tabela 8 - Previsões de retorno para o fundo de renda fixa.....	64
Tabela 9 - Testes de estacionariedade da série de retornos do fundo multimercado .....	67
Tabela 10 - Testes de estacionariedade da série multimercado diferenciada.....	70
Tabela 11 - Previsões de retorno para série multimercado diferenciada .....	72
Tabela 12 - Testes de estacionariedade da série do fundo de ações .....	77
Tabela 13 - Previsões de retorno para o fundo de ações.....	79
Tabela 14 - Retornos reais e retornos previstos dos ativos selecionados.....	80
Tabela 15 - Patrimônio líquido e sua participação relativa na carteira de mercado dos fundos escolhidos.....	82
Tabela 16 - Resultados do modelo com dados reais .....	85
Tabela 17 - Resultados do modelo considerando previsões para o retorno .....	88
Tabela 18 - Resultados sem efeitos da pandemia de COVID-19 e com perspectivas sobre retorno relativo alteradas.....	90

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
<b>2 VISÃO SOBRE MERCADO FINANCEIRO .....</b>	<b>15</b>
2.1 O MERCADO FINANCEIRO BRASILEIRO .....	16
2.2 VISÃO SOBRE INVESTIMENTOS .....	17
<b>3 MODELAGEM MATEMÁTICA .....</b>	<b>20</b>
3.1 TIPOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA .....	22
3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E MERCADO FINANCEIRO .....	23
<b>4 OTIMIZAÇÃO .....</b>	<b>25</b>
4.1 PRINCIPAIS TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO .....	26
4.2 PAPEL DA OTIMIZAÇÃO EM INVESTIMENTOS FINANCEIROS .....	27
<b>5 CARTEIRAS DE INVESTIMENTO ÓTIMAS .....</b>	<b>30</b>
5.1 TEORIA MODERNA DO PORTFÓLIO .....	30
5.2 BLACK-LITTERMAN E ALOCAÇÃO DE ATIVOS .....	34
<b>6 METODOLOGIA E CARACTERIZAÇÃO DO ESTUDO DE CASO .....</b>	<b>39</b>
<b>7 RESULTADOS E ANÁLISES .....</b>	<b>43</b>
7.1 RETORNO ACUMULADO .....	44
7.2 RISCO OU VOLATILIDADE .....	46
7.3 ÍNDICE DE SHARPE .....	49
7.4 QUANTIDADE DE COTISTAS E PATRIMÔNIO LÍQUIDO .....	50
7.5 PERDA MÁXIMA ACUMULADA ( <i>UNDERWATER</i> ) .....	54
7.6 ESTATÍSTICAS SIMPLES .....	56
7.7 LIDANDO COM OS IMPACTOS DA PANDEMIA DE COVID-19 .....	58
<b>7.7.1 PREVISÕES DE RETORNO PARA RENDA FIXA .....</b>	<b>59</b>
<b>7.7.2 PREVISÕES DE RETORNO PARA MULTIMERCADO .....</b>	<b>65</b>
<b>7.7.3 PREVISÕES DE RETORNO PARA AÇÕES .....</b>	<b>75</b>
7.8 APLICAÇÃO DO MODELO DE BLACK E LITTERMAN (1991) .....	80
<b>7.8.1 APLICAÇÃO CONSIDERANDO DADOS REAIS DE RETORNO .....</b>	<b>84</b>
<b>7.8.2 APLICAÇÃO CONSIDERANDO AS PREVISÕES DE RETORNO .....</b>	<b>87</b>

**8 CONCLUSÃO .....92**

**REFERÊNCIAS.....94**

## 1 INTRODUÇÃO

A escolha de uma carteira de investimentos que seja a melhor possível para um investidor pode, em muitos casos, ser um processo decisório complexo que envolve diferentes variáveis tais como opiniões sobre acontecimentos recentes, expectativas quanto ao futuro, conhecimento sobre os diferentes tipos de investimento e o mercado financeiro em geral, bem como uma interpretação dos cenários macro e microeconômicos, social e político de uma região ou país. As decisões relacionadas à como compor uma carteira de investimentos se mostraram ser uma necessidade a ser atendida constantemente por empresas e indivíduos e que tem sido estudada por muitos anos.

De forma geral, essa necessidade tem sido pesquisada sob a ótica de um problema de otimização, que pode ser representado através de um conjunto de equações matemáticas, visando solucioná-lo por meio da busca pela melhor relação possível entre o retorno e o risco dos investimentos. É válido considerar a premissa de que cada investidor possui um perfil de risco, o que se traduz na ideia de que alguns estão mais dispostos a aceitar os riscos de perda de dinheiro e outros, menos. Nesse sentido, essa pesquisa foca em analisar de que forma a aplicação de modelos matemáticos auxilia investidores a tomar decisões para otimizar uma carteira de investimentos com variações no cenário econômico.

Uma carteira de investimentos pode ser composta por diferentes tipos de investimentos, ou ativos financeiros, e escolher a composição ideal para cada investidor, ou seja, definir a participação relativa de cada tipo de ativo financeiro numa determinada carteira pode ser um problema cuja resolução geralmente requer o uso de ferramentas matemáticas. Portanto, buscou-se reunir dados e gerar informações com o propósito de responder ao seguinte problema de pesquisa: de que forma os efeitos da pandemia de COVID-19 influenciam a aplicação da modelagem matemática para alocação ótima de ativos em uma carteira de investimentos?

A fim de se definir a composição ideal de uma carteira de investimentos, é comum se observar as abordagens mais conhecidas para atender tal necessidade. Uma das etapas para alcançar o objetivo geral dessa pesquisa é apresentar o

problema da otimização de carteiras de investimentos. Depois, mostrar os principais modelos para alocação de ativos. É comum aos investidores analisar o histórico do desempenho de ativos financeiros para ter uma noção do que ocorreu com aquele investimento e o terceiro objetivo específico desta pesquisa é então analisar e escolher os ativos financeiros para compor uma carteira. Em seguida, aplicar modelagem matemática para otimizá-la e utilizar uma técnica de previsão para os retornos dos ativos, visando retirar a influência da pandemia de COVID-19 sobre o mercado. Esses objetivos específicos nos direcionam ao objetivo geral de analisar de que forma os efeitos da pandemia de COVID-19 influenciam a aplicação da modelagem matemática para alocação ótima de ativos em uma carteira de investimentos?

Com a evolução do mercado financeiro, dos produtos de investimentos, da tecnologia e das ferramentas de comunicação e acessibilidade em geral, bem como da conscientização financeira da população, é possível perceber uma tendência de aumento do número de investidores em uma região. Com isso, mais pessoas defrontar-se-ão com o problema da escolha da carteira ótima de investimentos. Portanto, essa pesquisa se fundamenta na necessidade de otimizar uma carteira de investimentos através da aplicação da modelagem matemática, visando auxiliar a tomada de decisões dos investidores.

Este trabalho estrutura-se em oito capítulos, sendo que o capítulo 2 apresenta uma visão geral sobre o mercado financeiro e investimentos, com conceitos fundamentais e características do mercado brasileiro. Em seguida, no capítulo 3, são apresentadas as ideias iniciais a respeito de modelagem matemática, bem como sua relação com o mercado financeiro. No capítulo 4, são introduzidos conceitos e fundamentos acerca do tema otimização, cuja discussão continua no capítulo 5 sobre modelos e abordagens utilizadas no trabalho para a aplicação da otimização em carteiras de investimentos, concluindo a revisão teórica a respeito dos assuntos abordados neste trabalho. O capítulo 6 especifica a metodologia utilizada na pesquisa e caracteriza o estudo de caso, com informações sobre a empresa na qual este trabalho foi desenvolvido. No capítulo 7 são apresentados os resultados das análises compostas por gráficos e tabelas, bem como interpretações sobre os cenários que influenciaram a pesquisa e o capítulo 8 é reservado para discussões finais e sugestões de novas pesquisas.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

Devido à necessidade de otimizar uma carteira de investimentos, essa pesquisa se justifica através da aplicação da modelagem matemática em estratégias de alocação de ativos, visando auxiliar a tomada de decisões de investidores.

Essa necessidade existe pois considera a premissa de que os investidores desejam o maior retorno possível de seus investimentos com o menor nível de risco possível. No entanto, os ativos financeiros que apresentam maiores potenciais de retorno apresentam também maiores níveis de risco. Assim, a composição de uma carteira de investimentos que apresente uma relação ótima entre risco e retorno torna-se um problema comum entre investidores.

## 1.2 OBJETIVO GERAL

O presente trabalho tem como objetivo geral analisar de que forma os efeitos da pandemia de COVID-19 influenciam a aplicação da modelagem matemática para alocação ótima de ativos em uma carteira de investimentos.

## 1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Apresentar o problema da otimização de carteiras de investimentos;
- Mostrar os principais modelos de alocação de ativos que visam resolver o problema;
- Analisar e escolher ativos financeiros para compor uma carteira;
- Aplicar a modelagem matemática para otimizar uma carteira;
- Utilizar uma técnica de previsão para retirar a influência da pandemia de COVID-19 sobre o retorno dos ativos;
- Comparar os resultados esperados para as carteiras com e sem a influência dos efeitos da pandemia.

## 2 VISÃO SOBRE MERCADO FINANCEIRO

O mercado financeiro constitui um importante sistema de trocas de recursos entre os agentes que dele participam. Sendo assim, a presença nesse sistema de agentes que possuem recursos acumulados, ou superavitários, e aqueles que possuem necessidade de captação resulta em trocas entre pessoas e instituições, proporcionando aos agentes meios para atingir objetivos. De um modo geral, esse sistema contribui para a poupança, investimento e conseqüente desenvolvimento da atividade econômica do país (BIDERMAN, 2013).

Na opinião de Fonseca (2009), a existência de um mercado financeiro bem desenvolvido se justifica à medida em que esse mercado direciona recursos para os diversos setores da economia, incluindo para as atividades do governo. Essa função representa um importante fator no que tange ao desenvolvimento do país, quando alega existir uma relação entre a força do mercado financeiro de uma nação e o nível de desenvolvimento econômico da mesma.

É interessante ressaltar que o nível de atividade econômica de um país pode ser representado pelas principais características de seu mercado financeiro, como volume e tipos de negociações, investimentos externos, etc., bem como por alguns indicadores econômicos, mas há um fato que se sobrepõe a essas características. Conforme explicado acima, Fonseca (2009) deixa claro que o nível de desenvolvimento de um país está relacionado à força de seu mercado financeiro. Nesse sentido, otimizar uma carteira de investimentos pode contribuir no direcionamento dos recursos do mercado, uma vez que todos os setores da economia são influenciados por ele.

O mercado financeiro representa um local no qual a busca pela melhor alocação possível de recursos é uma característica marcante:

As sociedades anônimas e o mercado de capitais são fundamentais para o desenvolvimento econômico de uma nação, pois, ao propiciar o grupamento de recursos e amplo trânsito dos títulos que o representam, permitem constante inovação tecnológica e o desenvolvimento de novos produtos e serviços que, em tese, trarão maior bem-estar à população. Esses institutos permitem, em síntese, maior eficiência na alocação dos recursos disponíveis na sociedade. (MOREIRA, 2006, p. 18).

Dessa forma, a necessidade de otimizar uma carteira de investimentos apresenta relativa importância no processo decisório, tanto para investidores

individuais quanto para institucionais. Nesse sentido, utilizar modelos matemáticos para auxiliar na composição de um portfólio de investimentos demonstra ser uma alternativa interessante, uma vez que os modelos matemáticos, aliados a teoria de carteiras de investimentos, podem ter aplicabilidade imediata para diversos tipos de investidores.

## 2.1 O MERCADO FINANCEIRO BRASILEIRO

O mercado financeiro brasileiro na atualidade é caracterizado por um potencial de crescimento a ser desenvolvido em termos de número de investidores. Conforme a B3 S.A. (2019, p. 10) "[...] os investidores têm medo de colocar o dinheiro em produtos pouco (ou nada) conhecidos".

A Caderneta de Poupança, por exemplo, é a modalidade de investimento financeiro pela qual a maioria dos brasileiros escolhem, mantendo seus recursos concentrados nessa aplicação. Um dos motivos para esse cenário é a falta de conhecimento sobre outras opções de investimentos. Segundo a pesquisa Ecossistema do Investidor Brasileiro, cerca de 87% das pessoas declararam conhecer esse produto (B3 S.A., 2019).

Fonseca (2009, p. 111) afirma:

“Toda a rede de bolsas de valores e instituições financeiras que operam com a compra e venda de papeis (ações e títulos de dívida em geral), a longo prazo, formam o mercado financeiro. Nesse mercado, o objetivo central é canalizar as poupanças da sociedade para o comércio, indústria e as demais atividades econômicas e para o próprio governo.”

Conforme citado acima, trata-se inegavelmente de um sistema de trocas de recursos entre pessoas e instituições de fundamental importância para o fluxo produtivo de um país e para o bem estar das pessoas de um modo geral. Seria um erro, porém, atribuir apenas a esse sistema o principal motivo para o desenvolvimento de uma nação ou região. Isso porque o nível de desenvolvimento de um mercado financeiro também pode ser visto como uma das consequências das necessidades de trocas entre os agentes que participam do mercado. Como assegura Lund *et al.* (2012), o mercado financeiro é uma ferramenta fundamental ao desenvolvimento e crescimento econômico de um país. Neste contexto, fica claro que o mercado financeiro possibilita que as empresas captem recursos junto a investidores em geral, estes sendo pequenos, médios ou grandes. Não é exagero

afirmar que um fator de fundamental importância para o bom desempenho desse mercado é a efetiva operação de uma bolsa de valores, meio que viabiliza as trocas de recursos entre os agentes do mercado.

Fica evidente, diante desse quadro, que é possível contribuir para o desenvolvimento do mercado financeiro brasileiro e um dos principais indicadores desse processo é o número de investidores que participam ativamente da bolsa de valores ou que utilizam produtos de investimento diferentes da Caderneta de Poupança. Nesse sentido, ao proporcionar a possibilidade de otimizar uma carteira de investimentos, é facilitado o processo de escolha e composição de uma carteira, o que pode ser uma alternativa interessante para que os recursos captados no mercado financeiro sejam mais adequadamente direcionados, favorecendo os diversos setores econômicos. Espera-se, dessa forma, melhorar o ritmo de desenvolvimento do país e o nível de bem estar da população em geral.

## 2.2 VISÃO SOBRE INVESTIMENTOS

Investimento financeiro é o processo de empregar dinheiro por um período para que, no futuro, obtenha-se mais do que o dinheiro inicialmente utilizado. Segundo Bodie *et al.* (2014, p, 02), investimento é o comprometimento de dinheiro ou de outros recursos no presente com a expectativa de colher benefícios futuros.

Nesse sentido, por exemplo, uma pessoa pode emprestar dinheiro hoje, por um determinado período de tempo, a uma empresa que precise de capital para financiar suas operações. Em troca, essa pessoa pode receber o dinheiro emprestado e um valor adicional devido ao tempo e aos riscos (de não receber o dinheiro de volta, por exemplo) envolvidos (BODIE *et al.*, 2014).

Existem diferentes tipos de investimentos financeiros e, é comum que um investidor invista em diversos tipos em um mesmo período. Em geral, compra-se ativos financeiros, que representam um meio pelo qual investidores pleiteiam direitos, com expectativa de se obter ganhos futuros. Os ativos financeiros podem ser classificados em três grandes tipos: títulos de dívidas, ações e derivativos.

Os títulos de dívidas ou de renda fixa representam as obrigações que empresas privadas ou órgãos do governo têm para com os investidores. Essas entidades emitem os títulos para captar recursos para suas operações. Para

remunerar o investidor, prometem um fluxo de pagamentos seguindo uma metodologia de cálculo definida no momento em que o investidor adquire o título. Em geral, podem ser considerados ativos financeiros de baixo a moderado grau de risco, sendo esse medido pela capacidade das empresas em cumprir com as obrigações e, também, pelas negociações desses títulos entre os investidores pois podem gerar variações em seus preços, uma vez que o preço influencia em seu retorno.

As ações representam participação na propriedade de uma corporação e para esse ativo, a empresa não promete pagar um determinado fluxo aos investidores. O resultado do investimento depende do sucesso da empresa.

Derivativos são ativos financeiros cujos valores dependem de outros ativos. Como exemplos, existem opções, contratos futuros, dentre outros. Uma opção pode ser representada por um contrato pelo qual o investidor paga um preço que depende do valor de uma ação. Nesse caso, o contrato dá ao comprador o direito de exercer a opção (de compra ou de venda) da ação no futuro dependendo da variação do preço da ação. Em geral, são instrumentos utilizados para lidar com os riscos das variações de preços do mercado.

De acordo com BODIE *et al.* (2014, p. 03):

“[...] esses ativos são os meios pelos quais os indivíduos de economias bem desenvolvidas reivindicam seus direitos sobre ativos reais. Ativos financeiros são reivindicações pela renda gerada pelos ativos reais (ou exigibilidades sobre renda do governo). Se não pudermos ser proprietários de uma fábrica de automóveis (um ativo real), podemos comprar ações da Honda ou da Toyota (ativos financeiros) e, dessa forma, compartilhar da renda derivada da produção de automóveis.”

Conforme citado acima, pode-se dizer que os ativos financeiros apresentam o potencial de beneficiar tanto as pessoas físicas, que são investidoras e ou consumidoras dos produtos e serviços das empresas, quanto as empresas que os produzem e ou prestam. Neste contexto, fica claro que os investimentos representam um meio para efetuar trocas entre os participantes de um mercado. É preciso, porém, ir mais além e deixar explícito que "os ativos reais determinam a riqueza de uma economia, ao passo que os ativos financeiros representam apenas reivindicações sobre os ativos reais" (BODIE *et al.*, 2014, p. 06).

Por fim, pode-se chegar à conclusão de que existem inúmeras possibilidades de trocas entre pessoas e instituições e que a efetivação dessas trocas, seja por meio eletrônico ou não, forma o mercado financeiro. Percebe-se, pois, que os instrumentos financeiros são diversos e visam beneficiar todos os participantes envolvidos. Logo, é indiscutível o fato de que um mercado financeiro bem estruturado contribui para o desenvolvimento de uma nação, não se esquecendo, porém, que esse mercado reflete o desempenho de ativos reais que, em última análise, representam a capacidade produtiva de uma economia, bem como sua riqueza material.

### 3 MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática é uma prática que representa objetos, sistemas e processos através de equações matemáticas. Nesse sentido, sua principal função é auxiliar na resolução de problemas reais, pois possibilita representar características e antever o desempenho futuro de um objeto, sistema ou processo, em todo ou em parte, e propor ações visando seu melhor aproveitamento. Segundo Aguirre (2007, p. 52), um modelo matemático de um sistema real é um análogo matemático que representa algumas das características observadas em tal sistema.

Conforme verificado por Bender (2012), os modelos são a base para o estudo de uma determinada situação, seja ela teórica ou científica. Trata-se, inegavelmente, da reprodução das características mais importantes da situação em análise. Seria um erro, porém, atribuir aos modelos a capacidade de representar todas as características de um objeto, sistema ou processo. Como, em sua maioria, os modelos são utilizados para previsões e para auxiliar na resolução de problemas, torna-se de significativa relevância as informações que são utilizadas para sua construção, uma vez que esta envolve observação, imaginação e método. Assim, revestem-se de particular importância e influência a definição clara do propósito do modelo e as premissas utilizadas em sua construção, bem como o entendimento de que o modelo pode gerar previsões errôneas e precisar ser descartado ou alterado.

A melhor maneira de compreender essa prática é considerar a construção de um edifício ou a intenção de melhorar um processo. É pertinente trazer à tona a Copa do Mundo de Futebol de 2014. Quando do anúncio de que o Brasil seria o país sede, o clima de euforia tomou conta da nação, evidenciando novas perspectivas para o desenvolvimento da infraestrutura nacional. Nesse sentido, foram criadas inúmeras maquetes de estádios de futebol, estações de metrô, aeroportos e até de rodovias. Essas maquetes nada mais são do que modelos. Considerando um outro ponto de vista, com a intenção de diminuir filas em aeroportos, ou seja, resolver um problema, conforme explicado acima, engenheiros e analistas lançam mão de modelos matemáticos utilizando informações estatísticas, como por exemplo o tempo médio em que uma pessoa espera na fila de embarque, para qualificar o modelo e simular diferentes configurações de atendimento a clientes, visando

diminuir o tempo de espera e conseqüentemente melhorar a qualidade do processo de atendimento.

Pode-se dizer que ao se decidir por um investimento, seja ele financeiro ou de qualquer outro recurso como tempo ou esforço, essa decisão pode ser baseada na crença de um provável resultado futuro positivo do investimento considerado. Neste contexto, Dym (2004) deixa claro que uma das principais contribuições da modelagem matemática é a capacidade de gerar previsões de situações futuras, dado um grau de confiança estatística.

É interessante, aliás, notar que o processo de construção de um modelo matemático pode ser custoso. Mesmo assim, não parece haver razão para que a modelagem matemática deixe de ser utilizada para resolução de problemas reais. Conforme mencionado por Dym (2004), os modelos permitem experimentar diferentes configurações da situação em análise e antecipar possíveis resultados futuros sem intervenção direta na condição atual observada, objetivando alterar um resultado que hoje é considerado indesejado. Nesse sentido, fica claro que “o estudo teórico e científico de uma situação se baseia em um modelo.” (BENDER, 2012, p. 1).

Em tese, a modelagem matemática é de fundamental importância para resolução de problemas do mundo real, uma vez que apreender todas as características da realidade é quase impossível para a mente humana e, ainda assim, os problemas do cotidiano nos fazem refletir sobre o porquê de ocorrerem. Caso contrário, a maioria das tentativas de resolver problemas seria falha e desperdiçaria recursos de maneira pouco eficiente. Não se trata de sempre utilizar modelos matemáticos em todos os problemas possíveis, mas de considerar seu auxílio em decisões envolvendo emprego de recursos escassos como, por exemplo, na otimização da receita de uma empresa, definindo-se quais os melhores recursos a serem utilizados dadas suas limitações de disponibilidade.

“Problemas de otimização são as aplicações mais comuns da matemática. Independentemente da atividade com a qual estamos envolvidos, queremos maximizar o resultado positivo que geramos e minimizar as conseqüências inadequadas ou custos. Gerentes de negócios tentam controlar variáveis com o objetivo de maximizar o lucro ou de atingir uma meta desejada de produção e de entrega a um custo mínimo.” (MEERSCHAERT, 2013, p. 03).

Meerschaert (2013) deixa claro que o foco da modelagem matemática é a resolução de problemas de otimização. Percebe-se que esse tipo de problema envolve uma decisão associada a como utilizar recursos geralmente escassos da melhor maneira possível. Conforme supracitado, independentemente da atividade estudada, busca-se sempre realizá-la com a máxima eficiência.

Vê-se, pois, que a modelagem matemática é um meio pelo qual é possível representar as principais características de um objeto, sistema ou processo para estudar e antecipar seu comportamento. Nesse sentido, sua principal aplicação é na resolução de problemas reais que envolvem decisões de como utilizar recursos escassos da melhor maneira possível. Sendo assim, contribui para a tomada de decisões pessoais e institucionais, pois independentemente da área em que é aplicada, permite examinar possíveis resultados futuros para que se façam escolhas mais apropriadas no presente.

### 3.1 TIPOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Através de modelos matemáticos, constroem-se representações envolvendo diferentes características e objetivos, utilizando-se equações matemáticas. Para tanto, existem diferentes tipos de modelos que podem apresentar variadas classificações, dependendo da situação a ser descrita, podendo ser caracterizados, adicionalmente, por diversos adjetivos (contínuo ou discreto no tempo; a parâmetros concentrados ou distribuídos; determinístico ou estocástico; linear ou não-linear, etc.) (GARCIA, 2005, p. 22).

Em se tratando de problemas de otimização, cujo objetivo é maximizar ou minimizar o valor de alguma função como, por exemplo, lucro ou custos, os modelos mais comumente utilizados são classificados como lineares, pois percebe-se que as variáveis de saída, ou resultados dos modelos, dependem linearmente das variáveis de entrada, ou seja, o lucro (variável de saída a ser otimizada) depende linearmente do preço e ou da quantidade produzida (variáveis de entrada). Nesse sentido, as equações do modelo são do primeiro grau (GARCIA, 2005).

“A gestão da produção é talvez o domínio em que as aplicações de programação linear (PL) são mais numerosas. Contudo, tanto em marketing (determinação de políticas de preços, de afetação da força de vendas e de distribuição) como nas finanças (escolha de programas de investimento), na logística (gestão dos transportes), ou nos recursos humanos (afetação de

peçoal), [...] é um auxiliar precioso para a determinação eficaz de soluções que melhor satisfaçam os objetivos definidos inicialmente” (CARVALHO, 2014, p. 10).

Carvalho (2014) deixa claro que existem inúmeras possibilidades de aplicação dos modelos de otimização linear como ferramenta de apoio a decisões. É preciso, porém, ir mais além dessas possibilidades e ressaltar a importância de se definir com clareza quais os objetivos pretendidos com determinado modelo, bem como de se identificar quais são os dados disponíveis para construí-los e interpretá-los. Além disso, deve-se prestar devida atenção ao fato de que os modelos por si só não resolvem problemas, mas auxiliam os tomadores de decisões sendo esses, na maioria dos casos, gestores e diretores que definem os objetivos e pela utilização ou não dos resultados dos modelos matemáticos obtidos pelos analistas e ou técnicos, que por sua vez trabalham no sentido de fundamentar quantitativamente as decisões.

Vê-se, pois, que dependendo do objetivo e do tipo de sistema ou processo do qual se deseja resolver um problema com decisões embasadas por dados quantitativos, pode-se empregar diferentes tipos de modelos matemáticos. Espera-se, dessa forma, compreender as particularidades que mais influenciam nas causas e ou soluções de problemas reais e propor ações visando resolvê-las ou implementá-las, respectivamente. Nesse sentido, considerando que realizar experiências e testes com uma situação real envolve consumo de recursos que são escassos para a maioria das pessoas, os modelos matemáticos e seus diversos tipos caracterizam-se pela praticidade e economia para solução de problemas.

### 3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E MERCADO FINANCEIRO

O mercado financeiro, bem como um sistema de produção e ou prestação de serviços, apresenta diferentes possibilidades de aplicação da modelagem matemática como ferramenta de apoio na resolução de problemas. Conforme Oliveira (2004, p. 207), os modelos matemáticos foram também introduzidos em outros campos, de entre os quais mencionamos, sem ser exaustivos, a microelectrónica, o ambiente e as finanças.

Dentre essas possibilidades, cita-se, por exemplo, os modelos para alocação e precificação de ativos, de avaliação de empresas, de viabilidade e financiamento

de projetos e de demonstrativos financeiros, dentre outras. Segundo Fairhurst (2019), pode-se dizer que o objetivo geral com a utilização de modelos no mercado financeiro é resolver problemas reais, problemas esses que podem ser representados de forma numérica. Modelos financeiros são utilizados para decidir onde (quais produtos financeiros e em quais mercados) investir recursos, para avaliar o risco de crédito de uma determinada empresa, ou seja, se essa tem potencial de quitar dívidas que justifiquem um empréstimo, para simular as consequências de uma fusão entre empresas, para analisar possíveis efeitos em receitas devido a alterações em preços de produtos, etc.

“Os modelos financeiros representam numericamente uma situação real e auxiliam no processo de tomada de decisões em questões financeiras. Em caso de situações ou problemas financeiros reais a serem solucionados, analisados ou traduzidos para o formato numérico, os modelos financeiros ajudam. Às vezes, trata-se apenas de uma ideia ou conceito a ser convertido em um caso de negócios ou proposta de viabilidade” (FAIRHURST, 2019, p. 09).

Conforme citado acima, fica claro que os modelos financeiros são de significativa relevância nas decisões de investimentos, auxiliando a examinar um problema numericamente e realizar projeções ou simulações para solucioná-lo. Conforme Fairhurst (2019, p. 09), estes modelos auxiliam investidores a decidir em que projetos alocarão recursos e gerentes de produção a optar pela compra de uma nova máquina.

É preciso ressaltar que a estrutura do mercado financeiro é ampla e permite aplicar a modelagem em diferentes setores. De um modo geral, os modelos servem de apoio a decisões envolvendo patrimônio de pessoas e instituições e sua utilização é uma etapa complementar a outros processos de gestão de recursos mais amplos, que abrangem desde uma etapa inicial de coleta de dados históricos ou de criação de estimativas até a decisão de onde, como, quanto e por quanto tempo investir.

## 4 OTIMIZAÇÃO

A otimização é uma técnica que visa obter o melhor resultado possível para se atingir um objetivo através da melhor utilização dos recursos disponíveis. Nesse sentido, pode-se dizer que visa encontrar uma solução ótima para um determinado objetivo, podendo ser maximizá-lo ou minimizá-lo, dependendo do problema a ser resolvido (LONGARAY, 2017). É importante ressaltar que a otimização pode auxiliar diferentes tipos de organizações a serem mais eficientes, produtivas e lucrativas.

Para Longaray (2017), a otimização é um conjunto de métodos e procedimentos que visa alcançar uma solução ótima para um problema devidamente representado através de um modelo matemático. Neste contexto, fica clara sua importância no auxílio à tomada de decisões envolvendo uso de recursos escassos. O mais relevante, contudo, é constatar que o principal objetivo é maximizar ou minimizar o resultado desejado de uma determinada situação. Não é exagero afirmar que a otimização fornece uma estrutura lógica e organizada para se antever possíveis resultados de ações destinadas a resolução de problemas. Em todo esse processo, ocorre que a otimização embasa racionalmente decisões para se obter a melhor maneira possível de solucionar um problema.

É interessante, aliás, destacar que a otimização pode ser utilizada em diferentes contextos. Conforme explicado acima, o principal objetivo é maximizar ou minimizar um determinado resultado desejado e isso possibilita sua aplicação nas mais diversas áreas, como é o caso, por exemplo, a industrial, a comercial, a médica, a educacional, etc., visto que um dos interesses em comum dessas áreas é utilizar seus recursos, que em geral são escassos, da melhor forma possível.

“[...] utiliza meios científicos, matemáticos ou lógicos para fazer frente aos problemas que se apresentam quando se busca um raciocínio eficaz para enfrentar seus problemas de decisão.

Pode ser aplicada a diversas situações como estabelecer alocação de recursos, inventário de estoques, filas de espera, sequenciamento e coordenação de atividades, determinação de rotas de entrega e outras.” (MARQUES, 2012, p. 68).

Vê-se, pois, que a otimização emprega um conjunto de técnicas e ferramentas que fornecem uma estrutura organizada na pesquisa pela melhor configuração possível de uma determinada situação. Torna-se evidente, diante desse quadro, as inúmeras possibilidades de aplicação da otimização para

resolução de problemas e apoio em decisões. É preciso ressaltar o valor de um processo de construção de modelos bem estruturado a partir da observação e coleta de dados concretos de situações reais, para que se represente o problema com uma boa acurácia e se implemente soluções com a maior eficiência possível.

#### 4.1 PRINCIPAIS TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO

Os problemas de otimização podem ser diversos, dependendo dos tipos das variáveis do modelo, dos objetivos a serem otimizados, das restrições do modelo, etc., resultando em diferentes métodos para se obter determinada solução. Dentre esses se destacam os métodos de otimização (linear, inteira, mista, não linear, etc.) e os métodos analíticos (CHWIF & MEDINA, 2010, p. 16).

Em problemas de alocação de recursos, por exemplo, é comum que o objetivo a ser otimizado seja o custo. Nesse sentido, deseja-se minimizar o custo total para se produzir um bem ou serviço.

Para Hillier e Hillier (2014), as decisões tomadas para definir a melhor maneira de designar o uso de recursos limitados para se realizar uma tarefa é um problema gerencial para o qual se aplica a programação linear.

“A gestão de qualquer organização deve tomar decisões regularmente sobre a alocação de seus recursos entre diversas atividades [...]. A programação linear é uma ferramenta poderosa para resolver problemas e auxilia a gestão na tomada dessas decisões. [...] Os recursos alocados para as atividades podem ser, por exemplo, dinheiro, diferentes perfis de pessoal e diferentes tipos de maquinário e equipamentos. [...] As atividades [...] podem ser de produção (ex.: a fabricação de diferentes produtos) [...], atividades financeiras (ex.: investimentos de capital) ou outras” (HILLIER & HILLIER, 2014, p. 21).

Conforme citado acima, fica claro que a programação linear é um recurso relevante ao embasar decisões gerenciais por meio da utilização de dados de forma organizada. É importante esclarecer o fato de que esse recurso se utiliza de modelos matemáticos para representar os problemas que visa resolver. No entanto, não se pode esquecer de que esse é um dos métodos de otimização existentes que, apesar de passível de aplicação em situações diversas, restringe-se a equações lineares, o que, para problemas reais, nem sempre é verdade, uma vez que modelos mais completos e precisos podem conter equações não lineares. Para Hillier & Hillier (2014) "*Linear* no nome refere-se à forma de expressões matemáticas nesse modelo".

É preciso, porém, ir mais além e citar as variações dos tipos de modelos de otimização, como a Programação Linear Inteira (ou Programação Inteira) e a Programação Não-Linear. A primeira considera o fato de que para a melhor representação do problema real através do modelo matemático, as variáveis envolvidas precisam assumir valores pertencentes ao conjunto dos números inteiros ( $\mathbb{Z}$ ). Nesse caso, trata-se de um problema de Programação Inteira Pura. Como exemplo, os problemas de definição da escala de horários de professores, de localização de postos de saúde e de antenas de celulares, dentre outros.

Adicionalmente, podem existir modelos que possuem algumas variáveis inteiras e outras contínuas (ou pertencentes ao conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ ). Nesse caso, trata-se de um problema de Programação Inteira Mista. Ainda há problemas em que as variáveis são binárias, nos quais os valores podem ser apenas 0 ou 1.

Já a Programação Não-Linear trata de modelos em que a função objetivo a ser otimizada é não linear e ou as restrições do modelo são não-lineares. Exemplos de problemas nessa categoria são problemas de transporte em que o custo de transporte não varia linearmente com a quantidade transportada ou problemas de produção, em que o lucro de um conjunto de produtos não varia linearmente com a quantidade vendida e ou produzida.

Fica evidente, diante desse quadro, que a resolução de problemas reais baseada em modelos matemáticos necessita de uma adaptação nas soluções propostas pelo modelo utilizado, uma vez que, por definição, um modelo é uma representação da realidade e nesta, não se abrange todos os aspectos da mesma. Ainda, é válido ressaltar que o apoio da programação matemática facilita a tomada de decisões em contextos específicos, podendo ser adequada a diferentes tipos de problemas.

#### 4.2 PAPEL DA OTIMIZAÇÃO EM INVESTIMENTOS FINANCEIROS

A otimização, juntamente com a modelagem matemática, fornece uma estrutura de raciocínio lógico matemático para que as escolhas entre diferentes ativos financeiros sejam as melhores possíveis, considerando a relação entre o risco e o retorno do investimento. Para Bodie *et al.* (2014, p. 179), “a alocação ótima de

capital é determinada pela aversão ao risco e pelo *trade-off* risco-retorno da carteira de risco ótima”.

Um modelo matemático para otimização de uma carteira de investimentos é um conjunto de equações como, por exemplo, no caso abaixo:

$$\text{Max } R = \sum_{i=1,2,\dots,n} r_i x_i \quad (1)$$

s.a.:

$$1) \sum_{i=1,2,\dots,n} x_i = 1 \quad (2)$$

$$2) x_i \geq 0 \quad (3)$$

Onde:

- $R$  é o retorno esperado da carteira;
- $x_i$  representa o peso, ou participação percentual do ativo  $i$  na carteira e;
- $r_i$  o retorno esperado do ativo  $i$ .

A variável de decisão é  $x_i$ . Ao se alterar os pesos de cada ativo na carteira, espera-se obter o máximo retorno esperado possível.

As restrições requerem que: (1) a soma das participações dos ativos na carteira deve ser igual a um e (2) que a participação dos ativos na carteira seja não negativa. Ao combinar diferentes participações dos ativos na carteira, respeitando as restrições, é possível encontrar uma combinação ótima entre os ativos que maximize o retorno esperado (BODIE *et al.*, 2014).

“Modeladores financeiros competentes otimizam uma ideia ao incrementar as especificações do processo, desenvolvendo um modelo operacional voltado para tomada de decisões, ganhos sobre investimentos ou contratação de funcionários. Por exemplo, estes modelos auxiliam investidores a decidir em que projeto alocarão recursos, executivos a identificar as campanhas de marketing com maior retorno sobre o investimento e gerentes de produção a optar pela compra de uma nova máquina” (FAIRHURST, 2019, p. 09).

Conforme citado acima, fica clara a importância de modelos matemáticos em processos decisórios de diferentes assuntos, incluindo o mercado financeiro. É preciso, porém, destacar que existem diferentes tipos de modelos matemáticos para

diferentes aplicações no mercado financeiro, desde otimização de carteiras a precificação de ativos e mensuração e análise de riscos. Para Brito (2019), a utilização de modelos matemáticos na estimativa de risco de crédito pode conferir vantagem às instituições financeiras que os utilizam como suporte a decisões sobre transações financeiras.

Fica evidente, diante desse quadro que o papel da otimização no mercado financeiro em geral pode ser amplo e variado. Além das possibilidades apresentadas, como otimização de carteiras e gestão de riscos, os modelos matemáticos podem ser utilizados até mesmo na otimização da operação das próprias instituições, enquanto organizações que possuem objetivos específicos.

## 5 CARTEIRAS DE INVESTIMENTO ÓTIMAS

Uma carteira de investimentos é um conjunto de ativos financeiros nos quais um investidor decide aplicar seus recursos por um determinado período de tempo. Cada ativo que compõe a carteira recebe uma determinada porcentagem do capital disponível. A carteira é dita ótima quando a porcentagem do capital destinada a cada ativo proporciona a melhor relação possível entre o retorno e o risco de toda a carteira e não dos ativos isoladamente.

Percebe-se, nesse sentido, que o investidor toma algumas decisões relacionadas a quanto destinar de seu capital a cada ativo e dependendo da quantidade e dos tipos de ativos disponíveis, essas decisões podem ser mais ou menos difíceis.

Para lidar com esse problema da montagem da carteira, ou seleção de portfólio, Markowitz (1952) desenvolveu a Teoria Moderna do Portfólio, apresentada na seção 5.1. Foram desenvolvidos outros trabalhos no sentido de auxiliar um investidor na composição de sua carteira, visando considerar cada vez mais aspectos da realidade para que os modelos desenvolvidos fossem o mais aderente possível ao problema do investidor, como o modelo de Black-Litterman (1991), apresentado na seção 5.2.

### 5.1 TEORIA MODERNA DO PORTFÓLIO

A Teoria Moderna do Portfólio se iniciou com o trabalho desenvolvido por Harry Markowitz em 1952 sobre composição de carteiras de investimentos, que lhe rendeu um Prêmio Nobel de Economia. Em seu trabalho, Markowitz (1952) criou a abordagem da média-variância. Ele considerou a média aritmética dos retornos históricos de ações como medida para o retorno esperado de cada ativo e o desvio padrão do retorno histórico como medida de risco. Com isso, seu objetivo foi desenvolver um modelo que considerasse o *trade-off* risco-retorno de uma carteira de investimentos e oferecer uma ferramenta que padronizasse a forma de avaliação de ativos e carteiras de investimentos por parte dos investidores. Antes de seu trabalho, cada investidor avaliava os ativos de sua forma. Seu trabalho vencedor do prêmio Nobel criou a teoria moderna do portfólio (MPT, na sigla em inglês), que

estabelece a construção de portfólios de investimento que maximizam os retornos esperados com base em um nível de risco específico (BURNISKE & TATAR, 2019, p. 72).

Para o desenvolvimento de sua teoria, Markowitz (1952) considerou algumas premissas como, por exemplo, a de que os retornos históricos dos ativos são normalmente distribuídos, a de que os investidores consideram o retorno como algo desejável e o risco (medido pela variância dos retornos) algo indesejável, ou seja, são avessos ao risco. Outras premissas foram: todos os investidores possuem as mesmas estimativas para o retorno, para a variância e para a correlação entre os ativos; os investidores podem emprestar e tomar emprestado a quantia de dinheiro que preferirem à uma taxa livre de risco; a não existência de custos de transação e; as trocas individuais não alteram os preços dos ativos.

A seguir, é representado um modelo para o caso de  $n$  ativos como, por exemplo, diversas ações:

$$E = \sum_{i=1}^n X_i \mu_i \quad (4)$$

$$V = \sum_i^n \sum_j^n X_i X_j \sigma_{ij} \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1 \quad (6)$$

$$X_i \geq 0, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Onde:

-  $X_i$  e  $X_j$  são as variáveis de decisão, que representam a participação relativa na carteira dos ativos  $i$  e  $j$ , respectivamente;

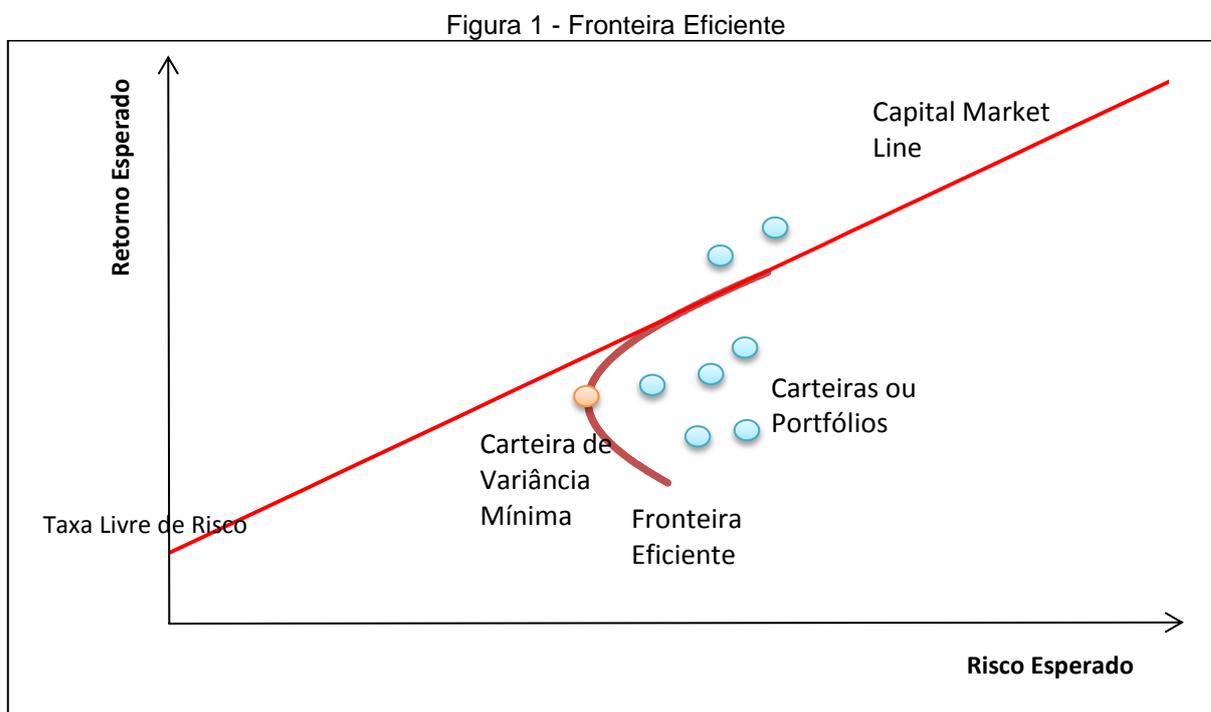
-  $\mu_i$  é o retorno esperado do ativo  $i$ ;

-  $\sigma_{ij}$  é a correlação entre os ativos  $i$  e  $j$ .

No modelo acima, a equação (4) representa a o retorno esperado da carteira, a (5) a variância (medida de risco) da carteira, (6) a restrição de que a soma da

participação relativa de cada ativo deve ser igual a um e a (7) a restrição de que não são permitidas operações de venda a descoberto, ou seja, para se investir em um determinado ativo, é necessário comprá-lo. No caso do modelo de Markowitz (1952), considerando  $X$  ser a variável de decisão, nota-se que o modelo é não linear.

Um dos resultados do trabalho de Markowitz (1952) é a chamada Fronteira Eficiente. Segundo ele, há uma combinação de ativos que produz um portfólio de máximo nível de retorno esperado para um dado nível de risco. Ou, para um dado retorno esperado, há uma combinação de ativos que resulta em um menor nível de risco para a carteira. Assim, na Fronteira Eficiente, é possível compor diferentes portfólios e obter a carteira ótima, alterando-se a participação de cada ativo na carteira. O gráfico da Figura 1 representa a Fronteira Eficiente:



Fonte: Adaptado Markowitz (1952).

Pela Figura 1, a linha denominada *Capital Market Line* representa as carteiras que têm uma relação ótima entre risco e retorno. A Taxa Livre de Risco representa o retorno do ativo financeiro considerado o mais seguro do mercado. No Brasil, por exemplo, é comum utilizar a taxa DI (também chamada de CDI) ou a taxa SELIC. Essas, em geral, são utilizadas também como *benchmarks* ou índices de referência.

Percebe-se também, observando a Figura 1, uma relação com a Fronteira de Pareto, conceito utilizado em problemas de otimização multiobjetivo. Essa fronteira

representa o conjunto de soluções factíveis que não são dominadas por outra solução. Em termos práticos, significa que não é possível melhorar o resultado de uma função do modelo sem piorar o resultado de outra função. Assim, na fronteira de Pareto, encontra-se o conjunto de todas as soluções viáveis que são as melhores possíveis para os objetivos a serem otimizados.

Para Varian (2006), o conceito tem aplicações importantes na economia, de modo que pode-se realizar melhorias de Pareto em termos de relações econômicas entre agentes do mercado enquanto uma mudança for melhor para alguns dos agentes sem piorar as condições de outros.

Nesse sentido, o problema de otimização de uma carteira de investimentos poderia ser representado por duas funções, uma para o retorno e outra para o risco, se configurando como um problema de otimização multiobjetivo.

O risco total de um portfólio não é igual ao risco de cada ativo isoladamente. Isso ocorre, pois a correlação entre os ativos influencia na medida de risco da carteira. Nesse sentido, os ativos que não possuem correlação, ou, que a mesma seja negativa, combinados resultam em uma carteira com menor risco (variância do retorno) total. Ao selecionar ações de empresas que atuam em diferentes indústrias ou segmentos de mercado, é mais provável que essas não apresentem correlação ou que ela seja negativa. A justificativa para essa ideia vem do fato de que, em geral, quando uma empresa não vai bem em um determinado segmento, é mais provável que outras do mesmo segmento também não tenham um bom desempenho, ao passo que empresas de outros segmentos podem apresentar bons resultados.

“O vencedor do prêmio Nobel, Harry Max Markowitz, definiu uma abordagem para a construção de portfólios em 1952 que tem sido o modelo que a maior parte dos consultores e investidores seguem desde então. [...] Seus esforços mostraram que retornos mais altos são atingidos correndo riscos mais altos, embora também reconheça o que ele chamou de fronteira eficiente” (BURNISKE & TATAR, 2019, p. 72).

Conforme citado acima, os autores deixam claro que o trabalho de Markowitz contribuiu para o mercado financeiro principalmente no modo como os investidores enxergam a relação risco e retorno. Ainda que várias premissas consideradas por Markowitz apresentem pouca ou nenhuma aderência com a realidade do mercado hoje, seu trabalho pode ser útil para os gestores de investimentos, por exemplo.

Segundo Davies (2013), os gestores podem se utilizar do conceito de fronteira eficiente e da combinação dos portfólios da fronteira com ativos livres de risco para adequarem a sugestão de carteiras de investimentos para investidores individuais de acordo com a tolerância ao risco de cada investidor.

## 5.2 BLACK-LITTERMAN E ALOCAÇÃO DE ATIVOS

Black e Litterman (1991) desenvolveram um modelo de alocação de ativos para investidores institucionais, quando ambos trabalhavam no banco norte americano Goldman Sachs. O trabalho cita a Teoria Moderna do Portfólio de Markowitz, utiliza o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) adaptado para ativos internacionais e exibe uma nova abordagem para a resolução do problema de seleção de portfólio, considerando novas premissas e incorporando ao modelo o ponto de vista dos investidores sobre o desempenho dos ativos, incluindo variações cambiais, com determinado grau de confiança estatística.

O CAPM é um método matemático que permite obter o nível de retorno que justifique o investimento em determinado ativo, dados os riscos associados, a taxa livre de risco ( $r_f$ ), a volatilidade do ativo em relação ao mercado ( $\beta$ ) e o prêmio de risco (medido pela diferença entre o retorno esperado de uma carteira teórica de mercado e a taxa livre de risco), conforme equação abaixo:

$$E(r_i) = r_f + \beta_i [(Er_m) - r_f]$$

Onde:

- $E(r_i)$  é o retorno esperado do ativo  $i$ ;
- $r_f$  é o retorno da taxa livre de risco;
- $\beta_i$  é o risco do ativo  $i$  relativo ao risco de uma carteira de mercado;
- $r_m$  é o risco da carteira de mercado;
- $(Er_m) - r_f$  é o prêmio de risco esperado.

Um dos problemas encontrados na Teoria Moderna do Portfólio, segundo Black e Litterman (1991), é que uma pequena variação no retorno esperado de um ativo produzia uma grande mudança na alocação da carteira como um todo e, em

muitos casos, essa mudança poderia não fazer sentido do ponto de vista prático para a escolha do investidor. Dado que o retorno dos ativos considerados por Markowitz naturalmente varia e, que este considerou o retorno esperado dos ativos ou da carteira como sendo a média dos retornos históricos normalmente distribuídos, fica claro que há uma grande limitação para utilização prática do trabalho de Markowitz.

Uma das hipóteses de Black e Litterman (1991) é o equilíbrio de mercado, representado pelo modelo CAPM adaptado para ativos internacionais. O equilíbrio de mercado é atingido quando o excesso de retorno esperado de um ativo em relação à taxa livre de risco equilibra a demanda e a oferta por este ativo, fazendo com que os investidores não queiram comprar ou vender determinado ativo, mas apenas manter suas posições.

O investidor seleciona os ativos de modo que a utilidade de sua carteira seja a melhor possível. A utilidade é uma função que relaciona a aversão ao risco do investidor com os pesos dos ativos na carteira. Sua maximização acontece pela definição ótima dos pesos dos ativos de risco e dos livres de risco. A função de utilidade, como utilizada pelo modelo de Black e Litterman (1991) é apresentada abaixo:

$$U = w^T(\mu - r_f) - \lambda w^T S w$$

Onde:

- $w$  é o vetor que contém as participações relativas dos ativos na carteira;
- $\mu$  é o retorno esperado da carteira;
- $r_f$  é o retorno da taxa livre de risco;
- $\lambda$  é um escalar que indica o grau de aversão ao risco;
- $S$  é a matriz de variância-covariância.

Partindo-se da premissa de que todos os investidores querem maximizar a função de utilidade, Black e Litterman (1991) consideraram que todos os investidores possuem um portfólio com participação da carteira ótima de Markowitz. Nesse sentido, a carteira de mercado (a que todos os investidores possuem) é a carteira

ótima e, portanto, é eficiente pela abordagem da média-variância. Como a carteira de mercado é eficiente, pode-se obter desta os pesos ótimos dos ativos que a compõem e com isso, maximizar a utilidade para cada investidor, combinando ativos de risco da carteira ótima com ativos livres de risco. Obtêm-se da carteira de mercado os pesos dos ativos que já produzem um resultado eficiente e é possível então calcular o excesso de retorno esperado para a carteira que o investidor escolher, o que recebe o nome de *Implied Equilibrium Excess Return* ( $\Pi$ ):

$$\Pi = (\mu - r_f) = 2\lambda Sw$$

Onde:

- $\mu$  é o retorno esperado da carteira;
- $r_f$  é o retorno da taxa livre de risco;
- $\lambda$  é um escalar que indica o grau de aversão ao risco;
- $S$  é a matriz de variância-covariância;
- $w$  é o vetor que contém as participações relativas dos ativos na carteira.

Para Black e Litterman (1991), os pesos dos ativos na carteira não são muito sensíveis a mudanças na variância dos ativos. Assim, recomendaram o uso de dados históricos para gerar tal matriz. O coeficiente de aversão ao risco é calculado da seguinte maneira:

$$\lambda = \frac{E(r_m - r_f)}{2\sigma_m^2}$$

Onde:

- $\lambda$  é um escalar que indica o grau de aversão ao risco;
- $r_m$  é o retorno da carteira de mercado;
- $r_f$  é o retorno da taxa livre de risco;
- $E(r_m - r_f)$  é o prêmio de risco esperado.
- $\sigma_m^2$  é a variância (risco) da carteira de mercado.

Uma das equações que o modelo de Black e Litterman (1991) apresenta é exibida abaixo e visa calcular o excesso de retorno esperado de uma carteira construída de acordo com o modelo proposto:

$$E(r - r_f) = [(\tau S)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau S)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} Q]$$

Onde:

- $r$  é o retorno da carteira;
- $r_f$  é o retorno da taxa livre de risco;
- $\tau$  é um parâmetro escalar do modelo;
- $S$  é a matriz de variância-covariância dos ativos considerados;
- $P$  é uma matriz que relaciona as expectativas de retorno dos investidores entre os ativos;
- $\Omega$  é a matriz que contém as incertezas sobre as expectativas de retorno relativo entre os ativos que os investidores possuem;
- $\Pi$  é o excesso de retorno calculado para a carteira que representa o equilíbrio de mercado (*Implied Equilibrium Excess Return*);
- $Q$  é o vetor que contém as expectativas de excesso de retorno dos investidores.

A matriz  $\Omega$  é obtida pelo cálculo:

$$\Omega = \tau P S P^T$$

Segundo Black e Litterman (1991), a fórmula exibida acima para calcular a matriz  $\Omega$  é apenas uma sugestão. Caso o investidor se sinta mais confiante com suas expectativas de retorno, pode-se alterar os valores na matriz.

O modelo então visa combinar as perspectivas dos investidores sobre o desempenho dos ativos com o equilíbrio de mercado, que considera ser um ponto de referência neutro, resultando em um portfólio otimizado do ponto de vista da participação de cada ativo na carteira.

A abordagem proposta por Black e Litterman (1991) é uma inversão no sentido da otimização. Em abordagens comuns, utilizam-se como dados de entrada do modelo as expectativas de retorno e a covariância estimada entre os ativos e busca-se encontrar o portfólio ótimo, definido pelos pesos dos ativos na carteira. Já Black e Litterman (1991) propõem uma inversão no sentido de que o investidor comece a utilização do modelo já com uma carteira de referência definida. A partir dessa carteira, obtém-se os pesos ótimos dos ativos de risco. A escolha do investidor passa a ser então quais ativos livres de risco adicionará na carteira e após essa escolha, o modelo prediz qual o excesso de retorno esperado para ela.

## 6 METODOLOGIA E CARACTERIZAÇÃO DO ESTUDO DE CASO

Como assegura Prodanov e Freitas (2013), a pesquisa significa buscar e ou gerar informações, respostas e conhecimento para resolver um problema, que geralmente é apresentado através de perguntas. Nesse contexto, fica claro que a necessidade da pesquisa surge para a resolução de um problema para o qual não existem informações ou conhecimento disponíveis para resolvê-lo. O mais preocupante, contudo, é constatar que essa busca não pode ser feita de qualquer maneira, sendo extremamente importante o uso de uma sequência de passos técnicos bem definidos e planejados para que as conclusões obtidas sejam minimamente confiáveis.

A pesquisa básica objetiva gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência sem aplicação prática prevista. Envolve verdades e interesses universais (PRODANOV e FREITAS, 2013, p. 51). Como o objetivo é compreender melhor uma área de conhecimento, esse trabalho é de natureza básica.

Para Prodanov e Freitas (2013), considerando-se o propósito de uma pesquisa, pode-se dizer que ela é exploratória quando busca-se gerar clareza na delimitação de um tema ou uma nova abordagem para ele. Contudo, é importante constatar que quando se caracteriza um fato e as condições que o influenciam, trata-se de uma pesquisa descritiva.

O presente trabalho se classifica como exploratório, pois tem a finalidade de abordar um determinado tema a partir de uma nova perspectiva e trazer mais compreensão sobre ele. Além disso, é descritivo, dada a intenção de se caracterizar as condições que influenciam as escolhas de um investidor.

Conforme verificado por Prodanov e Freitas (2013), pode-se dizer que uma pesquisa é qualitativa quando a maior preocupação é com o processo de observação de um acontecimento, utilizando-se o ambiente natural como fonte de dados e onde as interpretações estão intimamente associadas a características do pesquisador. A pesquisa é quantitativa quando, através de números, busca-se interpretar fatos e relações de causa e efeito podendo, inclusive, utilizar-se de ferramentas estatísticas para análises e constatações.

Conforme citado acima, esta pesquisa tem a abordagem quantitativa e qualitativa devido ao fato de que as informações e resultados podem ser analisados com métricas estatísticas e foram observadas opiniões de profissionais sobre os dados obtidos. Considerando que a motivação da pesquisa surgiu da vontade de se resolver um problema assumindo algumas hipóteses, identifica-se nesse trabalho o modo de análise hipotético-dedutivo.

O conceito de estudo de caso, para Gil (2002, p. 54), consiste no estudo profundo e exaustivo de um ou poucos objetos, de maneira que permita seu amplo e detalhado conhecimento. Esse trabalho utiliza como procedimento de coleta de dados o estudo de caso, pois considerou-se a análise aprofundada e detalhada de uma situação específica relacionada ao problema considerado e que pode, com as devidas adaptações, ser generalizada para casos similares. Nesse sentido, foram observados dados de diferentes fontes, como opiniões pessoais e bases de dados do mercado.

Esse trabalho utiliza como instrumento de coleta de dados entrevistas com profissionais da área de conhecimento abordada. Além disso, utiliza também análises de acontecimentos relacionados ao problema considerado, bem como de dados numéricos em diferentes cenários de empresas e de pessoas que, de alguma maneira, tiveram contato com o assunto tratado.

De acordo com Marconi e Lakatos (2003, p. 157), os principais tipos de documentos são:

- **Fontes Primárias** - dados históricos, bibliográficos e estatísticos; informações, pesquisas e material cartográfico; arquivos oficiais e particulares; registros em geral; documentação pessoal (diários, memórias, autobiografias); correspondência pública ou privada etc.;
- **Fontes Secundárias** - imprensa em geral e obras literárias.

O presente trabalho utiliza fontes primárias para obtenção dos dados, pois foram observadas informações de bancos de dados digitais que ainda não foram estudadas, bem como de entrevistas com pessoas envolvidas com o mercado financeiro.

Em um primeiro momento, foram definidos os tipos de dados necessários para a pesquisa. Esses tipos foram escolhidos de acordo com o problema tratado, bem como o contexto do desenvolvimento e a experiência de profissionais do mercado financeiro. Em seguida, foram realizados acessos à bancos de dados digitais de empresas privadas e acessos a sites da internet. Os principais sites consultados foram os de comparadores de investimentos da empresa Quantum e o Mais Retorno. Os dados coletados foram então organizados em planilhas do Microsoft Excel® para possibilitar a interpretação, a realização de cálculos e geração de gráficos. A partir do retorno e de sua comparação com o retorno de um índice de referência (*benchmark*), obteve-se outros dados através de técnicas estatísticas, como média, variância, dentre outros. Os gráficos gerados foram do retorno acumulado, da volatilidade anualizada (como medida de risco dos ativos), da evolução do número de investidores e do patrimônio líquido, bem como da evolução da perda máxima acumulada (conhecida como *underwater*), além da obtenção do índice de Sharpe.

Com esses dados, o desempenho histórico dos investimentos foi analisado e foram escolhidos três fundos de investimento para compor uma carteira. Após a composição da carteira inicial, foi aplicado um modelo matemático através de multiplicações matriciais para otimização da carteira e os resultados foram comparados a uma carteira de referência e a uma solução otimizada pela ferramenta Solver do Excel®. As primeiras interpretações foram realizadas com apoio de profissionais do mercado que possuem experiência em gestão de ativos financeiros, de fundos de investimentos e em administração de carteira de investimentos para pessoas físicas.

Este estudo utilizou como referência dois artigos científicos relacionados ao assunto otimização de carteiras de investimentos. O primeiro artigo, intitulado *Portfolio Selection*, publicado em 1952 por Harry Max Markowitz e, o segundo, intitulado *Asset Allocation: Combining Investor View With Market Equilibrium*, dos autores Fisher Black e Robert Litterman, publicado em 1991. A partir desses artigos, pode-se compreender as abordagens mais conhecidas para o problema da escolha da melhor carteira de investimentos e com isso, realizar novas proposições para tratar tal problema. Adicionalmente, a aplicação da modelagem matemática foi realizada com base na demonstração em vídeo disponível no site *You Tube* do

professor Phil Davies, enquanto professor da Universidade de Iowa (*University of Iowa and Rutgers Business School*), nos EUA.

Este trabalho foi realizado em uma gestora de investimentos de Belo Horizonte, Minas Gerais. A empresa conta com uma boa infraestrutura tecnológica e gerencia recursos financeiros em fundos de investimentos. Por esse motivo, possui amplo acesso a informações do mercado e profissionais capacitados a realizar análises e tomar decisões de investimentos, se configurando como uma empresa ideal para realização deste trabalho.

A empresa tem aproximadamente de 15.000 clientes em todo o país, 35 funcionários e disponibiliza diferentes categorias de fundos de investimentos para seus clientes. Além disso, a equipe de profissionais que realiza a gestão ativa dos fundos de investimento, com uma das menores taxas do mercado, é facilmente acessível ao pesquisador. Nesse sentido, foram consultados 2 funcionários, sendo um pertencente à equipe de gestão e outro à equipe de desenvolvimento de produtos da empresa.

Os profissionais consultados verificaram os dados coletados, os cálculos e análises realizadas, visando avaliar se os resultados tinham sentido prático. Assim, as pessoas ideias seriam os gestores profissionais dos fundos de investimentos e um deles foi consultado, sendo que a empresa possui dois gestores.

Portanto, foi delimitado o problema da escolha da carteira de investimentos ótima e definidos os dados que investidores geralmente analisam para realizar tal escolha, bem como dados que gestores de investimentos profissionais utilizam em suas decisões. Com essa definição, foram acessados bancos de dados digitais que registram informações sobre produtos de investimentos para obtenção dos dados. Durante sua interpretação, ferramentas estatísticas foram utilizadas para originar novas métricas e opiniões de gestores de investimentos foram coletadas para auxílio nas análises.

## 7 RESULTADOS E ANÁLISES

Para obtenção dos dados, foi utilizado o *software on-line* Quantum Axis, que os atualiza constantemente e disponibiliza para agentes do mercado financeiro em geral. Grande parte dos dados são públicos e podem ser acessados pelo site da Comissão de Valores Mobiliários (CVM), autarquia vinculada ao Ministério da Economia que regulamenta, fiscaliza e pune, quando cabível, o mercado de valores mobiliários no Brasil. Os dados coletados inicialmente foram: valor da cota de cada fundo considerado, retorno diário, número de investidores (cotistas), valor aplicado diário e patrimônio líquido diário, bem como a pontuação (cota) e rentabilidade diária de índices de referência do mercado, que foram o CDI e o Ibovespa. O período inicialmente considerado foi de 02 de julho de 2018 até 30 de abril de 2020.

Após obtenção dos dados iniciais, foram realizados cálculos através do Microsoft Excel® para a determinação de outros indicadores de desempenho dos ativos considerados, tais como: retorno acumulado no período, volatilidade (desvio-padrão do retorno) acumulada no período, Índice de Sharpe e *underwater*. Após os cálculos, foram gerados gráficos a fim de ilustrar a evolução do desempenho dos fundos ao longo do período considerado.

Através de uma ferramenta *online* de comparação de fundos de investimentos, disponibilizada gratuitamente pelo site Mais Retorno, foram coletadas estatísticas dos fundos, tais como número de meses acima do índice de referência, número de meses com retorno positivo, número de meses com retorno negativo, maior retorno positivo desde o início, dentre outros.

Os gráficos foram então analisados, comparando-se o desempenho dos fundos de mesma classe, com a finalidade de escolher o ativo com o melhor desempenho no período analisado, para cada classe de ativos. Foram realizadas 7 diferentes comparações, que envolveram desde o retorno acumulado dos fundos até a evolução do número de investidores, bem como algumas estatísticas, conforme descrito adiante.

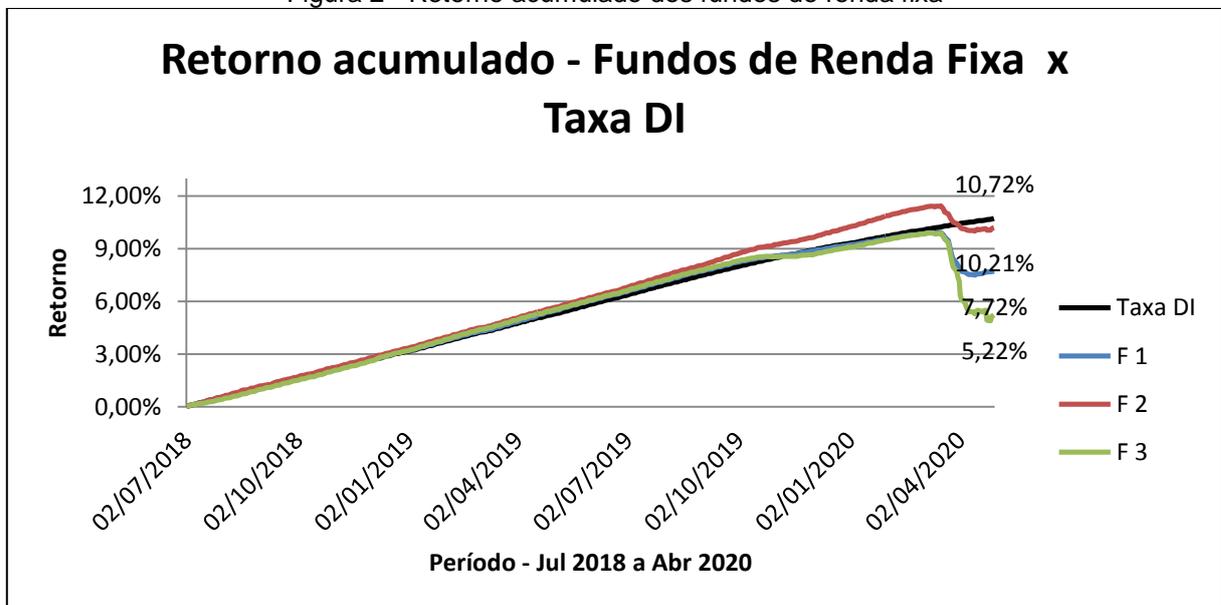
Os ativos financeiros utilizados neste trabalho foram fundos de investimentos considerados acessíveis à grande maioria da população brasileira, visto que alguns desses requerem o investimento inicial mínimo de R\$ 100,00, ou até menos, e todos

são disponibilizados em plataformas digitais não pertencentes às maiores instituições bancárias de varejo. Adicionalmente, os fundos contam com gestores profissionais de recursos financeiros, que em tese possuem embasamento técnico e mais experiência em investimentos.

### 7.1 RETORNO ACUMULADO

A primeira comparação foi referente ao retorno acumulado dos ativos, iniciando-se a partir da classe Renda Fixa (RF). Para a classe RF, o período foi entre 02 de julho de 2018 e 30 de abril de 2020 e foram comparados três fundos diferentes, F 1, F 2 e F 3, além do índice de referência, a Taxa DI (CDI). O gráfico com esta comparação pode ser visto na Figura 2.

Figura 2 - Retorno acumulado dos fundos de renda fixa



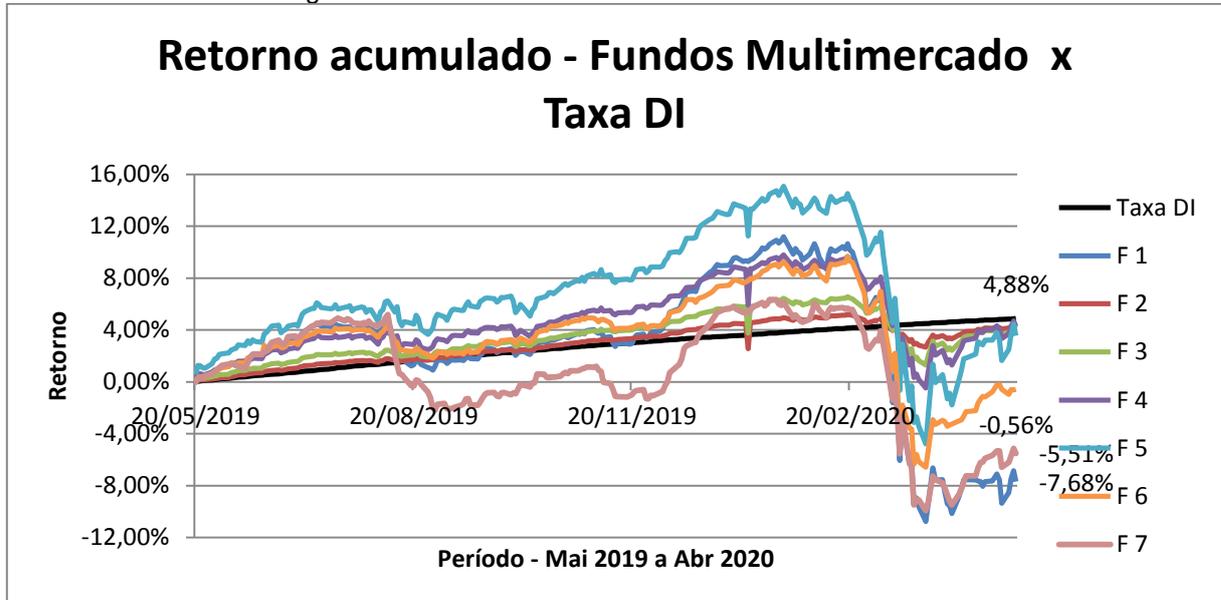
Fonte: Autor.

Percebe-se, pelo gráfico da Figura 2, que o fundo de renda fixa F 2 apresentou um melhor retorno acumulado no período, quando comparado aos demais. Além disso, a diferença para a Taxa DI foi positivamente mais expressiva, o que pode ser observado no período entre setembro de 2019 e março de 2020.

A segunda classe foi Multimercado (Multi), como pode ser visto na Figura 3. Para essa classe, o período considerado foi entre 20 de maio de 2019 e 30 de abril

de 2020. O índice de referência do mercado é a Taxa DI e foram comparados sete fundos diferentes.

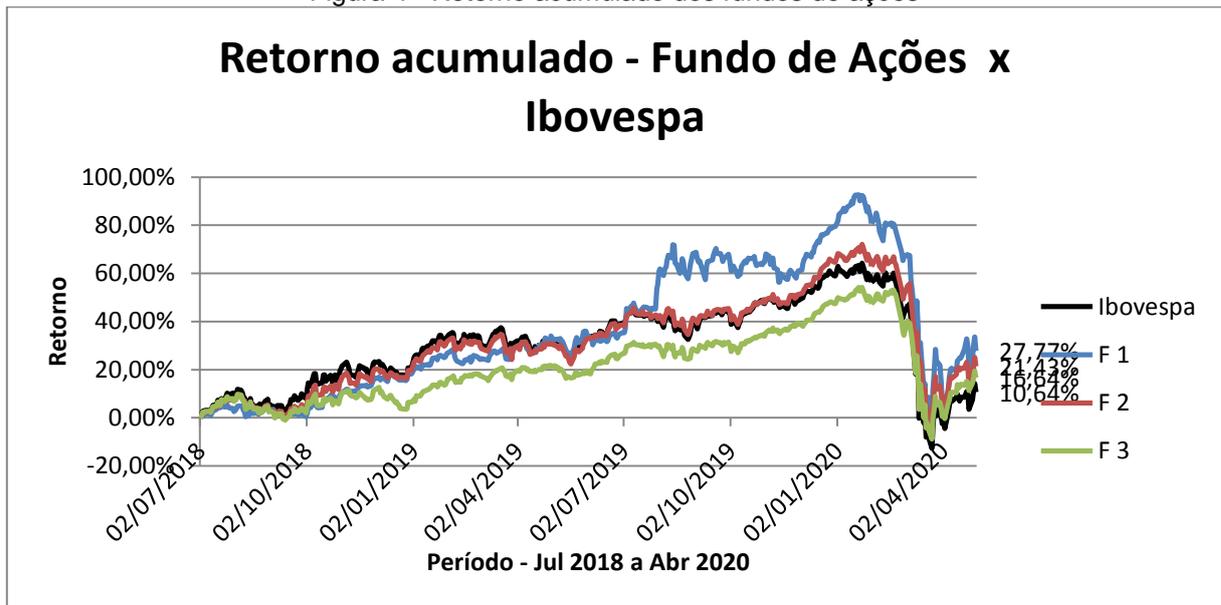
Figura 3 - Retorno acumulado dos fundos multimercado



Pelo gráfico da Figura 3, o fundo F 5 transmite a impressão de ter obtido um maior retorno acumulado no período, no entanto, a queda no retorno acumulado entre fevereiro e março de 2020 foi expressiva o suficiente para que o retorno acumulado em relação à Taxa DI ficasse menor do que o fundo F 2, que foi mais consistente ao longo do tempo, com menos oscilações.

A terceira e última classe considerada foi Ações. Nesse caso, o período foi entre 02 de julho de 2018 e 30 de abril de 2020, com 3 fundos comparados e o índice de referência sendo o Ibovespa. Como pode ser visto no gráfico da Figura 4, o fundo F 1 apresentou o melhor resultado.

Figura 4 - Retorno acumulado dos fundos de ações



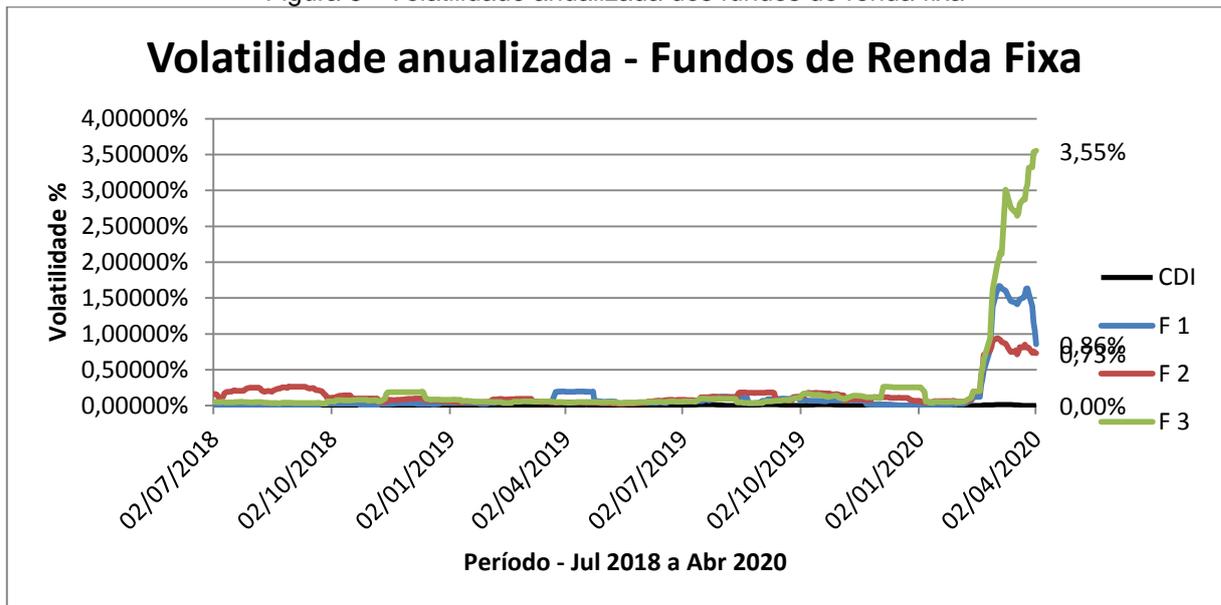
Fonte: Autor.

Pelo gráfico da Figura 4, identifica-se que o fundo F 1 acumulou mais retorno por mais tempo.

## 7.2 RISCO OU VOLATILIDADE

A segunda comparação foi referente à evolução da volatilidade anualizada dos fundos. A volatilidade é a medida do risco do ativo, ou o grau das variações esperadas, positivas ou negativas, do retorno. Iniciou-se com a classe RF, conforme exibido na Figura 5 e, nesse caso, partiu-se da premissa de que quanto menor o grau de oscilação do retorno, melhor o ativo.

Figura 5 - Volatilidade anualizada dos fundos de renda fixa

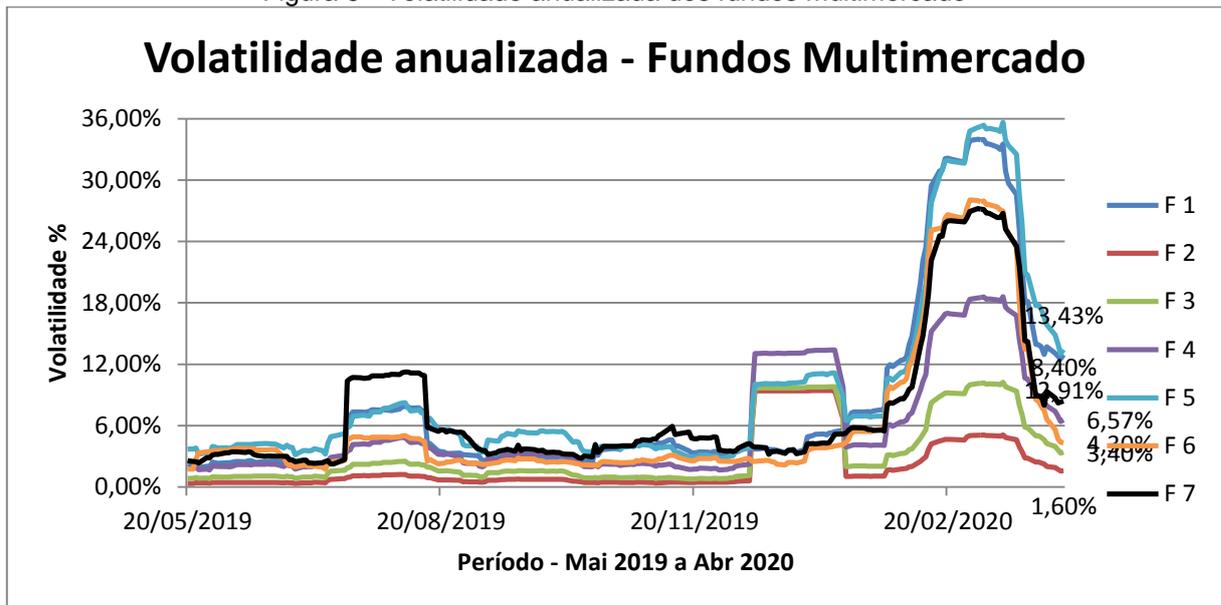


Fonte: Autor.

Percebe-se, pelo gráfico da Figura 5, que o fundo F 2 teve o melhor desempenho. Nota-se, também, que a volatilidade do CDI, índice de referência, permaneceu em 0,00%. Títulos de renda fixa que têm o comportamento próximo ao do CDI são considerados os ativos mais seguros do mercado por não serem tão voláteis, ou seja, não apresentaram alto grau de variação do retorno.

Em seguida, comparou-se o risco da classe Multi. Como pode ser visto na Figura 6, o fundo F 2 apresentou o melhor desempenho, com menos oscilações.

Figura 6 - Volatilidade anualizada dos fundos multimercado

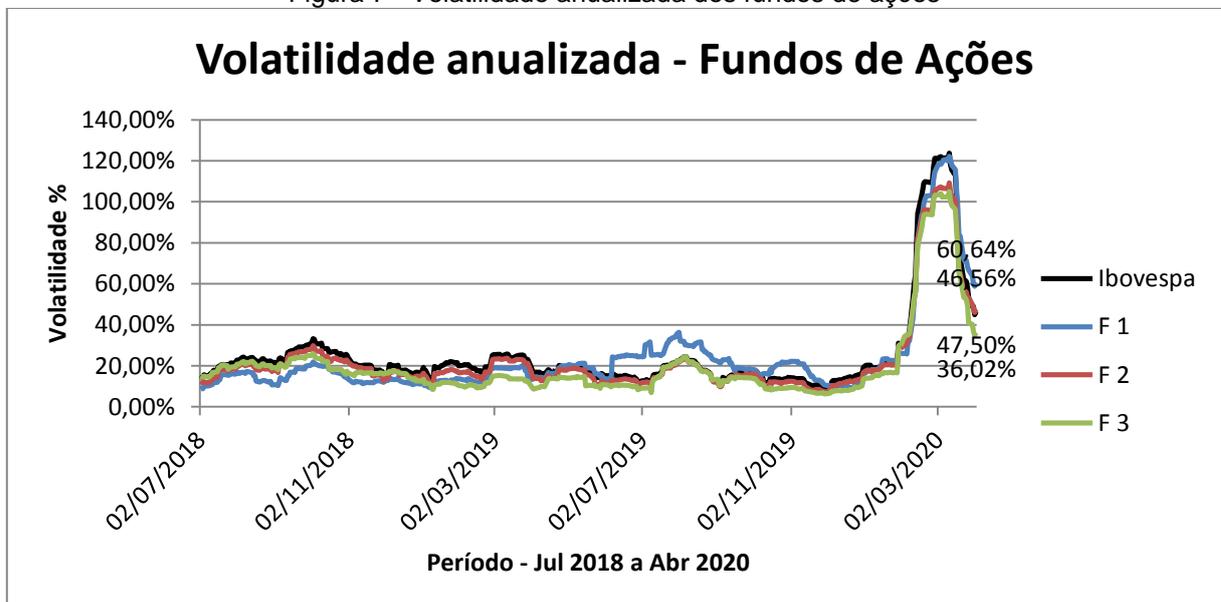


Fonte: Autor.

A partir do gráfico exibido na Figura 6, nota-se que o fundo F 2 permaneceu por mais tempo com baixo grau de oscilação do retorno, finalizando o período com a menor volatilidade anualizada, abaixo de 3%.

Finalizando a comparação do risco, a última classe foi Ações. Analisando o gráfico da Figura 7, conclui-se que o fundo F 3 demonstrou os melhores resultados para o período considerado.

Figura 7 - Volatilidade anualizada dos fundos de ações



Fonte: Autor.

Pelo gráfico exibido na Figura 7, nota-se que o fundo F 3 apresentou menores oscilações no retorno, finalizando a série com 36,02%.

### 7.3 ÍNDICE DE SHARPE

Continuando as comparações, o terceiro critério foi o índice de Sharpe. Essa é uma medida da relação risco e retorno de um ativo e indica quanto de excesso de retorno se obtém para cada grau de risco assumido, considerando que o excesso de retorno é o retorno do ativo subtraindo-se o retorno da taxa livre de risco, ou Taxa DI. Ou seja, quanto maior esse índice, melhor o ativo. Na classe RF, foram obtidos os seguintes valores descritos na Tabela 1:

Tabela 1 - Índice de Sharpe dos fundos de renda fixa

<b>F1</b>	<b>F2</b>	<b>F3</b>
-2,96	-0,73	-2,76

Fonte: Autor.

Pelos valores apresentados na Tabela 1, conclui-se que o fundo F 2 possui a melhor relação entre risco e retorno.

Para a classe Multi, obteve-se os valores apresentados na Tabela 2. De acordo com esses valores, percebe-se que o fundo F 4 apresentou o melhor resultado.

Tabela 2 - Índice de Sharpe dos fundos multimercado

<b>F1</b>	<b>F2</b>	<b>F3</b>	<b>F4</b>	<b>F5</b>	<b>F6</b>	<b>F7</b>
-0,56	-0,10	-0,09	-0,04	-0,05	-0,31	-0,55

Fonte: Autor.

Pelos dados apresentados na Tabela 2, nota-se que o fundo F 4 se destacou, com valor de -0,04 para o índice de Sharpe.

Já para a classe Ações, os valores obtidos para o índice de Sharpe, apresentados na Tabela 3, permitem concluir que o melhor fundo foi o F 1.

Tabela 3 - Índice de Sharpe dos fundos de ações

F1	F2	F3
0,25	0,18	0,11

Fonte: Autor.

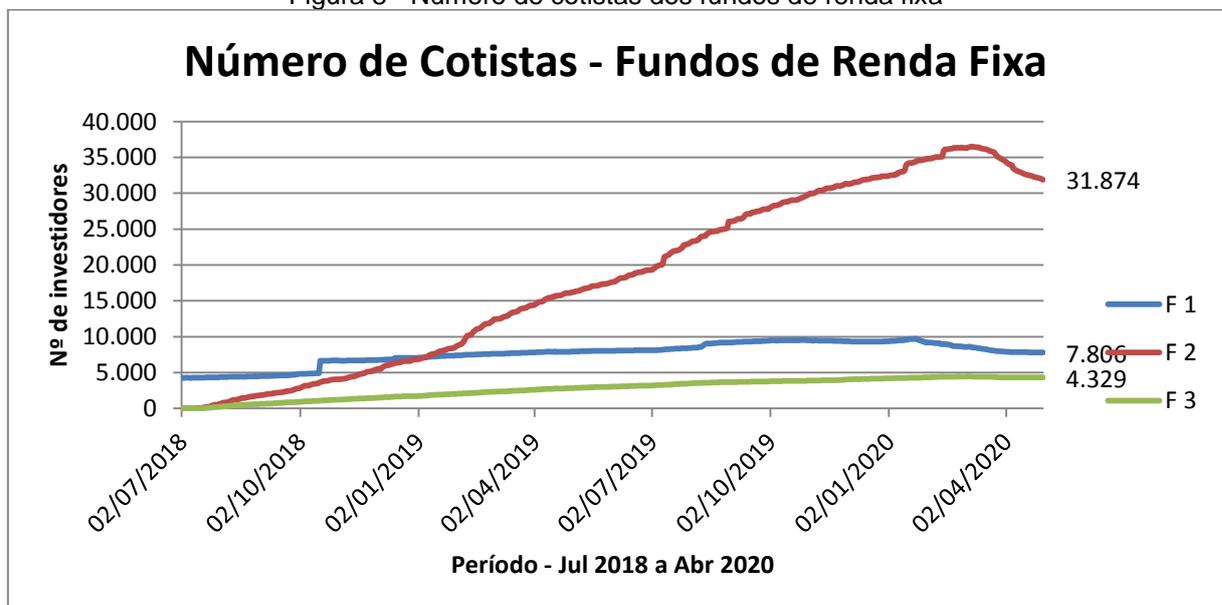
Percebe-se, pelos valores da Tabela 3, o valor de 0,25 para o fundo F 1 como o maior dentre os três fundos comparados.

Os valores do índice de Sharpe podem ser negativos se os ativos apresentarem retorno abaixo do CDI (para RF e Multi) ou do Ibovespa (para Ações) no período.

#### 7.4 QUANTIDADE DE COTISTAS E PATRIMÔNIO LÍQUIDO

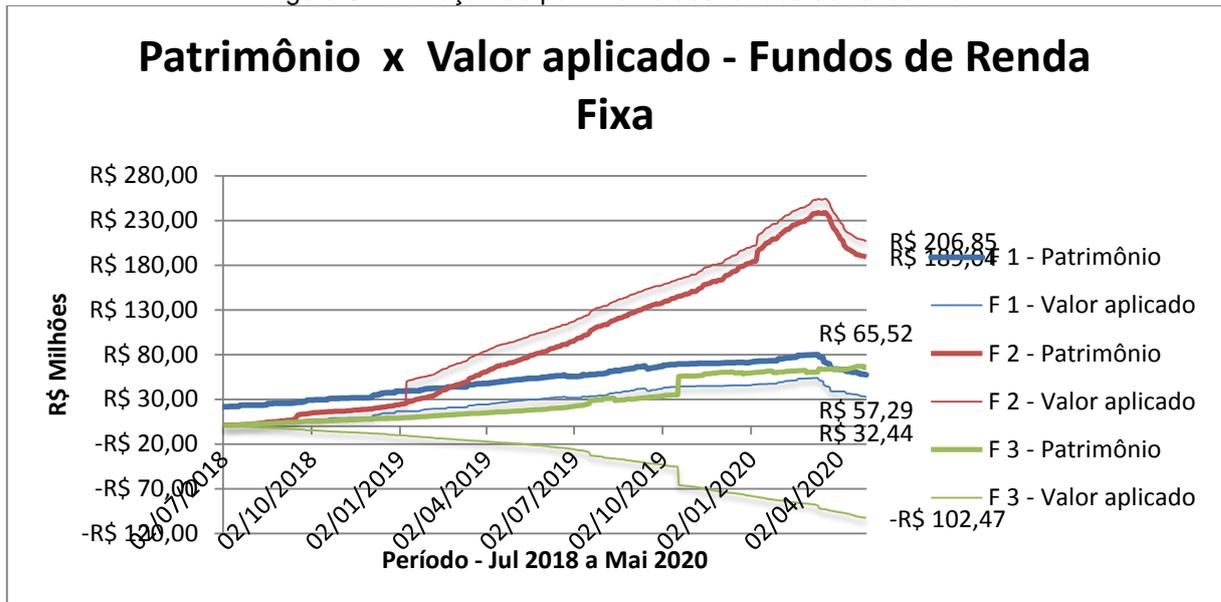
O quarto critério de comparação foi a evolução do número de cotistas (investidores) dos fundos, conjuntamente à evolução do patrimônio líquido e valor aplicado. Em relação ao RF, o comportamento dos ativos estão descritos pelos gráficos apresentados nas Figuras 8 e 9.

Figura 8 - Número de cotistas dos fundos de renda fixa



Fonte: Autor.

Figura 9 - Evolução do patrimônio dos fundos de renda fixa

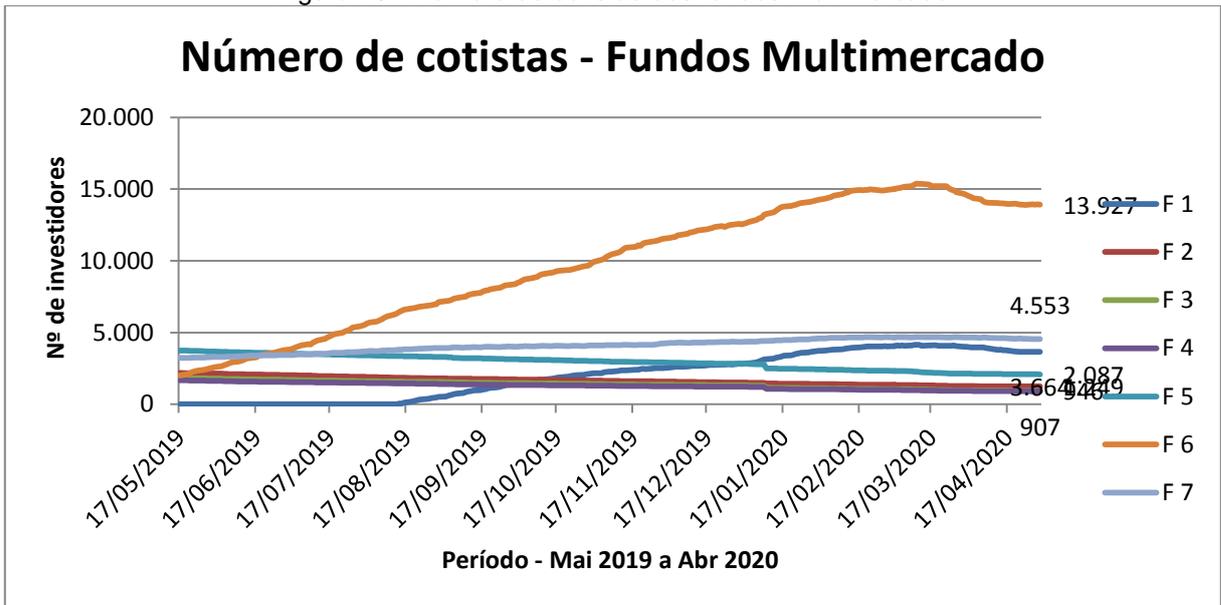


Fonte: Autor.

É fácil perceber, analisando os gráficos apresentados nas Figuras 8 e 9, que o fundo F 2 teve uma evolução expressiva, frente aos outros dois que foram comparados. Nota-se valores negativos para o valor aplicado do F 3, indicando terem ocorridos mais resgates do que aplicações.

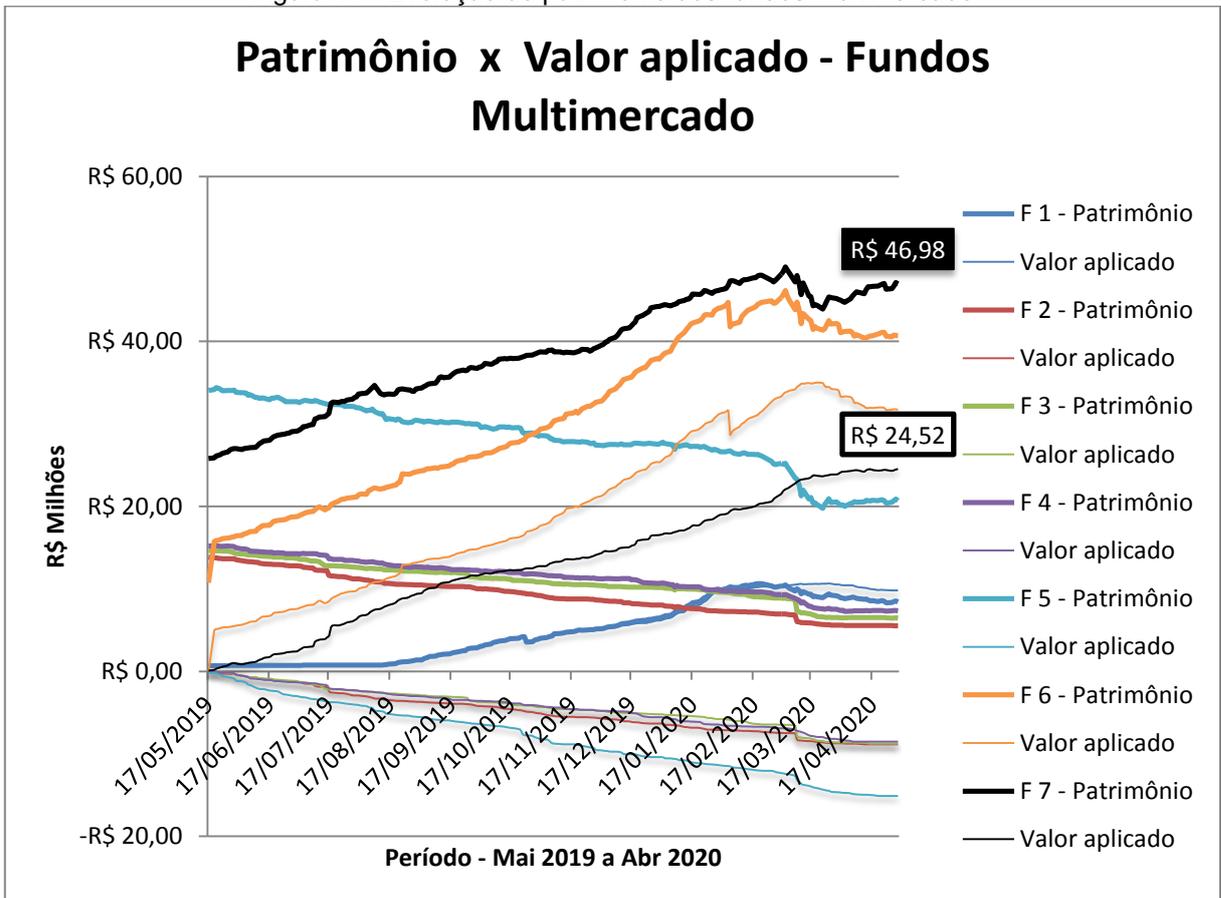
Na classe Multi, obteve-se os comportamentos descritos nos gráficos apresentados nas Figuras 10 e 11.

Figura 10 - Número de cotistas dos fundos multimercado



Fonte: Autor.

Figura 11 - Evolução do patrimônio dos fundos multimercado

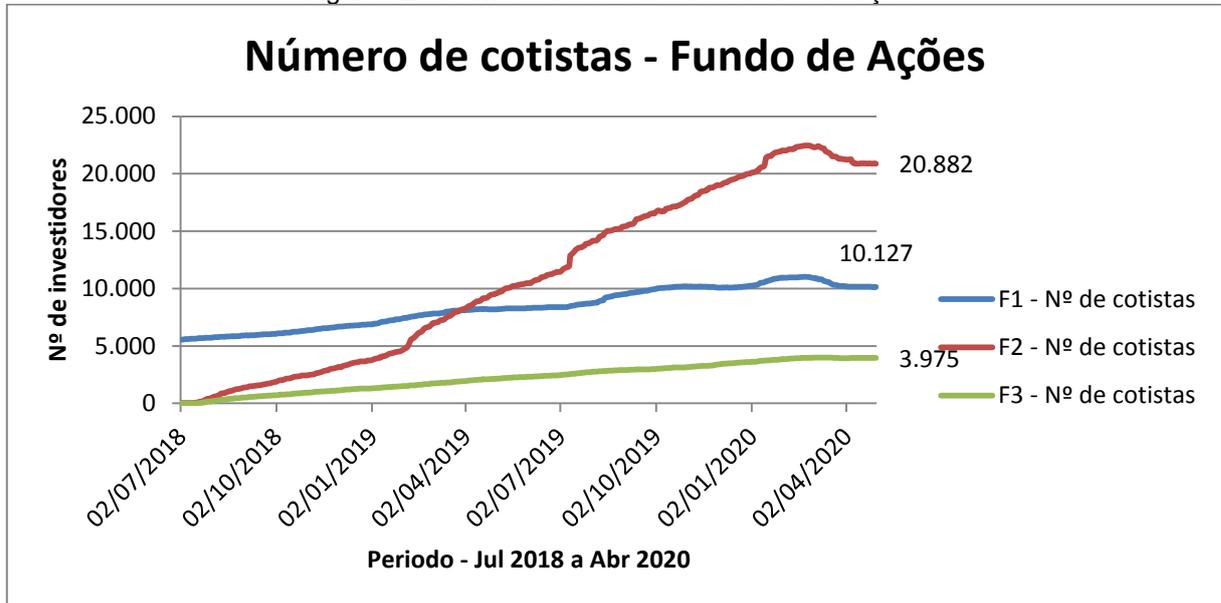


Fonte: Autor.

Vistos os comportamentos dos ativos, apresentados nas Figuras 10 e 11, destaca-se o fundo F 7, com melhor desempenho no período.

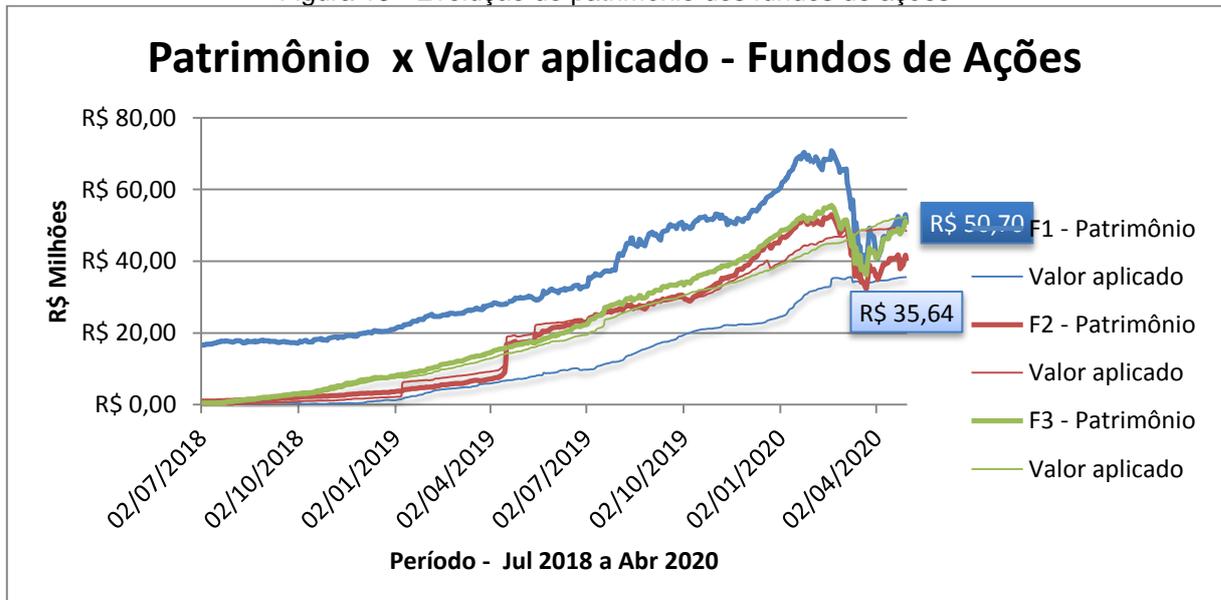
Já para Ações, o comportamento dos ativos está descrito nos gráficos apresentados nas Figuras 12 e 13.

Figura 12 - Número de cotistas dos fundos de ações



Fonte: Autor.

Figura 13 - Evolução do patrimônio dos fundos de ações



Fonte: Autor.

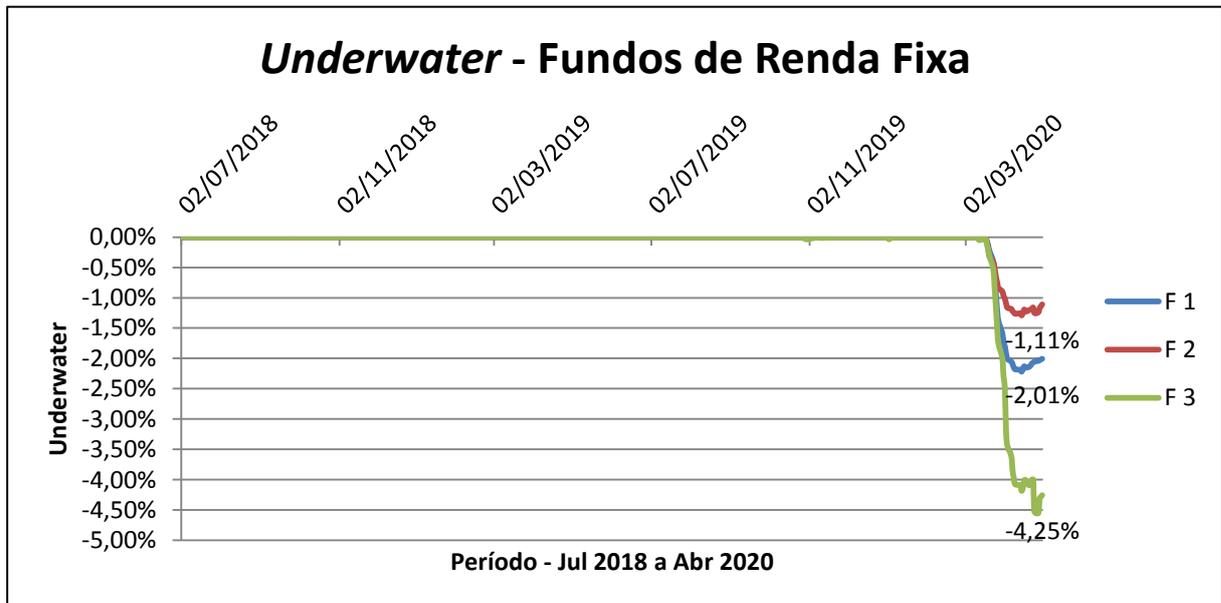
De acordo com os gráficos apresentados nas Figuras 12 e 13, destaque para F 1, que apresentou melhor desempenho. O F1 apresentou expressivo aumento do

patrimônio líquido, com o menor valor aplicado e quase a metade do número de cotistas do F 2. Nesse caso, conclui-se que a evolução do patrimônio se deve aos rendimentos obtidos com o fundo, dada a estratégia de gestão da carteira.

### 7.5 PERDA MÁXIMA ACUMULADA (*UNDERWATER*)

O próximo critério de comparação foi o *Underwater*, que indica a máxima perda acumulada dos fundos, bem como o tempo necessário para recuperação. Quanto menor seu valor, melhor foi o desempenho do ativo. Para a classe RF, obteve-se os comportamentos descritos no gráfico da Figura 14.

Figura 14 - Underwater dos fundos de renda fixa

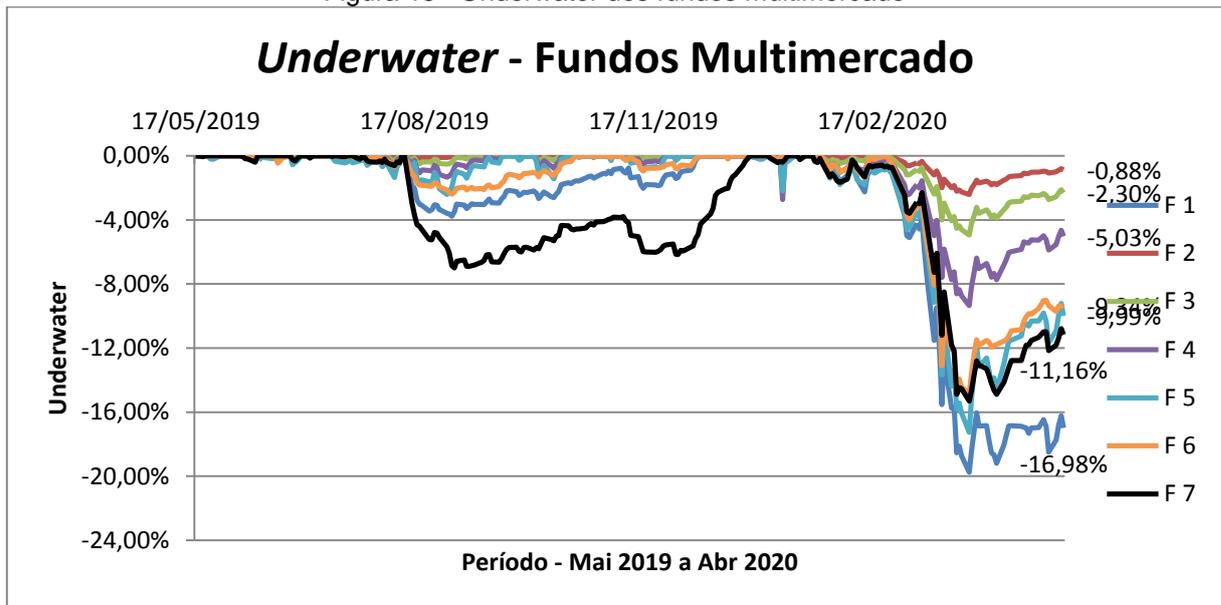


Fonte: Autor.

Com base no gráfico da Figura 14, destaca-se o F 2, pois acumulou menos perdas ao longo do período analisado. Os fundos F 3 e F 1 acumularam 4,25% e 2,01% em perdas, respectivamente e o F 2 acumulou 1,11%.

Considerando a classe Multi, o comportamento dos ativos são apresentados no gráfico da Figura 15.

Figura 15 - Underwater dos fundos multimercado

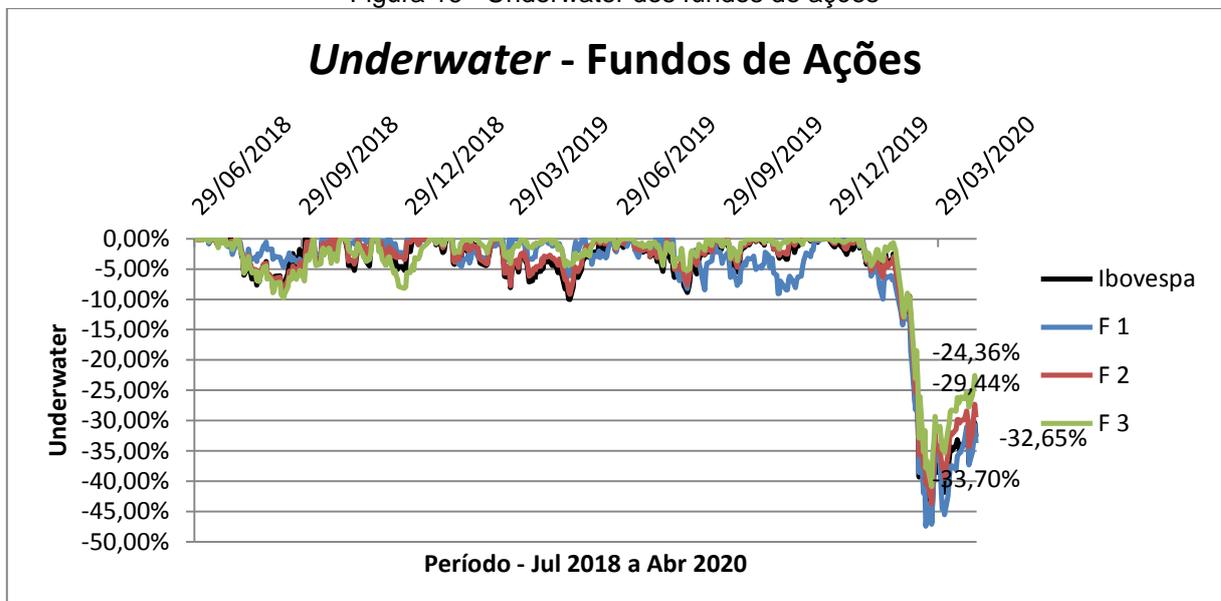


Fonte: Autor.

Visto o gráfico da Figura 15, novamente destaca-se o F 2, por ter acumulado menos perdas ao longo do período analisado. O comportamento do gráfico para esse fundo indica que os valores estão próximo de zero por mais tempo.

Na classe Ações, considerando o desempenho dos ativos apresentado no gráfico da Figura 16, conclui-se que o F 3 possui o melhor desempenho.

Figura 16 - Underwater dos fundos de ações



Fonte: Autor.

## 7.6 ESTATÍSTICAS SIMPLES

Por fim, foram comparadas algumas estatísticas dos fundos. Em relação ao RF, obteve-se os valores apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 - Estatísticas simples dos fundos de renda fixa

Renda Fixa	Meses positivos	Meses negativos	Maior retorno	Menor retorno	Número de meses acima do CDI	Número de meses abaixo do CDI	Patrimônio líquido	Quantidade de cotistas	Patrimônio médio / cotista
<b>F1</b>	28 93,33%	2 6,67%	0,60%	-1,65%	19 63,33%	11 36,67%	R\$ 56,3 mi	7,8 mil	R\$ 7.217,95
<b>F2</b>	22 91,67%	2 8,33%	0,65%	-0,84%	20 80,00%	5 20,00%	R\$ 186,4 mi	31,5 mil	R\$ 5.917,46
<b>F3</b>	21 91,30%	2 8,70%	0,61%	-2,23%	16 69,57%	7 30,43%	R\$ 68,0 mi	4,3 mil	R\$ 15.813,95
<i>CDI</i>	293	0	3,29%	0,22%	-	-	-	-	-

Fonte: Autor.

Com base nos valores descritos na Tabela 4, percebe-se o destaque do F 2, pelo maior número de meses com retorno acima do CDI, maior quantidade de cotistas e maior retorno.

Para a classe Multi, os valores das estatísticas analisadas são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 - Estatísticas simples dos fundos multimercado

Multimercado	Meses positivos	Meses negativos	Maior retorno	Menor retorno	Número de meses acima do CDI	Número de meses abaixo do CDI	Patrimônio líquido	Quantidade de cotistas	Patrimônio médio / cotista
<b>F1</b>	10 76,92%	3 23,08%	4,94%	-13,27%	9 69,23%	4 30,77%	R\$ 8,8 mi	3,7 mil	R\$ 2.378,38
<b>F2</b>	42 95,45%	2 4,55%	1,26%	-1,05%	23 52,27%	21 47,73%	R\$ 217,5 mil	260	R\$ 836,54
<b>F3</b>	41 93,18%	3 6,82%	1,87%	-2,41%	23 52,27%	21 47,73%	R\$ 278,7 mil	187	R\$ 1.490,37
<b>F4</b>	38 86,36%	6 13,64%	2,35%	-4,81%	22 50,00%	22 50,00%	R\$ 230,3 mil	136	R\$ 1.693,38
<b>F5</b>	36 81,82%	8 18,18%	3,87%	-9,31%	25 56,82%	19 43,18%	R\$ 5,5 mi	385	R\$ 14.285,71
<b>F6</b>	10 71,43%	4 28,57%	2,97%	-7,94%	8 57,14%	6 42,86%	R\$ 41,3 mi	14,1 mil	R\$ 2.929,08
<b>F7</b>	15 65,22%	8 34,78%	6,81%	-10,46%	10 43,48%	13 56,52%	R\$ 48,8 mi	4,5 mil	R\$ 10.844,44
<i>CDI</i>	293	0	3,29%	0,22%	-	-	-	-	-

Fonte: Autor.

Analisando os valores descritos na Tabela 5, destacou-se o F 6 devido à consistência nas estatísticas, quantidade de cotistas e patrimônio líquido.

Já a classe Ações, cujos valores das estatísticas estão apresentados na Tabela 6, teve como destaque o F 1.

Tabela 6 - Estatísticas simples dos fundos de ações

Ações	Meses positivos	Meses negativos	Maior retorno	Menor retorno	Número de meses acima do Ibovespa	Número de meses abaixo do Ibovespa	Patrimônio líquido	Quantidade de cotistas	Patrimônio médio / cotista
<b>F1</b>	24 64,86%	13 35,14%	15,34%	-31,43%	18 48,65%	19 51,35%	R\$ 55,1 mi	10,1 mil	R\$ 5.449,51
<b>F2</b>	16 64,00%	9 36,00%	10,53%	-27,17%	16 64,00%	9 36,00%	R\$ 41,3 mi	20,8 mil	R\$ 1.985,58
<b>F3</b>	16 69,57%	7 30,43%	12,19%	-22,58%	11 47,83%	12 52,17%	R\$ 54,2 mi	4,0 mil	R\$ 13.550,00
<i>IBOVESPA</i>	173	120	24,05%	-39,55%	-	-	-	-	-

Fonte: Autor.

Conclui-se, pelos valores apresentados na Tabela 6, que o fundo F 1, apesar de não ter o maior patrimônio médio por cotista, teve o maior retorno e o maior número de meses com retorno acima do Ibovespa.

Ao final das comparações, os fundos escolhidos foram F 2 para RF, F 2 para Multi e F 1 para Ações. Esses fundos foram os escolhidos, pois foram os destaques na maioria dos critérios considerados, tais como o retorno acumulado, volatilidade, Índice de Sharpe, dentre outros, que foram apresentados nos gráficos a partir da Figura 2 até a Figura 16 e pelos valores exibidos a partir da Tabela 1 até a Tabela 6.

Nota-se, porém, nos meses de fevereiro, março e abril de 2020 resultados atípicos para todos os fundos, de todas as classes. Esse foi o período de maior impacto no mercado financeiro causado pela pandemia de COVID-19.

## 7.7 LIDANDO COM OS IMPACTOS DA PANDEMIA DE COVID-19

Visando amenizar a influência dos impactos causado pela pandemia do COVID-19 na otimização da carteira e avaliar somente a eficácia do modelo de alocação de ativos, foi utilizada uma técnica de previsão para os retornos dos meses supracitados.

Para a definição da técnica mais adequada, considerando-se as séries temporais dos retornos mensais dos fundos selecionados, partiu-se do método ARIMA(p,d,q), sem sazonalidade, em que p, d e q são os parâmetros do método e devem ser números inteiros e não negativos. O ARIMA é um método mais geral para análise e previsão de séries temporais e inclui passeio aleatório, tendências aleatórias, suavização exponencial e autorregressão.

O parâmetro p do método ARIMA representa a ordem do termo autorregressivo, ou seja, o número de defasagens (períodos ou meses anteriores) entre as observações da série temporal que influenciam as observações mais atuais. As defasagens também são conhecidas como *lags*. O parâmetro d representa a quantidade de diferenciações necessárias para que a série temporal se torne estacionária, ou seja, para que a média das observações seja constante dentro do período considerado. Diferenciações podem ser consideradas transformações matemáticas. Mais especificamente, nesse caso, a diferenciação é obtida através do cálculo da diferença entre as observações de um período  $t + 1$  e um período  $t$ . Já o

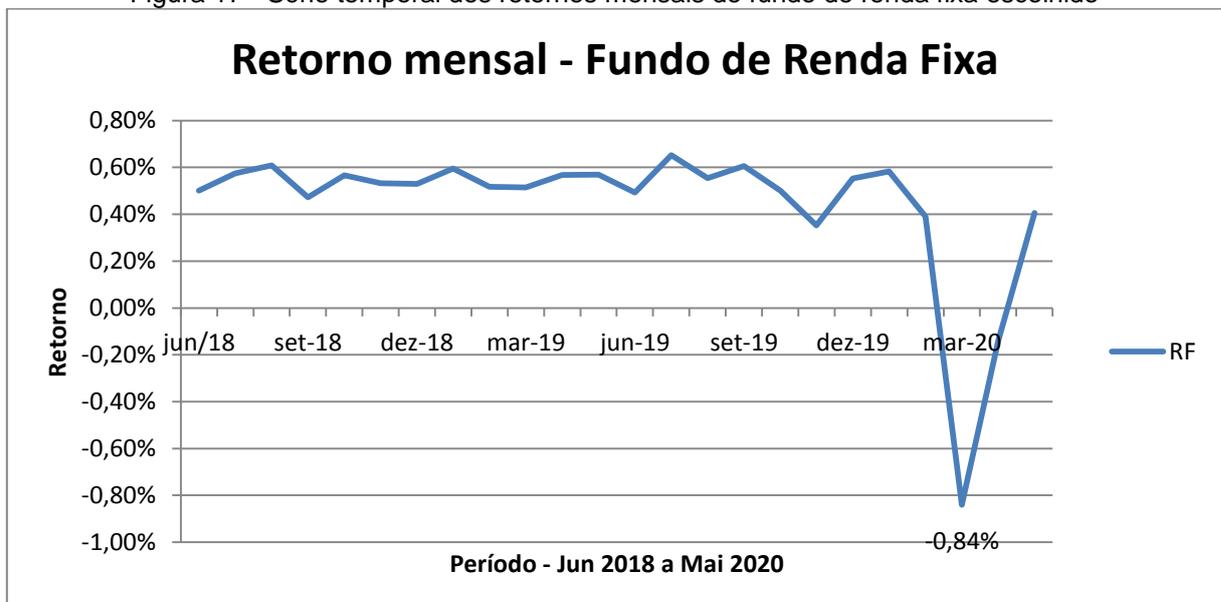
parâmetro  $q$  representa a ordem do termo de médias móveis, ou seja, o número de erros de ajuste considerados para se obter as previsões. Para a definição dos parâmetros  $p$ ,  $d$  e  $q$  do método, os critérios observados foram: estacionariedade da série de dados, função de autocorrelação e função de autocorrelação parcial.

Para a estacionariedade, foram realizados três testes utilizando a linguagem R, sendo, Dickey-Fuller Aumentado, Phillips-Perron e Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS). A análise da função de autocorrelação se baseou na premissa de que se os três primeiros lags apresentarem decrescimento gradual, há evidências estatísticas que indicam existência de autocorrelação significativa entre os dados. Nesse caso, o parâmetro  $q$  precisa ser ajustado, ou seja, acrescido em 1. Já na análise da função de autocorrelação parcial, se os três primeiros lags apresentarem decrescimento gradual, há evidências estatísticas de que o parâmetro  $p$  pode ser acrescido em 1.

#### 7.7.1 PREVISÕES DE RETORNO PARA RENDA FIXA

Para a classe RF, os dados de retorno mensal apresentaram o comportamento exibido no gráfico da Figura 17.

Figura 17 - Série temporal dos retornos mensais do fundo de renda fixa escolhido



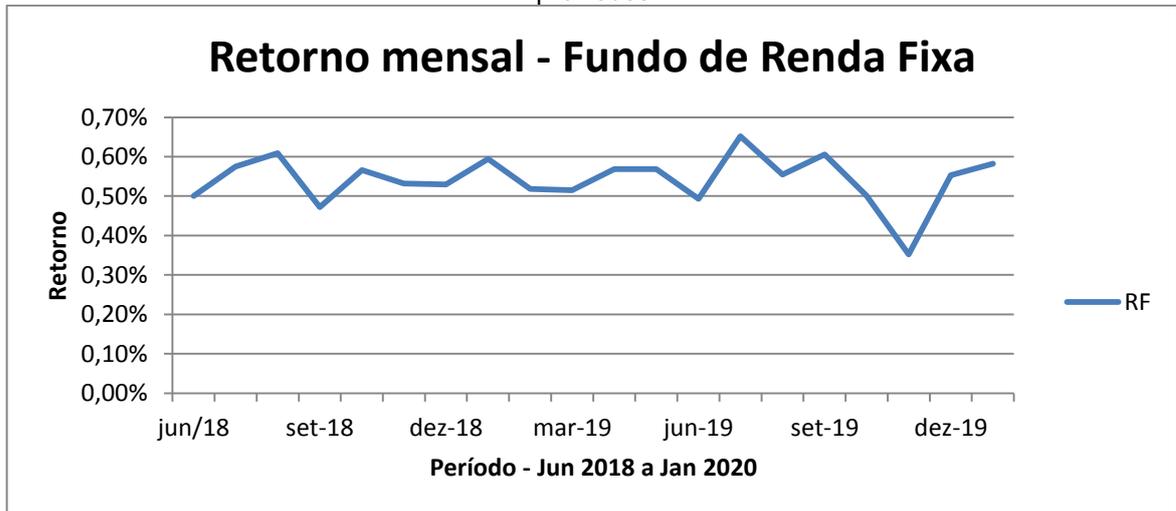
Fonte: Autor.

O gráfico apresentado na Figura 17 é diferente do gráfico de retorno exibido anteriormente (Figura 2), pois apresenta o retorno a cada mês, ao passo que o

anterior exibe o retorno acumulado em todo o período. De todo modo, em ambos é possível perceber o impacto da pandemia do COVID-19 em fevereiro, março e abril de 2020.

Para a realização dos testes de estacionariedade, a série considerada foi de junho de 2018 até janeiro de 2020, representada no gráfico da Figura 18.

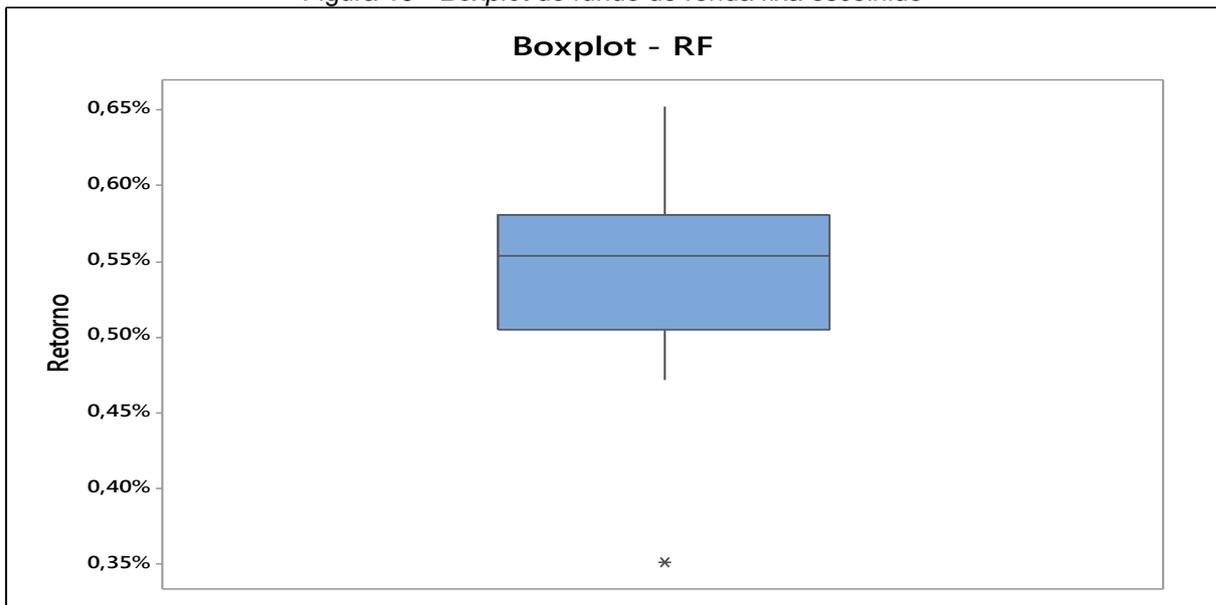
Figura 18 - Série temporal dos retornos mensais do fundo de renda fixa escolhido considerada para previsões



Fonte: Autor.

Analisando o gráfico da Figura 18, nota-se que os retornos não foram fortemente influenciados pela pandemia do COVID-19, dado que o período para sua elaboração não envolve os meses de fevereiro, março e abril de 2020.

Após a obtenção dos gráficos de retorno, pesquisou-se por *outliers* na série histórica. Para isso foi construído o boxplot apresentado na Figura 19.

Figura 19 - *Boxplot* do fundo de renda fixa escolhido

Fonte: Autor.

A partir do boxplot da Figura 19, identificou-se um *outlier* na série de retornos mensais do RF, novembro de 2019 com valor igual a 0,35%. Esse valor foi substituído pela mediana da série, 0,55% para realização dos testes de estacionariedade e obtenção das previsões de retorno. Os resultados dos testes de estacionariedade para a série RF encontram-se na Tabela 7.

Tabela 7 - Testes de estacionariedade da série de retornos do fundo de renda fixa

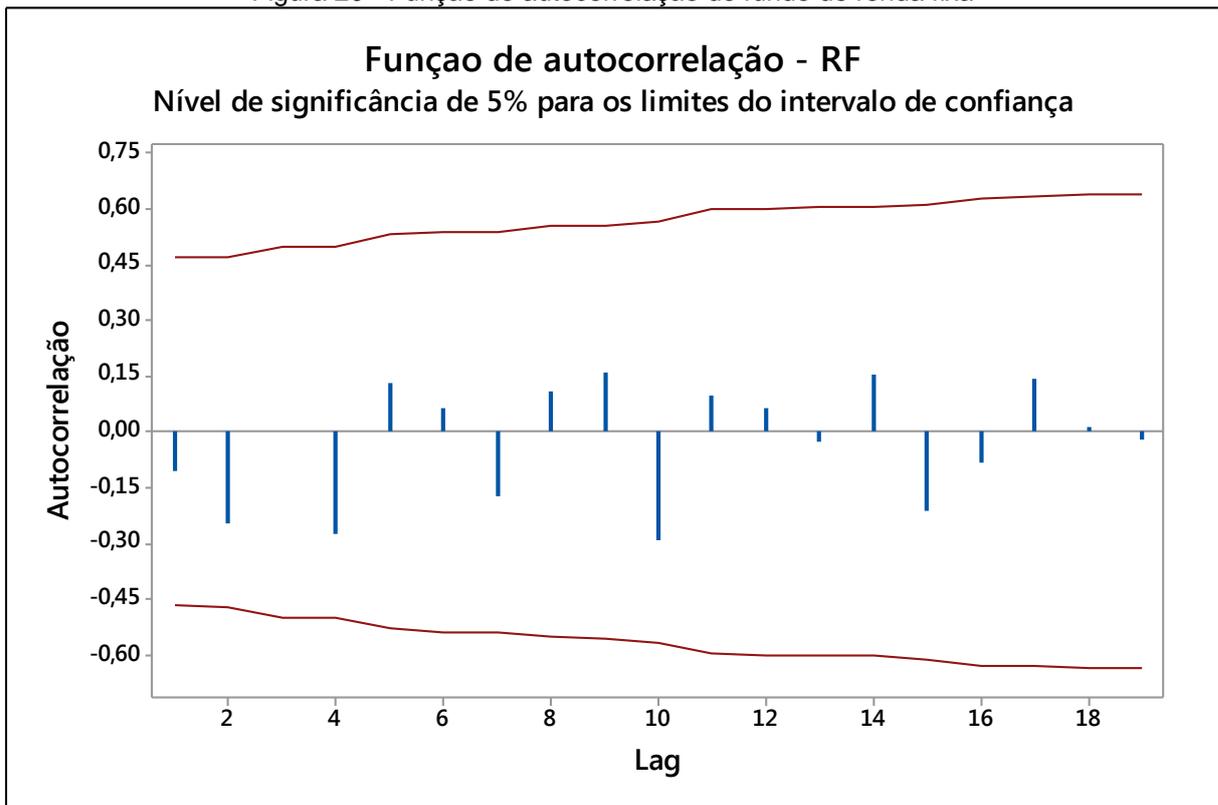
<b>Dickey-Fuller Aumentado</b>	Valor P = 0,01144	Rejeita $H_0$
<b>Phillips-Perron</b>	Valor P = 0,01687	Rejeita $H_0$
<b>KPSS</b>	Valor P = 0,1	Aceita $H_0$

Fonte: Autor.

Pela Tabela 7 conclui-se que a série é estacionária. Com isso, o parâmetro  $d$  do método ARIMA será igual a 0, pois não foi necessário realizar transformações matemáticas para que a série se tornasse estacionária.

Assim, parte-se para a observação das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial. Para isso foi gerado o gráfico de autocorrelação apresentado na Figura 20.

Figura 20 - Função de autocorrelação do fundo de renda fixa

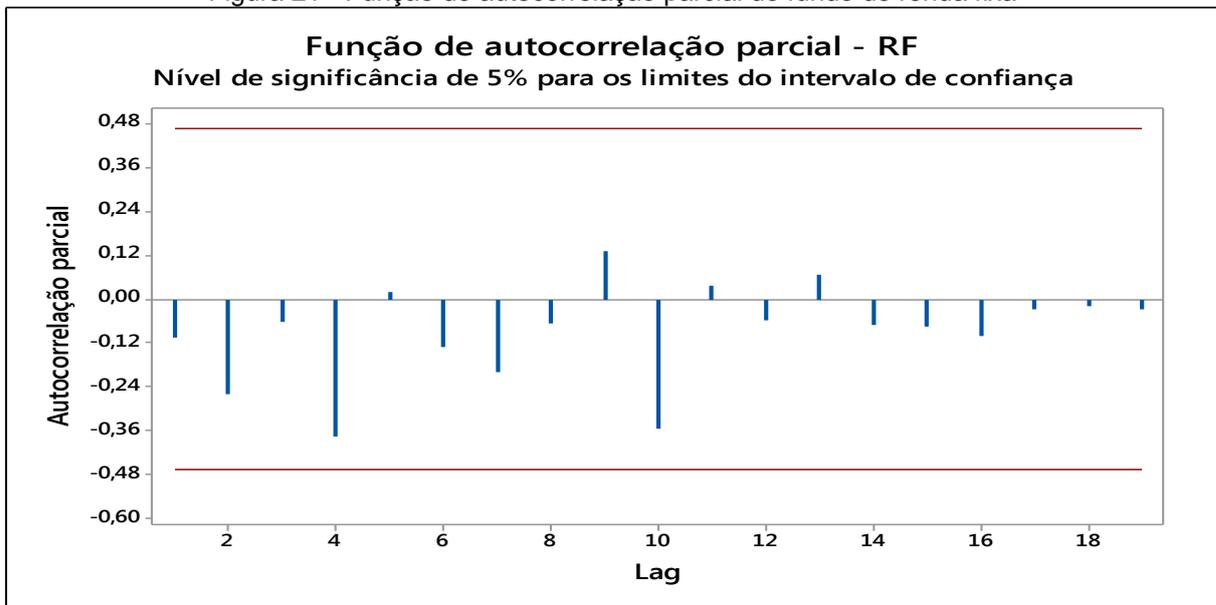


Fonte: Autor.

Analisando a Figura 20, percebe-se que não existem evidências estatísticas significativas de autocorrelação entre os termos da série, visto que os *lags* não apresentam decréscimo gradual e estão todos dentro dos limites do intervalo de confiança, além de não apresentarem um padrão de comportamento. Com isso, o parâmetro  $q$  do ARIMA também será igual a 0.

A seguir foi gerado o gráfico de autocorrelação parcial, sendo este apresentado na Figura 21.

Figura 21 - Função de autocorrelação parcial do fundo de renda fixa

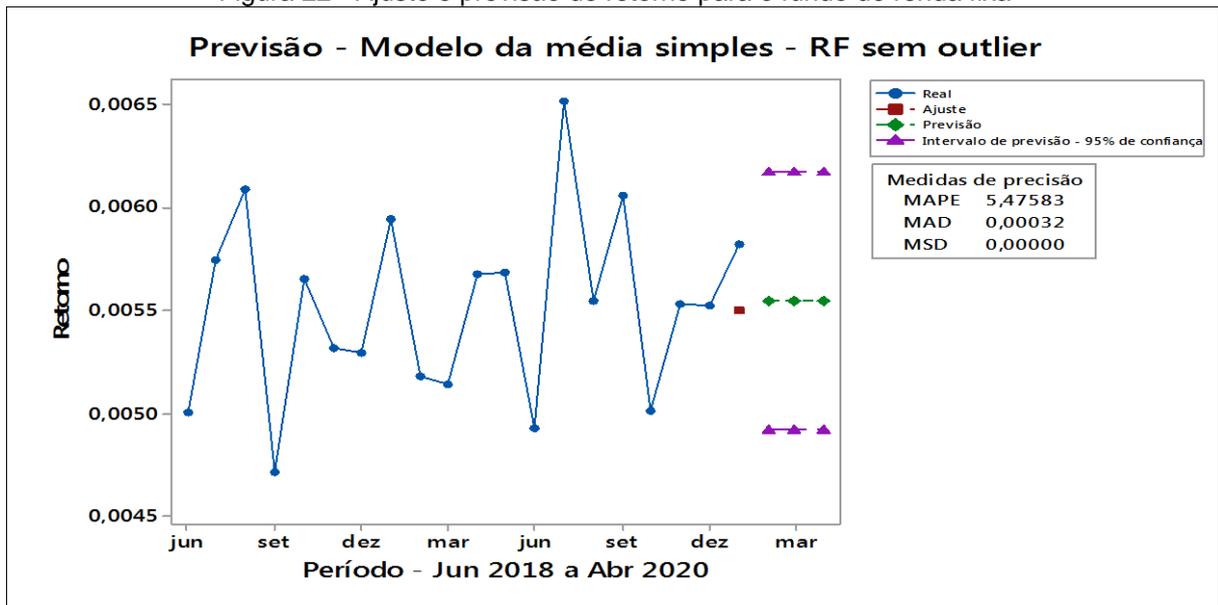


Fonte: Autor.

Do mesmo modo, ao se observar o gráfico de autocorrelação parcial apresentado na Figura 21, todos os lags estão dentro dos limites do intervalo de confiança, não há decrescimento gradual entre os mesmos e há indícios de que são aleatórios. Nesse caso, o parâmetro  $p$  será igual a 0.

Sendo assim, para RF, o método utilizado foi ARIMA(0,0,0). No entanto, um método ARIMA(0,0,0) é equivalente a um de média móvel com parâmetros  $m \simeq n$ , sendo  $m$  a janela de tempo considerada para se obter a próxima previsão e  $n$  o número de períodos de dados (meses) observados. Além disso, esse método de média móvel quando  $m \simeq n$  é equivalente ao da média simples. Assim, utilizou-se esse último para a série RF. Utilizando-se o *software* Minitab®, foram realizadas as previsões para o retorno dos meses de fevereiro, março e abril de 2020 para a série RF. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 22 e na Tabela 8.

Figura 22 - Ajuste e previsão de retorno para o fundo de renda fixa



Fonte: Autor.

Com base no gráfico da Figura 22, pode-se observar as previsões para os retornos dos ativos da classe RF, na cor verde. Os resultados obtidos são descritos na Tabela 8.

Tabela 8 - Previsões de retorno para o fundo de renda fixa

<b>Mês</b>	<b>Limite inferior</b>	<b>Previsão</b>	<b>Limite superior</b>
<b>Fev 2020</b>	0,49%	0,55%	0,62%
<b>Mar 2020</b>	0,49%	0,55%	0,62%
<b>Abr 2020</b>	0,49%	0,55%	0,62%

Fonte: Autor.

Pela Tabela 8, percebe-se que o método de previsão utilizado produziu previsões iguais para os três meses, estimando o retorno do ativo da classe RF em 0,55%. Devido à ferramenta Minitab® e o método da média simples para obtenção das previsões, não houve resíduo a ser analisado.

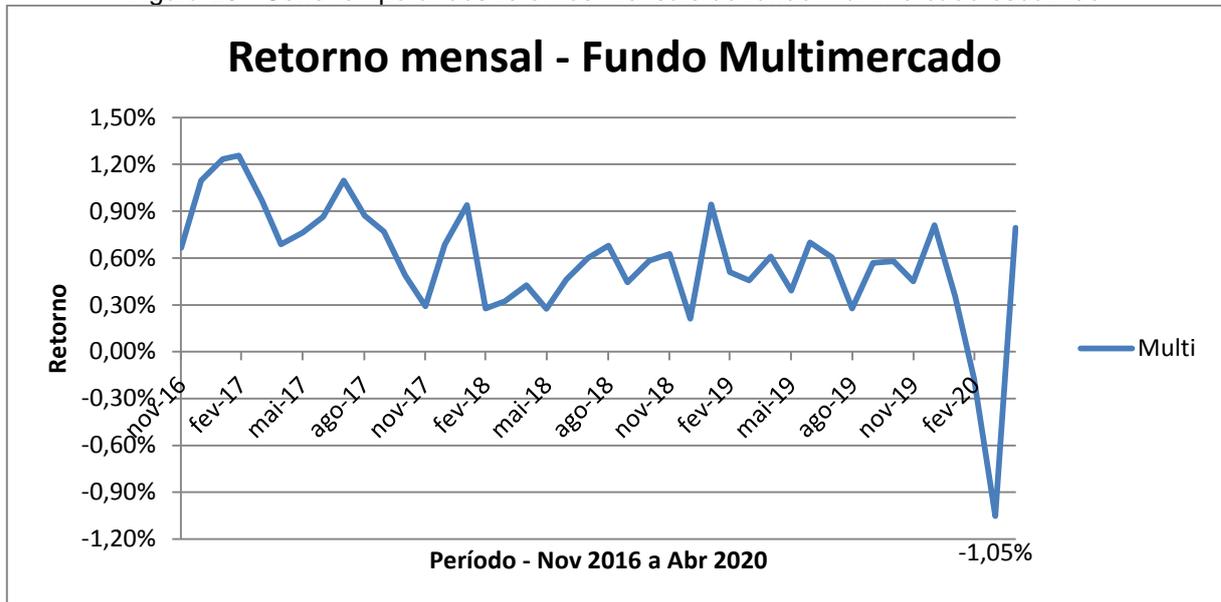
Para saber se as previsões fazem sentido, as seguintes medidas de precisão foram observadas: MAPE (Erro Percentual Absoluto Médio); MAD (Erro Absoluto Médio); MSD (Erro Quadrático Médio) e; RMSE (Raiz do Erro Quadrático Médio).

Pelo gráfico da Figura 22, as previsões estão precisas, considerando o MAD igual a 0,00032, MAPE igual a 5,476%, MSD igual a 0,000 e RMSE igual a 0,000.

### 7.7.2 PREVISÕES DE RETORNO PARA MULTIMERCADO

Para a classe Multi, os dados da série de retornos mensais apresentaram o comportamento exibido no gráfico da Figura 23.

Figura 23 - Série temporal dos retornos mensais do fundo multimercado escolhido

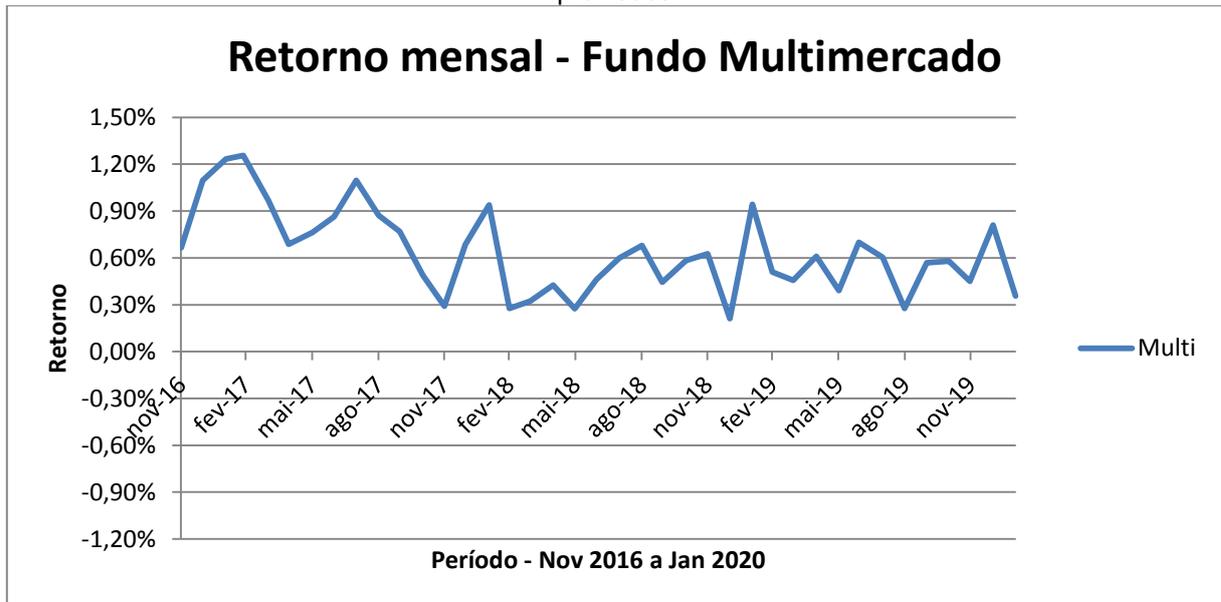


Fonte: Autor.

Analisando o gráfico exibido na Figura 23, identifica-se que a classe Multi apresenta mais oscilações no retorno do que a classe RF (Figura 17), indicando que esse ativo tem maiores potenciais de perdas e de ganhos.

Para a realização dos testes de estacionariedade, a série considerada foi de novembro de 2016 até janeiro de 2020, apresentada na Figura 24.

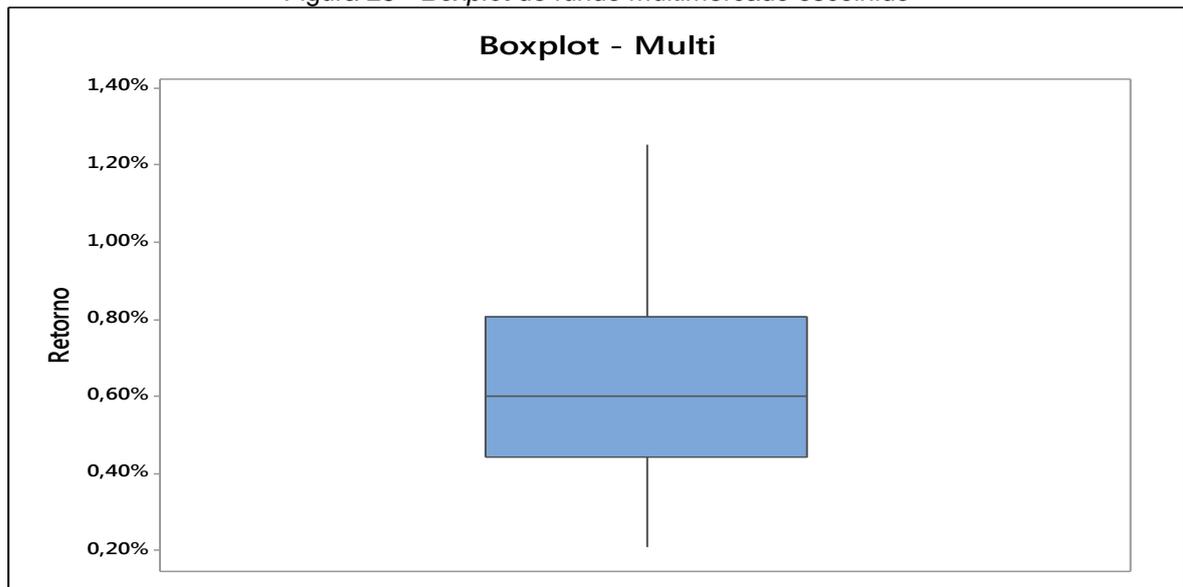
Figura 24 - Série temporal dos retornos mensais do fundo multimercado escolhido considerada para previsões



Fonte: Autor.

Pelo gráfico da Figura 24, constata-se uma leve tendência decrescente ao longo do período. Nota-se, também, que os retornos não foram fortemente impactados pela pandemia do COVID-19, dado que o período considerado para elaboração do gráfico não incluiu os meses de fevereiro, março e abril de 2020.

Através da elaboração de um *boxplot* (Figura 25), buscou-se identificar valores que poderiam influenciar as análises.

Figura 25 - *Boxplot* do fundo multimercado escolhido

Fonte: Autor.

Pelo *boxplot* exibido na Figura 25, observou-se que não houve *outlier* na série do fundo Multi.

Da mesma forma que para o fundo RF, foram realizados testes de estacionariedade e os resultados obtidos estão descritos na Tabela 9.

Tabela 9 - Testes de estacionariedade da série de retornos do fundo multimercado

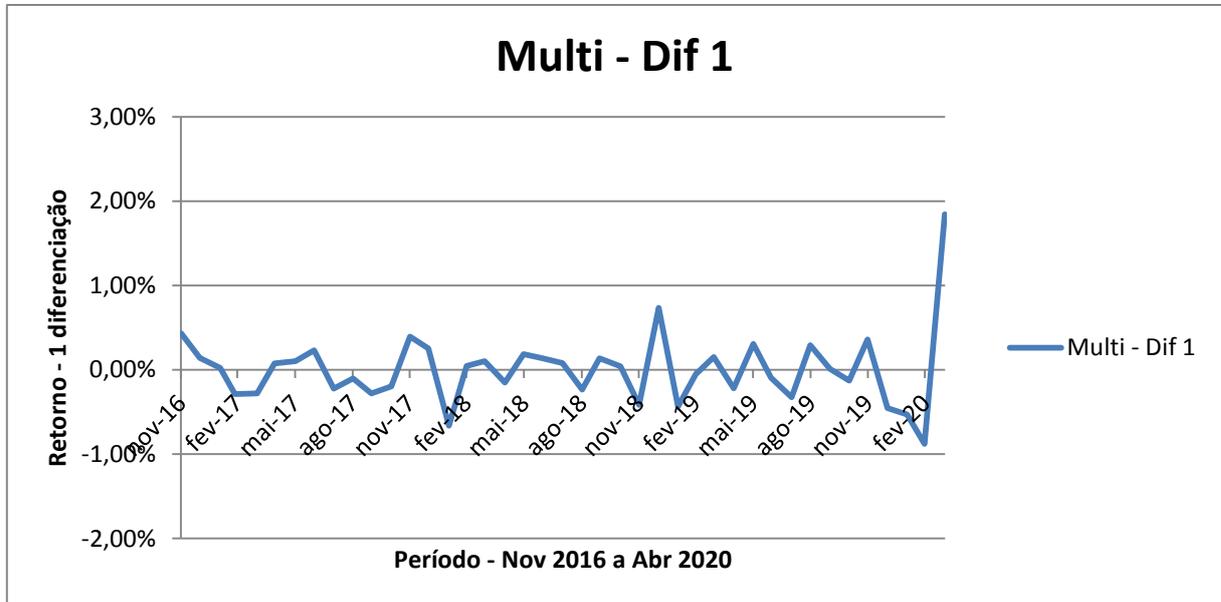
<b>Dickey-Fuller Aumentado</b>	Valor P = 0,04106	Rejeita $H_0$
<b>Phillips-Perron</b>	Valor P = 0,01	Rejeita $H_0$
<b>KPSS</b>	Valor P = 0,02516	Rejeita $H_0$

Fonte: Autor.

Pelos resultados na Tabela 9, há uma divergência quanto à estacionariedade da série, pois pelos testes Dickey-Fuller aumentado e Phillips-Perron a série é estacionária, mas pelo teste KPSS é não estacionária. Com isso, decidiu-se realizar uma diferenciação na série e repetir os testes. Uma diferenciação pode ser considerada uma transformação matemática. Mais especificamente, nesse caso, a diferenciação é obtida através do cálculo da diferença entre as observações de um período  $t + 1$  e um período  $t$ . Para a série da classe Multi, que se inicia com o retorno de novembro de 2016, subtraiu-se do retorno de dezembro de 2016 o retorno do mês anterior, ou seja, o retorno de novembro do mesmo ano. Para o mês

de janeiro de 2017, subtraíu-se o retorno do mês de dezembro de 2016 e assim sucessivamente, até a obtenção do retorno de abril de 2020 para a série diferenciada. O gráfico para a nova série pode ser visto na Figura 26.

Figura 26 - Série temporal após uma diferenciação dos retornos mensais do fundo multimercado escolhido

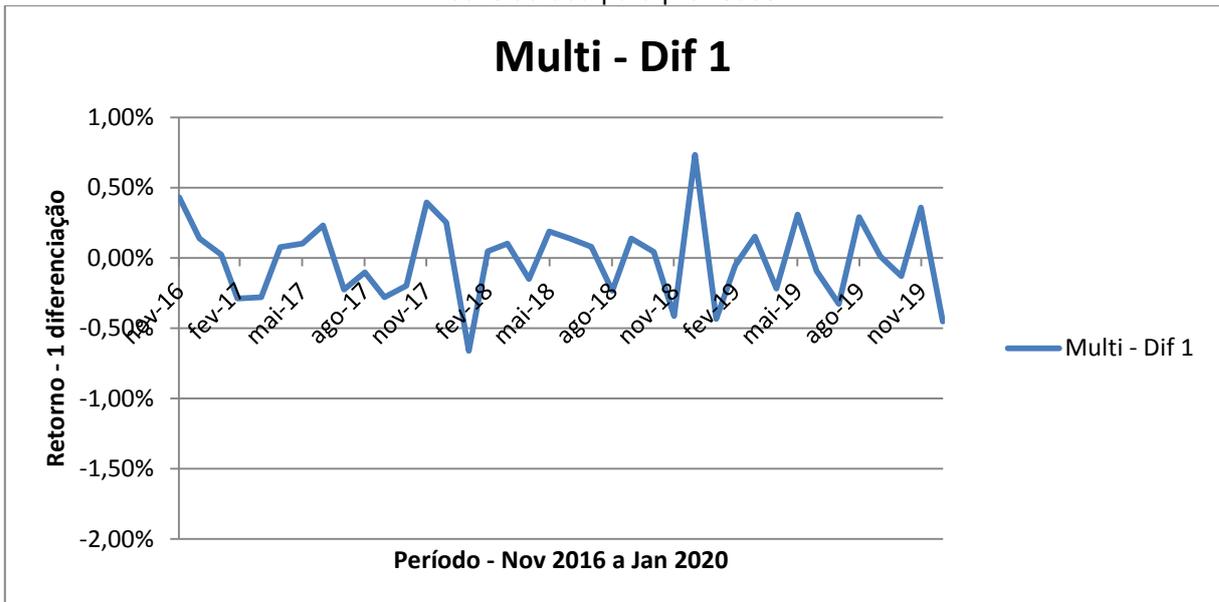


Fonte: Autor.

Pelo gráfico exibido na Figura 26, nota-se uma considerável diferença para com a série de retornos originais da classe Multi (Figura 24). Essa série diferenciada indica um possível valor médio constante e próximo a zero. No final do período, vê-se um dado próximo a 2,00% e que é muito diferente dos outros dados da série, indicando a possível existência de *outlier*.

Considerando a série diferenciada até janeiro de 2020, obteve-se o gráfico da Figura 27.

Figura 27 - Série temporal após uma diferenciação dos retornos mensais do fundo multimercado considerada para previsões

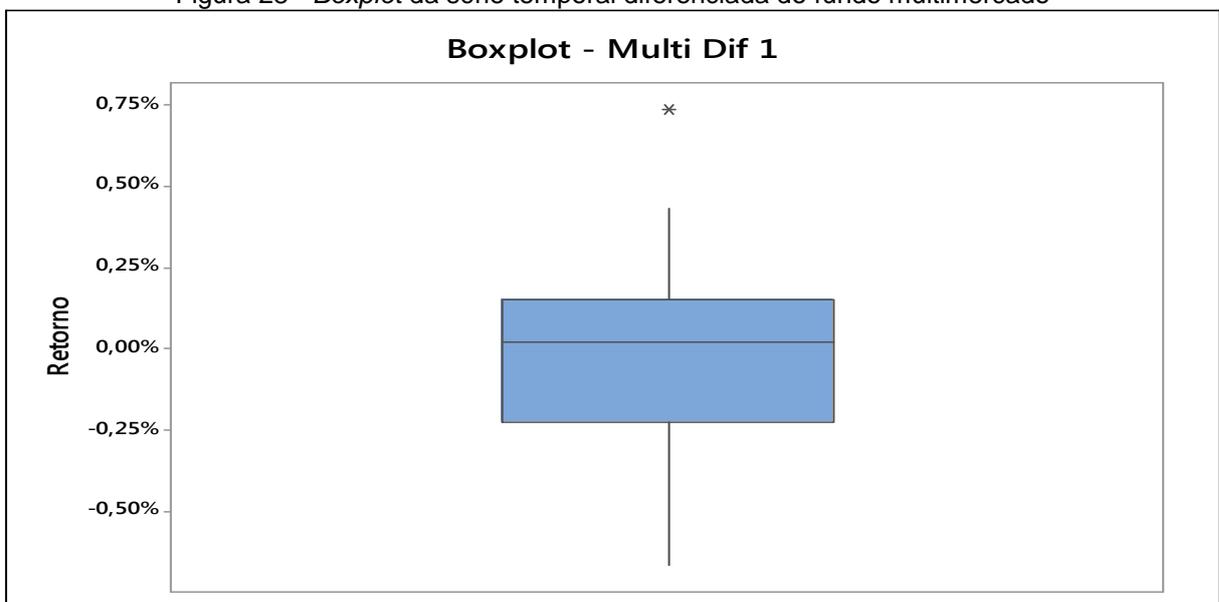


Fonte: Autor.

Vê-se, a partir do gráfico na Figura 27, uma possível característica de estacionariedade na série.

Realizada a primeira diferenciação, foi encontrado um *outlier*, conforme pode ser visto no *boxplot* da Figura 28.

Figura 28 - *Boxplot* da série temporal diferenciada do fundo multimercado



Fonte: Autor.

O outlier encontrado no *boxplot* da Figura 28 foi o retorno de janeiro de 2019, com valor igual a 0,73%. Esse valor foi substituído pela mediana da série Multi Dif 1, igual a 0,02%. Feito isso, novamente foram realizados os testes de estacionariedade, cujos resultados encontram-se na Tabela 10.

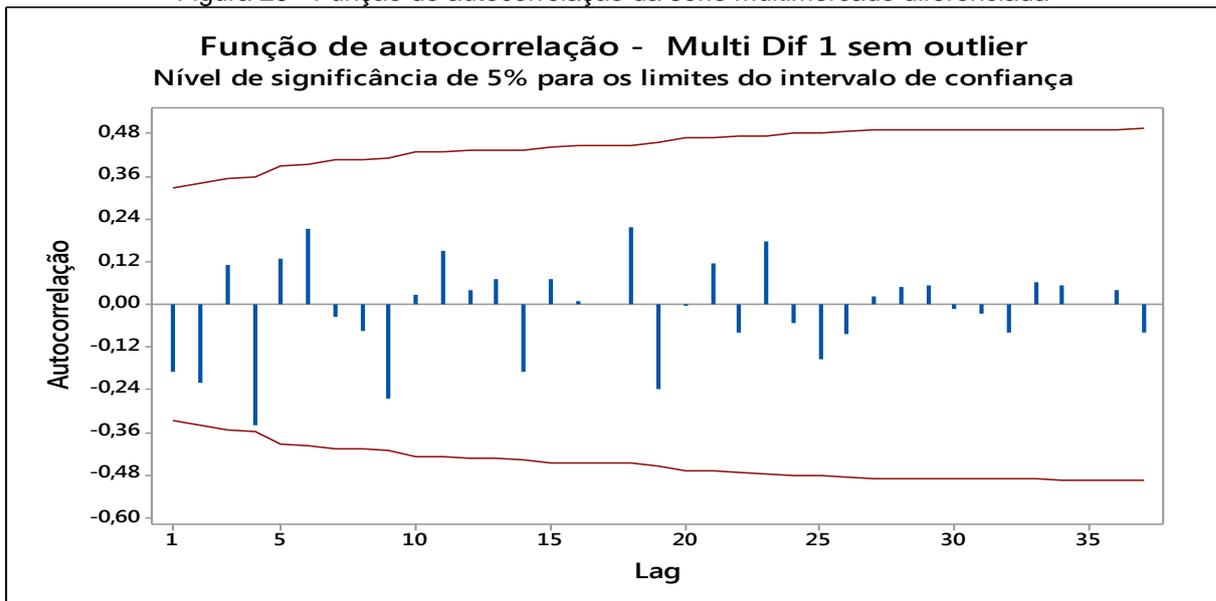
Tabela 10 - Testes de estacionariedade da série multimercado diferenciada

<b>Dickey-Fuller Aumentado</b>	Valor P = 0,01	Rejeita $H_0$
<b>Phillips-Perron</b>	Valor P = 0,01	Rejeita $H_0$
<b>KPSS</b>	Valor P = 0,1	Aceita $H_0$

Fonte: Autor.

Pelos resultados apresentados na Tabela 10, conclui-se que a série Multi Dif 1 é estacionária. Com isso, o parâmetro  $d$  do método ARIMA será igual a 1. Assim, foram observadas as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, apresentadas nos gráficos das Figuras 29 e 30.

Figura 29 - Função de autocorrelação da série multimercado diferenciada

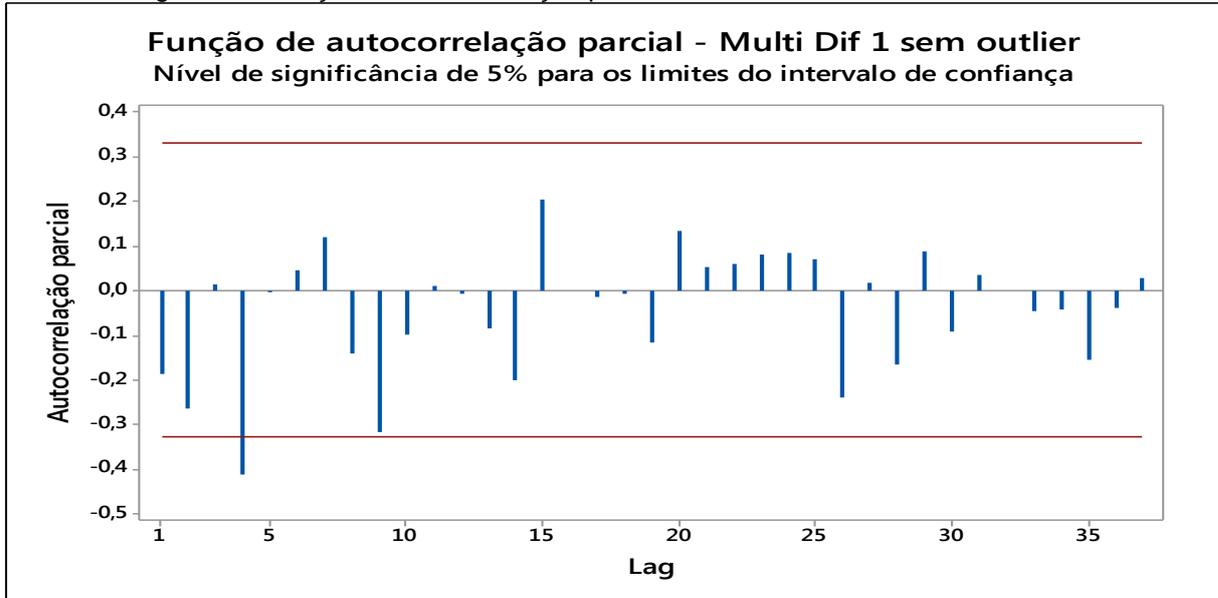


Fonte: Autor.

Visto o gráfico da Figura 29, percebe-se que não existem evidências estatísticas significativas de autocorrelação entre os termos da série, visto que os *lags* não apresentam decrescimento gradual e todos estão dentro dos limites do

intervalo de confiança, além de não apresentarem um padrão de comportamento. Com isso, o parâmetro  $q$  do ARIMA será igual a 0.

Figura 30 - Função de autocorrelação parcial da série multimercado diferenciada



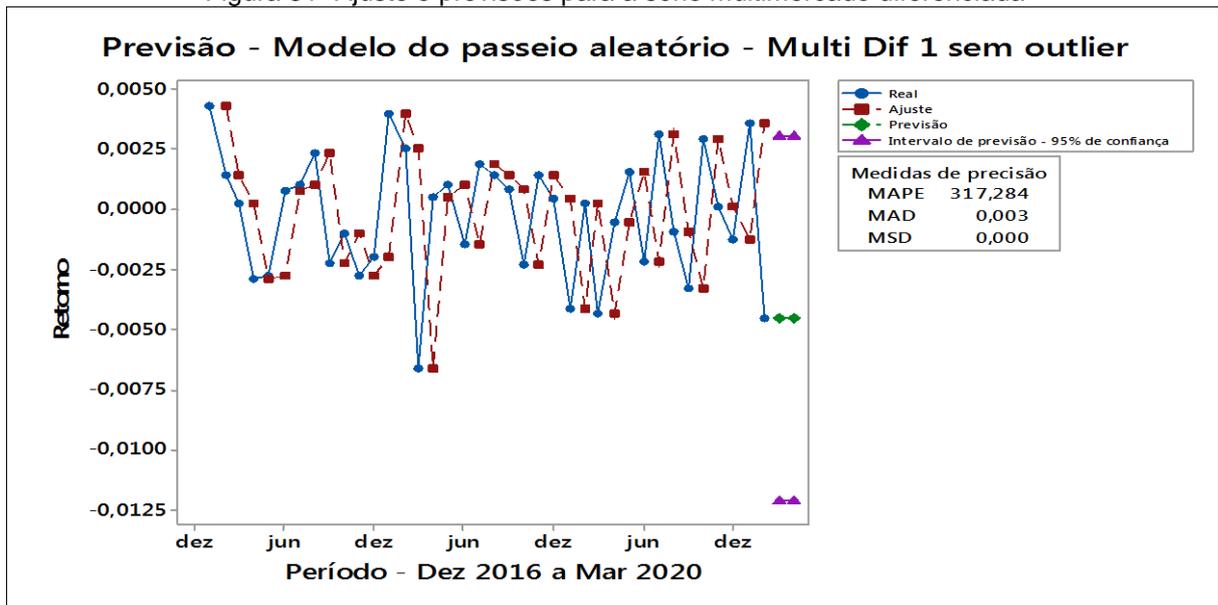
Fonte: Autor.

Ao se observar os *lags* da função de autocorrelação parcial (Figura 30), quase todos estão dentro dos limites do intervalo de confiança, não há decrescimento gradual entre os mesmos e há indícios de que são aleatórios. Nesse caso, o parâmetro  $p$  também será igual a 0.

Sendo assim, para a Multi, o método é ARIMA(0,1,0). No entanto, este é equivalente ao método de passeio aleatório sem tendência, que por sua vez é equivalente ao modelo da média móvel com parâmetro  $m = 1$ .

Utilizando-se o *software* Minitab®, foram realizadas previsões para o retorno dos meses de fevereiro e março de 2020 para a série Multi Dif 1. Os resultados obtidos podem ser vistos na Figura 31.

Figura 31- Ajuste e previsões para a série multimercado diferenciada



Fonte: Autor.

Pelo gráfico da Figura 31, as previsões estão precisas, considerando MAD igual a 0,003, MSD e RMSE iguais a 0,000 e MAPE igual a 317,284%. O valor da medida MAPE igual a 317,284% poderia indicar que o ajuste do modelo não é bom, mas é importante destacar que os dados da série são de retornos mensais de um fundo multimercado e no Minitab® os valores estão muito próximos de zero. Como o cálculo do MAPE divide os erros absolutos pelos dados reais, e como esses são próximos de zero, há uma tendência natural em extrapolar o valor dessa medida, o que não significa, nesse caso, que o modelo não se ajustou bem aos dados, como pode ser observado na Figura 31.

Os resultados das previsões estão descritos na Tabela 11.

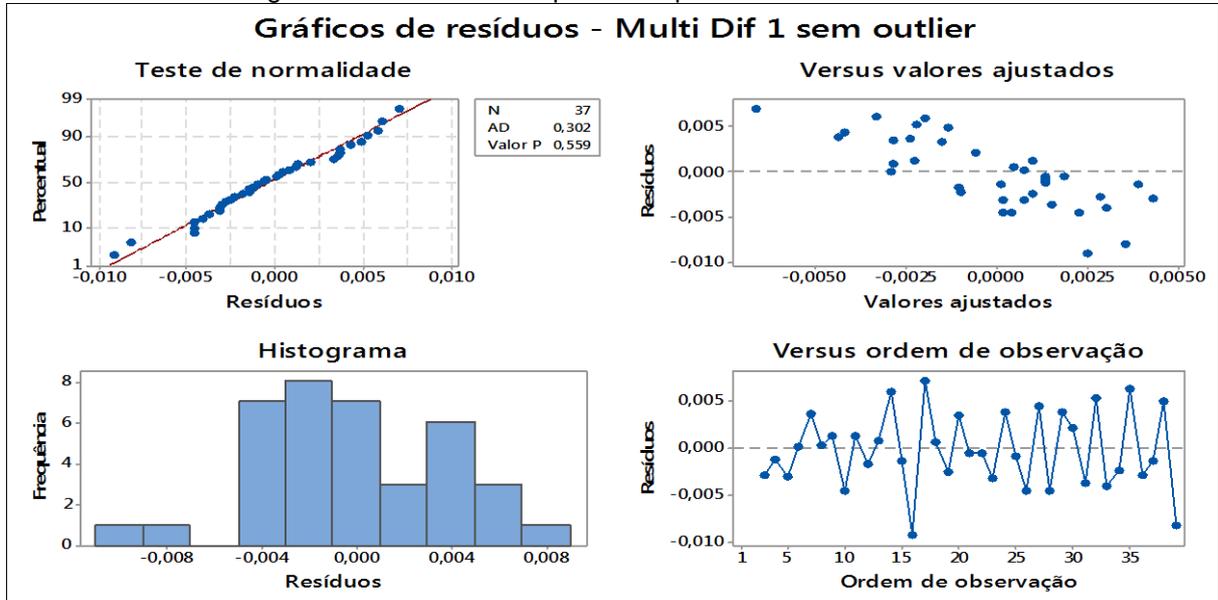
Tabela 11 - Previsões de retorno para série multimercado diferenciada

Mês	Limite inferior	Previsão	Limite superior
<b>Fev 2020</b>	-1,21%	-0,45%	0,31%
<b>Mar 2020</b>	-1,21%	-0,45%	0,31%

Fonte: Autor.

Além das medidas de precisão das previsões, observou-se também o comportamento dos resíduos gerados pelo modelo. Esta análise pode ser vista nos gráficos da Figura 32.

Figura 32 - Resíduos das previsões para a série multimercado

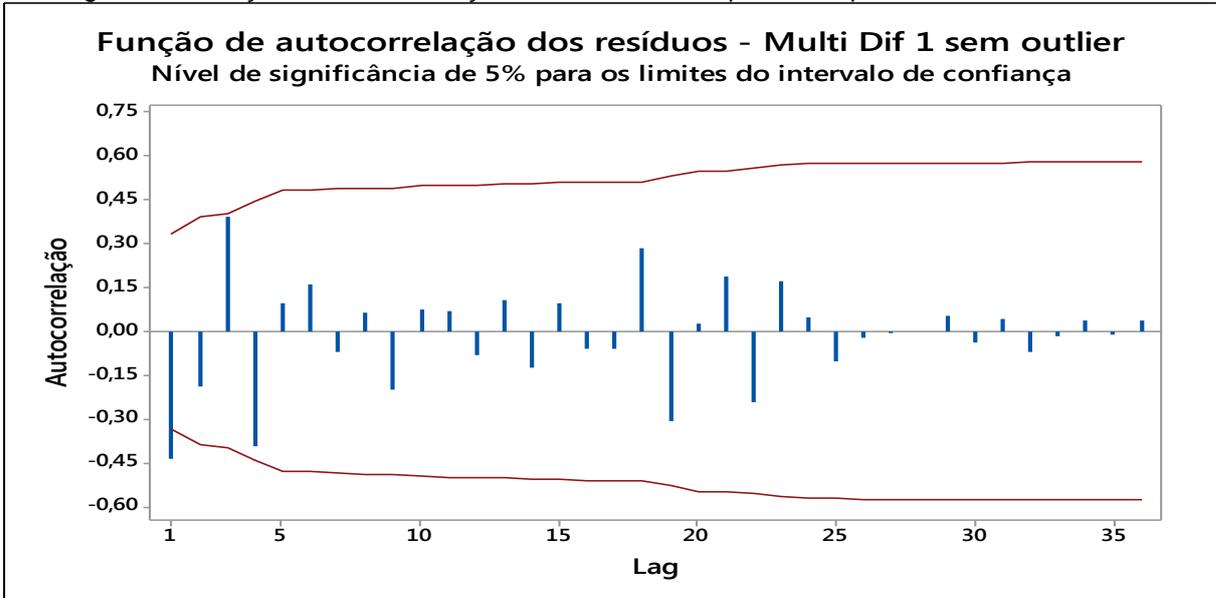


Fonte: Autor.

Pela análise de resíduos, vista na Figura 32, verifica-se se os erros do modelo seguem uma distribuição Normal, hipótese essa que foi confirmada pelo teste de normalidade Anderson-Darling. Através do *p-value* de 0,56 e considerando que a hipótese nula desse teste é que os dados seguem uma distribuição Normal, conclui-se que os resíduos são normalmente distribuídos, o que implica em um bom ajuste do modelo. O Histograma da Figura 32 indica pouca aleatoriedade dos dados, pois o ideal desse gráfico seria um comportamento aproximadamente simétrico em torno de zero, o que poderia indicar que as previsões podem não ser precisas. Nota-se, também, que os erros do modelo apresentam tendência decrescente linear à medida que os valores ajustados aumentam (Figura 32), indicando que a dispersão ou variância dos dados pode ser inconstante. Com isso, as previsões do modelo podem não ser precisas. No entanto, considerando o RMSE igual 0,000, que foram obtidas apenas duas previsões e que o foco é substituir os dados reais dos retornos, desconsiderou-se a presença desse padrão de comportamento no histograma e no gráfico de resíduos versus valores ajustados. Adicionalmente, percebe-se que a ordem de observação dos dados não influenciou o ajuste do modelo, que apresentou aleatoriedade independentemente da ordem de observação. Observou-

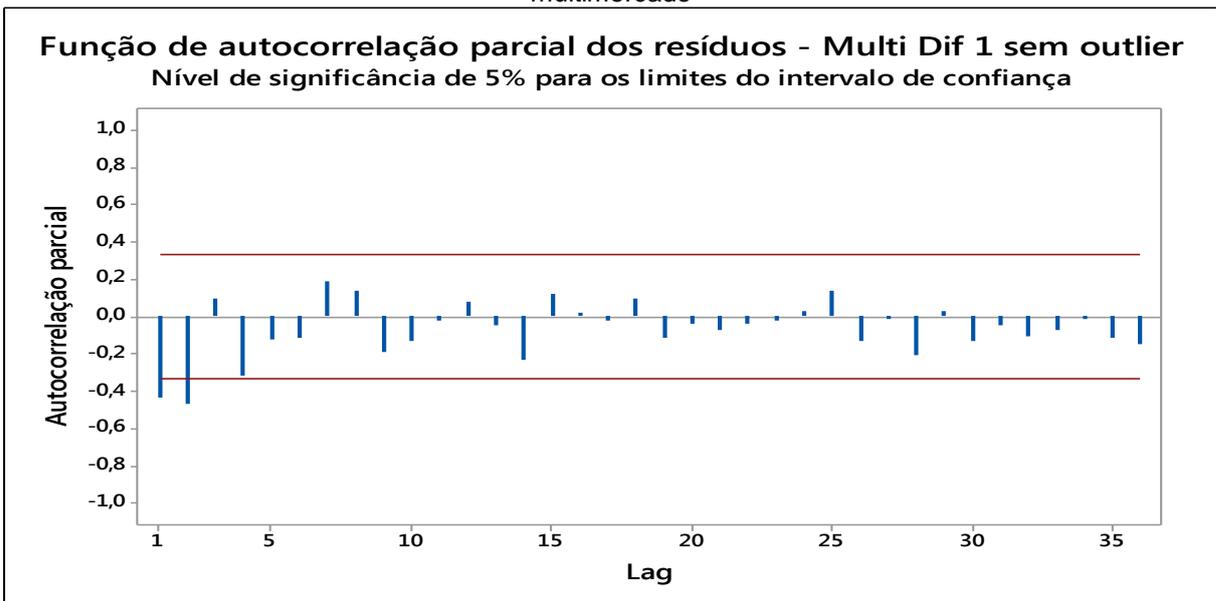
se também que os resíduos apresentam baixa autocorrelação entre si, como pode ser visto nos gráficos das Figuras 33 e 34.

Figura 33 - Função de autocorrelação dos resíduos das previsões para a série multimercado



Fonte: Autor.

Figura 34 - Função de autocorrelação parcial para os resíduos das previsões para a série multimercado



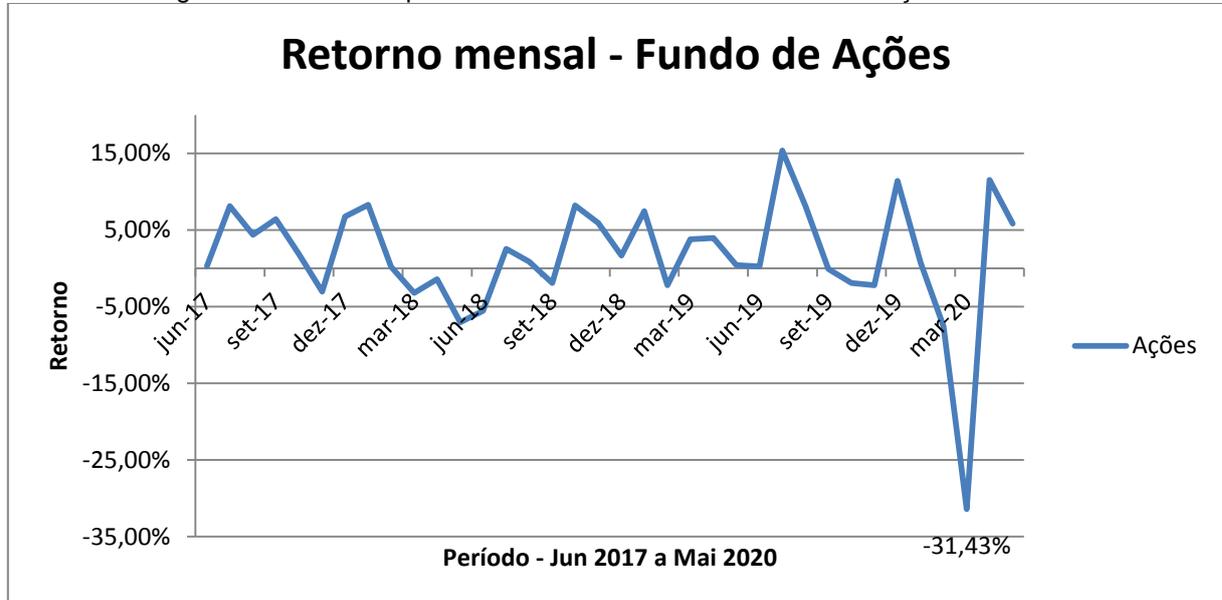
Fonte: Autor.

Pelos gráficos das Figuras 33 e 34, percebe-se que não há autocorrelação significativa entre os resíduos, ou seja, as causas dos erros do método não são significativamente explicadas pelos próprios erros.

### 7.7.3 PREVISÕES DE RETORNO PARA AÇÕES

Para a classe Ações, os dados de retorno mensal apresentaram o comportamento exibido no gráfico apresentado na Figura 35.

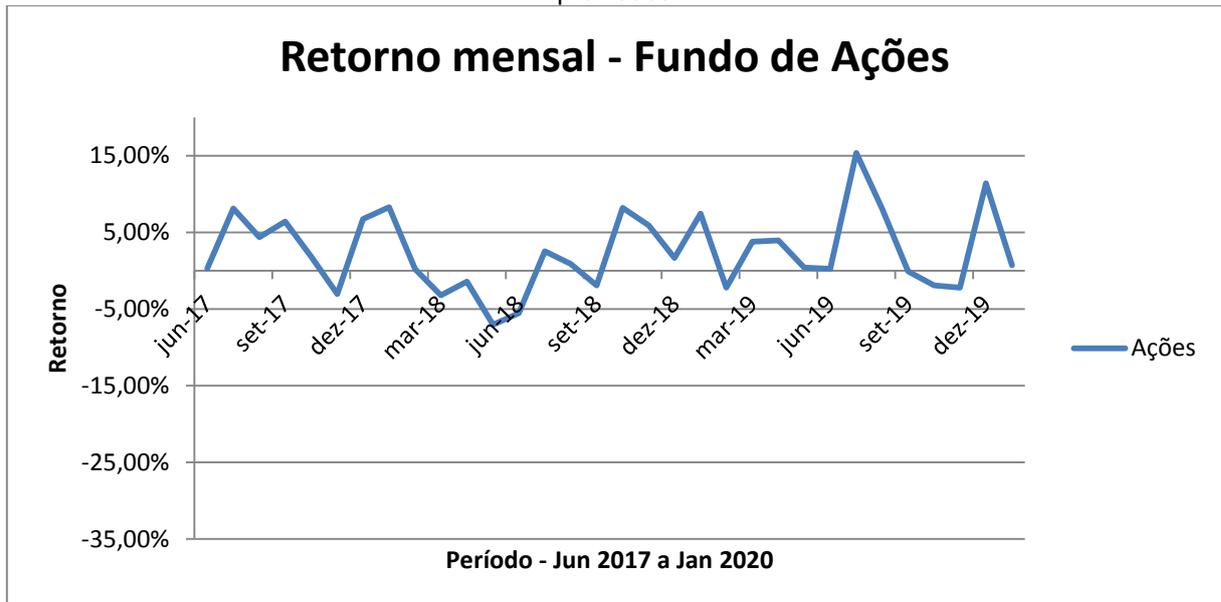
Figura 35 - Série temporal dos retornos mensais do fundo de ações escolhido



Não é difícil identificar, pelo gráfico da Figura 35, o impacto da pandemia de COVID-19 sobre o retorno de março de 2020 para a classe Ações.

Para a realização dos testes de estacionariedade, foram considerados os dados da série de junho de 2017 até janeiro de 2020, apresentada na Figura 36.

Figura 36 - Série temporal dos retornos mensais do fundo de ações escolhido considerada para previsões

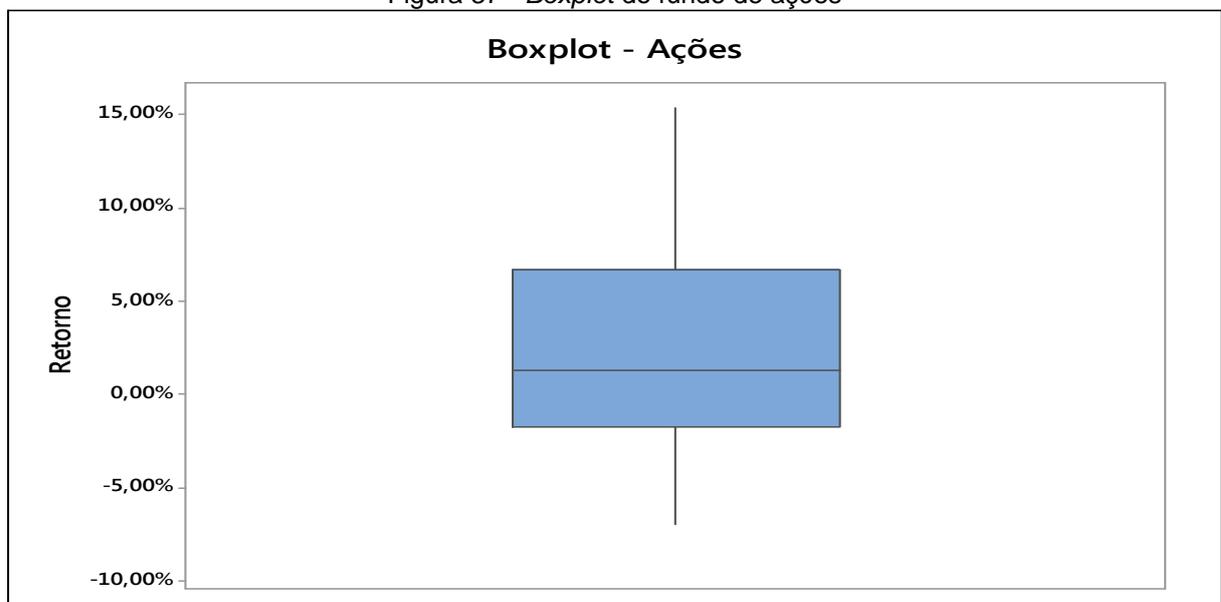


Fonte: Autor.

Pela Figura 36, o gráfico indica uma variação no retorno relativamente constante.

Após a obtenção dos gráficos de retorno, pesquisou-se por outliers na série histórica utilizando um *boxplot*, apresentado na Figura 37.

Figura 37 - *Boxplot* do fundo de ações



Fonte: Autor.

Analisando o *boxplot* da Figura 37, concluiu-se que não houve *outlier* para a série temporal da classe Ações. Os resultados dos testes de estacionariedade para a série Ações encontram-se na Tabela 12.

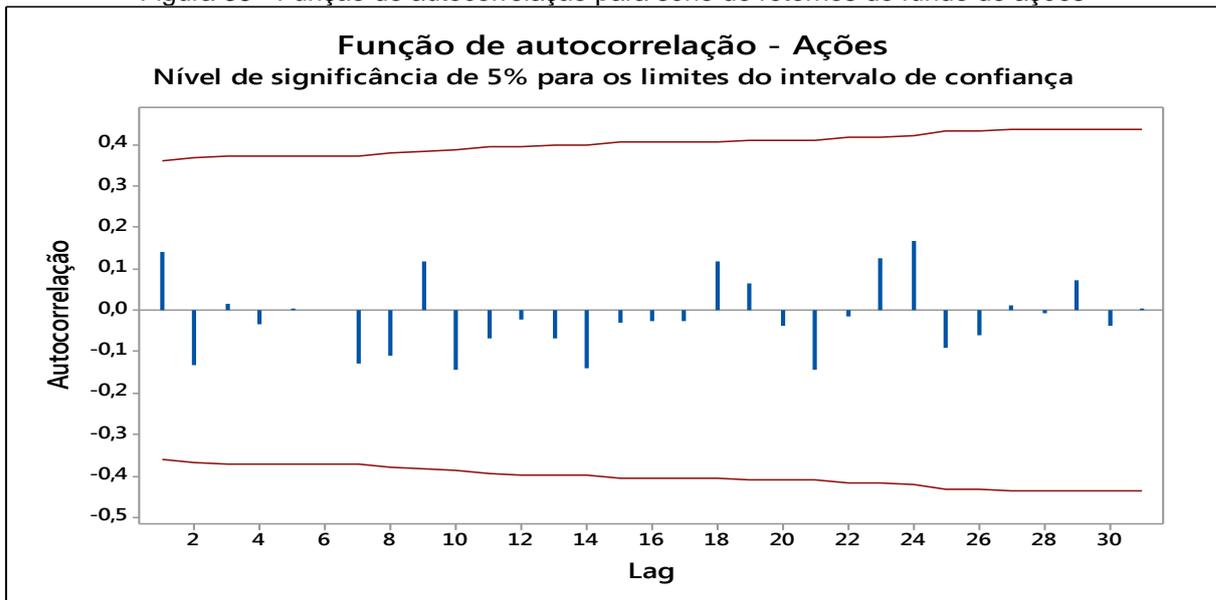
Tabela 12 - Testes de estacionariedade da série do fundo de ações

<b>Dickey-Fuller Aumentado</b>	Valor P = 0,01468	Rejeita $H_0$
<b>Phillips-Perron</b>	Valor P = 0,01	Rejeita $H_0$
<b>KPSS</b>	Valor P = 0,1	Aceita $H_0$

Fonte: Autor.

Pela Tabela 12, conclui-se que a série da classe Ações é estacionária. Com isso, o parâmetro  $d$  do modelo ARIMA é igual a 0, pois não foi necessário realizar transformações matemáticas para que a série se tornasse estacionária. Assim, parte-se para a observação das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, conforme Figuras 38 e 39.

Figura 38 - Função de autocorrelação para série de retornos do fundo de ações

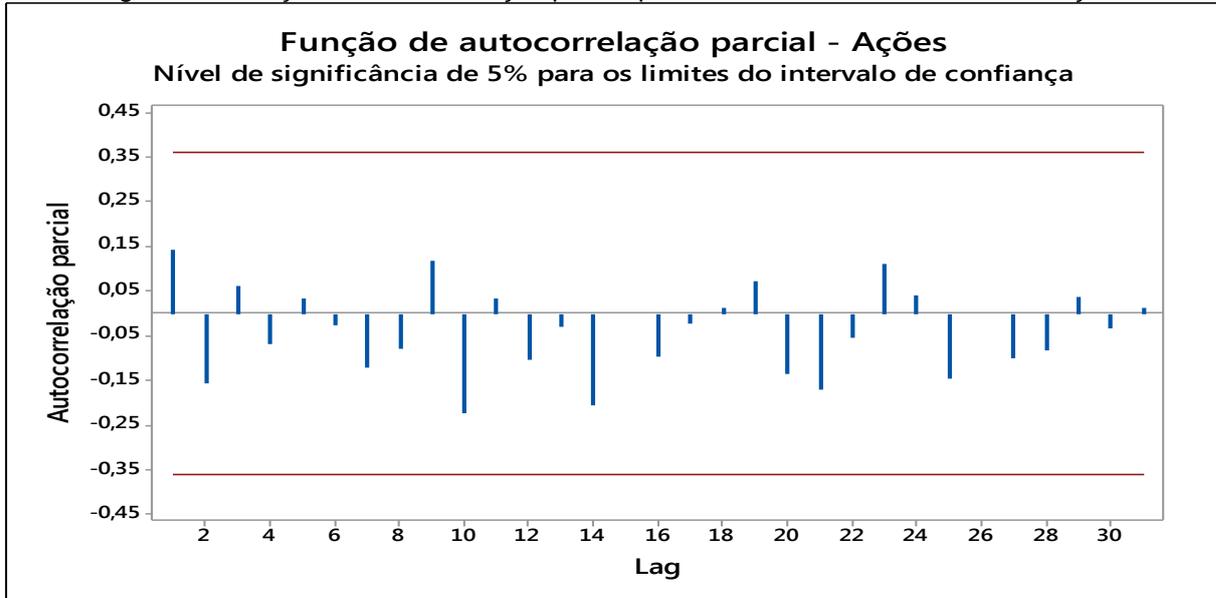


Fonte: Autor.

Percebe-se, pelo gráfico da Figura 38, que não existem evidências estatísticas significativas de autocorrelação entre os termos da série, visto que os *lags* não apresentam decréscimo gradual e estão todos dentro dos limites do

intervalo de confiança, além de não apresentarem um padrão de comportamento. Com isso, o parâmetro  $q$  do ARIMA é igual a 0.

Figura 39 - Função de autocorrelação parcial para série de retornos do fundo de ações

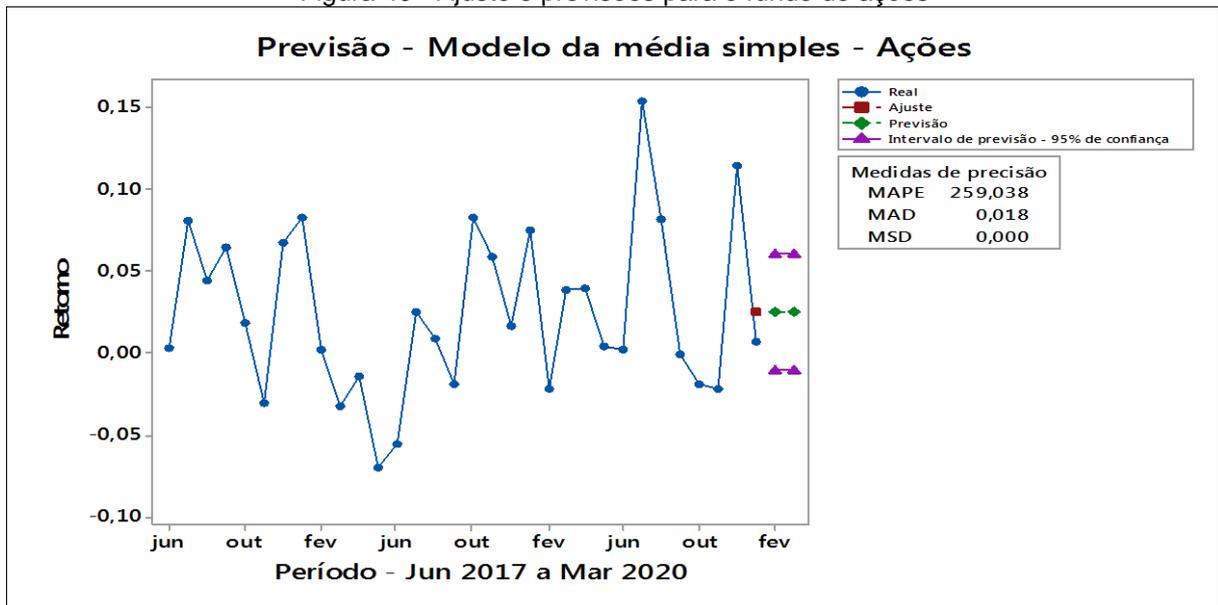


Fonte: Autor.

Da mesma maneira, conforme o gráfico da Figura 39, ao se observar os *lags* da função de autocorrelação parcial, todos estes estão dentro dos limites do intervalo de confiança, não há decrescimento gradual entre os mesmos e há indícios de que são aleatórios. Nesse caso, o parâmetro  $p$  do ARIMA também é igual a 0.

Sendo assim, para a classe Ações, o método é ARIMA(0,0,0). Similarmente ao método da RF, pode-se utilizar o método da média móvel com  $m \simeq n$ . Utilizando-se o *software* Minitab®, foram realizadas previsões para o retorno dos meses de fevereiro e março de 2020 para a série da classe Ações, conforme descrito na Figura 40.

Figura 40 - Ajuste e previsões para o fundo de ações



Fonte: Autor.

Ao se observar o gráfico da Figura 40, foram obtidos os resultados descritos na Tabela 13. Pelos resultados, pode-se concluir que as previsões estão precisas, considerando MAD igual a 0,018%, o MSD igual a 0,000 e consequentemente o RMSE igual a 0,000. Similarmente ao MAPE para a série da classe Multi do subcapítulo anterior, exibido na Figura 31, os dados reais estão muito próximos a zero e assim, o valor da medida MAPE tende a ser extrapolada, não significando, nesse caso, um ajuste ruim do modelo. Pelo RMSE igual a 0,000, conclui-se que o ajuste é satisfatório. Devido à ferramenta Minitab® e o método da média simples para obtenção das previsões, não houve resíduo a ser analisado.

Tabela 13 - Previsões de retorno para o fundo de ações

<b>Mês</b>	<b>Limite inferior</b>	<b>Previsão</b>	<b>Limite superior</b>
<b>Fev 2020</b>	-1,02%	2,51%	6,05%
<b>Mar 2020</b>	-1,02%	2,51%	6,05%

Fonte: Autor.

De acordo com os valores exibidos na Tabela 13, identifica-se uma considerável diferença entre as previsões para os retornos e os retornos reais dos meses de fevereiro e março de 2020 para o fundo de ações.

Nesse sentido, as previsões para substituição dos dados de retorno dos meses de maior impacto da pandemia ficaram conforme a Tabela 14.

Tabela 14 - Retornos reais e retornos previstos dos ativos selecionados

<b>Dados reais</b>			
<b>Retorno</b>	<b>Renda Fixa</b>	<b>Multimercado</b>	<b>Ações</b>
<b>Fev 2020</b>	0,39%	-0,17%	-7,57%
<b>Mar 2020</b>	-0,84%	-1,05%	-31,43%
<b>Abr 2020</b>	-0,14%	0,79%	11,52%
<b>Dados substituídos pelas previsões</b>			
<b>Fev 2020</b>	0,55%	-0,45%	2,51%
<b>Mar 2020</b>	0,55%	-0,45%	2,51%
<b>Abr 2020</b>	0,55%	0,79%	11,52%

Fonte: Autor.

De acordo com os valores exibidos na Tabela 14, fica clara a diferença entre os retornos dos ativos selecionados para compor a carteira, evidenciando os impactos da pandemia do COVID-19 sobre esses retornos.

Após a substituição dos dados, foi aplicado o modelo de alocação de ativos de Black-Litterman (1991) para composição de uma carteira otimizada.

## 7.8 APLICAÇÃO DO MODELO DE BLACK E LITTERMAN (1991)

O principal objetivo com a utilização do modelo de Black e Litterman (1991) foi obter estimativas para o excesso de retorno esperado de cada ativo considerado na composição de uma carteira.

Uma das principais diferenças entre as abordagens de Black e Litterman (1991), de Markowitz (1952) e do CAPM, é que a de Markowitz (1952) utiliza a média aritmética dos retornos históricos dos ativos como estimativa de retorno futuro, sob a premissa de que os dados históricos são normalmente distribuídos. A do CAPM, por outro lado, calcula o retorno esperado do ativo ou de uma carteira através de uma

fórmula que relaciona a taxa livre de risco (CDI), o risco relativo de cada ativo ( $\beta$ ) e o prêmio de risco do mercado, conforme exibido anteriormente. Já a abordagem de Black e Litterman (1991) considera as expectativas do mercado e as expectativas de retorno relativo entre os ativos de cada investidor para estimar, através de algumas operações matemáticas, o excesso de retorno esperado para cada ativo. Além disso, as estimativas para o retorno esperado de cada ativo geravam sugestões de alocações diferentes entre si e pouco aderentes com a realidade de gestores de investimentos, quando consideradas as abordagens de Markowitz (1952) e CAPM.

Para aplicação do modelo de Black e Litterman (1991), parte-se da premissa de equilíbrio de mercado com uma carteira de referência que o representa, carteira essa considerada eficiente pela abordagem da média-variância de Markowitz (1952). A ideia é que todos os investidores que compõem o mercado possuem uma combinação entre os títulos que representam a taxa livre de risco e alguns ativos mais arriscados que compõem a carteira eficiente, de acordo com seu grau de aversão ao risco. Daí surge a ideia de carteira de mercado, que é aquela que todos os investidores possuem um pouco, considerando o mercado ser eficiente.

A partir da carteira de mercado, é possível obter as expectativas dos investidores para o excesso de retorno esperado e, também, a participação relativa de cada ativo nessa carteira. Combinam-se então os pesos (ou participação relativa de cada ativo) dessa carteira de mercado com as perspectivas individuais dos investidores sobre o desempenho relativo dos ativos considerados, conjuntamente às incertezas sobre essas perspectivas. Com as estimativas para o excesso de retorno dos ativos, buscou-se maximizar a função de utilidade do investidor, bem como o Índice de Sharpe esperado da carteira, através da alteração dos pesos dos ativos que a compõem. Para obtenção da carteira de referência que representa o equilíbrio de mercado, considerou-se o percentual que representa o valor do patrimônio líquido de cada fundo selecionado, conforme Tabela 15.

Tabela 15 - Patrimônio líquido e sua participação relativa na carteira de mercado dos fundos escolhidos

<b>Fundo</b>	<b>Patrimônio líquido</b>	<b>Peso na carteira de mercado</b>
<b>RF</b>	R\$ 189.044.065,60	77%
<b>Multi</b>	R\$ 5.528.592,09	2%
<b>Ações</b>	R\$ 50.702.086,70	21%
<b>Total</b>	R\$ 245.274.744,39	100%

Fonte: Autor.

Pela Tabela 15, conclui-se que a carteira de mercado, que representa as expectativas de todos os investidores, tem 77% de peso em renda fixa, 2% em multimercado e 21% em ações.

Otimizar uma carteira de investimentos se traduz matematicamente em maximizar sua função de utilidade. De acordo com Davies (2013), a função de utilidade pode ser descrita como:

$$u = r - \lambda \sigma^2$$

Sendo:

- $u$  a utilidade da carteira;
- $r$  o retorno da carteira;
- $\lambda$  um escalar que mede o grau de aversão ao risco do investidor e;
- $\sigma^2$  a variância da carteira.

Utilizando-se a notação matricial para aplicação do modelo de Black e Litterman (1991) e o conceito de excesso de retorno esperado, tem-se a seguinte equação:

$$E(u_c) = E(r_c - r_f) - \lambda \sigma^2 = w^T(\mu - r_f) - \lambda w^T S w$$

Onde:

- $u_c$  é a utilidade da carteira;
- $r_c$  é o retorno da carteira;

- $r_f$  é o retorno da taxa livre de risco (CDI);
- $w$  é o vetor de pesos, ou participação relativa de cada ativo na carteira;
- $\mu$  é o retorno esperado da carteira que representa o equilíbrio de mercado;
- $S$  é a matriz de variância-covariância.

Sabe-se que para maximizar a utilidade é necessário encontrar o ponto em que o crescimento dessa função é nulo, ou seja, um ponto de máximo. Esse ponto é encontrado quando o gradiente da função é igual a zero. Assim, tem-se:

$$\text{Max: } E(u_c) \Rightarrow \text{Max: } w^T(\mu - r_f) - \lambda w^T S w. \text{ Daí:}$$

$$\text{Grad } E(u_c) \Rightarrow \frac{\partial E(u_c)}{\partial w} = \frac{\partial [w^T(\mu - r_f) - \lambda w^T S w]}{\partial w}$$

Para a otimização, a variável de decisão é  $w$ . Considerando que na álgebra matricial  $w^T w \cong w^2$ , tem-se:

$$\frac{\partial E(u_c)}{\partial w} = \frac{\partial [w^T(\mu - r_f) - \lambda S w^2]}{\partial w} \Rightarrow \frac{\partial E(u_c)}{\partial w} = (\mu - r_f) - 2\lambda S w$$

Considerando  $\frac{\partial E(u_c)}{\partial w} = 0$ , obtém-se:

$$(\mu - r_f) = 2\lambda S w$$

Multiplicando ambos os lados por  $S^{-1}$ :

$$S^{-1}(\mu - r_f) = 2\lambda S S^{-1} w = 2\lambda I w = 2\lambda w$$

Assim, vem:

$$Z = S^{-1}(\mu - r_f) \text{ e } Z = 2\lambda w$$

Sabendo, no entanto, que  $\sum w_j = 1$ , chega-se a:

$$w_i = \frac{z_i}{\sum z_j} = \frac{2\lambda w_i}{2\lambda \sum w_j} = \frac{w_i}{1} = w_i$$

Porém, considerando o modelo de Black e Litterman (1991), é possível obter os valores dos pesos de cada ativo na carteira de mercado e então, ao invés de resolver o problema de maximização encontrando  $w$ , pode-se inverter e resolver para encontrar  $(\mu - r_f)$ , que é o excesso de retorno esperado da carteira. Da expressão  $(\mu - r_f) = 2\lambda S w$ , pretende-se encontrar  $(\mu - r_f)$ . Obtém-se as componentes do vetor  $w$  a partir da participação relativa de cada ativo da carteira de referência do mercado e obtém-se os elementos da matriz  $S$  a partir dos dados

históricos de retornos entre os ativos, pois essa matriz é a de variância e covariância entre os retornos dos mesmos. Segundo Black e Litterman (1991), os pesos da carteira não são muito sensíveis a variações nos valores da matriz  $S$ . Assim, não haveria problemas em utilizar dados históricos.

Para se determinar o valor de  $\lambda$ , Black e Litterman (1991) consideraram obter um valor que representasse a média da aversão ao risco do mercado como um todo, e não de um investidor específico, sob duas premissas: *i*) sabemos a média do excesso de retorno do mercado para ativos, que seria a média dos retornos mensais do Ibovespa ou CDI; e *ii*) sabemos o risco (ou volatilidade) do Ibovespa ou CDI. Assim, sugeriram a seguinte fórmula:

$$\lambda = \frac{E(r_m - r_f)}{2\sigma_m^2}$$

Onde:

- $\lambda$  é um escalar que indica o grau de aversão ao risco;
- $r_m$  é o retorno da carteira de mercado;
- $r_f$  é o retorno da taxa livre de risco;
- $E(r_m - r_f)$  é o prêmio de risco esperado;
- $\sigma_m^2$  é a variância (risco) da carteira de mercado.

### 7.8.1 APLICAÇÃO CONSIDERANDO DADOS REAIS DE RETORNO

De acordo com Davies (2013), seguindo seu modelo enquanto professor da Universidade de Iowa (*University of Iowa and Rutgers Business School*), nos EUA, os cálculos foram realizados através de multiplicações matriciais no Microsoft Excel® e a carteira de referência de mercado apresentou os seguintes resultados:

- Retorno médio = 0,36% ao mês ou 4,41% ao ano;
- Risco (Volatilidade) = 2,80% ao mês ou 9,69% ao ano;
- Retorno do CDI = 0,42% ao mês ou 5,19% ao ano;
- Excesso de retorno médio = - 0,06% ao mês;
- Índice de Sharpe = -0,022.

De acordo com Black e Litterman (1991), o modelo visa combinar as perspectivas dos investidores com o equilíbrio de mercado para se obter uma carteira ótima. Nesse sentido, as perspectivas consideradas foram:

- O retorno do fundo de ações vai superar o retorno do multimercado em 6% em um mês;
- O retorno do multimercado vai superar o retorno RF em 4% em um mês.

Aplicando o modelo de Black e Litterman (1991), com o parâmetro  $\tau = 1$ , chegou-se aos resultados apresentados na Tabela 16:

Tabela 16 - Resultados do modelo com dados reais

Ativo	Excesso de Retorno Esperado $E = (r - r_f)$	Alocação sugerida pelo modelo	Alocação com restrição de vendas a descoberto otimizada pelo Solver®
RF	-1,20%	207.880,41%	0,00%
Multi	0,80%	-210.276,71%	100,00%
Ações	3,67%	2496,30%	0,00%
Soma	-	100,00%	100,00%

Resultados esperados para a carteira

	Black e Litterman	Solver®	Carteira de Mercado
Excesso de Retorno	-4.081,984%	0,802%	-0,063%
Variância	4.952,301%	0,003%	0,076%
<b>Índice de Sharpe</b>	<b>-5,80</b>	<b>1,55</b>	<b>-0,02</b>

Fonte: Autor.

Assim, o modelo gera expectativas para o excesso de retorno de cada ativo para que os investidores possam decidir como alocar os ativos em suas carteiras. Considerando a Tabela 16, e que o investidor racional sempre quer maximizar sua utilidade, não faria sentido investir no fundo de renda fixa (RF), que apresenta

expectativa de não superar a taxa livre de risco (CDI), pois o excesso de retorno esperado foi igual a -1,20%. O investidor pode, então, fazer diferentes combinações entre os percentuais de cada ativo em sua carteira para maximizar sua utilidade.

Observando a Tabela 16, nota-se que a soma das participações relativas de cada ativo é igual a um, o que respeita uma das restrições do modelo de Markowitz (1952). No entanto, não faz sentido prático ter 207.880,41% de RF em uma carteira, ainda mais com a expectativa do mercado de que esse fundo não superaria o CDI. Assim, constatou-se que o modelo de Black e Litterman (1991) apresentou pouca aderência com a realidade prática dos gestores de investimentos, considerando que os ativos são apenas fundos. Conclui-se, também, que o excesso de retorno esperado da carteira está muito fora da realidade considerada para fundos de investimentos, indicando que os resultados dos investimentos em um cenário de pandemia tendem a inviabilizar o uso do modelo. Adicionalmente, identifica-se que houve peso negativo de -210.276,71% para o fundo multimercado e que os valores dos pesos também estão fora da realidade. Pesos negativos fariam sentido para operações de venda a descoberto. No entanto, essas operações não ocorrem em uma carteira composta apenas por cotas de fundos de investimentos. Assim, adicionou-se, através da ferramenta Solver do Excel®, a restrição de que os pesos precisam ser não negativos e o objetivo foi maximizar o índice de Sharpe esperado para a carteira. Com essa ferramenta, atinge-se uma alocação de ativos diferente da proposta pelo modelo de Black e Litterman (1991). A carteira otimizada pelo Solver do Excel® é melhor do que a sugerida pelo modelo utilizado, comparando-as pelo Índice de Sharpe esperado. Comparando os resultados com a carteira de mercado, cuja alocação é 77% em Renda Fixa, 2% em Multimercado e 21% em Ações, a carteira otimizada teria um melhor desempenho, por apresentar o valor do Índice de Sharpe esperado maior.

Alterando-se o valor do parâmetro  $\tau$  de 1 para 0,5, depois para 0,025 e depois para 0,01, houve apenas uma pequena mudança na décima quarta casa decimal do excesso de retorno esperado para ações, quando  $\tau$  foi de 1 para 0,025, de modo que se tornou insignificante qualquer alteração do valor desse parâmetro no modelo. Mesmo extrapolando os valores, com  $\tau = 1.000.000$  e  $\tau = 0,0000001$ , não houve alterações significativas.

### 7.8.2 APLICAÇÃO CONSIDERANDO AS PREVISÕES DE RETORNO

Com a substituição dos dados de retorno dos meses de fevereiro, março e abril de 2020 pelas previsões, visando retirar os efeitos da pandemia do COVID-19 sobre os retornos mensais dos fundos e verificar qual seria o comportamento do modelo, a carteira de mercado gerou os seguintes resultados:

- Retorno médio = 1,27% ao mês ou 16,41% ao ano;
- Risco (Volatilidade) = 1,28% ao mês ou 4,44% ao ano;
- Retorno CDI = 0,42% ao mês ou 5,19% ao ano;
- Excesso de retorno médio da carteira de mercado = 0,85% ao mês;
- Índice de Sharpe = 0,66.

As perspectivas dos investidores consideradas foram as mesmas obtidas sem considerar as previsões, ou seja:

- O retorno do fundo de ações vai superar o retorno do multimercado em 6% em um mês;
- O retorno do multimercado vai superar o retorno RF em 4% em um mês.

Aplicando o modelo, chegou-se aos valores descritos na Tabela 17.

Tabela 17 - Resultados do modelo considerando previsões para o retorno

Ativo	Excesso de Retorno Esperado $E = (r - r_f)$	Alocação sugerida pelo modelo	Alocação com restrição de vendas a descoberto otimizada pelo Solver®
RF	-0,05%	-1.981,41%	0,00%
Multi	1,97%	2.069,98%	100,00%
Ações	6,89%	11,43%	0,00%
Soma	-	1	1

## Resultados esperados para a carteira

	Black e Litterman	Solver®	Carteira de Mercado
Excesso de Retorno	42,624%	1,974%	0,852%
Variância	0,822%	0,002%	0,016%
<b>Índice de Sharpe</b>	<b>4,70</b>	<b>4,66</b>	<b>0,66</b>

Fonte: Autor.

Pelos valores descritos na Tabela 17, verifica-se que as alocações também não fazem sentido prático. Por outro lado, houve uma diferença que pode ter sentido, após adaptações. O modelo sugere operar vendido (venda a descoberto) em RF ao se observar alocação negativa para esse ativo de -1.981,41%. Mesmo que alocar -1.981,41% em um ativo não seja possível para fundos, o mínimo esperado é que não se invista nesse ativo, já que as expectativas é que esse não supere o CDI. Nota-se, também, que a carteira otimizada teria um melhor desempenho, dado o maior valor do Índice de Sharpe esperado, de valor igual a 4,66, em comparação com a carteira de mercado (Índice de Sharpe igual a 0,66). No entanto, não teria melhor desempenho quando comparada à carteira sugerida pelo modelo (Índice de Sharpe igual a 4,70), caso fosse possível investir na mesma.

Alterando-se o valor do parâmetro  $\tau$  de 1 para 0,5, depois para 0,25 e depois para 0,01, não houve mudanças significativas no resultado final para o excesso de retorno esperado e consequentemente para o índice de Sharpe esperado.

É possível entender, também, que ao substituir os dados de retorno dos meses de fevereiro, março e abril de 2020 pelas previsões visando retirar a influência da pandemia de COVID-19 no uso do modelo, os valores para os pesos dos ativos na carteira e para o excesso de retorno esperado foram significativamente diferentes, indicando que o modelo pode ter aderência com a realidade com alguns ajustes, não fosse a pandemia.

Alterando-se as perspectivas individuais dos investidores quanto aos retornos relativos dos ativos, foram repetidos os cálculos. Para esse caso, as perspectivas consideradas foram:

- O retorno do fundo de renda fixa vai superar o retorno do fundo de ações em 1% em um mês (quando o investidor aposta na queda do fundo de ações);
- O retorno do fundo multimercado vai superar o retorno do fundo de ações em 1% em um mês.

Os resultados, após aplicação do modelo, são apresentados na Tabela 18.

Tabela 18 - Resultados sem efeitos da pandemia de COVID-19 e com perspectivas sobre retorno relativo alteradas

Ativo	Excesso de Retorno Esperado $E = (r - r_f)$	Alocação sugerida pelo modelo	Alocação com restrição de vendas a descoberto otimizada pelo Solver®
RF	0,01%	82,53%	82,53%
Multi	0,03%	10,33%	10,33%
Ações	1,45%	7,14%	7,14%
Soma	-	1	1

Resultados esperados para a carteira			
	Black e Litterman	Solver®	Carteira de Mercado
Excesso de Retorno	0,116%	0,116%	0,852%
Variância	0,002%	0,002%	0,016%
<b>Índice de Sharpe</b>	<b>0,24</b>	<b>0,24</b>	<b>0,66</b>

Fonte: Autor.

Nesse caso, como pode ser visto na Tabela 18, a alocação proposta pelo modelo para os ativos apresentou resultados satisfatórios do ponto de vista prático. Os valores podem ser aplicados por um investidor na realidade e os resultados foram iguais aos da carteira otimizada pelo Solver do Excel®, indicando que o modelo de Black e Litterman (1991) pode fazer sentido.

A principal limitação do modelo utilizado, identificada nesse trabalho, foi quanto à sensibilidade do modelo devida a alterações nas perspectivas dos investidores para o desempenho relativo entre os ativos, que são representadas pelo vetor  $Q$  da equação do modelo. Uma variação de apenas 1% em uma das perspectivas foi suficiente para alterar os resultados de alocação do modelo de 83% em RF para -444% em RF e de 10% em Multi para 544% em Multi. Outro ponto que pode se configurar em uma limitação do modelo é o fato de que a matriz  $\Omega$  pode ser alterada de acordo com a confiança do investidor sobre as perspectivas de retorno relativo entre os ativos. Assim, o investidor pode não necessariamente utilizar todas

as equações propostas pelo modelo e alterar voluntariamente alguns valores, o que pode se tornar uma forma de obter falhas no uso modelo.

Conclui-se, também, que os efeitos da pandemia de COVID-19 sobre o mercado financeiro tornaram o uso do modelo de alocação de ativos inviável do ponto de vista prático. Ao se substituir os dados de retorno pelas previsões, os resultados da aplicação do modelo começaram a melhorar no sentido de ser utilizado por investidores, no entanto, a sensibilidade dos resultados do modelo no que tange às variações nas perspectivas dos investidores pode também ser o ponto que inviabilize a aplicação do modelo proposto.

## 8 CONCLUSÃO

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou uma aplicação da modelagem matemática para alocação ótima de ativos em uma carteira de investimentos, bem como uma análise de como os efeitos no mercado financeiro da pandemia de COVID-19 influenciam os resultados do modelo. Adicionalmente, possibilitou um exame de como as expectativas dos investidores sobre o desempenho relativo entre os ativos interferem nos resultados do modelo utilizado, bem como a aplicação de técnicas de previsão para retirar a influência da pandemia de COVID-19 sobre os resultados do modelo e avaliar a eficácia prática do mesmo.

De um modo geral, a aplicação da modelagem matemática pode auxiliar os investidores a tomar decisões sobre como definir a participação ótima de ativos em uma carteira de investimentos. Porém, podem ser necessárias algumas adaptações para que o uso do modelo tenha sentido prático com a realidade de cada investidor e do mercado. É importante destacar, contudo, que um momento de crise econômica pode inviabilizar o uso do modelo, pois os resultados produzidos para a alocação dos ativos nesse cenário podem não ser passíveis de aplicação no cotidiano dos investidores.

Ao se aplicar técnicas de previsão para os retornos mensais dos meses em que o mercado financeiro mais foi afetado pela pandemia de COVID-19, percebeu-se uma significativa diferença na alocação ótima sugerida pelo modelo aplicado, indicando que uma crise econômica pode inviabilizar a utilização do mesmo. No entanto, essa diferença ainda não foi suficiente para que os resultados fossem possíveis de serem aplicados no dia a dia, uma vez que a alocação sugerida não apresentou sentido prático. Por outro lado, ao se alterar as perspectivas dos investidores quanto ao desempenho relativo entre os ativos, sem os efeitos da pandemia de COVID-19, a alocação sugerida apresentou um resultado ótimo que pode ser aplicado no dia a dia dos investidores e é passível de comparação com outros métodos de otimização de carteiras de investimentos.

O acesso à ferramenta Quantum possibilitou obter os dados dos ativos utilizados para as análises previamente organizados em uma ordem do mais antigo para o mais recente e classificados por classe de ativos financeiros, o que facilitou a identificação das séries temporais e produção dos gráficos utilizados para seleção

dos ativos que formariam a carteira. O *site* Mais Retorno possibilitou o acesso a estatísticas simples dos fundos estudados, permitindo a comparação das mesmas entre os ativos. A utilização da ferramenta de planilhas e cálculos Microsoft Excel ® permitiu criar gráficos e analisar o desempenho histórico dos ativos, além de realizar multiplicações matriciais para se obter os parâmetros necessários para a aplicação do modelo matemático de Black e Litterman (1991) e gerar os resultados para alocação ótima dos ativos. As técnicas de previsão de retornos permitiram retirar os efeitos da pandemia de COVID-19 sobre o mercado financeiro e analisar a aderência do modelo matemático com a realidade dos investidores. Por fim, as consultas aos profissionais de gestão de recursos financeiros permitiram interpretar os resultados produzidos em cada cenário de aplicação do modelo.

Dada a importância do tema, torna-se necessário, como sugestão de pesquisa futura, aprofundar as análises dos resultados produzidos com a aplicação do modelo matemático. Uma proposta de análise é testar outras perspectivas dos investidores sobre o desempenho relativo entre os ativos. Assim, pode-se verificar a viabilidade de se determinar uma faixa ótima de valores para o retorno relativo entre os ativos dentro da qual a utilização do modelo sempre tenha aderência com a realidade.

Nesse sentido, a aplicação da modelagem matemática, conjuntamente a técnicas de previsão para o retorno dos ativos, permite analisar de que forma os efeitos sobre o mercado financeiro da pandemia de COVID-19 e as expectativas dos investidores sobre o desempenho dos ativos influenciam a alocação ótima em uma carteira de investimentos e os auxiliam a tomar decisões de acordo com sua realidade.

## REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas – Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais**. 3ª. ed. Belo Horizonte: UFMG, 2007.

B3 S.A.. **Ecosistema do Investidor Brasileiro**. São Paulo. 2019.

BENDER, E. A. **An Introduction to Mathematical Modeling**. North Chelmsford: Courier Corporation, 2012.

BIDERMAN, M. T. C. Dicionário de termos financeiros e bancários. In: BIDERMAN, M. T. C. **Dicionário de termos financeiros e bancários**. São Paulo: DISAL, 2013. p. 440.

BLACK, F.; LITTERMAN, R. B. Asset Allocation: combining investor views with market equilibrium. **The Journal of Fixed Income**, set 1991. 7-18.

BLACK, F.; LITTERMAN, R. B. **Global Asset Allocation With Equities, Bonds, and Currencies**. Goldman, Sachs & Co. [S.l.], p. 40. 1991.

BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A. **Fundamentos de Investimentos**. 9ª. ed. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda., 2014.

BRITO, O. S. D. **Mercado Financeiro**. 3ª. ed. São Paulo: Saraiva Educação S.A., 2020.

BRITO, R. O. D. **Alocação de Ativos em Private Banking**. Porto Alegre: Bookman, 2009.

BURNISKE, C.; TATAR, J. **Criptoativos: O guia do investidor inovador para o bitcoin e além**. Rio de Janeiro: Alta Books Editora, 2019.

CARVALHO, J. M. S. **Programação Linear: Algoritmos simplex primal, dual, transporte e afetação**. Porto: Vida Economica Editorial, 2014.

CHWIF, L.; MEDINA, A. C. **Modelagem e Simulação de Eventos Discretos**. São Paulo: Afonso C. Medina, 2010.

DARIDO, S. C.; SOUZA JÚNIOR, O. M. D. **Para Ensinar Educação Física: possibilidades de intervenção na escola**. Campinas: Papirus, 2007.

DAVIES, P. 1 Vídeo (27 min). PT L20 The Black Litterman Model in Excel. **Publicado pelo canal Phil Davies**, 2013. Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=0Pq0VVHKBAE&list=PLIIJjE1EmA8Y6egvj9yRgJbbxf\\_iEmPYv&index=21&t=0s](https://www.youtube.com/watch?v=0Pq0VVHKBAE&list=PLIIJjE1EmA8Y6egvj9yRgJbbxf_iEmPYv&index=21&t=0s)>. Acesso em: 06 ago 2020.

DYM, C. L. **Principles of Mathematical Modeling**. 2ª. ed. Cambridge: Academic Press, 2004.

FAIRHURST, D. S. **Modelagem Financeira no Excel Para Leigos**. Rio de Janeiro: Alta Books, 2019.

FONSECA, J. W. F. D. **Mercado de Capitais**. Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2009.

GARCIA, C. **Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos**. 2ª. ed. São Paulo: EdUSP, v. I, 2005.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4ª. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

HILLIER, F. S.; HILLIER, M. S. **Introdução à Ciência da Gestão**. 4ª. ed. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda., 2014.

LONGARAY, A. A. **Introdução à pesquisa operacional**. São Paulo: Saraiva Educação S.A., 2017.

LUND, M. L. M. P.; SOUZA, C. P. D.; CARVALHO, L. C. S. D. **Mercado de capitais**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: FGV, 2012.

MANAGEMENT, ITAÚ ASSET. **Alocação de Ativos: principais modelos, limitações e tendências atuais**. Itaú Asset Management. São Paulo, p. 21. 2015.

MARCONI, M. D. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5ª. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, Mar 1952. 77-91.

MARQUES, C. F. **Estratégia de gestão da produção e operações**. Curitiba: IESDE BRASIL SA, 2012.

MEERSCHAERT, M. M. **Mathematical Modeling**. 4ª. ed. Cambridge: Academic Press, 2013.

MOREIRA, R. G. **Sociedades Anônimas Brasileiras e Fechamento de Capital**. Curitiba: Juruá, 2006.

OLIVEIRA, M. P. M. S. D. **Teias matemáticas: frentes na ciência e na sociedade**. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2004.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, C. D. E. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2ª. ed. Novo Hamburgo: Universidade Feevale, 2013.

SHARPE, W. F. Capital Asset Prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk\*. **The Journal of Finance**, v. 19, p. 425-442, set 1964. ISSN ISSN 1540-6261.

VARIAN, H. R. **Microeconomia: conceitos básicos**. 7ª. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 20016.