

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Monografia

# Enfraquecendo a Hipótese de Contração do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Deberton Moura de Oliveira

Orientador : Prof. Wenderson Marques Ferreira  
Prof. Eder Marinho Martins (coorientador)

OURO PRETO, DEZEMBRO 2019

Deberton Moura de Oliveira

Enfraquecendo a Hipótese de Contração do Teorema do Ponto  
Fixo de Banach

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos para conclusão do curso de Bacharelado em Matemática.

Orientador:

Prof. Wenderson Marques Ferreira

Coorientador:

Prof. Eder Marinho Martins

Universidade Federal de Ouro Preto

O48e Oliveira, Deberton Moura de.  
Enfraquecendo a hipótese de contração do Teorema do Ponto Fixo de Banach  
[manuscrito] / Deberton Moura de Oliveira. - 2019.

57f.: il.: color; grafs.

Orientador: Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira.  
Coorientador: Prof. Dr. Eder Marinho Martins .

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de  
Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática.

1. Pontos fixos. 2. Teoremas . I. Ferreira, Wenderson Marques. II. Martins ,  
Eder Marinho. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 517.91



UFOP  
Universidade Federal  
de Ouro Preto

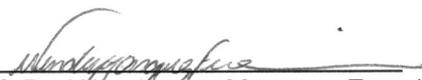


MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)  
Colegiado do Curso de Bacharelado em Matemática

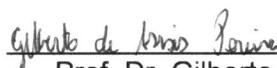


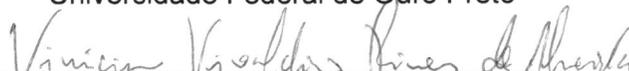
**Ata da sessão pública para julgamento da Monografia de conclusão de curso de Deberton Moura de Oliveira, na área de Matemática, do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto.**

Aos dezoito dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezenove, às dezessete horas e quinze minutos, no Auditório do Departamento de Matemática (Sala 2-02) do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto (ICEB-III), reuniu-se a Comissão Julgadora composta pelos professores: Wenderson Marques Ferreira (orientador), Eder Marinho Martins (coorientador), Gilberto de Assis Pereira e Vinicius Vivaldino Pires de Almeida para avaliação da monografia do aluno Deberton Moura de Oliveira, intitulada **“Enfraquecendo a Hipótese de Contração do Teorema do Ponto Fixo de Banach”**. A sessão pública foi aberta pelo professor Wenderson Marques Ferreira, Presidente da Comissão Julgadora e orientador, que após formalidades de praxe passou a palavra ao aluno para apresentação oral e, em seguida, arguição pelos membros da Banca. Terminada a arguição, a Comissão reuniu-se em sessão secreta para julgamento e expedição do resultado final e decidiu pela aprovação da Monografia, por unanimidade. O resultado foi comunicado publicamente ao aluno pelo presidente da comissão. Nada havendo mais a tratar, foi encerrada a sessão da qual lavrou-se a presente ata que vai assinada pela Comissão Julgadora. Ouro Preto, dezoito de dezembro do ano de dois mil e dezenove.

  
Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Presidente

  
Prof. Dr. Eder Marinho Martins  
Universidade Federal de Ouro Preto

  
Prof. Dr. Gilberto de Assis Pereira  
Universidade Federal de Ouro Preto

  
Prof. Me. Vinicius Vivaldino Pires de Almeida  
Universidade Federal de Ouro Preto

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, Cicero e Helenise, pelo gigante carinho, apoio e confiança, que foram o alicerce para que conseguisse chegar a este momento, ainda mais tratando-se de uma segunda graduação. Agradeço à minha família, por também ser uma grande fonte de suporte e carinho. Agradeço ao professor Wenderson Marques Ferreira pelas “ $n$ -ésimas” oportunidades que me proporcionou durante essa graduação, como a primeira iniciação científica, a orientação desse trabalho, a OBMEP, entre outras. Também o agradeço pela paciência, a enorme dedicação e ajuda em todas essas atividades, o que inclui muitas mensagens trocadas durante fins de semana ou tarde da noite e horas de discussão para tentar resolver às dúvidas encontradas durante os estudos. Agradeço também ao professor Eder Marinho Martins pela coorientação nesse projeto, auxiliando sempre que necessário na resolução de alguns resultados mais complicados que enfrentamos, além de toda a ajuda e disponibilidade durante o tempo de tutor do PET Matemática. Agradeço aos professores Vinícius Vivaldino Pires de Almeida e Gilberto de Assis Pereira, por aceitarem participar da banca de defesa da monografia e agregarem com observações e comentários relevantes ao trabalho. Agradeço também aos professores que tive durante as graduações, que foram responsáveis pelo conhecimento que adquiri e carregarei para o resto da minha vida. Agradeço aos meus amigos e colegas, pelo companheirismo e compartilhamento de conhecimento, experiências e muitas cervejas ao decorrer dessa graduação. Em especial, saúdo a YUKÊ e agregados, Geogébricos, PETMAT, URXAL e amigos de longa data de Ouro Branco. Enfim, agradeço a todos que contribuíram de forma direta e indireta para que conseguisse alcançar essa graduação.

“Quanto mais aumenta o nosso conhecimento, mais evidente fica nossa ignorância.”

(John F. Kennedy)

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>7</b>
<b>Abstract</b>	<b>8</b>
<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 O Teorema do Ponto Fixo de Banach</b>	<b>11</b>
1.1 Alguns Conceitos Sobre Espaços Métricos . . . . .	11
1.2 O Teorema do Ponto Fixo de Banach . . . . .	13
<b>2 O Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong</b>	<b>18</b>
2.1 O Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong . . . . .	18
2.2 Comparação do Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong com o Teorema do Ponto Fixo de Banach . . . . .	23
2.3 Exemplos . . . . .	24
<b>3 O Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata</b>	<b>31</b>
3.1 O Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata . . . . .	31
3.1.1 Existência de Ponto Fixo $x_*$ . . . . .	33
3.1.2 Unicidade do Ponto Fixo $x_*$ . . . . .	38
3.2 Comparação do Teorema com Outros Resultados Conhecidos . . . . .	40
3.2.1 Comparação com o Teorema do Ponto Fixo de Banach . . . . .	40
3.2.2 Comparação com o Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong . . . . .	40
3.3 Exemplo . . . . .	48
<b>Apêndice</b>	<b>55</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>57</b>

# Resumo

A Teoria dos Pontos Fixos é uma importante ferramenta matemática com diversas aplicações como a de obtenção da existência de soluções de equações diferenciais. Este trabalho começou pelo estudo do clássico Teorema do Ponto Fixo de Banach que garante a existência e unicidade de ponto fixo para funções que, dentre outras hipóteses, sejam contrações. O principal objetivo desse trabalho foi o estudo de resultados de existência e unicidade de ponto fixo nos quais as funções envolvidas sejam contrações fracas, ao invés de contrações. Dessa forma, foram estudados o Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong, outro resultado renomado, e o Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata<sup>1</sup>, obtido em 2011. Os Teoremas de Banach, Boyd-Wong e Vittorino Pata foram comparados entre si e foi apresentado um exemplo no qual exibiu-se uma função que satisfaz as condições do Teorema de Boyd-Wong e não satisfaz as hipóteses do Teorema de Banach. Além disso, provou-se que, em Espaços Métricos limitados, os Teoremas de Boyd-Wong e Vittorino Pata são equivalentes, bem como apresentou-se um exemplo de uma função definida em um espaço ilimitado no qual são satisfeitas somente as condições de Vittorino Pata, mas os Teoremas do Ponto Fixo de Banach e Boyd-Wong não são aplicáveis.

**Palavras Chave:** Pontos Fixos, Contração, Contração Fraca, Teorema do Ponto Fixo de Banach, Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong, Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata.

---

<sup>1</sup>Vittorino Pata: Professor da Universidade Politécnica de Milão.

# Abstract

Fixed Point Theory is an important mathematical instrument with many applications, such as ensuring existence of solutions for differential equations. This work was started by the study of the classical Banach Fixed Point Theorem, which guarantees existence and uniqueness of fixed points to certain self-functions that are contractions, among other hypothesis. The main goal of this work is studying the results of existence and uniqueness of fixed point of functions that are weak contractions instead of contractions. Therefore, Boyd-Wong Fixed Point Theorem, which is another renowned Theorem, and Vittorino Pata<sup>2</sup> Fixed Point Theorem, which was obtained in 2011, were studied. Banach, Boyd-Wong and Vittorino Pata Theorems were compared with each other and an example of a function that satisfies Boyd-Wong Theorem hypothesis and doesn't satisfy Banach Theorem conditions was presented. Moreover, it was proved that, in limited metric spaces, Boyd-Wong Theorem and Vittorino Pata Theorem are equivalents, and, more than that, an example of function, defined in an unlimited space, that satisfies just Vittorino Pata Theorem hypothesis and doesn't satisfy Banach and Boyd-Wong Theorems could be presented.

**Keywords:** Fixed Points, Contractions, Weak Contractions, Banach Fixed Point Theorem, Boyd-Wong Fixed Point Theorem, Vittorino Pata Fixed Point Theorem.

---

<sup>2</sup>Vittorino Pata: Politecnico di Milano Professor

# Introdução

A Teoria dos Pontos Fixos e suas aplicações é uma importante ferramenta matemática. Seus principais teoremas estabelecem condições que nos permitem garantir a existência de pontos fixos para funções e sua aplicação ocorre em diversas áreas como a biologia, física, química, engenharia, economia e, obviamente, a matemática. Especificamente nessa última área, a teoria é particularmente de grande importância para se garantir a existência e, às vezes, a unicidade de solução de equações diferenciais ou no estudo de sistemas dinâmicos. Devido à importância dessa Teoria, existe uma revista especializada somente em publicações relacionadas à área, denominada *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, no qual foi publicado o artigo [7], uma das principais referências deste texto.

O primeiro capítulo deste trabalho apresenta alguns conceitos de espaços métricos que serão utilizados ao longo do texto. Além disso, durante os outros capítulos também foram adicionados resultados e definições que se fizeram necessários, de modo que os capítulos possam ser lidos de forma independente, caso o leitor tenha interesse. No entanto, convém observar que a ideia não é essa, já que os resultados foram apresentados de forma contínua, tentando, sempre que possível, estabelecer comparações entre cada teorema apresentado e aqueles obtidos nos capítulos anteriores. Alguns resultados consolidados da Teoria dos Pontos Fixos são os Teoremas do Ponto Fixo de Brouwer e de Banach. O primeiro não foi descrito neste texto, mas pode ser visto em [3], [8] e [9]. O segundo será apresentado neste texto e foi obtido por Stefan Banach, um importante matemático polonês que é considerado um dos pais da Análise Funcional, em 1922. Esse teorema apresenta como hipótese que a função seja uma contração e, com isso, garante a existência e a unicidade de ponto fixo. Além disso, uma aplicação do mesmo é apresentada: a garantia de existência e unicidade de solução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Como o Teorema do Ponto Fixo de Banach possui como hipótese que a função seja uma contração, isso pode restringir a sua aplicação. Visando obter um resultado que pode ser aplicado a contrações fracas, foram estudados os teoremas apresentados, respectivamente, nos Capítulos 2 e 3: O Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong e o Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata. Ambos os teoremas ainda garantem a existência e unicidade do ponto fixo e foram comparados aos resultados previamente estudados: o teorema de Boyd-Wong foi comparado com o teorema de Banach e o teorema de Vittorino Pata foi equiparado

com os resultados de Boyd-Wong e Banach. Além disso, em cada capítulo foi apresentado um exemplo que satisfaz as hipóteses do principal resultado do capítulo e que não satisfaz as condições dos resultados previamente apresentados.

O Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong foi publicado em 1969 por David W. Boyd e James S. W. Wong. O primeiro autor é professor emérito da Universidade da Colúmbia Britânica e publicou mais de cem artigos nas áreas de Análise, Geometria, Topologia e, principalmente, Teoria dos Números. O segundo autor atualmente é professor honorário da Universidade de Hong Kong e publicou mais de cento e cinquenta artigos nas áreas de Equações Diferenciais, Análise Funcional e Teoria das Oscilações. Devido às suas realizações e em sua homenagem, a revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications* estabeleceu o prêmio *James S. W. Wong*, entregue de dois em dois anos para os destaques publicados na revista.

O Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata foi publicado em 2011 por Vittorino Pata, professor da Universidade Politécnica de Milão desde 2000, que publicou mais de cento e cinquenta artigos nas áreas de Equações Diferenciais Parciais, Análise Funcional e Sistemas Dinâmicos.

# Capítulo 1

## O Teorema do Ponto Fixo de Banach

O presente capítulo visa estabelecer alguns conceitos importantes sobre espaços métricos que serão utilizados no decorrer do texto. Além disso, será apresentado o Teorema do Ponto Fixo de Banach, resultado clássico sobre pontos fixos, juntamente com sua aplicação para o Teorema de Existência e Unicidade de Solução de Equações Diferenciais. Este capítulo será baseado em [6].

### 1.1 Alguns Conceitos Sobre Espaços Métricos

**Definição 1.1.** Uma *métrica* em um conjunto não vazio  $M$  é uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as seguintes propriedades para todo  $x, y, z \in M$ :

- $d(x, x) = 0$ ;
- Se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) > 0$ ;
- $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (Desigualdade Triangular)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

O número real  $d(x, y)$  associado a cada par ordenado de elementos  $x, y \in M$  é chamado de *distância* entre  $x$  e  $y$ .

A partir da métrica, pode-se definir espaço métrico.

**Definição 1.2.** Um *espaço métrico* é um par  $(M, d)$  em que  $M$  é um conjunto não vazio e  $d$  é uma métrica em  $M$ .

**Exemplo 1.1.** O espaço métrico euclidiano  $\mathbb{R}^n$  possui três métricas usuais com os quais se pode obter a distância entre pontos do mesmo. Dados  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , essas métricas são dadas por:

- (Métrica Euclidiana)  $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ ;
- (Métrica do Máximo)  $d(x, y) = \text{Max} \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}$ ;
- (Métrica da Soma)  $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$ .

Daqui em diante, a notação  $M$  será utilizada para se referir a um espaço métrico. Para definir espaços métricos completos é necessário o conhecimento de seqüências e convergência das mesmas. É o que será visto a seguir.

**Definição 1.3.** Uma **seqüência** em um conjunto  $M$  é uma função  $i : \mathbb{N} \rightarrow M$ , que associa cada número natural  $n$  a um elemento  $x_n$  de  $M$ , chamado  **$n$ -ésimo termo** da seqüência.

A notação mais comum para representar uma seqüência é  $(x_n)$ .

**Definição 1.4.** Seja  $(x_n)$  uma seqüência em um espaço métrico  $M$ . Diz-se que um ponto  $a \in M$  é o **limite da seqüência** quando para todo número real  $\epsilon > 0$  dado arbitrariamente, pode-se obter um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n$  maior que  $n_0$ , o respectivo  $x_n$  está a uma distância menor que  $\epsilon$  de  $a$ , isto é,  $n > n_0$  implica  $\text{emd}(x_n, a) < \epsilon$ . Quando o limite da seqüência existe, a seqüência é dita **convergente** em  $M$ .

A notação para limite de uma seqüência é dada por  $\lim x_n = a$  ou  $x_n \rightarrow a$ . Convém observar o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser vista em [6] e que, apesar de simples, é necessário e será utilizado no Exemplo 1.2.

**Proposição 1.** (Unicidade do limite) Uma seqüência não pode convergir para dois limites diferentes.

Um caso especial de seqüência que é necessária para a definição de espaço métrico completo é a seqüência de Cauchy.

**Definição 1.5.** Uma seqüência em um espaço métrico  $M$  é uma **seqüência de Cauchy** quando para todo  $\epsilon > 0$  dado arbitrariamente, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, n > n_0$  implica que  $d(x_m, x_n) < \epsilon$ .

**Definição 1.6.** Um espaço métrico é **completo** quando toda seqüência de Cauchy em  $M$  é convergente.

**Exemplo 1.2.** Um exemplo clássico de uma seqüência de Cauchy, que não converge em um espaço métrico, é dada pela seqüência de racionais convergindo para  $\sqrt{2}$ , em que considera-se o espaço  $\mathbb{Q}$  com a métrica induzida de  $\mathbb{R}$ . A seqüência é definida da forma:  $x_1 = 1; x_2 = 1,4; x_3 = 1,41; x_4 = 1,414; \dots$ , isto é, o termo  $x_n$  da seqüência é um decimal finito, com parte inteira 1 e com as  $n - 1$  casas decimais após a vírgula, todas coincidindo com as  $n - 1$  primeiras casas decimais de  $\sqrt{2}$  e, por construção, essa seqüência converge

para  $\sqrt{2}$  em  $\mathbb{R}$ . A sequência está contida no espaço métrico  $\mathbb{Q}$ , já que todos os valores de  $(x_n)$  são racionais, mas não converge nesse espaço, pois  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Como, pela Proposição 1, o limite de uma sequência é único, conclui-se que o espaço métrico dos racionais não é completo.

Antes de enunciar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, serão introduzidas duas definições utilizadas no mesmo: os conceitos de ponto fixo e de contração. Além disso, serão definidos os conceitos de contração fraca, espaço de Banach e de aplicação lipschitziana.

**Definição 1.7.** Um **ponto fixo** de uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é um ponto  $x \in M \cap N$  tal que  $f(x) = x$ .

**Definição 1.8.** Sejam  $M, N$  espaços métricos. Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é uma **contração** quando existe uma constante  $c$ ,  $0 \leq c < 1$ , tal que  $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$  para quaisquer  $x, y \in M$ .

**Definição 1.9.** Sejam  $M, N$  espaços métricos. Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é uma **contração fraca** quando  $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$  para quaisquer  $x, y \in M$ .

**Definição 1.10.** Sejam  $M, N$  espaços métricos. Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é uma **aplicação lipschitziana** quando existe  $c > 0$  tal que  $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$  para todo  $x, y \in M$ .

**Definição 1.11.** Um espaço métrico é chamado **espaço de Banach** quando é um espaço vetorial normado completo.

Convém observar os conhecidos resultados que toda contração, contração fraca e aplicações lipschitzianas são funções contínuas, e esses resultados são demonstrados em [6].

## 1.2 O Teorema do Ponto Fixo de Banach

**Teorema 2. (Teorema do Ponto Fixo de Banach)** Se  $M$  for um espaço métrico completo, toda contração  $f : M \rightarrow M$ , com  $0 \leq c < 1$ , possui um único ponto fixo em  $M$ . Mais precisamente, tomando um ponto qualquer  $x_0 \in M$  e colocando  $x_1 = f(x_0)$ ,  $x_2 = f(x_1)$ , ...,  $x_{n+1} = f(x_n)$ , a sequência  $(x_n)$  converge em  $M$  e  $x = \lim x_n$  é o único ponto fixo de  $f$ .

**Demonstração:** Primeiramente, será mostrado que  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $M$  e, como  $M$  é um espaço métrico completo, a sequência será convergente em  $M$ . Pela construção da sequência, pode-se obter que

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq cd(x_0, x_1).$$

Da mesma forma,

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq cd(x_1, x_2) \leq c^2d(x_0, x_1).$$

Procedendo recursivamente, segue-se que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n d(x_0, x_1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para  $n, p \in \mathbb{N}$  quaisquer, a partir da desigualdade triangular, tem-se que

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}).$$

Utilizando do argumento da recursividade anterior, tem-se que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq (c^n + c^{n+1} + \dots + c^{n+p-1})d(x_0, x_1) \\ &= c^n(1 + c + \dots + c^{p-1})d(x_0, x_1) \\ &= c^n \left( \frac{1 - c^p}{1 - c} \right) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{c^n}{1 - c} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como  $0 \leq c < 1$ , tem-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$ . Com isso, segue-se que  $(x_n)$  é uma seqüência de Cauchy em  $M$ .

Devido a  $M$  ser um espaço métrico completo, existe  $a \in M$  tal que  $\lim(x_n) = a$ . Como a função  $f$  é contínua, tem-se que  $f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a$ , e, com isso,  $a$  é ponto fixo de  $f$ .

Para finalizar, será demonstrado que  $f$  não possui dois pontos fixos distintos. Com efeito, se  $f(a) = a$ ,  $f(b) = b$  e sendo  $f$  uma contração, então

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq cd(a, b),$$

com  $0 \leq c < 1$ . Por consequência, é obtido que  $(1 - c)d(a, b) \leq 0$  e, como  $1 - c$  é positivo, deve-se ter  $d(a, b) = 0$ , ou seja,  $a = b$ . Portanto, o ponto fixo de  $f$  é único.  $\square$

Convém observar que o Teorema do Ponto Fixo de Banach garante não somente a existência do ponto fixo, mas também a unicidade do mesmo. Além disso, uma das hipóteses do teorema é que  $f$  seja uma contração. Um dos objetivos deste texto é trabalhar com teoremas de ponto fixo que pedem uma condição mais fraca que a contração. O exemplo a seguir mostrará uma função que é uma contração fraca e não possui ponto fixo, mostrando a necessidade da hipótese da contração para o Teorema 2.

**Exemplo 1.3.** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = x + 1.$$

Note que  $d(f(x), f(y)) = |x+1 - (y+1)| = |x-y| = d(x, y)$ , ou seja,  $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$  e  $f$  é uma contração fraca. Porém, como  $f(x) = x + 1 > x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tal função não possui ponto fixo.

Uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach é a demonstração do clássico resultado de existência e unicidade da solução de uma equação diferencial ordinária (EDO), que será enunciada e demonstrada a seguir.

**Teorema 3. (Teorema da Existência e Unicidade de Solução de uma EDO)**

Seja  $E$  um espaço de Banach. Considere um aberto  $U \subset \mathbb{R} \times E$  e uma aplicação lipzchitziana  $f : U \rightarrow E$  com constante de Lipzchitz  $c > 0$  na segunda variável, isto é,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq c|x - y|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in U.$$

Seja  $(t_0, x_0) \in U$  fixado. Então será possível obter uma solução única para o seguinte problema de valor inicial (P.V.I.)

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

em que  $\varphi : I \rightarrow E$  é a solução desejada, definida em um intervalo  $I$ .

**Demonstração:** Primeiramente, observe que, como  $f$  é uma aplicação lipzchitziana,  $f$  é, em particular, contínua. Com isso, o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser aplicado nas condições do P.V.I. (1.1) e obtêm-se  $\varphi$ , para todo  $t \in I$ , da forma

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Na sequência, considere o intervalo  $I = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$  e a bola fechada  $B = B[x_0, \beta]$  em  $E$ , em que  $\alpha, \beta > 0$  e satisfazem as seguintes condições:

1.  $I \times B \subset U$ ;
2.  $|f(t, x)| \leq M, \quad \forall (t, x) \in I \times B$ ;
3.  $\alpha \cdot M \leq \beta$ ;
4.  $\alpha \cdot c < 1$ .

A primeira condição é satisfeita por  $U$  ser um aberto, sendo possível obter  $\alpha$  e  $\beta$  tal que  $I \times B \subset U$ . Para a segunda condição, basta observar que, como  $f$  é contínua, ela

é limitada em uma vizinhança do ponto  $(t_0, x_0)$ . Já para a terceira e quarta condições, basta tomar  $\alpha$  suficientemente pequeno para satisfazer ambas as desigualdades. A Figura 1.1 apresenta o espaço que satisfaz essas condições.

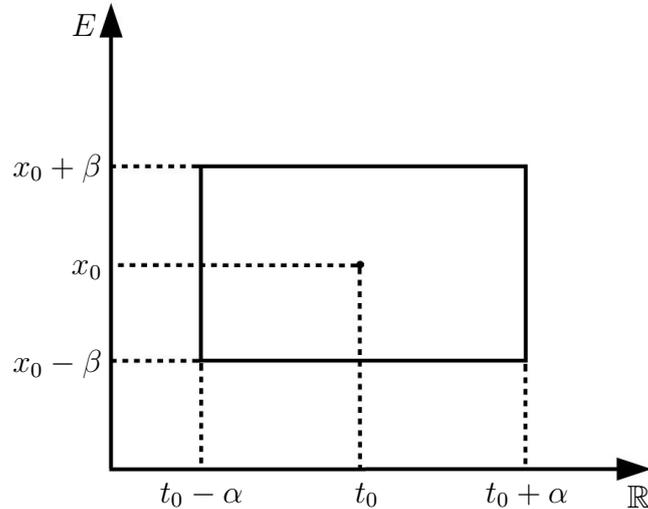


Figura 1.1: O espaço  $I \times B$  desejado.

Considere o espaço das aplicações contínuas  $\varphi : I \rightarrow B$ . Nesse espaço, pode-se definir a métrica da convergência uniforme, em que, dadas duas funções  $f, g$  nesse espaço, tem-se

$$d(f, g) = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)|,$$

e, com essa métrica, o espaço métrico  $\mathcal{C}(I; B)$  dessas aplicações é completo.

Com isso, define-se a aplicação  $F : \mathcal{C}(I; B) \rightarrow \mathcal{C}(I; B)$  da forma

$$[F(\varphi)](t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{C}(I; B)$  e todo  $t \in I$ .

Pode-se verificar que a função está bem definida, ou seja, mostrar que  $[F(\varphi)](t) \in \mathcal{C}(I; B)$ . Para tal, basta mostrar que a imagem de  $F$  está contida na bola fechada  $B$  e também que  $[F(\varphi)](t)$  é uma função contínua. Para a primeira condição, note que, para toda  $\varphi \in \mathcal{C}(I; B)$  e todo  $t \in I$ , tem-se

$$|[F(\varphi)](t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq M \cdot |t - t_0| \leq M \cdot \alpha \leq \beta,$$

e, portanto,  $[F(\varphi)](t) \in B$ . Para a segunda condição, será demonstrado que  $F$  é Lipschitz, e, por consequência, contínua. Com efeito, dados  $t_1, t_2 \in I$ , vale

$$\begin{aligned}
|[F(\varphi)](t_2) - [F(\varphi)](t_1)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^{t_2} f(s, \varphi(s)) ds - \left[ x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, \varphi(s)) ds \right] \right| \\
&= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq M \cdot |t_2 - t_1|,
\end{aligned}$$

e a continuidade de  $[F(\varphi)]$  é obtida. Portanto, como  $[F(\varphi)](t) \in \mathcal{C}(I, B)$ , segue-se que  $F$  é uma aplicação do espaço  $\mathcal{C}(I, B)$  nele próprio. Em seguida, será demonstrado que  $F$  é uma contração com constante  $k = \alpha c$ , que, pela condição 4, satisfaz  $0 < k < 1$ . Dados  $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(I, B)$  quaisquer, tem-se que

$$\begin{aligned}
\|F(\varphi) - F(\psi)\| &= \sup_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))] ds \right| \\
&\leq \alpha \sup_{s \in I} |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| \\
&\leq \alpha c \sup_{s \in I} |\varphi(s) - \psi(s)| \\
&\leq \alpha c \|\varphi - \psi\| = k \|\varphi - \psi\|,
\end{aligned}$$

em que foi utilizado o fato de  $f$  ser uma função de Lipschitz na segunda desigualdade. Logo, a função  $F$  satisfaz todas as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Banach e existe uma única aplicação contínua  $\varphi : I \rightarrow B$  tal que  $F(\varphi) = \varphi$ , isto é,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

que claramente satisfaz  $\varphi(t_0) = x_0$ . Portanto, o P.V.I. (1.1) apresenta solução única, como desejado.  $\square$

# Capítulo 2

## O Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong

Neste capítulo será discutido o Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong, apresentado por David William Boyd e James S. W. Wong em 1969 no artigo *On Nonlinear Contractions*, [2]. O principal teorema deste capítulo, Teorema 6, tem como uma de suas hipóteses que a função envolvida seja uma contração fraca, não necessariamente uma contração, como necessário no Teorema do Ponto Fixo de Banach. Será apresentado um exemplo em que o Teorema do Ponto Fixo de Banach não é aplicável, mas o Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong é, mostrando a relevância do resultado.

### 2.1 O Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong

Antes de apresentar o Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong, serão introduzidos alguns conceitos e lemas utilizados. Primeiramente, será definida a semicontinuidade superior, obtida de [5], e também o que vem a ser um espaço metricamente convexo, obtido de [2].

**Definição 2.1.** *Seja  $X$  um espaço métrico. Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser **semicontínua superiormente em**  $x_0 \in X$  quando, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , então  $f(x) < f(x_0) + \epsilon$ . Diz-se que  $f$  é semicontínua superiormente se for semicontínua superiormente para todos os pontos de  $X$ .*

**Definição 2.2.** *Um espaço métrico  $X$  é **metricamente convexo** quando, para cada  $x, y \in X$ , existe  $z \in X$ , distinto de  $x$  e  $y$ , tal que  $d(x, y) = d(x, z) + d(y, z)$ .*

**Observação 1.** *A condição da semicontinuidade superiormente em  $x_0 \in X$  é equivalente a*

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

A demonstração desse resultado será apresentada na Proposição 21, que se encontra no Apêndice deste texto.

Os resultados apresentados neste capítulo utilizarão a semicontinuidade superior à direita, o que é somente uma restrição imediata da definição de semicontinuidade e é apresentada a seguir.

**Definição 2.3.** *Seja  $X$  um espaço métrico. Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **semicontínua superiormente à direita em**  $x_0 \in X$  quando, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , então  $f(x) < f(x_0) + \epsilon$ . Diz-se que  $f$  é semicontínua superiormente à direita se for semicontínua superiormente à direita para todos os pontos de  $X$ .*

Para espaços metricamente convexos, tem-se o seguinte resultado.

**Lema 4. (Menger)** *Se  $X$  é um espaço métrico completo metricamente convexo, então, para todo  $\alpha \in (0, 1)$  e para quaisquer  $x, y \in X$  distintos, existe  $z \in X$  tal que*

$$d(x, z) = \alpha d(x, y) \text{ e } d(z, y) = (1 - \alpha)d(x, y). \quad (2.1)$$

A demonstração desse resultado é extensa e foge ao escopo desse texto. Caso o leitor possua interesse na mesma, pode verificá-la na página 41 de [1].

Durante este capítulo,  $P$  denotará a imagem da função distância no espaço métrico  $X$ , isto é,

$$P = \{d(x, y) / x, y \in X\}, \quad (2.2)$$

e  $\bar{P}$  será o fecho de  $P$ . Para um espaço metricamente convexo,  $P$  é um intervalo do tipo  $[0, b]$  ou  $[0, b)$ , em que  $b$  é um real positivo ou infinito. De fato, dados dois pontos  $x, y \in X$  tal que  $d(x, y) = b$ , o Lema 4 garante que, para todo  $\alpha \in (0, 1)$ , existe  $z \in X$  tal que  $d(x, z) = \alpha d(x, y) = \alpha b$ , o que implica que para todo  $\beta \in (0, b)$  existe  $z \in X$  tal que  $d(x, z) = \beta$ . Como os pontos considerados foram arbitrários em  $X$ , o conjunto  $P$  definido em (2.2) será um intervalo, como desejado.

Outro resultado necessário é o seguinte lema.

**Lema 5.** *Seja  $X$  um espaço métrico completo metricamente convexo e  $T : X \rightarrow X$  uma função lipschitziana com constante de Lipschitz  $M$ . Defina a função  $\phi : [0, b) \rightarrow [0, b]$  dada por*

$$\phi(t) = \sup \{d(T(x), T(y)) / x, y \in X, d(x, y) = t\}. \quad (2.3)$$

Assim,

- (a) se  $s, t > 0$  e  $s + t < b$ , então  $\phi(s + t) \leq \phi(s) + \phi(t)$ , isto é,  $\phi$  é subaditiva;
- (b)  $\phi$  é semicontínua superiormente à direita em  $[0, b)$ .

**Observação 2.** *Convém observar que a função  $\phi$  está bem definida no Lema 5. Isso ocorre devido à função  $T$  ser lipschitziana, pois, dado  $x, y \in X$  tal que  $d(x, y) = t_0$ , tem-se*

$$d(T(x), T(y)) \leq Md(x, y) = Mt_0.$$

Devido à arbitrariedade de  $x, y \in X$ , essa relação pode ser levada ao supremo, obtendo-se que  $\phi(t_0) \leq Mt_0$ , mostrando a boa definição de  $\phi$ .

**Demonstração:** (a) Considere  $d(x, y) = s + t$ , em que  $x, y \in X$  e  $s, t$  positivos e  $s + t < b$ . A partir do Lema 4, tomando  $\alpha = \frac{s}{s+t} < 1$ , existe  $z \in X$  tal que  $d(x, z) = s$  e  $d(z, y) = t$ . Utilizando-se da desigualdade triangular, da definição de  $\phi$  e da Observação 2, é obtido que

$$d(T(x), T(y)) \leq d(T(x), T(z)) + d(T(z), T(y)) \leq \phi(s) + \phi(t).$$

Como essa relação é válida para quaisquer  $x, y \in X$  tais que  $d(x, y) = s + t$ , também será válida para o supremo e, tomando-o nos dois lados, é obtido que

$$\phi(s + t) \leq \phi(s) + \phi(t).$$

(b) Utilizando o resultado (a) e o fato de  $T$  ser lipschitziana, dados  $t, t_0 < b$  e  $t_0 < t$ , tem-se

$$\phi(t) = \phi(t - t_0 + t_0) \leq \phi(t - t_0) + \phi(t_0) \leq M(t - t_0) + \phi(t_0),$$

sendo a última desigualdade consequência de (2.3), já que

$$d(T(x), T(y)) \leq Md(x, y) = M(t - t_0).$$

A partir dessa relação, para dado  $\epsilon > 0$  e  $t_0 \in [0, b)$ , basta tomar  $\delta = \frac{\epsilon}{M}$  e, assim, para  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ , tem-se

$$\phi(t) \leq M(t - t_0) + \phi(t_0) \leq M \cdot \frac{\epsilon}{M} + \phi(t_0) = \epsilon + \phi(t_0),$$

e  $\phi$  é semicontínua superiormente à direita, como desejado.  $\square$

De posse das definições e lemas anteriores, é possível enunciar o principal resultado deste capítulo.

**Teorema 6. (Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong)** *Seja  $X$  um espaço métrico completo,  $P$  o espaço definido em (2.2) e  $\rho : \bar{P} \rightarrow [0, \infty)$  uma função semicontínua superiormente à direita que satisfaz  $\rho(t) < t$  para todo  $t \in \bar{P} \setminus \{0\}$ . Se  $T : X \rightarrow X$  for uma função que satisfaz*

$$d(T(x), T(y)) \leq \rho(d(x, y)), \tag{2.4}$$

*para todo  $x, y \in X$ , então  $T$  possui um único ponto fixo  $x_*$  e a sequência  $(T^n(x))$  converge para  $x_*$ , para cada  $x \in X$ .*

**Demonstração:** Dado  $x \in X$ , considere a sequência  $(c_n)$  em que  $c_1 = x$  e os outros

termos são definidos da forma

$$c_n = d(T^n(x), T^{n-1}(x)). \quad (2.5)$$

Será demonstrado que  $(c_n)$  tende a zero. De fato, a sequência é decrescente, pois

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= d(T^{n+1}(x), T^n(x)) = d(T(T^n(x)), T(T^{n-1}(x))) \\ &\leq \rho(d(T^n(x), T^{n-1}(x))) = \rho(c_n) < c_n, \end{aligned}$$

em que a última desigualdade ocorre devido a hipótese de  $\rho(t) < t$  para todo  $t \in \overline{P} \setminus \{0\}$ . Como  $c_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se uma sequência monótona e limitada, portanto convergente. Suponha, por contradição, que  $(c_n)$  convirja para  $c > 0$ . Pela última expressão, tem-se

$$c_{n+1} \leq \rho(c_n),$$

e, como  $(c_n)$  é limitada e  $\rho(c_n) < c_n$ ,  $(\rho(c_n))$  também é limitada. Aplicando o limite e usando a semicontinuidade superior de  $\rho$ , tem-se

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(c_n) \leq \limsup_{t \rightarrow c^+} \rho(t) \leq \rho(c),$$

o que é uma contradição, pois  $\rho(t) < t$  para todo  $t \in \overline{P} \setminus \{0\}$ . Portanto, a sequência  $(c_n)$  tende a zero.

O próximo passo é demonstrar que a sequência  $(T^n(x))$  é de Cauchy para cada  $x \in X$ . Suponha que a sequência não seja de Cauchy. Então, existe  $\epsilon > 0$  e uma sequência de inteiros  $m_k, n_k$  com  $m_k > n_k \geq k$  tal que

$$d_k = d(T^{m_k}(x), T^{n_k}(x)) \geq \epsilon \text{ para } k \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Considere que  $m_k$  é o menor inteiro maior que  $n_k$  tal que a condição (2.6) é satisfeita. Isso implica que

$$d(T^{m_k-1}(x), T^{n_k}(x)) < \epsilon.$$

Utilizando dessa condição, de (2.5) e da monotonicidade de  $(c_n)$ , é obtido que

$$d_k \leq d(T^{m_k}(x), T^{m_k-1}(x)) + d(T^{m_k-1}(x), T^{n_k}(x)) \leq c_{m_k} + \epsilon \leq c_k + \epsilon.$$

Fazendo  $k$  tendendo a infinito, é obtido que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = \epsilon, \quad (2.7)$$

pois  $c_k$  tende a zero. Além disso, utilizando-se da desigualdade triangular, da monotoni-

cidade de  $c_n$  e de (2.4), obtêm-se que

$$\begin{aligned}
d_k = d(T^{m_k}(x), T^{n_k}(x)) &\leq d(T^{m_k}(x), T^{m_k+1}(x)) + d(T^{m_k+1}(x), T^{n_k+1}(x)) \\
&\quad + d(T^{n_k+1}(x), T^{n_k}(x)) \\
&\leq c_{m_k} + \rho(d(T^{m_k}(x), T^{n_k}(x))) + c_{n_k} \\
&\leq 2c_k + \rho(d_k).
\end{aligned}$$

A partir de (2.7) e tomando  $k$  tendendo a infinito novamente, é obtido que

$$\epsilon = \lim_{k \rightarrow \infty} d_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2c_k + \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho(d_k) \leq 0 + \rho(\epsilon),$$

ou seja,  $\epsilon \leq \rho(\epsilon)$ , contradição com a condição  $\rho(t) < t$  para todo  $t \in \overline{P} \setminus \{0\}$ . Portanto  $(T^n(x))$  é uma sequência de Cauchy em  $X$  e, como  $X$  é um espaço completo,  $(T^n(x))$  é convergente.

Note que, reescrevendo  $T^n(x) = x_n$ , tem-se que

$$T(x_n) = x_{n+1}, \tag{2.8}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Observe que  $T$  é uma função contínua, pois

$$d(T(x), T(y)) \leq \rho(d(x, y)) < d(x, y),$$

ou seja,  $T$  é lipschitziana com constante de Lipzchitz igual a 1. A partir disso, tomando o limite em (2.8), tem-se

$$x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = T(x_*),$$

e um ponto fixo é obtido.

Para a unicidade, suponha que existam dois pontos fixos  $x_*, y_* \in X$  distintos, isto é,  $d(x_*, y_*) > 0$ . A partir de (2.4) e da condição  $\rho(t) < t$ , tem-se

$$d(x_*, y_*) = d(T(x_*), T(y_*)) \leq \rho(d(x_*, y_*)),$$

o que é uma contradição com a condição  $\rho(t) < t$  para todo  $t \in \overline{P} \setminus \{0\}$ . Portanto, o ponto fixo obtido é único.  $\square$

O Teorema a seguir é uma consequência do Teorema 6 e estabelece que, para um espaço metricamente convexo, as condições impostas em  $\rho$  podem ser enfraquecidas e, ainda assim, é possível obter as mesmas conclusões do Teorema 6.

**Teorema 7.** *Suponha que  $X$  é um espaço métrico completo metricamente convexo,  $P$  o espaço definido em (2.2) e que  $T : X \rightarrow X$  satisfaça (2.4), em que  $\rho : \overline{P} \rightarrow [0, \infty)$  satisfaz*

a condição  $\rho(t) < t$  para todo  $t \in \overline{P} \setminus \{0\}$ . Então  $T$  possui um único ponto fixo  $x_0$  e  $T^n(x)$  tende a  $x_0$  para todo  $x \in X$ .

**Demonstração:** Considere  $\phi(t)$  nas condições do Lema 5 para  $t \in [0, b)$ , e, com isso, defina

$$\phi(t) := \sup_{x, y \in X} \{d(T(x), T(y))/d(x, y) = t\}$$

e, por (2.4),

$$\phi(t) \leq \rho(d(x, y)) = \rho(t),$$

para todo  $t \in [0, b)$ . Caso  $t = b$ , não se pode utilizar diretamente o Lema 5. Sendo assim, se  $P$  for do tipo  $[0, b]$ , define-se  $\phi(b) = \rho(b)$ . Desta forma, tem-se uma função  $\phi$  que satisfaz

$$d(T(x), T(y)) \leq \phi(d(x, y)),$$

para todo  $x, y \in X$  e, além disso,  $\phi(t) \leq \rho(t) < t$  para  $t \in \overline{P} \setminus \{0\}$ . Além disso, convém observar que

$$d(T(x), T(y)) \leq \rho(d(x, y)) < d(x, y),$$

ou seja,  $T$  é lipschitziana com constante 1. Portanto, tem-se que  $\phi$  e  $T$  satisfazem as condições do Lema 5, logo  $\phi$  é semicontínua superiormente à direita em  $[0, b)$ . A partir disso, considerando as condições do Teorema 6 com  $\phi$  no lugar de  $\rho$ , o mesmo Teorema pode ser aplicado a  $T$ , e, assim,  $T$  possui um único ponto fixo, como desejado.  $\square$

## 2.2 Comparação do Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong com o Teorema do Ponto Fixo de Banach

Como o Teorema 2 é uma grande referência na Teoria de Pontos Fixos, nesta seção esse resultado será comparado com o Teorema 6, mostrando que, se uma função satisfizesse as condições do Teorema do Ponto Fixo de Banach, ela também atenderia as condições do Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong. Com efeito, considere  $X$  um espaço métrico completo e  $f : X \rightarrow X$  uma contração, ou seja,

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \tag{2.9}$$

com  $0 \leq k < 1$ . Desta forma, pode-se definir a função  $\rho : \overline{P} \rightarrow [0, \infty)$ , em que  $P$  é o espaço definido em (2.2), por

$$\rho(t) = kt.$$

Devido à continuidade de  $\rho$ , para todo  $t_0 \in \overline{P}$  e  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se

$t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , então

$$\rho(t_0) - \epsilon < \rho(t) < \rho(t_0) + \epsilon.$$

A semicontinuidade à direita de  $\rho$  segue-se da segunda desigualdade e da restrição a valores do intervalo  $(t_0, t_0 + \delta)$ .

Além disso, como  $k < 1$ , para  $t \in \overline{P} \setminus \{0\}$ , é obtido que  $\rho(t) = kt < t$ . Outro ponto importante é que, pela equação (2.9),  $f$  satisfaz a condição (2.4) e, portanto, o Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong pode ser aplicado a  $f$ .

Na seção a seguir, será apresentado um exemplo de função que satisfaz o Teorema 6 e não satisfaz o Teorema 2, mostrando a relevância do Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong.

## 2.3 Exemplos

Na sequência, serão apresentados dois exemplos que indicam que ao se enfraquecer uma das hipóteses do Teorema 6, não há garantia da existência ou da unicidade do ponto fixo, mostrando a necessidade das hipóteses apresentadas. O primeiro exemplo satisfaz todas as condições do Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong, exceto a semicontinuidade superior de  $\rho$  e não possui ponto fixo.

**Exemplo 2.1.** Considere o espaço métrico  $X = \{x_n = n\sqrt{2} + 2^n/n \in \mathbb{Z}\}$ , com a métrica induzida de  $\mathbb{R}$ . Observe que  $X$  é um subespaço completo de  $\mathbb{R}$ . De fato, dados  $x_n, x_m \in X$  distintos, suponha, sem perda de generalidade, que  $n > m$ . Dessa forma, tem-se

$$d(x_n, x_m) = \left| n\sqrt{2} + 2^n - m\sqrt{2} - 2^m \right| = (n - m)\sqrt{2} + (2^n - 2^m) > \sqrt{2}, \quad (2.10)$$

mostrando que  $X$  possui todos os seus pontos com distância maior que  $\sqrt{2}$ , implicando que qualquer sequência convergente em  $X$  deve, a menos de finitos valores, ser constante. Portanto,  $X$  é um subespaço fechado de  $\mathbb{R}$  e, por consequência, completo.

Considere  $P$  o conjunto definido em (2.2). Para cada  $p \in P$ , existe uma única dupla  $x_n$  e  $x_m$  tal que  $p = d(x_n, x_m)$ . Com efeito, suponha que existam  $x_n, x_m, x_j, x_k \in X$ , com  $n > m$  e  $j > k$ , tal que  $d(x_n, x_m) = d(x_j, x_k)$ . Dessa forma,

$$(j - k)\sqrt{2} + (2^j - 2^k) = (n - m)\sqrt{2} + (2^n - 2^m),$$

o que pode ser reorganizado da forma

$$(m - n + j - k)\sqrt{2} = 2^n - 2^m - 2^j + 2^k.$$

Observe que há um número irracional multiplicado por inteiros de um lado e do outro somente racionais. A igualdade só é possível se ambos os lados se anularem, isto é,

$n - m = j - k$  e  $2^n - 2^m = 2^j - 2^k$ . Considere  $n - m = s = j - k$ , com  $s \neq 0$ . Substituindo na igualdade anterior, tem-se

$$2^m (2^s - 1) = 2^{m+s} - 2^m = 2^{k+s} - 2^k = 2^k (2^s - 1).$$

Como  $2^s - 1 \neq 0$ , obtêm-se  $m = k$  e, conseqüentemente,  $n = j$ , e, com essa contradição, conclui-se que a dupla de distância  $p$  é única.

Defina  $T : X \rightarrow X$  por

$$T(x_n) = x_{n-1}, n \in \mathbb{Z} \quad (2.11)$$

e  $\rho : \bar{P} \rightarrow [0, \infty)$  por

$$\rho(t) = \begin{cases} |x_{n-1} - x_{m-1}|, & \text{se } t = |x_n - x_m|, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Nessas condições, tem-se que  $\rho(t) < t$ , para todo  $t \in \bar{P} \setminus \{0\}$ . De fato, se  $t \in P$ , existem  $m, n \in \mathbb{Z}$ , com  $n > m$ , tal que  $d(x_n, x_m) = t$  e, dessa forma,

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \left| (n-1)\sqrt{2} + 2^{n-1} - [(m-1)\sqrt{2} + 2^{m-1}] \right| \\ &= (n-m)\sqrt{2} + 2^{m-1} (2^{n-m} - 1) \\ &< (n-m)\sqrt{2} + 2^m (2^{n-m} - 1) \\ &= n\sqrt{2} + 2^n - m\sqrt{2} - 2^m = t. \end{aligned}$$

Caso  $t \in \bar{P} \setminus P$ , então  $\rho(t) = 0 < t$ , e tem-se o resultado desejado. Além disso, por construção, tem-se

$$d(T(x_n), T(x_m)) = |x_{n-1} - x_{m-1}| = \rho(|x_n - x_m|),$$

ou seja, a aplicação  $T$ , dada por (2.11), satisfaz (2.4).

No entanto,  $\rho$  não é semicontínua superiormente. Primeiramente, observe que  $\sqrt{2} \in \bar{P} \setminus P$ . A partir de (2.10), conclui-se que  $\sqrt{2}$  não pertence a  $P$ . Porém, pode-se ver que  $\sqrt{2}$  pertence à  $\bar{P}$  pois, dados  $x_n, x_{n-1} \in X$ , tem-se

$$d(x_n, x_{n-1}) = \left| n\sqrt{2} + 2^n - [(n-1)\sqrt{2} + 2^{n-1}] \right| = \sqrt{2} + 2^n - 2^{n-1} = \sqrt{2} + 2^{n-1},$$

e tomando  $n$  tendendo a menos infinito, a distância entre os pontos tende a  $\sqrt{2}$ . Logo,  $\rho(\sqrt{2}) = 0$ . Além disso, para  $\epsilon = 1$  e dado  $p \in P$ , tem-se que

$$\rho(p) = d(x_n, x_m) \geq \sqrt{2} > 0 + 1 = \rho(\sqrt{2}) + 1.$$

Portanto,  $\rho$  não é semicontínua superiormente à direita em  $\sqrt{2}$ .

Convém observar que, mesmo que se definam outros valores para  $\rho(t)$ , definida em (2.12),  $t \in \overline{P} \setminus P$ , se  $\rho$  satisfaz a condição  $\rho(t) < t$ , deve-se ter que  $\rho(\sqrt{2}) < \sqrt{2}$ , e basta tomar  $\epsilon = \frac{\sqrt{2} - \rho(\sqrt{2})}{2}$  para a semicontinuidade falhar em  $\sqrt{2}$ . Portanto, para obter-se a semicontinuidade superiormente à direita em  $\sqrt{2}$ , dever-se-ia ter  $\rho(\sqrt{2}) \geq \sqrt{2}$ , o que contradiz a hipótese  $\rho(t) < t$ . Logo, não é possível satisfazer ao mesmo tempo todas as condições do Teorema 6.

Para finalizar o exemplo, observe que  $T$  não possui ponto fixo, pois

$$T(x_n) = T(n\sqrt{2} + 2^n) = (n-1)\sqrt{2} + 2^{n-1},$$

e  $n\sqrt{2} + 2^n \neq (n-1)\sqrt{2} + 2^{n-1}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . □

O próximo exemplo mostra que, se a condição  $\rho(t) < t$  for enfraquecida, mesmo que somente para um único  $t_0$  tal que  $\rho(t_0) = t_0$ , a existência e a unicidade do ponto fixo para uma aplicação  $T$  satisfazendo as outras condições do Teorema 6 pode não ocorrer. Nesse exemplo, tem-se uma função que não apresenta nenhum ponto fixo e uma outra com dois pontos fixos.

**Exemplo 2.2.** Considere o espaço métrico  $X = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$  com a métrica induzida de  $\mathbb{R}$ . Como  $X$  é um subespaço fechado de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  é completo. Considere as funções  $T_1, T_2 : X \rightarrow X$  definidas por

$$T_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1), & \text{se } x \geq 1, \\ \frac{1}{2}(x-1), & \text{se } x \leq -1, \end{cases} \quad (2.13)$$

e  $T_2(x) = -T_1(x)$ . Além disso, defina  $\rho : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  por

$$\rho(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & \text{se } 0 \leq t < 2, \\ \frac{1}{2}t + 1, & \text{se } t \geq 2. \end{cases} \quad (2.14)$$

Será demonstrado que  $\rho$  é uma função semicontínua superiormente à direita. Com efeito, será apresentado o caso em que  $t_0 \in [0, 2)$  e para  $t_0 \geq 2$  é análogo. Dito isso, dado  $t_0 \in [0, 2)$  e  $\epsilon > 0$ , tome  $\delta \leq 2\epsilon$ , de forma que  $\delta$  seja tomado suficientemente pequeno para satisfazer  $(t_0, t_0 + \delta) \subseteq [0, 2)$ , e então, para todo  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ , tem-se

$$\rho(t) = \frac{1}{2}t \leq \frac{1}{2}(t_0 + \delta) = \frac{1}{2}t_0 + \frac{\delta}{2} \leq \rho(t_0) + \epsilon,$$

como desejado.

A próxima condição a se verificar é  $\rho(t) < t$  para todo  $t \in (0, \infty)$ , exceto  $t = 2$ , em que  $\rho(2) = 2$ . Para  $t \in (0, 2)$ , tem-se que

$$\rho(t) = \frac{1}{2}t < t,$$

e, se  $t > 2$ , também é sempre válido que

$$\rho(t) = \frac{1}{2}t + 1 < t.$$

Além disso,  $T_1$  e  $T_2$  satisfazem (2.4). De fato, será demonstrado apenas para  $T_1$ , visto que para  $T_2$  é equivalente, devido as duas funções diferirem por um sinal de menos, que não afetará os valores absolutos das distâncias. A demonstração será dividida em casos de acordo com a localização dos pontos em  $X$  e de suas respectivas distâncias.

Primeiramente, dados  $x, y \in X$ , considere o caso em que  $d(x, y) < 2$ , o que é possível somente se  $x, y \geq 1$  ou  $x, y \leq -1$ . Para a primeira situação, tem-se

$$d(T_1(x), T_1(y)) = \left| \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(y+1) \right| = \frac{1}{2}|x-y| = \rho(|x-y|),$$

como desejado. A situação  $x, y \leq -1$  com  $d(x, y) < 2$  é análoga.

O segundo caso ocorre quando, dados  $x, y \in X$ ,  $d(x, y) \geq 2$ , e pode acontecer se  $x, y \geq 1$ ;  $x, y \leq -1$ ;  $x \geq 1$  e  $y \leq -1$  ou  $x \leq -1$  e  $y \geq 1$ . Considerando  $x, y \geq 1$  (análogo para  $x, y \leq -1$ ), é obtido que

$$d(T_1(x), T_1(y)) = \left| \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(y+1) \right| = \frac{1}{2}|x-y| \leq \frac{1}{2}|x-y| + 1 = \rho(|x-y|).$$

Na sequência, suponha que  $x \geq 1$  e  $y \leq -1$ , e, com isso,

$$d(T_1(x), T_1(y)) = \left| \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(y-1) \right| \leq \frac{1}{2}|x-y| + 1 = \rho(|x-y|).$$

A situação  $x \leq -1$  e  $y \geq 1$  é análoga e, assim, tem-se que  $T_1$  e  $T_2$  satisfazem (2.4), como desejado.

No entanto,  $T_1$  apresenta dois pontos fixos, dados por  $-1$  e  $1$ , e  $T_2$  não possui pontos fixos, pois se  $x \geq 1$ , tem-se  $T_2(x) \leq -1$  e se  $x \leq -1$ ,  $T_2(x) \geq 1$ . Os gráficos de  $T_1$  e  $T_2$  são apresentados na Figura 2.1 e 2.2, respectivamente.  $\square$

O exemplo a seguir satisfaz as condições do Teorema 6, porém não satisfaz o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Neste exemplo serão utilizados alguns resultados clássicos da Análise Funcional, que serão citados a seguir e podem ser vistos em [4]. Considere os espaços  $\ell^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , das sequências de números  $x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, \dots)$  tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty,$$

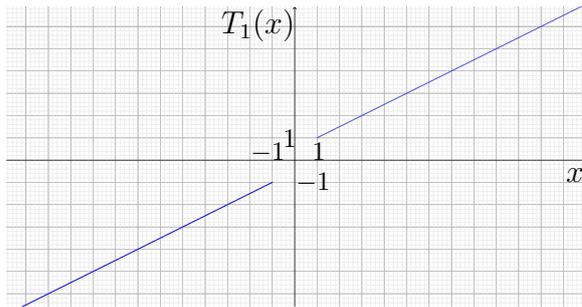


Figura 2.1: Gráfico da função  $T_1$ .

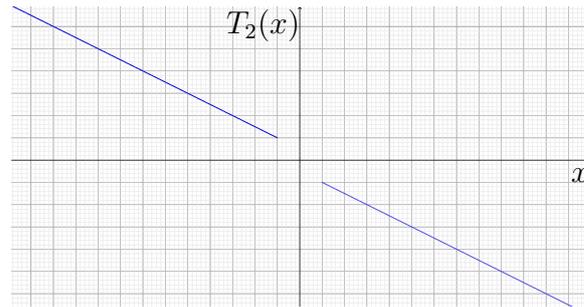


Figura 2.2: Gráfico da função  $T_2$ .

e, dados  $x = (\xi_i)$  e  $y = (\eta_j)$ , elementos de  $\ell^p$ , a métrica desse espaço é

$$d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Na página 35 de [4] é apresentado que  $\ell^p$  é um espaço completo e, na página 30 do mesmo, o Teorema 1.4 – 7 mostra que um subespaço fechado de um espaço completo é completo.

**Exemplo 2.3.** Considere o espaço  $X = [0, 1] \cup \mathbb{N}$  com a seguinte métrica

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{se } x, y \in [0, 1], \\ x + y, & \text{se } x \text{ ou } y \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Nessas condições,  $(X, d)$  é um espaço métrico completo. Primeiramente, será demonstrado que  $X$  é isométrico ao subconjunto  $Y$  de  $\ell^1$ , em que  $Y$  consiste das sequências  $(x, 0, 0, 0, \dots)$ , se  $x \in [0, 1]$  e das sequências com  $n$  na  $n$ -ésima coordenada e zero nas outras coordenadas caso  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Para tal, considere a função  $w : X \rightarrow Y \subset \ell^1$  dada por

$$w(x) = \begin{cases} (x, 0, 0, \dots), & \text{se } x \in [0, 1], \\ (0, 0, \dots, 0, n, 0, \dots), & \text{se } x \in X \setminus [0, 1]. \end{cases}$$

Tem-se que, se  $x, y \in [0, 1]$ , então  $d(x, y) = |x - y|$ . Além disso, denotando-se a  $i$ -ésima coordenada de  $w(x)$  por  $w_i(x)$ , segue-se que os respectivos elementos em  $Y$  são  $w(x) = (x, 0, 0, \dots)$  e  $w(y) = (y, 0, 0, \dots)$  e

$$\|w(x) - w(y)\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |w_i(x) - w_i(y)| = |x - y|.$$

Caso  $x$  não pertença a  $[0, 1]$  e  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , então  $d(x, n) = x + n$ , e os respectivos elementos

em  $Y$  são  $w(x) = (x, 0, 0, \dots)$  e  $w(n) = (0, 0, 0, \dots, n, 0, \dots)$  e

$$\|w(x) - w(n)\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |w_i(x) - w_i(n)| = x + n.$$

Para finalizar, caso ambos os elementos  $m, n$  não pertençam a  $[0, 1]$ , então  $d(m, n) = m + n$ , os respectivos elementos em  $Y$  são  $w(m) = (0, 0, 0, \dots, 0, m, 0, \dots)$  e  $w(n) = (0, 0, 0, \dots, 0, n, 0, \dots)$  e

$$\|w(m) - w(n)\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |w_i(m) - w_i(n)| = m + n.$$

Na sequência, será demonstrado que  $Y$  é um subconjunto fechado de  $\ell^1$ , portanto completo. Seja  $(x_n)$  uma sequência convergente de  $Y$  e seja  $x$  o seu limite. Será demonstrado que  $x \in Y$ , implicando que  $Y$  é fechado. Note que, todo ponto da forma  $y_n = (0, 0, \dots, 0, n, 0, \dots)$  é isolado, pois a distância desse ponto a outro ponto de  $Y$  é maior ou igual a  $n$ . Portanto, uma sequência convergente formada por esses pontos será, a menos de uma quantidade finita de termos, constante e convergirá para o próprio  $y_n$ , como desejado.

Para o caso em que o limite da sequência seja do tipo  $x = (x_1, 0, 0, 0, \dots)$ , a menos de subsequência, a sequência será formada por pontos da forma  $x_n = (x_{1_n}, 0, 0, \dots)$ . Como  $x_{1_n}$  são valores reais contidos no intervalo  $[0, 1]$ , tem-se que  $x_n$  converge para  $x$  se, e somente se,  $x_{1_n}$  converge para  $x_1$ . Com isso, como  $[0, 1]$  é um intervalo fechado de  $\mathbb{R}$ , tem-se que  $x_{1_n}$  converge em  $[0, 1]$ , o que implica que  $x \in Y$  e  $Y$  é fechado em  $\ell^1$ .

Considere a função  $T : X \rightarrow X$ , definida por

$$T(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2 & , \text{ se } x \in [0, 1], \\ x - 1 & , \text{ se } x \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (2.15)$$

Observe que  $T$  apresenta  $x = 0$  como ponto fixo, e, além disso,  $T(x) < x$ , se  $x$  é diferente de zero, visto que se subtrai algo positivo de  $x$  para todo  $x \in X$  não nulo. Por consequência, o ponto fixo  $x = 0$  é único.

Na sequência, defina a função  $\rho : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , dada por

$$\rho(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{2}t^2 & , \text{ se } t \in [0, 1], \\ t - 1 & , \text{ se } t > 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

A função  $\rho$  é uma função semicontínua superiormente à direita. De fato, para  $t_0 \in [0, \infty) \setminus \{1\}$ ,  $\rho$  é contínua à direita em  $t_0$ , logo é semicontínua superiormente à direita. Para o caso de  $t_0 = 1$ , para dado  $\epsilon > 0$  basta tomar  $\delta = \epsilon$ , logo, para todo  $t \in (1, 1 + \delta)$ ,

tem-se

$$\rho(t) = t - 1 \leq 1 + \delta - 1 = \epsilon < \frac{1}{2} + \epsilon = \rho(1) + \epsilon,$$

e  $\rho$  é semicontínua superiormente à direita em 1. Além disso, tem-se que  $\rho(t) < t$  para todo  $t \in (0, \infty)$ , o que pode ser visto através da lei de formação da função  $\rho$ , pois, para  $t \in (0, 1]$ , tem-se

$$\rho(t) = t - \frac{1}{2}t^2 < t,$$

e, para  $t \in (1, \infty)$ , obtem-se

$$\rho(t) = t - 1 < t,$$

como desejado. Para finalizar, basta mostrar que  $T$  satisfaz (2.4). De fato, se  $x, y \in [0, 1]$  e, sem perda de generalidade,  $x > y$ , tem-se que  $t = d(x, y) \leq 1$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &= \left| x - \frac{1}{2}x^2 - y + \frac{1}{2}y^2 \right| \\ &= (x - y) \left( 1 - \frac{1}{2}(x + y) \right) \\ &\leq t \left( 1 - \frac{1}{2}t \right) = \rho(t). \end{aligned}$$

Caso  $x$  (ou ambos) não pertença(m) ao intervalo  $[0, 1]$ , tem-se  $d(x, y) > 1$  e, lembrando que  $T(y) \leq y, \forall y \in X$ , tem-se

$$d(T(x), T(y)) \leq T(x) + T(y) \leq x - 1 + y = d(x, y) - 1 = \rho(d(x, y)).$$

Portanto, o Teorema 6 é aplicável a  $T$ , que, como dito anteriormente, apresenta  $x = 0$  como único ponto fixo.

Para finalizar, será demonstrado que  $T$  não é uma contração, não sendo possível aplicar o Teorema 2 a essa função. De fato, suponha que  $T$  seja uma contração, com constante  $k \in [0, 1)$ . Dado  $n > 1$ , tem-se

$$d(T(n), T(n + 1)) = 2n - 1 \leq k(2n + 1) = kd(n, n + 1).$$

Reorganizando,

$$\frac{2n - 1}{2n + 1} \leq k.$$

Tomando o limite de  $n$  tendendo a infinito, obtêm-se que  $1 \leq k$ , o que contradiz a hipótese  $k < 1$ . Portanto,  $T$  não é uma contração e o Teorema do Ponto Fixo de Banach não é aplicável a  $T$ .  $\square$

# Capítulo 3

## O Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata

Neste capítulo será discutido o Teorema do Ponto Fixo obtido por Vittorino Pata, disponível em [7]. Convém observar que esse teorema se aplica a contrações fracas, uma hipótese mais fraca que aquela apresentada pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach. Porém, como é de se esperar, mais condições devem ser impostas sobre a contração  $f$ , como será visto a seguir.

### 3.1 O Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata

Seja  $X$  um espaço métrico completo com métrica  $d$ . Durante esse capítulo, sempre que se referir a  $X$ , será considerado que é um espaço métrico completo com métrica  $d$ . Fixe  $x_0 \in X$  arbitrário e defina a função

$$\|x\| = d(x, x_0), \quad \forall x \in X. \quad (3.1)$$

Convém observar que a função definida em (3.1) não representa, em geral, uma norma, pois o espaço métrico  $X$  pode não ser normado. Somente o caso em que  $X$  seja um espaço de Banach e  $x_0 = 0$  que a função  $\|\cdot\|$  coincide com a norma. Além disso, considere uma função não decrescente  $\psi : [0, \alpha] \rightarrow [0, \infty)$  que satisfaça  $\psi(0) = 0$  e seja contínua no ponto 0 e crescente em uma vizinhança de zero. A partir disso, para todo  $\alpha \geq 1$ , pode-se definir a sequência de funções

$$\omega_n(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha \sum_{k=1}^n \psi\left(\frac{\alpha}{k}\right). \quad (3.2)$$

Antes de enunciar o teorema principal deste trabalho, será demonstrado que essa sequência de funções é convergente.

**Lema 8.** A sequência de funções  $(\omega_n(\alpha))$  tende a zero para todo  $\alpha \geq 1$ .

**Demonstração:** A demonstração será dividida em dois casos: para  $\alpha > 1$  e  $\alpha = 1$ . Primeiramente, considere  $\alpha > 1$ . Analisando o  $n$ -ésimo termo da sequência, tem-se que

$$\omega_n(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha \left[ \psi(\alpha) + \psi\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \dots + \psi\left(\frac{\alpha}{n}\right) \right].$$

Como  $\psi$  é uma função não decrescente, tem-se que  $\psi(\alpha) \geq \psi\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geq \dots \geq \psi\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ . Com isso, podemos limitar o  $n$ -ésimo termo de  $(\omega_n(\alpha))$  da forma

$$\omega_n(\alpha) \leq \left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha n\psi(\alpha) = \left(\frac{\alpha^\alpha}{n^{\alpha-1}}\right) \psi(\alpha).$$

Observe que, como  $\alpha - 1 > 0$ , segue-se que  $n^{\alpha-1}$  tende a infinito quando  $n$  tende a infinito e, por consequência,  $(\omega_n(\alpha))$  tende a zero, como desejado.

Considere agora o caso em que  $\alpha = 1$ . O  $n$ -ésimo termo da sequência é

$$\omega_n(1) = \frac{1}{n} \left[ \psi(1) + \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \dots + \psi\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

Como  $\psi$  se anula continuamente no ponto zero, tem-se que, dado  $\frac{\epsilon}{2} > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0$  implica que  $\psi\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{\epsilon}{2}$ . Desta maneira, tomando  $n > n_0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \omega_n(1) &= \frac{1}{n} \left[ \psi(1) + \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \dots + \psi\left(\frac{1}{n_0}\right) + \psi\left(\frac{1}{n_0+1}\right) + \dots + \psi\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ &\leq \frac{1}{n} \left[ n_0\psi(1) + (n - n_0)\frac{\epsilon}{2} \right] \\ &= \frac{n_0}{n}\psi(1) + \frac{n - n_0}{n} \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Tomando  $n$  tendendo a infinito, tem-se, pela expressão anterior, que o primeiro termo tende a zero e o segundo a  $\frac{\epsilon}{2}$ , e, desta forma,

$$\omega_n(1) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Portanto, para todo  $\alpha \geq 1$ , a sequência de funções  $(\omega_n(\alpha))$  tende a zero para  $n$  suficientemente grande, como desejado.  $\square$

A partir disso, pode-se enunciar o principal resultado deste trabalho.

**Teorema 9. (Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata)** Considere  $\Lambda \geq 0$ ,  $\alpha \geq 1$  e  $0 \leq \beta \leq \alpha$  constantes. Seja  $f : X \rightarrow X$  uma função que satisfaça a desigualdade

$$d(f(x), f(y)) \leq (1 - \epsilon)d(x, y) + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)[1 + \|x\| + \|y\|]^\beta, \quad (3.3)$$

para todo  $\epsilon \in [0, 1]$  e para todo  $x, y \in X$ . Então  $f$  possui somente um único ponto fixo

$x_* = f(x_*)$ . Além disso, considerando a  $n$ -ésima composta  $f \circ f \dots \circ f = f^n$ , tem-se que

$$d(x_*, f^n(x_0)) \leq C\omega_n(\alpha), \quad (3.4)$$

para uma constante positiva  $C \leq \Lambda(1 + 4\|x_*\|)^\beta$ .

**Observação 3.** Fixar  $x_0$  não é uma restrição nas condições do Teorema, pois basta adaptar  $\Lambda$  de acordo com o  $x_0$  definido.

**Observação 4.** Note que  $f$  é uma contração fraca. De fato, a equação (3.3) é válida para todo  $\epsilon \in [0, 1]$  e, em particular, para  $\epsilon = 0$ , quando tem-se  $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ .

Como a demonstração do teorema é longa, ela será dividida em diversos resultados. Inicialmente será demonstrada a existência de um ponto fixo e, posteriormente, sua unicidade.

### 3.1.1 Existência de Ponto Fixo $x_*$

Considere as seguintes sequências  $(x_n)$  e  $(c_n)$  dadas por

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0) \quad \text{e} \quad c_n = \|x_n\|,$$

com  $\|\cdot\|$  definida em  $x_0$  conforme (3.1).

Primeiramente, serão demonstrados alguns lemas para depois se provar a existência de um ponto fixo.

**Lema 10.** *A sequência  $(c_n)$  é limitada.*

**Demonstração:** Como  $f$  é uma contração fraca, segue-se que

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq d(x_1, x_0),$$

e, procedendo recursivamente,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq d(x_1, x_0) = c_1.$$

Utilizando-se da desigualdade anterior, da desigualdade triangular e lembrando que, por definição,  $d(x_{n+1}, x_1) = d(f(x_n), f(x_0))$ , tem-se

$$\begin{aligned} c_n = d(x_n, x_0) &\leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+1}, x_0) \\ &\leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+1}, x_1) + d(x_1, x_0) \\ &\leq c_1 + d(f(x_n), f(x_0)) + c_1 = d(f(x_n), f(x_0)) + 2c_1. \end{aligned}$$

Juntando esse resultado com a equação (3.3), obtem-se

$$\begin{aligned}
c_n = d(x_n, x_0) &\leq d(f(x_n), f(x_0)) + 2c_1 \\
&\leq (1 - \epsilon)d(x_n, x_0) + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)[1 + \|x_n\| + \|x_0\|]^\beta + 2c_1 \\
&= (1 - \epsilon)c_n + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)[1 + c_n]^\beta + 2c_1 \\
&\leq (1 - \epsilon)c_n + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)[1 + c_n + c_1]^\beta + 2c_1.
\end{aligned}$$

Considere a desigualdade

$$(x + y)^p \leq 2^p(|x|^p + |y|^p), \quad (3.5)$$

que é válida para todo  $x, y, p \geq 0$  e será demonstrada na Proposição 22, apresentada no Apêndice deste texto. Utilizando-a com  $x = 1 + c_1$ ,  $y = c_n$  e  $p = \beta$ , é obtido que

$$\begin{aligned}
c_n &\leq (1 - \epsilon)c_n + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)2^\beta(|1 + c_1|^\beta + |c_n|^\beta) + 2c_1 \\
&\leq (1 - \epsilon)c_n + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)2^\beta c_n^\beta + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)2^\beta(1 + c_1)^\beta + 2c_1.
\end{aligned}$$

Para simplificação de notação, tome  $a = \frac{\Lambda 2^\beta}{c_n^{\alpha-\beta}}$  e  $b = \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)2^\beta(1 + c_1)^\beta + 2c_1$ . Note que tanto  $a$  quanto  $b$  são não negativos, pois são produtos e somas de termos não negativos. Reescrevendo a equação anterior, tem-se

$$c_n \leq (1 - \epsilon)c_n + a\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)c_n^\alpha + b,$$

que também pode ser reescrita da forma

$$\epsilon c_n \leq a\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)c_n^\alpha + b.$$

Suponha agora, por contradição, que  $(c_n)$  não seja limitada e, por isso, que exista uma subsequência  $(c_{n_i})$  que tenda a infinito, com  $c_{n_i} > 1 + b, \forall n_i \in \mathbb{N}$ . Tomando  $\epsilon_i = \frac{1+b}{c_{n_i}}$  para cada  $n_i$ , de forma que  $\epsilon_i \leq 1$ , tem-se que

$$\frac{(1+b)}{c_{n_i}} c_{n_i} \leq a \left( \frac{1+b}{c_{n_i}} \right)^\alpha \psi(\epsilon_i) c_{n_i}^\alpha + b,$$

o que é equivalente a

$$1 \leq a(1+b)^\alpha \psi(\epsilon_i).$$

Como  $(c_{n_i})$  tende a infinito, obtêm-se que  $(\epsilon_i)$  tende a zero e, por consequência,  $(\psi(\epsilon_i))$  tende a zero. Tomando o limite, chega-se à desigualdade  $1 \leq 0$ , contradição. Portanto, a sequência  $(c_n)$  é limitada.  $\square$

**Observação 5.** Uma outra forma de se obter o resultado do lema anterior sem utilizar a desigualdade (3.5) seria considerar que, como  $\alpha$  é positivo, tem-se que  $(c_n^\alpha)$  tende a infinito

se  $(c_n)$  tende a infinito. Desta forma, se poderia obter uma sequência  $(k_n)$  definida de modo a satisfazer a igualdade

$$c_n^\alpha + k_n = (1 + c_1 + c_n)^\alpha.$$

E, assim, substituir  $c_n^\alpha + k_n$  nas desigualdades da demonstração do Lema anterior. Mas, além disso, deve-se garantir que os  $\epsilon_i$ 's sejam suficientemente pequenos para obter a contradição. E isto é possível, pois como  $(c_n)$  tende a infinito quando  $n$  tende a infinito e comparando os termos  $c_n^\alpha$  e  $(1 + c_1 + c_n)^\alpha$ , tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + c_1 + c_n)^\alpha}{c_n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + c_1 + c_n}{c_n} \right)^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + c_1}{c_n} + 1 \right)^\alpha = 1.$$

Por consequência, pode-se concluir que  $(k_n)$  tende a zero, e, assim, obtêm-se  $\epsilon_i$  em função de  $k_n$  de forma que  $\epsilon_i = \frac{1+k_n}{c_n} \leq 1$ , o que ocorre devido a suposição de  $(c_n)$  tender a infinito na demonstração e  $(1 + k_n)$  tender a 1 quando  $n$  tende a infinito.

Para demonstrar o Lema 12, precisa-se antes do seguinte resultado.

**Lema 11.** *Seja  $\alpha \geq 1$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Então vale a desigualdade  $1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \leq \frac{\alpha}{n+1}$*

**Demonstração:** Para começar, considere  $\alpha = 1$ . Nesse caso, tem-se a igualdade, pois

$$1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^1 = \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1} = \frac{\alpha}{n+1}.$$

Suponha agora  $\alpha > 1$ . Para esse caso, considere a função auxiliar

$$f(x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^\alpha - \frac{\alpha}{x+1}.$$

Primeiramente, será mostrado que a derivada de  $f$  é sempre positiva para  $x \geq 0$ , *i.e.*,  $f$  é crescente nesse intervalo. De fato, derivando  $f$ , obtem-se

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\alpha \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{\alpha}{(1+x)^2} \\ &= -\frac{\alpha}{(1+x)^2} \left[ \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^{\alpha-1} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Como o termo  $-\frac{\alpha}{(1+x)^2}$  é sempre negativo, tem-se que  $f'(x)$  é positivo se

$$\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^{\alpha-1} - 1 < 0,$$

ou seja, se

$$\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^{\alpha-1} < 1.$$

Como a relação anterior é válida para todo  $x \geq 0$ , conclui-se que  $f$  é uma função crescente em  $[0, \infty)$ . Calculando  $f(0)$  e o limite de  $f$  quando  $x \rightarrow \infty$ , tem-se

$$f(0) = 1 - \alpha \leq 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Dessa forma,  $f$  é uma função crescente variando de  $1 - \alpha$  a 0 quando  $x \in [0, \infty)$ . Com isso,  $f(x) \leq 0$  e

$$1 - \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^\alpha - \frac{\alpha}{x+1} \leq 0.$$

Reorganizando os termos, tirando o mínimo dentro do parênteses e restringindo a equação aos naturais, obtêm-se

$$1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \leq \frac{\alpha}{n+1},$$

como desejado. □

**Lema 12.** *Para todo  $m, n \in \mathbb{N}$ , vale a desigualdade*

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq C\omega_n(\alpha),$$

em que

$$C = \Lambda \sup_{n \in \mathbb{N}} [1 + 2c_n]^\beta. \quad (3.6)$$

**Demonstração:** Fixado  $m$ , defina a sequência

$$p_n = n^\alpha d(x_{n+m}, x_n).$$

A partir da Equação (3.3), segue-se que

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (n+1)^\alpha d(f(x_{n+m}), f(x_n)) \\ &\leq (n+1)^\alpha (1 - \epsilon) d(x_{n+m}, x_n) + (n+1)^\alpha \Lambda \epsilon^\alpha \psi(\epsilon) [1 + \|x_{n+m}\| + \|x_n\|]^\beta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

O Lema 10 estabelece que  $(c_n)$  é limitada superiormente e, portanto, tal sequência possui supremo. Desta forma, como  $c_n = \|x_n\|$  e  $\beta \geq 0$ , tem-se

$$[1 + \|x_{m+n}\| + \|x_n\|]^\beta \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} [1 + c_n + c_n]^\beta = \sup_{n \in \mathbb{N}} [1 + 2c_n]^\beta.$$

Aplicando essa desigualdade na equação (3.7), obtêm-se

$$p_{n+1} \leq (n+1)^\alpha (1 - \epsilon) d(x_{n+m}, x_n) + (n+1)^\alpha C \epsilon^\alpha \psi(\epsilon).$$

Tome, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\epsilon = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha$ . Substituindo  $\epsilon$  na relação anterior, tem-se

$$p_{n+1} \leq (n+1)^\alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha d(x_{n+m}, x_n) + (n+1)^\alpha C \left[1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha\right]^\alpha \psi \left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha\right).$$

Pelo Lema 11, sabe-se que a seguinte relação é válida:

$$\epsilon = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \leq \frac{\alpha}{n+1}.$$

Utilizando-se dessa desigualdade, simplificando alguns termos da expressão e notando que  $\alpha \geq 1$  e  $\psi$  não decrescente, tem-se

$$p_{n+1} \leq (n+1)^\alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha d(x_{n+m}, x_n) + (n+1)^\alpha C \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^\alpha \psi \left(\frac{\alpha}{n+1}\right).$$

Simplificando os termos  $(n+1)^\alpha$  presentes no numerador e denominador

$$p_{n+1} \leq n^\alpha d(x_{n+m}, x_n) + C\alpha^\alpha \psi \left(\frac{\alpha}{n+1}\right).$$

Note que  $p_n = n^\alpha d(x_{n+m}, x_n)$  e, desta forma,

$$p_{n+1} \leq p_n + C\alpha^\alpha \psi \left(\frac{\alpha}{n+1}\right).$$

Como  $p_0 = 0$ , segue-se que

$$p_1 \leq C\alpha^\alpha \psi \left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

e, em sequência,

$$p_2 \leq p_1 + C\alpha^\alpha \psi \left(\frac{\alpha}{3}\right) \leq C\alpha^\alpha \left[\psi \left(\frac{\alpha}{2}\right) + \psi \left(\frac{\alpha}{3}\right)\right].$$

Procedendo recursivamente, tem-se que

$$p_n = n^\alpha d(x_{n+m}, x_n) \leq C\alpha^\alpha \sum_{k=1}^n \psi \left(\frac{\alpha}{k+1}\right).$$

Para finalizar, dividindo ambos os lados por  $n^\alpha$ , obtém-se

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq C \left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha \sum_{k=1}^n \psi \left(\frac{\alpha}{k+1}\right) \leq C \left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha \sum_{k=1}^n \psi \left(\frac{\alpha}{k}\right) = C\omega_n(\alpha),$$

como desejado. □

A partir desses resultados, será demonstrada a existência de um ponto fixo  $x_*$  desde

que  $f$  satisfaça as condições do Teorema 9. Além disso, será demonstrada a condição  $d(x_*, f^n(x_0)) \leq C\omega_n(\alpha)$ , com  $C \leq \Lambda(1 + 4\|x_*\|)^\beta$ .

O Lema 12 mostra que  $(x_n)$  é, em particular, uma sequência de Cauchy, pois, como demonstrado no Lema 8,  $(\omega_n(\alpha))$  tende a zero quando  $n$  tende a infinito. Como o espaço  $X$  é completo, existe  $x_* \in X$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*$ . Utilizando-se da desigualdade do Lema 12, segue-se que

$$d(x_*, f(x_{n-1})) = d(x_*, x_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_{m+n}, x_n) \leq C\omega_n(\alpha).$$

Devido a  $f$  ser uma contração fraca, logo contínua, pode-se fazer  $n$  tender a infinito, obtendo-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_*, f(x_{n-1})) = d\left(x_*, f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right)\right) = d(x_*, f(x_*)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C\omega_n(\alpha) = 0$$

e, portanto, obtém-se um ponto fixo  $x_* = f(x_*)$ . Além disso, convém observar que

$$d(x_*, f(x_{n-1})) = d(x_*, f^n(x_0)) \leq C\omega_n(\alpha),$$

o que satisfaz a equação (3.4) do Teorema, restando apenas mostrar que

$$C \leq \Lambda(1 + 4\|x_*\|)^\beta.$$

Para isso, visto que  $x_*$  é um ponto fixo de  $f$ , é obtido que

$$d(x_*, x_n) = d(f(x_*), f(x_{n-1})) \leq d(x_*, x_{n-1}) \leq \dots \leq d(x_*, x_0) = \|x_*\|,$$

e, por consequência,

$$c_n = d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_*) + d(x_*, x_0) \leq 2\|x_*\|.$$

Substituindo essa relação em  $C$ , que foi definido em (3.6), segue-se que

$$C = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda(1 + 2c_n)^\beta \leq \Lambda(1 + 4\|x_*\|),$$

como desejado. □

### 3.1.2 Unicidade do Ponto Fixo $x_*$

Para demonstrar a unicidade, suponha que existam dois pontos fixos  $x, y \in X$ . A equação (3.3) pode ser reescrita da forma

$$d(f(x), f(y)) \leq (1 - \epsilon)d(x, y) + K\epsilon\psi(\epsilon), \tag{3.8}$$

com  $K = \Lambda \epsilon^{\alpha-1} [1 + \|x\| + \|y\|]^\beta \geq 0$ . Como  $x$  e  $y$  são pontos fixos, tem-se que  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$  e substituindo na relação (3.8), é obtido que

$$\epsilon d(x, y) \leq \epsilon K \psi(\epsilon),$$

com  $\epsilon \in [0, 1]$ . Para valores de  $\epsilon$  diferentes de zero, tem-se

$$d(x, y) \leq K \psi(\epsilon),$$

e pode-se tomar  $\epsilon$  tendendo a zero à direita nessa expressão. Pela continuidade de  $\psi$  em zero com  $\psi(0) = 0$ , conclui-se que  $d(x, y) = 0$ , ou seja,  $x = y$ . Portanto, o ponto fixo é único e o Teorema 9 está demonstrado.  $\square$

**Corolário 13.** *Se  $\psi(\epsilon) = \epsilon^\gamma$  para algum  $\gamma > 0$ , tomando  $\vartheta = \alpha + \gamma$ , a taxa de convergência de (3.4) torna-se*

$$d(x_*, f^n(x_0)) \leq \frac{C \vartheta^\vartheta}{n^{\vartheta-1}}. \quad (3.9)$$

**Demonstração:** Considere  $\vartheta = \alpha + \gamma$ ,  $\alpha \geq 1$  e  $\psi(\epsilon) = \epsilon^\gamma$ . Claramente, a relação (3.3) é válida com  $\alpha = \vartheta - \gamma$ . Trocando  $\gamma$  por  $\nu$  arbitrariamente pequeno, tem-se  $\vartheta - \nu > \vartheta - \gamma$  e a desigualdade (3.3) também é válida com  $\alpha = \vartheta - \nu$ . Substituindo essas condições em (3.2), segue-se que

$$\omega_n(\vartheta - \nu) = \left( \frac{\vartheta - \nu}{n} \right)^{\vartheta - \nu} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\vartheta - \nu}{k} \right)^\nu = \frac{(\vartheta - \nu)^\vartheta}{n^{\vartheta - \nu}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\nu} = \frac{(\vartheta - \nu)^\vartheta}{n^{\vartheta - \nu}} \left[ \frac{1}{1^\nu} + \frac{1}{2^\nu} + \dots + \frac{1}{n^\nu} \right].$$

Como  $\frac{1}{1^\nu} = 1 \geq \frac{1}{n^\nu}$  para todo  $n > 1$ , pode-se majorar o termo em colchetes por  $n$ . Além disso, observando que  $1 \leq \frac{1}{1-\nu}$ , se  $0 < \nu < 1$ , tem-se

$$\omega_n(\vartheta - \nu) \leq \frac{(\vartheta - \nu)^\vartheta n}{n^{\vartheta - \nu}} = \frac{(\vartheta - \nu)^\vartheta}{n^{\vartheta - \nu - 1}} \leq \frac{(\vartheta - \nu)^\vartheta}{(1 - \nu)n^{\vartheta - \nu - 1}} = \frac{(\vartheta - \nu)^\vartheta}{(1 - \nu)n^{\vartheta - 1}} n^\nu.$$

Substituindo essa informação em (3.4), obtém-se

$$d(x_*, f^n(x_0)) \leq C \omega_n(\vartheta - \nu) \leq C \frac{(\vartheta - \nu)^\vartheta}{(1 - \nu)n^{\vartheta - 1}} n^\nu,$$

e, tomando  $\nu$  tendendo a zero, segue-se

$$d(x_*, f^n(x_0)) \leq \frac{C \vartheta^\vartheta}{n^{\vartheta - 1}},$$

como desejado.  $\square$

## 3.2 Comparação do Teorema com Outros Resultados Conhecidos

Nesta seção, o Teorema de Vittorino Pata será comparado a outros resultados da Teoria de Pontos Fixos.

### 3.2.1 Comparação com o Teorema do Ponto Fixo de Banach

O Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema 2) é clássico e tem por hipótese que  $f : X \rightarrow X$  é definida no espaço métrico completo e que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y),$$

para  $0 \leq \lambda < 1$ . Desta forma, considerando  $\lambda = 1 - \epsilon$  em (3.3), obtêm-se que se as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Banach forem válidas, as condições do Teorema 9 também serão satisfeitas, fazendo com que o Teorema 9 seja mais geral que o Teorema do Ponto Fixo de Banach. No final deste capítulo será apresentado um exemplo que satisfaz o Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata e não satisfaz o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

### 3.2.2 Comparação com o Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong

Nessa seção, será apresentada uma versão com hipóteses mais fortes para o Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong (Teorema 6), que será utilizada na comparação com o Teorema 9. Nessa versão será considerada que  $\rho$  é contínua e não semicontínua à direita, além de estender o domínio de  $\rho$ , ao invés de considerar somente o fecho da imagem da distância dos pontos pertencentes a  $X$ .

**Teorema 14. (Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong)** *Considere  $X$  um espaço métrico completo e  $f : X \rightarrow X$ . Seja  $\rho : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$  uma função contínua satisfazendo a desigualdade  $\rho(r) < r$  para todo  $r > 0$ . Se*

$$d(f(x), f(y)) \leq \rho(d(x, y)) \tag{3.10}$$

*para todo  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , então  $f$  possui um único ponto fixo  $x_*$  e  $d(x_*, f^n(x)) \rightarrow 0$  para todo  $x \in X$ .*

**Observação 6.** Pode-se redefinir  $\rho(r)$  como  $\sup_{s \leq r} \rho(s)$  e, desta forma, assumir  $\rho$  uma função não decrescente.

Antes de relacionar os Teoremas de Vittorino Pata e Boyd-Wong, será demonstrado o seguinte lema.

**Lema 15.** A função  $\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\mu(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r = 0, \\ r \min_{x \in [r, 1]} f(x), & \text{se } r \neq 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

em que  $f(x) = 1 - \frac{\rho(x)}{x}$  com  $\rho : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  atendendo as condições do Teorema 14, é crescente, positiva, contínua e satisfaz

$$\mu(r) \leq 1 - \frac{\rho(r)}{r}, \forall r \in (0, 1].$$

**Demonstração:** Para simplificar a notação, serão definidas as funções  $\xi, \zeta : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , com as seguintes leis de formação:  $\xi(r) = r$  e  $\zeta(r) = \min_{x \in [r, 1]} f(x)$ . Sabe-se que  $\xi$  é uma função contínua e crescente e, na sequência, será demonstrado que  $\zeta$  também é contínua.

Pode-se estabelecer algumas afirmações que, uma vez provadas, garantem o resultado do lema.

**Afirmação 1.** A função  $\zeta$  é contínua.

Pelas hipóteses do Teorema 14,  $f(x)$  é contínua no intervalo  $(0, 1]$ , pois é constituída por uma soma e um quociente, com denominador estritamente positivo, de funções contínuas nesse domínio. A partir disso, fixado  $x_0 \in (0, 1]$  e dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\forall y \in (0, 1], |y - x_0| < \delta \implies |f(y) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Com isso, dado  $z \in (0, 1]$ , suponha, sem perda de generalidade, que  $z > x_0$  (o outro caso é análogo), e tem-se que

$$|\zeta(x_0) - \zeta(z)| = \left| \min_{x \in [x_0, 1]} f(x) - \min_{x \in [z, 1]} f(x) \right|.$$

Além disso, considere  $z$  de forma que  $|z - x_0| < \delta$ , o que implica que  $|f(z) - f(x_0)| < \epsilon$ . Existem duas possibilidades para  $\min_{x \in [x_0, 1]} f(x)$ : ou tal valor se encontra no intervalo  $[z, 1]$  ou em  $[x_0, z]$ . Para o primeiro caso, tem-se que

$$|\zeta(x_0) - \zeta(z)| = \left| \min_{x \in [z, 1]} f(x) - \min_{x \in [z, 1]} f(x) \right| = 0 < \epsilon,$$

e  $\zeta$  é contínua em  $x_0$ . Para o segundo caso, observe primeiramente que  $\zeta$  não é decrescente. De fato, dados  $x_1, x_2 \in (0, 1]$  tal que  $x_1 < x_2$ , então  $[x_2, 1] \subset [x_1, 1]$  e, por consequência,  $\min_{x \in [x_1, 1]} f(x) \leq \min_{x \in [x_2, 1]} f(x)$ , isto é,  $\zeta(x_1) \leq \zeta(x_2)$ . Dessa forma, pode-se obter que

$$\forall x_1 \in [z, 1] \implies f(x_1) \geq \zeta(x_0) = \min_{x \in [x_0, 1]} f(x),$$

e concluir

$$\left| \min_{x \in [x_0, 1]} f(x) - \min_{x \in [z, 1]} f(x) \right| = \min_{x \in [z, 1]} f(x) - \min_{x \in [x_0, z]} f(x) \leq f(z) - \min_{x \in [x_0, z]} f(x) < \epsilon.$$

A última passagem é válida, pois  $\forall y \in [x_0, z]$ , incluindo o valor em que  $f$  atinge o mínimo nesse intervalo, tem-se que  $|y - z| < \delta$ , o que implica  $|f(y) - f(z)| < \epsilon$  pela continuidade de  $f$ . Logo,  $\zeta$  é contínua.

**Afirmção 2.** *A função  $\mu$  é crescente e positiva.*

Como dito anteriormente,  $\zeta$  é uma função não decrescente e  $\xi$  é crescente em  $(0, 1]$ . Dessa forma, dados  $r_1, r_2 \in (0, 1]$ , com  $r_1 < r_2$ , tem-se  $\zeta(r_1) \leq \zeta(r_2)$  e  $\xi(r_1) < \xi(r_2)$ , o que implica  $\mu(r_1) = \xi(r_1) \cdot \zeta(r_1) < \xi(r_2) \cdot \zeta(r_2) = \mu(r_2)$ . Na sequência, basta mostrar que  $\mu$  é positiva para  $r \neq 0$ , obtendo-se a monotonicidade da mesma em  $[0, 1]$ . Com efeito, observe que, uma consequência imediata de  $0 < \rho(x) < x$ , para todo  $x \in (0, 1]$ , é que  $f(x)$  é positiva nesse intervalo, o que implica na positividade de  $\zeta$  no mesmo. Como  $\xi$  é positiva para  $r \neq 0$ , conclui-se que  $\mu$  é o produto de termos positivos para todo  $r \in (0, 1]$ , sendo, portanto, positiva nesse intervalo.

**Afirmção 3.** *A função  $\mu$  é contínua.*

Como visto anteriormente,  $\zeta$  e  $\xi$  são contínuas em  $(0, 1]$  e, por consequência,  $\mu$  também é contínua em  $(0, 1]$ , por ser o produto destas duas funções. Logo, basta verificar a continuidade no ponto  $r = 0$ .

Como as funções positivas  $\rho$  e  $id(x)$  são tais que  $\rho(x) < x$  no intervalo  $(0, 1]$ , obtém-se que o quociente entre elas é limitado

$$0 < \frac{\rho(x)}{x} < 1.$$

Multiplicando-se a última expressão por -1 e somando 1 em ambas as desigualdades é obtido

$$0 < f(x) = 1 - \frac{\rho(r)}{r} < 1.$$

Como esse resultado foi obtido para todo ponto do intervalo  $(0, 1]$ , o mesmo é válido para  $\zeta$ , pois cada valor obtido para  $\zeta$  é o mínimo de  $f$  em um subintervalo de  $(0, 1]$ . Logo,  $\zeta$  é limitada em  $(0, 1]$ . Além disso, sabendo que  $\xi(r)$  tende a zero se  $r$  tende a zero, pode-se tomar o limite de  $\mu$  com  $r$  tendendo a zero

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mu(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \xi(r) \zeta(r) = 0 = \mu(0),$$

obtendo-se o resultado desejado.

**Afirmção 4.**  $\mu(r) \leq f(r)$  para todo  $r \in (0, 1]$ .

Para mostrar a desigualdade, basta observar que o mínimo de uma função contínua em um intervalo compacto é o menor valor atingido por essa função nesse intervalo. Dessa forma, para  $0 < r \leq 1$ , é obtido que

$$\mu(r) = r\zeta(r) \leq \zeta(r) = \min_{x \in [r, 1]} f(x) \leq f(r) = 1 - \frac{\rho(r)}{r},$$

como desejado. □

Observa-se que, mesmo fazendo uma extensão (contínua ou não) de  $f$  para o intervalo fechado  $[0, 1]$ , o resultado anterior permanece válido.

**Teorema 16.** *Se  $X$  for um espaço limitado, os Teoremas 9 e 14 são equivalentes.*

**Demonstração:** Para simplificar, suponha que  $\text{diam}(X) \leq 1$ . Convém notar que não há perda de generalidade nesta consideração, o que será explicado na Observação 7 seguinte a esta demonstração.

Primeiramente, será demonstrado que o Teorema 9 implica no Teorema 14. De fato, utilizando-se do diâmetro de  $X$ , e redefinindo  $\Lambda$  como  $\Lambda := \Lambda 3^\beta \geq \Lambda[1 + \|x\| + \|y\|]^\beta$ , da relação (3.3), segue-se que

$$d(f(x), f(y)) \leq (1 - \epsilon)d(x, y) + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon). \quad (3.12)$$

Seja também  $\phi(r) = \psi^{-1}(\nu r)$ , com  $\nu > 0$  suficientemente pequeno, em que  $\psi$  é definida na página 31. Note que  $\phi$  é crescente, pois é a inversa de  $\psi$ , que é crescente na vizinhança do zero. Além disso, tomando  $\epsilon = \phi(d(x, y))$  na última desigualdade, obtêm-se

$$d(f(x), f(y)) \leq [1 - \phi(d(x, y))]d(x, y) + \Lambda[\phi(d(x, y))]^\alpha\psi(\phi(d(x, y))).$$

Considerando-se  $d(x, y) = r$  e substituindo  $\phi(r) = \psi^{-1}(\nu r)$  na composição  $\psi \circ \phi$ , a desigualdade é reescrita da forma

$$d(f(x), f(y)) \leq (1 - \phi(r))r + \Lambda[\phi(r)]^\alpha\nu r.$$

A partir do termo à direita da última desigualdade, define-se a função  $\rho$  para  $r \in (0, 1]$  (para tais valores pode-se definir tal  $\rho$  devido ao diâmetro de  $X$ ). Com isso, define-se

$$\rho(r) = r - r\phi(r)[1 - \nu\Lambda[\phi(r)]^{\alpha-1}]. \quad (3.13)$$

Porém, por hipótese, sabe-se que  $\psi$  é contínua somente em uma vizinhança de 0 e, desta forma, algumas observações devem ser feitas para que  $\rho$  satisfaça as condições do

Teorema 14. São elas:

- Qual escolha de  $\nu$  garante a continuidade de  $\rho$ ?
- Qual escolha de  $\nu$  garante que  $\rho(r)$  é positiva?
- Qual escolha de  $\nu$  garante a condição  $\rho(r) < r$ ?

Para satisfazer essas condições, serão definidos valores de  $\nu_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , de modo que o mínimo entre eles faça com que as três questões sejam respondidas de modo satisfatório. Primeiramente, considere  $\nu_1 > 0$  suficientemente pequeno de forma que a função crescente  $\psi^{-1}$  seja contínua em  $[0, \nu_1]$ . Tal escolha de  $\nu_1$  garante a continuidade de  $\rho$  para todo  $r \in (0, 1]$ .

Para a terceira situação, observe que, como  $r$  e  $\phi(r)$  são positivos, é suficiente que o termo  $1 - \nu\Lambda[\phi(r)]^{\alpha-1}$  seja positivo para obter  $\rho(r) < r$ . A partir dessa informação, precisa-se obter  $\nu_2$  tal que

$$1 - \nu_2\Lambda[\phi(r)]^{\alpha-1} > 0,$$

e isolando  $\nu_2$ , segue-se que

$$\nu_2 < \frac{1}{\Lambda[\phi(r)]^{\alpha-1}}.$$

Como se deseja que  $\nu$  satisfaça a condição para todo  $r \in (0, 1]$ , pode-se considerar o maior valor de  $\phi(r)$  na expressão anterior. Devido a  $\phi$  ser crescente, esse valor é obtido em  $r = 1$ . Com isso, pode-se definir  $\nu_2 > 0$  por

$$\nu_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\Lambda[\phi(1)]^{\alpha-1}}.$$

Além disso, como será visto a seguir, para haver a positividade de  $\rho$ , respondendo à segunda pergunta, deve-se tomar  $\nu$  suficientemente pequeno de forma que  $\phi(1) < 1$ , isto é,

$$\psi^{-1}(1\nu) = \psi^{-1}(\nu) = \phi(1) < 1.$$

Seja  $\nu_3 > 0$  um valor que satisfaça essa condição. Tal valor sempre existirá, pois  $\psi(0) = 0$  e  $\psi$  é contínua ao menos em uma vizinhança da origem. Desta forma, tome  $\nu = \min\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ . Com isso, será demonstrado que este  $\nu$  é suficiente para que  $\rho$  atenda as condições necessárias.

Para garantir a continuidade de  $\rho$ , basta notar que  $0 < \nu \leq \nu_1$ . Logo  $\psi^{-1}$  é contínua em  $[0, \nu]$ , o que faz com que  $\rho$  seja contínua em  $(0, 1]$ . Para a condição de  $\rho$  ser positiva, note que, por  $\phi$  ser crescente, tem-se,  $\phi(r) \leq \phi(1)$  para todo  $r \in (0, 1]$ . Multiplicando essa desigualdade por  $-r$ , segue-se que  $-r\phi(r) \geq -r\phi(1)$ . Substituindo tal desigualdade em (3.13), tem-se que

$$\rho(r) = r - r\phi(r) + r\phi(r)\nu\Lambda[\phi(r)]^{\alpha-1} > r - r\phi(r) \geq r[1 - \phi(1)].$$

Como  $\nu < \nu_3$ , tem-se que  $\phi(1) < 1$  e, portanto,  $1 - \phi(1) > 0$ . Como  $r$  também é positivo, obtém-se  $\rho(r) > 0$  para todo  $r \in (0, 1]$ .

**Afirmção 5.** *Com a escolha de  $\nu$ , a condição  $\rho(r) < r$ ,  $r \in (0, 1]$ , também é satisfeita.*

De fato, tem-se

$$\rho(r) = r - r\phi(r) + \nu\Lambda[\phi(r)]^\alpha r \leq r - r\phi(r) + \nu_2\Lambda[\phi(r)]^\alpha r.$$

Além disso, por  $\phi$  ser crescente, tem-se que  $\phi(r) \leq \phi(1)$  e, por  $\alpha - 1 \geq 0$ , segue-se que  $[\phi(r)]^{\alpha-1} \leq [\phi(1)]^{\alpha-1}$ , ou seja,  $\left[\frac{\phi(r)}{\phi(1)}\right]^{\alpha-1} \leq 1$ . A partir disso, substituindo o valor de  $\nu_2$

$$\begin{aligned} \rho(r) &\leq r - r\phi(r) + \frac{1}{2\Lambda[\phi(1)]^{\alpha-1}}\Lambda[\phi(r)]^\alpha r \\ &\leq r - r\phi(r) + r\frac{\phi(r)}{2}\left[\frac{[\phi(r)]}{\phi(1)}\right]^{\alpha-1} \\ &\leq r - r\frac{\phi(r)}{2} \\ &= r\left[1 - \frac{\phi(r)}{2}\right]. \end{aligned}$$

Para finalizar, note que o termo  $\left[1 - \frac{\phi(r)}{2}\right]$  é menor que 1, pois  $0 < \phi(r) \leq \phi(1) < 1$ , sendo a última desigualdade válida, visto que  $\nu < \nu_3$  e  $\nu_3$  foi tomado de modo a garantir  $\phi(1) < 1$ . Utilizando tal fato e a última relação, é obtido que

$$\rho(r) \leq r\left[1 - \frac{\phi(r)}{2}\right] < r \cdot 1 = r.$$

Logo, a função  $\rho$  obtida satisfaz as condições do Teorema 14 para  $r \in (0, 1]$ . Porém, no Teorema, a função  $\rho$  é definida para  $(0, \infty)$ . Desta forma, a função pode ser estendida, com a mesma notação de  $\rho$ , da seguinte forma para  $r > 1$

$$\rho(r) = \begin{cases} r - r\phi(r)[1 - \nu\Lambda[\phi(r)]^{\alpha-1}], & \text{se } 0 < r \leq 1, \\ 1 - \phi(1)[1 - \nu\Lambda[\phi(1)]^{\alpha-1}], & \text{se } r > 1, \end{cases}$$

o que define uma função contínua para todo  $r \in (0, \infty)$  e constante para  $r \geq 1$ . Além disso,  $\rho(r) > 0$  para  $r > 1$ , pois

$$\rho(r) = 1 - \phi(1) + \nu\Lambda[\phi(1)]^\alpha > 1 - \phi(1) > 0.$$

Para finalizar, basta mostrar que  $\rho(r) < r$  para  $r > 1$ , o que acontece pois

$$\rho(r) = 1 - \phi(1)[1 - \nu\Lambda[\phi(1)]^{\alpha-1}] \leq 1 - \phi(1)\left[1 - \frac{1}{2\Lambda[\phi(1)]^{\alpha-1}}\Lambda[\phi(1)]^{\alpha-1}\right] \leq 1 - \frac{\phi(1)}{2} < 1 < r.$$

Portanto, o Teorema 9 implica no Teorema 14.

Para a recíproca, considere que a relação (3.10) seja válida nas condições do Teorema 14. Como demonstrado no Lema 15 é possível obter a função  $\mu$ , definida em (3.11), contínua, positiva e crescente tal que

$$\mu(r) \leq 1 - \frac{\rho(r)}{r}, r \in (0, 1].$$

A partir disso, considere  $x, y \in X$  com  $d(x, y) = r \in (0, 1]$ , o que abrange todos os pontos de  $X$  devido a  $\text{diam}(X) \leq 1$ . A partir de (3.10) e da função  $\mu$ , tem-se

$$d(f(x), f(y)) \leq \rho(r) \leq r - r\mu(r) < r.$$

Dado  $\epsilon \in [0, 1]$ , existem duas opções possíveis:  $\mu(r) \geq \epsilon$  ou  $\mu(r) < \epsilon$ . Para o primeiro caso, tem-se que

$$d(f(x), f(y)) \leq r - r\mu(r) \leq (1 - \epsilon)r,$$

o que satisfaz a equação (3.12). Para o segundo caso, como  $\mu$  é crescente, é possível obter sua inversa  $\mu^{-1}$ . Aplicando-a à desigualdade  $\mu(r) < \epsilon$ , é obtido que  $r < \mu^{-1}(\epsilon)$  e, com isso,

$$d(f(x), f(y)) \leq r \pm \epsilon r < (1 - \epsilon)r + \epsilon\mu^{-1}(\epsilon).$$

Por consequência, define-se  $\psi : [0, \alpha] \rightarrow [0, \infty)$  da forma

$$\psi(\epsilon) = \begin{cases} \mu^{-1}(\epsilon), & \text{se } \epsilon \leq \mu(1) \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

obtendo-se uma função não decrescente, que se anula com continuidade no zero. Como  $\mu : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é crescente, o seu valor máximo é  $\mu(1)$ . Como é necessário definir  $\psi$  em  $[0, \alpha]$ , é realizada a extensão constante, visto que  $\psi(\mu(1)) = \mu^{-1}(\mu(1)) = 1$ . Além disso, tomando  $\Lambda = 1$ , é possível obter a equação (3.12) da forma

$$d(f(x), f(y)) \leq (1 - \epsilon)r + 1\epsilon\psi(\epsilon).$$

Portanto, o Teorema 14 também implica no Teorema 9, como desejado.  $\square$

**Observação 7.** Suponha que  $X$  seja limitado com  $\text{diam}(X) \leq k$  com a métrica  $d$  e  $k > 1$ . Com isso, basta tomar a métrica

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{k},$$

para seguir a demonstração do Teorema 16. Essa métrica é equivalente a  $d$  pois

$$1 \cdot d'(x, y) \leq d(x, y) \leq k d'(x, y).$$

**Observação 8.** Os resultados obtidos abordam a equivalência em relação à existência e à unicidade do ponto fixo em cada teorema e não em relação à taxa de convergência de cada um deles.

Outro fato importante é que não há perda de generalidade em se tomar  $X$  limitado na demonstração de que o Teorema 9 implica no Teorema 14, ou seja, essa implicação é válida para todo espaço métrico completo, limitado ou não, o que será apresentado no resultado a seguir.

**Corolário 17.** *Se  $X$  não for um espaço limitado, o Teorema 9 implica no Teorema 14.*

**Demonstração:** De fato, tome  $z \in X$  arbitrário tal que  $f(z) \neq z$ . Com isso, defina  $r = d(f(z), z)$  e considere a seguinte bola  $B(x, r) = \{\xi \in X/d(x, \xi) \leq r\}$ . Pela equação (3.10), segue que

$$\begin{aligned} d(f^n(z), f^{n-1}(z)) &= d(f(f^{n-1}(z)), f(f^{n-2}(z))) \\ &\leq \rho(d(f^{n-1}(z), f^{n-2}(z))) \leq \rho^2(d(f^{n-2}(z), f^{n-3}(z))), \end{aligned}$$

e procedendo recursivamente

$$d(f^n(z), f^{n-1}(z)) \leq \rho^n(d(f(z), z)) = \rho^n(r).$$

Pode-se obter uma sequência decrescente e limitada, isto é, convergente, a partir de sucessivas composições de  $\rho$ , pois

$$0 \leq \rho^n(r) = \rho(\rho^{n-1}(r)) \leq \rho^{n-1}(r) \leq \rho^{n-2}(r) \leq \dots \leq \rho(r) \leq r.$$

Desta forma, pela convergência da sequência e pela continuidade de  $\rho$ , pode-se obter

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^{n+1}(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\rho^n(r)) = \rho\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^n(r)\right) = \rho(\sigma),$$

ou seja,  $\sigma$  é ponto fixo de  $\rho$ . Porém, como  $0 < \rho(r) < r$  para todo  $r$ , tem-se pelo Teorema do Confronto que o único ponto fixo de  $\rho$  ocorre em  $r = 0$ . Desta forma,  $\sigma = 0$  e tem-se que

$$d(f^n(z), f^{n-1}(z)) \leq \rho^n(d(f(z), z)) = \rho^n(r) \rightarrow 0.$$

Visto que a função  $\rho$  é não decrescente, como apresentado na Observação 6, defina  $x_0 = f^n(z)$  e, como  $d(f^n(z), f^{n-1}(z)) \rightarrow 0$  e  $1 - \rho(1) > 0$ , pode-se tomar  $n$  suficientemente grande tal que

$$d(f(x_0), x_0) = d(f(f^n(z)), f^n(z)) = d(f^{n+1}(z), f^n(z)) \leq 1 - \rho(1). \quad (3.14)$$

**Afirmção 6.** *A desigualdade (3.14) implica que  $f(B(x_0, 1)) \subset B(f(x_0), \rho(1)) \subset B(x_0, 1)$ .*

De fato, primeiramente será demonstrado que  $f(B(x_0, 1)) \subset B(f(x_0), \rho(1))$ . Dado  $y \in f(B(x_0, 1))$ , existe  $x \in B(x_0, 1)$  tal que  $y = f(x)$ . Para tal  $x$ , vale  $d(x, x_0) < 1$ . Juntando essa informação à hipótese (3.10) do Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong, tem-se

$$d(y, f(x_0)) = d(f(x), f(x_0)) \leq \rho(d(x, x_0)) \leq \rho(1) \implies y \in B(f(x_0), \rho(1)),$$

em que utilizou-se o fato de  $\rho$  ser não decrescente. Portanto,  $f(B(x_0, 1)) \subset B(f(x_0), \rho(1))$ .

Resta ver que  $B(f(x_0), \rho(1)) \subset B(x_0, 1)$ . Dado  $x \in B(f(x_0), \rho(1))$ , tem-se que  $d(x, f(x_0)) < \rho(1)$ . Utilizando a desigualdade triangular e o fato de  $d(f(x_0), x_0) \leq 1 - \rho(1)$ , segue-se que

$$d(x, x_0) \leq d(x, f(x_0)) + d(x_0, f(x_0)) < \rho(1) + 1 - \rho(1) = 1 \implies x \in B(x_0, 1).$$

Logo,  $B(f(x_0), \rho(1)) \subset B(x_0, 1)$ .

A partir destes resultados, pode-se concluir que, tomando  $z \in X$  arbitrário, pode-se montar a sequência convergente  $(f^n(z))$ . Desta forma, para  $n$  suficientemente grande, pode-se obter um ponto  $x_0$  tal que  $f(B(x_0, 1)) \subset B(x_0, 1)$ , ou seja, é possível tratar  $X$  como um espaço limitado, como foi feito no Teorema 16. Resumidamente, pode-se substituir todo o espaço  $X$  pela bola unitária  $B(x_0, 1)$ .  $\square$

**Observação 9.** A partir do Teorema 16 e das demonstrações anteriores, pode-se concluir que independente de o espaço métrico considerado ser limitado ou não, a validade do Teorema 9 sempre implica na validade do Teorema 14. No entanto, a limitação do espaço métrico é uma hipótese essencial para que o Teorema 14 implique na validade do Teorema 9. Na próxima seção, será apresentado um exemplo de um espaço ilimitado e uma função para a qual a existência de ponto fixo pode ser garantida pelo Teorema 9 mas não pelo Teorema 14. Isso ocorre pois o Teorema 14, em certas situações, pode não conseguir lidar com a ocorrência simultânea de  $d(x, y) \ll 1$  e  $\|x\| + \|y\| \gg 1$  para dois pontos  $x, y$  do espaço métrico.

### 3.3 Exemplo

Para finalizar este capítulo, será exibida uma função que não satisfaz as condições suficientes dos Teoremas do Ponto Fixo de Banach e de Boyd-Wong, mas satisfaz as condições suficientes do Teorema 9. Primeiramente, serão apresentados alguns lemas, quase todos envolvendo apenas conceitos de cálculo. De posse de tais lemas, será possível estabelecer o exemplo pretendido.

**Lema 18.** A função  $F : [1, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(x, r) = 2 [\sqrt{x+r} - \sqrt{x}] - 4 [\sqrt[4]{x+r} - \sqrt[4]{x}], \quad (3.15)$$

é positiva para todo  $x \geq 1$  e  $r > 0$ .

**Demonstração:** De fato, rearranjando  $F(x, r)$  é obtido que

$$\begin{aligned} F(x, r) &= 2 [\sqrt{x+r} - \sqrt{x}] - 4 [\sqrt[4]{x+r} - \sqrt[4]{x}] \\ &= 2 [\sqrt{x+r} - 2\sqrt[4]{x+r}] - 2 [\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x}] \\ &= 2 [\sqrt[4]{x+r} - 1]^2 - 2 - 2 [\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x}] \\ &= 2 [\sqrt[4]{x+r} - 1]^2 - 2 [\sqrt[4]{x} - 1]^2 \\ &= 2 \left\{ [\sqrt[4]{x+r} - 1]^2 - [\sqrt[4]{x} - 1]^2 \right\} \\ &= 2 (\sqrt[4]{x+r} - 1 + \sqrt[4]{x} - 1) (\sqrt[4]{x+r} - 1 - \sqrt[4]{x} + 1) \\ &= 2 (\sqrt[4]{x+r} - 1 + \sqrt[4]{x} - 1) (\sqrt[4]{x+r} - \sqrt[4]{x}). \end{aligned}$$

Note que, como  $x \geq 1$  e  $r > 0$ , tem-se um valor positivo no primeiro parênteses, pois é a soma de um termo positivo  $(\sqrt[4]{x+r} - 1)$  com um termo não negativo  $(\sqrt[4]{x} - 1)$ . No segundo parênteses também há um valor positivo, pois, devido a  $x \geq 1$  e  $r > 0$ , tem-se

$$\sqrt[4]{x+r} > \sqrt[4]{x}.$$

Portanto,  $F(x, r)$  é o produto de três fatores positivos, ou seja, é positiva.  $\square$

**Lema 19.** A desigualdade

$$4 \left( \sqrt[4]{1+y} - 1 \right) \leq 2 \left( \sqrt{1+y} - 1 \right) - \frac{y^2}{4(2+y)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.16)$$

é válida para todo  $y > 0$ .

**Demonstração:** Para começar, defina a função  $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(y) = \sqrt[4]{1+y} - 1 - \frac{y}{\sqrt{8}(2+y)^{\frac{3}{4}}}.$$

A partir da função “Nminimize” do software “Wolfram Mathematica,” foi obtido que o ponto de mínimo global de  $h$  é o ponto  $y = 0$ , no qual  $h(y) = 0$ . Portanto,  $h(y) \geq 0$ . Restringindo a função para o domínio  $(0, \infty)$ ,  $h$  continua não negativa, e pode-se obter a expressão

$$\sqrt[4]{1+y} - 1 - \frac{y}{\sqrt{8}(2+y)^{\frac{3}{4}}} \geq 0.$$

Reorganizando os termos, é obtido que

$$\sqrt[4]{1+y} - 1 \geq \frac{y}{\sqrt{8}(2+y)^{\frac{3}{4}}}.$$

Note que os dois lados da expressão são não negativos. Assim, é possível elevar os dois lados ao quadrado, obtendo

$$\left(\sqrt[4]{1+y} - 1\right)^2 \geq \frac{y^2}{8(2+y)^{\frac{3}{2}}}.$$

Além disso, multiplicando-se ambos os lados por  $-2$  e reescrevendo um dos termos  $\sqrt[4]{1+y} - 1$  de forma conveniente, tem-se

$$2\left(\sqrt[4]{1+y} - 1\right)\left(-\sqrt[4]{1+y} + 2 - 1\right) \leq -\frac{y^2}{4(2+y)^{\frac{3}{2}}}.$$

Na sequência, reorganizando o lado direito, é obtido que

$$4\left(\sqrt[4]{1+y} - 1\right) - 2\left(\sqrt[4]{1+y} - 1\right)\left(\sqrt[4]{1+y} + 1\right) \leq -\frac{y^2}{4(2+y)^{\frac{3}{2}}},$$

e realizando o produto da soma pela diferença, tem-se

$$4\left(\sqrt[4]{1+y} - 1\right) \leq 2\left(\sqrt{1+y} - 1\right) - \frac{y^2}{4(2+y)^{\frac{3}{2}}},$$

como desejado. □

**Lema 20.** Para todo  $\epsilon \in [0, 1]$ ,  $r > 0$  e  $x \geq 1$ , a seguinte desigualdade é válida

$$-\epsilon r + \epsilon^2(2x+r)^{\frac{3}{2}} + F(x, r) \geq F(x, r) - \frac{r^2}{4(r+2x)^{\frac{3}{2}}} \geq 0, \quad (3.17)$$

em que  $F(x, r)$  é definida em (3.15).

**Demonstração:** Para a primeira desigualdade, será utilizado o quadrado da diferença considerando  $a = 2\epsilon(2x+r)^{\frac{3}{2}}$  e  $b = r$ . A partir disso, é obtido que

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a-b)^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \\ &= 4\epsilon^2(2x+r)^3 - 4\epsilon r(2x+r)^{\frac{3}{2}} + r^2. \end{aligned}$$

Subtraindo ambos os lados por  $r^2$  e os dividindo por  $4(2x+r)^{\frac{3}{2}}$ , obtêm-se

$$-\epsilon r + \epsilon^2(2x+r)^{\frac{3}{2}} \geq -\frac{r^2}{4(2x+r)^{\frac{3}{2}}},$$

e basta somar  $F(x, r)$  em ambos os lados para obter a desigualdade desejada.

Para a segunda desigualdade de (3.17), será utilizada a desigualdade (3.16), que foi demonstrada no Lema 19. Como essa relação está definida para todo  $y > 0$ , será realizada a mudança de variável  $y = \frac{r}{x}$  em (3.17). Isso é possível pois  $r > 0$  e  $x \geq 1$ . Dessa forma, é obtido que

$$4 \left( \sqrt[4]{1 + \frac{r}{x}} - 1 \right) \leq 2 \left( \sqrt{1 + \frac{r}{x}} - 1 \right) - \frac{r^2}{4x^2 \left(2 + \frac{r}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como  $x \geq 1$ , por consequência,  $\sqrt[4]{x} \geq 1$ . Consequentemente, pode-se multiplicar somente o termo da direita por  $\sqrt[4]{x}$  sem afetar a desigualdade, obtendo

$$4 \left[ \sqrt[4]{1 + \frac{r}{x}} - 1 \right] \leq \sqrt[4]{x} \left[ 2 \left( \sqrt{1 + \frac{r}{x}} - 1 \right) - \frac{r^2}{4x^2 \left(2 + \frac{r}{x}\right)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Multiplicando ambos os lados por  $\sqrt[4]{x}$ , tem-se

$$4\sqrt[4]{x} \left[ \sqrt[4]{1 + \frac{r}{x}} - 1 \right] \leq \sqrt{x} \left[ 2 \left( \sqrt{1 + \frac{r}{x}} - 1 \right) - \frac{r^2}{4x^2 \left(2 + \frac{r}{x}\right)^{\frac{3}{2}}} \right],$$

e reorganizando os termos e as raízes, é obtido que

$$2 \left( \sqrt{x+r} - \sqrt{x} \right) - 4 \left( \sqrt[4]{x+r} - \sqrt[4]{x} \right) - \frac{r^2}{4(2x+r)^{\frac{3}{2}}} \geq 0,$$

ou seja,

$$F(x, r) - \frac{r^2}{4(2x+r)^{\frac{3}{2}}} \geq 0,$$

como desejado. □

Após esses resultados, pode-se trabalhar com o exemplo propriamente dito.

**Exemplo 3.1.** Considere a função  $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  dada por

$$f(x) = -2 + x - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x}.$$

Essa função possui um único ponto fixo, dado por  $f(1) = 1$ . O gráfico dessa função é apresentado, em verde e linha contínua, na Figura 3.1, em que o gráfico (a) apresenta a função  $f$  em seu domínio e o gráfico (b) apresenta  $f$  em valores próximos de seu ponto fixo. Para comparação, foi adicionada a reta  $g(x) = x$ , em vermelho e linha tracejada, nos dois gráficos.

O comportamento de  $f$  pode ser melhor compreendido a partir da análise de sua derivada, dada por

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

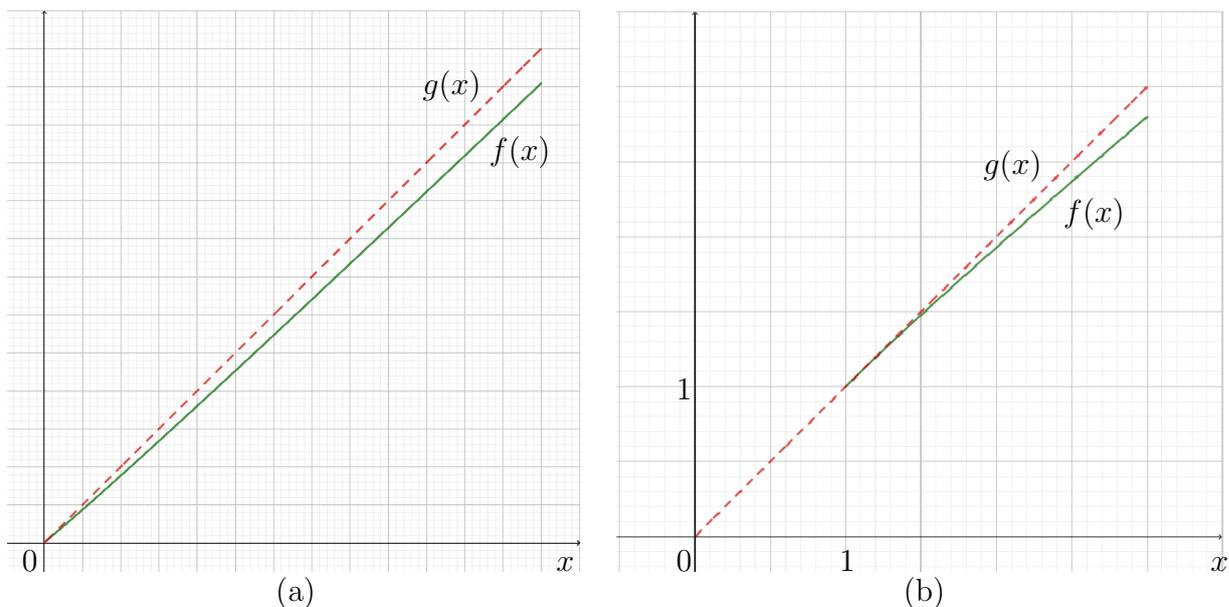


Figura 3.1: Gráfico da função  $f$ .

O gráfico da derivada é apresentado em verde e linha contínua na Figura 3.2, juntamente com a função constante  $h(x) = 1$ , em vermelho e linha tracejada, para comparação. Observe que  $0 < f'(x) < 1$  para todo  $x \in (1, \infty)$  e, desta forma,  $f$  é uma função crescente, mas que apresenta crescimento menor que o da função identidade. Portanto, as funções  $f$  e identidade não se interceptam novamente, fazendo com que o ponto fixo de  $f$  seja único.

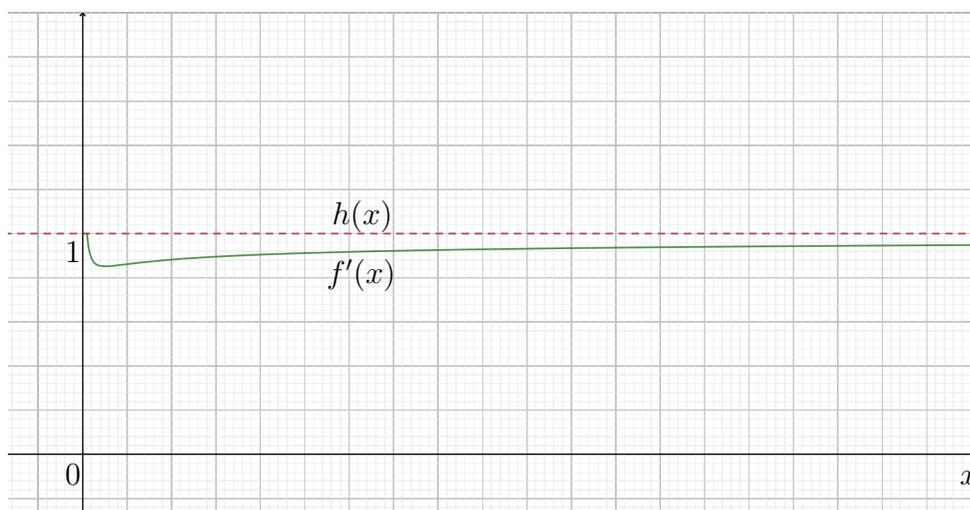


Figura 3.2: Gráfico da derivada de  $f$ .

Para os resultados seguintes, considere  $x \geq 1$  e  $r > 0$ . Realizando a subtração de  $f(x+r)$  por  $f(x)$ , tem-se

$$\begin{aligned}
 f(x+r) - f(x) &= -2 + x + r - 2\sqrt{x+r} + 4\sqrt[4]{x+r} - (-2 + x - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x}) \\
 &= r - [2(\sqrt{x+r} - \sqrt{x}) - 4(\sqrt[4]{x+r} - \sqrt[4]{x})] \\
 &= r - F(x, r),
 \end{aligned}$$

em que  $F(x, r)$  é definida em (3.15) é positiva como demonstrado no Lema 18. Utilizando dessa equação, mostra-se que  $f$  não é contração, ou seja, não se pode aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach à essa função. Com efeito, suponha que  $f$  seja contração e exista  $\lambda \in [0, 1)$  tal que, para todo  $x, y \in [1, \infty)$ , tem-se

$$d(f(y), f(x)) = |f(y) - f(x)| \leq \lambda|y - x| = \lambda d(y, x).$$

Considerando  $f(y) = f(x + r)$ , segue-se que

$$|f(x + r) - f(x)| \leq \lambda|x + r - x| = \lambda|r|,$$

e, observando que  $f$  é crescente e  $r > 0$ , pode-se retirar os módulos da equação anterior. Além disso, substituindo  $f(x + r) - f(x) = r - F(x, r)$ , tem-se

$$r - F(x, r) \leq \lambda r,$$

que pode ser reorganizada da forma

$$(1 - \lambda)r \leq F(x, r).$$

Na sequência, tomando  $x$  tendendo a infinito, a função  $F(x, r)$  tende a zero. Desta forma, é obtido que

$$(1 - \lambda)r \leq 0,$$

e pode-se multiplicar por  $\frac{1}{r}$  em ambos os lados da desigualdade, pois  $r > 0$ . Com isso,

$$(1 - \lambda) \leq 0 \implies \lambda \geq 1,$$

contradição. Portanto,  $f$  não é uma contração e o Teorema do Ponto Fixo de Banach não pode ser aplicado a essa função.

Na sequência, será demonstrado que  $f$  não possui uma função  $\rho$  como definida no Teorema de Boyd-Wong. De fato, suponha que exista uma função  $\rho$  como a definida no Teorema 14, tal que  $\rho(r) < r, \forall r \in (0, \infty)$ . Dessa forma, segue-se que

$$r - F(x, r) = f(x + r) - f(x) \leq \rho(x + r - x) = \rho(r) < r,$$

e tomando novamente  $x$  tendendo a infinito, é obtido que

$$r \leq \rho(r) < r,$$

contradição. Portanto, não existe  $\rho$  tal que  $f$  satisfaça as condições do Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong. Note que, quando toma-se o limite de  $x$  tendendo ao infinito, ocorre

o que foi discutido na Observação 9, mostrando onde o Teorema 14 pode falhar.

Porém, será visto que  $f$  satisfaz as condições do Teorema 9. Utilizando da desigualdade (3.17), demonstrada no Lema 20, obtém-se

$$-F(x, r) \leq -\epsilon r + \epsilon^2(2x + r)^{\frac{3}{2}},$$

e segue-se que

$$|f(x + r) - f(x)| = r - F(x, r) \leq r - \epsilon r + \epsilon^2(2x + r)^{\frac{3}{2}} \leq r(1 - \epsilon) + \epsilon^2(1 + 2x + r)^{\frac{3}{2}},$$

o que pode ser reescrito da forma

$$|f(x + r) - f(x)| \leq r(1 - \epsilon) + \epsilon^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}(1 + |x + r| + |x|)^{\frac{3}{2}}.$$

A última relação satisfaz as condições de (3.3) com  $x_0 = 0$ ,  $\beta = \frac{3}{2}$ ,  $\alpha = \frac{3}{2}$ ,  $\Lambda = 1$  e  $\psi(\epsilon) = \epsilon^{\frac{1}{2}}$  sendo  $\psi$  uma função crescente com continuidade no zero. Desta forma, pode-se aplicar o Teorema 9 à função  $f$  para garantir a existência de um único ponto fixo que, por inspeção, já foi apresentado ser  $x = 1$ .

Além disso, note que, como  $\psi(\epsilon) = \epsilon^{\frac{1}{2}}$ , já se obtém a condição do Corolário 13, com  $\vartheta = 2$ . Com efeito, substituindo na equação (3.9), tem-se

$$d(x_*, f^n(x_0)) \leq \frac{2^2 C}{n^{2-1}} = \frac{4C}{n}, \quad (3.18)$$

e a estimativa da taxa de convergência obtida é da ordem de  $\frac{1}{n}$ . □

# Apêndice

Nesta seção, serão apresentados dois resultados que foram utilizados, mas para não delongar demais o texto, foram apresentados aqui. Primeiramente, será demonstrado o seguinte resultado.

**Proposição 21.** *Considere  $X$  um espaço métrico e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Então  $f$  é semicontínua superiormente em  $x_0$  se, e somente se,*

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

**Demonstração:** Suponha que  $f$  é semicontínua superiormente em  $x_0$ , ou seja, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$ , então

$$f(x) \leq f(x_0) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Considere  $c$  um valor de aderência de  $f$  em  $x_0$  e  $(x_n)$  uma sequência em  $X \setminus \{x_0\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ . A partir disso, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0$  implica que

$$|x_n - x_0| < \delta \text{ e } |f(x_n) - c| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dessa forma, para  $n > n_0$ , é obtido que

$$c - \frac{\epsilon}{2} < f(x_n) < f(x_0) + \frac{\epsilon}{2}$$

em que, na última passagem utilizamos a hipótese de  $f$  ser semicontínua superiormente em  $x_0$ . Segue-se então que

$$c < f(x_0) + \epsilon,$$

e sendo  $\epsilon$  é arbitrário,  $f(x_0)$  é maior que o valor de aderência  $c$ . Além disso,  $c$  é arbitrário e a relação anterior é válida para o maior valor de aderência de  $f$  em  $x_0$ , ou seja,

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0),$$

como desejado.

Para a recíproca, considere que

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0),$$

o que implica que o maior valor de aderência de  $f$  em  $x_0$  é menor que  $f(x_0)$ . Dessa forma, a menos de um número finito de valores, toda sequência  $(f(x_n))$  com  $(x_n)$  tendendo a  $x_0$  é menor que  $f(x_0)$ . Logo, pode-se considerar somente subsequências de  $(f(x_n))$  limitadas superiormente por  $f(x_0)$ .

Suponha, por absurdo, que  $f$  não seja semicontínua superiormente em  $x_0$ , *i.e.*, que exista  $\epsilon > 0$  tal que, para todo  $\delta > 0$ , há  $x \in X$ ,  $|x - x_0| < \delta$ , tal que  $f(x_0) + \epsilon \leq f(x)$ . Com isso, pode-se construir uma sequência  $(x_n)$  com  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$  tal que

$$f(x_0) + \epsilon \leq f(x_n).$$

Logo, a sequência  $(f(x_n))$  é limitada inferiormente e apresenta uma subsequência  $(f(x_{n_k}))$  convergente. Seja  $c = \lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k})$  e, por construção, tem-se  $f(x_0) \leq c$ . Dessa forma,  $c$  é um valor de aderência de  $(f(x_n))$  e conclui-se que

$$f(x_0) \leq c \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

o que é uma contradição. Portanto,  $f$  é semicontínua superiormente em  $x_0$ . □

Outro resultado que é apresentado nessa seção é a desigualdade (3.5).

**Proposição 22.** *Dados  $p \geq 0$  e  $x, y \in \mathbb{R}^+$ , a desigualdade*

$$(x + y)^p \leq 2^p (|x|^p + |y|^p)$$

*é válida.*

**Demonstração:** Primeiramente observe que

$$x + y = |x + y|.$$

A partir disso, tem-se que

$$\begin{aligned} |x + y|^p &\leq (2 \cdot \max\{|x|, |y|\})^p = 2^p \max\{|x|, |y|\}^p \\ &\leq 2^p (|x|^p + |y|^p), \end{aligned}$$

como desejado. □

# Referências Bibliográficas

- [1] BLUMENTHAL, L. M. *Theory and Applications of Distance Geometry*, 2 ed. Chelsea Publishing Company, New York, 1953.
- [2] BOYD, D. W., AND WONG, J. S. W. *On Nonlinear Contractions*. Proceedings of the American Mathematical Society *20*, 2 (1969), 458–464.
- [3] DIAS, B. A., FERREIRA, W. M., AND MARTINS, E. M. *Uma Introdução a Teoria de Pontos Fixos*, 2012. Monografia (Bacharel em Matemática), UFOP (Universidade Federal de Ouro Preto), Ouro Preto, Brasil.
- [4] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, 1989.
- [5] LIMA, E. L. *Curso de Análise, Vol. 1*, 14 ed. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2017.
- [6] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*, 5 ed. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2017.
- [7] PATA, V. *A Fixed Point Theorem in Metric Spaces*. Journal of Fixed Point Theory and Applications *10*, 2 (2011), 299–305.
- [8] PEREIRA, R. O., FERREIRA, W. M., AND MARTINS, E. M. *A Equivalência entre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Valor Intermediário*. RMAT: Revista da Matemática da UFOP *05*, 1 (2018), 108–119.
- [9] SANTOS, M. A., FERREIRA, W. M., AND MARTINS, E. M. *Os Teoremas das Panquecas*. RMAT: Revista da Matemática da UFOP *06*, 1 (2019), 102–125.