

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**MODELAGEM DE UM PROBLEMA DE AJUSTE DE FLUXO DE
CAIXA E SEQUENCIAMENTO DE PROJETOS COM RECURSOS
LIMITADOS PARA MAXIMIZAR O VALOR PRESENTE LÍQUIDO**

MATHEUS BORGES PIUZANA BARBOSA

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO
JOÃO MONLEVADE
Julho, 2016**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

MODELAGEM DE UM PROBLEMA DE AJUSTE DE FLUXO DE
CAIXA E SEQUENCIAMENTO DE PROJETOS COM RECURSOS
LIMITADOS PARA MAXIMIZAR O VALOR PRESENTE LÍQUIDO

MATHEUS BORGES PIUZANA BARBOSA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade Federal de Ouro Preto, como exigência
parcial para a obtenção do grau de Bacharelado em
Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Augusto de Oliveira Silva

JOÃO MONLEVADE
Julho, 2016



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Colegiado do Curso de Engenharia de Produção



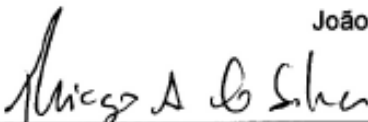
ANEXO VIII – ATA DE DEFESA

Aos 28 dias do mês de julho de 2016, às 16 horas, na sala B303 deste instituto, foi realizada a defesa do Trabalho de Conclusão de Curso pelo (a) aluno (a) Matheus Borges Piuzana Barbosa, sendo a comissão examinadora constituída pelos professores: Alexandre Xavier Martins, Mônica do Amaral e Thiago Augusto de Oliveira Silva (orientador). O (a) aluno (a) apresentou o trabalho intitulado: Modelagem de um problema de ajuste de fluxo de caixa e sequenciamento de projetos com recursos limitados para maximizar o valor presente líquido. A comissão examinadora deliberou, pela:

- () Aprovação
(X) Aprovação com Ressalva - Prazo concedido para as correções: 30 dias
() Reprovação com Ressalva - Prazo para marcação da nova banca: _____
() Reprovação

do(a) aluno (a), com a nota 8,0 (oito vírgula zero). Na forma regulamentar e seguindo as determinações da resolução COEP12/2015 foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da comissão examinadora e pelo (a) aluno(a).

João Monlevade, 28 de julho de 2016.



Professor(a) Orientador(a)



Alexandre Xavier Martins - Convidado(a)



Mônica do Amaral - Convidado(a)



Matheus Borges Piuzana Barbosa - Aluno (a)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Colegiado do Curso de Engenharia de Produção



UFOP

ANEXO VII - TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado "Modelagem de um problema de ajuste de fluxo de caixa e sequenciamento de projetos com recursos limitados para maximizar o valor presente líquido" é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem o devido referenciamento ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 11 de agosto de 2016

Matheus Borges Pinzano Barbosa
Matheus Borges Pinzano Barbosa

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade de superar os desafios da vida, e por todas suas bênçãos nos acontecimentos e situações do dia-a-dia.

Agradeço à minha família pelo apoio contínuo e por sempre estar do meu lado, me confortando e dando toda atenção e suporte.

Agradeço ao professor Thiago Augusto por toda orientação e apoio durante o trabalho, assim como todos os professores e funcionários da universidade que contribuíram para meu desenvolvimento acadêmico e pessoal.

Agradeço a todos meus amigos construídos na vida acadêmica, que sempre estiveram do meu lado e sempre me deram força suficiente para seguir adiante.

RESUMO

O presente trabalho visa auxiliar gestores de empresas a buscarem as melhores formas de avaliarem seus empreendimentos. Considerando projetos que possuem em suas etapas de planejamento, a programação ou sequenciamento de atividades, a limitação ou disponibilidade de recursos e a obtenção de investimentos futuros, é aconselhável que antes de iniciar sua execução, um estudo de viabilidade seja feito. Por isso, através de um modelo matemático, é possível verificar como todos esses fatores podem ser realizados de maneira ótima, atingindo o maior valor presente líquido possível e viabilizando a realização do projeto. Além disso, o estudo de relaxação de variáveis e restrições é realizado de modo a explicitar as variações que são obtidas pelos resultados gerados no modelo. Mesmo em diferentes cenários, é possível encontrar soluções que sejam bem semelhantes às situações práticas do dia-a-dia, agregando maior fonte de conhecimento e embasamento para tomada de decisões dos gestores.

Palavras-Chave: Sequenciamento de atividades, ajuste do controle de fluxo de caixa, limitação de recursos, relaxação linear.

ABSTRACT

This paper aims to help business managers to seek the best ways to evaluate their ventures. Projects in planning stages, which have scheduling activities, restriction or availability of resources and achievement of future investments is advised to accomplish a viability study before starting their implementation. Hence, using a mathematical model is appropriate to check how all these factors can be performed optimally, reaching the highest net present value and enabling the achievement of the project. Furthermore, the relaxation study of variables and constraints is performed in order to explain the obtained variations from the results generated by the model. Even in different scenarios, it is possible to find solutions that are very similar to the practical situations, adding more source of knowledge and basis for decision-making by managers.

Keywords: Scheduling project, cash matching problem, resource constrained, linear programming relaxation.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	2
RESUMO	5
ABSTRACT	6
SUMÁRIO.....	7
LISTA DE FIGURAS	8
LISTA DE TABELAS	9
1 INTRODUÇÃO.....	9
1.1. Objetivos.....	10
1.1.1 Objetivo geral	10
1.1.2 Objetivos específicos.....	10
1.2. Justificativa.....	10
2 METODOLOGIA DE PESQUISA	12
3 REVISÃO DE LITERATURA	13
3.1 Sequenciamento de projetos	13
3.2 Fluxo de caixa.....	15
3.3 Integração do sequenciamento de projetos e do ajuste de fluxo de caixa	18
3.4 Relaxação Linear	22
3.5 Relaxação Lagrangeana.....	23
4 PROBLEMA PROPOSTO	24
5 RESULTADOS	32
6 CONCLUSÃO.....	38
7 REFERÊNCIAS	40

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Relação de precedência	14
Figura 2 – Diagrama de fluxo de caixa.....	16
Figura 3 – Dados para conjunto de atividades.....	28
Figura 4 – Disponibilidade de recursos renováveis no tempo.....	28
Figura 5 – Retorno e preço dos títulos.....	29
Figura 6 – Diagrama de atividades	29
Figura 7 – Tempo gasto por atividade	30

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação de modelos.....	23
Tabela 2 – Comparação dos modelos com proposto.....	25
Tabela 3 – Resultados da quantidade de títulos.....	30
Tabela 4 – Resultados dos valores das variáveis.....	30
Tabela 5 – Tamanho das instâncias.....	32
Tabela 6 – Resultados do modelo.....	33
Tabela 7 – Definição dos testes.....	34
Tabela 8 – Resultados dos testes nas instâncias.....	34
Tabela 9 – Gaps de otimalidade.....	35
Tabela 10 – Resultados em relação ao tempo gasto.....	36
Tabela 11 – Resultados obtidos no Teste 5.....	37

1 INTRODUÇÃO

O grande desafio das empresas é obter vantagem competitiva no mercado que se situa com o intuito de vencer suas concorrentes e gerar cada vez mais lucros. Para tal, é necessário, além de outros vários fatores, a realização de uma boa gestão financeira. Buscando um eficiente controle financeiro, as empresas necessitam de ferramentas que auxiliem nesse processo, e o controle do fluxo de caixa é uma opção que tem se tornado essencial para o bom gerenciamento financeiro.

Devido ao controle efetivo de todos os tipos de custos recorrentes na empresa e todas as entradas provenientes do seu negócio, é preciso que exista clareza nessas informações, uma vez que são vitais para a tomada de decisões estratégicas. Com o uso do fluxo de caixa, é possível identificar a necessidade de gerar receitas suficientes para cumprir com seus compromissos e obrigações, cortar gastos desnecessários ou altos demais, além de prospectar o futuro da empresa através da realização de investimentos considerando do curto ao longo prazo.

Realizar a análise de fluxo de caixa de uma maneira eficiente possibilita às empresas, no cenário atual, buscar variadas formas de investimentos que irão gerar a formação de uma carteira. Através da formação dessa carteira, a principal estratégia é a de obter um conjunto de projetos de investimento que terá a maior relação retorno x risco, ou seja, aquelas opções que terão mais retorno financeiro com um risco relativamente baixo.

Aliada a isso, a complexidade em projetos tem aumentado cada vez mais, exigindo bastante empenho dos gestores para realizar sua entrega da melhor maneira possível. Fatores como sequenciamento das etapas do projeto, duração das atividades e a necessidade de alocação de recursos em cada fase demandam atenção dos executores e precisam ser bem planejadas e executadas para atingir a satisfação do cliente com a entrega do projeto dentro do prazo e com a qualidade oferecida.

O presente trabalho tem como objetivo responder ao seguinte questionamento: levando em consideração uma determinada sequência de atividades/projetos bem como suas respectivas limitações de recursos, qual a melhor forma de selecionar títulos de investimentos para obter a viabilidade financeira dos projetos, atingindo a maximização do valor presente líquido? Deste modo, o trabalho busca demonstrar formas de resolver esse problema usando a otimização através de um modelo matemático.

1.1. Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é analisar as melhores opções de resolução do problema de fluxo de caixa considerando o sequenciamento de atividades e utilização de recursos como fator limitador para obtenção do lucro líquido máximo.

1.1.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos são:

- a) Descrever uma situação prática na qual ocorre o problema de *cash matching* e *scheduling*;
- b) Comparar dois modelos elaborados por autores diferentes e encontrar suas similaridades e diferenças;
- c) Criar um modelo matemático, que represente uma situação real de forma adequada e que seja capaz de: estabelecer uma ordem cronológica de atividades, assim como sua duração; determinar a utilização ótima de recursos, bem como sua alocação nas atividades; e selecionar os melhores títulos de investimento;
- d) Analisar a dificuldade do problema com base em experimentos através de instâncias de diferentes dimensões;
- e) Estudar a estrutura do problema a partir de experimentos usando a relaxação linear.

1.2. Justificativa

Segundo Luenberger (1998), o objetivo principal da ciência de investimentos é melhorar o processo de investimentos, que inclui identificação, seleção, combinação e gerenciamento contínuo de diferentes projetos para se investir e construir uma carteira.

Para a resolução de um problema em investimento usando métodos quantitativos é necessário, primeiramente, a formulação do problema, sendo que a otimização é mais usada para tentar encontrar a carteira de investimentos ideal e selecionar a melhor combinação de investimentos, gerando os melhores resultados e correndo o menor risco possível. Por isso, o uso de otimização se enquadra perfeitamente na busca pela formação ótima de uma carteira de investimentos.

Além disso, considerando que este é um assunto de suma importância e relevância para empresas e organizações, dependendo dos resultados finais, o trabalho pode ter a possibilidade de servir como consulta e/ou benchmarking para qualquer interessado no assunto. Pode possibilitar também, o aumento de trabalhos relacionados a esse tópico, visto que existe uma carência em bibliografia, e de acordo com seu sucesso e divulgação, pode contribuir para a realização de outros trabalhos futuramente.

2 METODOLOGIA DE PESQUISA

Segundo Bertrand e Fransoo (2002), a metodologia que consiste a pesquisa deste trabalho é axiomática, pelo fato de “obter soluções para o modelo em questão e assegurar que tais soluções ajudem a esclarecer a estrutura do problema descrito no modelo”. Além disso, especificando a classificação da pesquisa axiomática, os autores definem “a pesquisa axiomática normativa desenvolve normas, políticas, estratégias e ações, a fim de melhorar os resultados disponíveis na literatura, encontrar uma solução ótima para um problema novo ou comparar o desempenho de estratégias que tratam um mesmo problema”, ou seja, essa pesquisa trata-se de modelos que prescrevem uma decisão para o problema e, em geral, são modelos de programação matemática.

Similarmente à definição dos autores, Morabito e Pureza (2012) afirmam que os modelos devem ser descritos em linguagem matemática e computacional, utilizando-se de técnicas analíticas, tal como a estatística, e experimentais, como a simulação computacional, possibilitando a análise de diferentes estados, bem como o resultado esperado para possíveis ações que podem ser tomadas sobre o sistema real estudado.

Através dessas definições, é possível perceber que a metodologia deste trabalho se enquadra nesta categoria pelo fato de ter a proposição de um novo modelo de otimização para o problema idealizado, buscando sua solução ótima e comparando resultados em diferentes cenários.

Ademais, Bertrand e Fransoo (2002) definem quatro etapas de desenvolvimento para uma pesquisa baseada na modelagem e simulação: Conceituação, Modelagem, Solução do Modelo e Implementação. A primeira etapa consiste na definição do problema e identificação de modelos de referência na literatura que servirão como premissas para entendimento do problema real. Na etapa de Modelagem, os modelos de referência escolhidos são avaliados e adaptados de forma a validar e verificar o modelo proposto ao sistema real. Na terceira fase ocorre a experimentação do modelo, através de testes computacionais dos dados imputados, com possíveis variações em diferentes cenários. A última etapa consiste na aplicação prática dos resultados obtidos na fase anterior, com o intuito de validar a eficácia dos resultados.

Este trabalho contempla as três primeiras etapas de desenvolvimento uma vez que não houve a aplicação prática em um sistema real para validação dos dados obtidos.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Com o objetivo de obter informações necessárias para a realização deste trabalho, buscou-se na literatura temas e tópicos que irão nortear o desenvolvimento do trabalho e conseqüentemente contribuir para o melhor entendimento das análises e dos resultados a serem realizados.

3.1 Sequenciamento de projetos

O guia PMBOK desenvolvido por PMI (2013, p.3) define projeto como um esforço temporário empreendido para criar um produto, serviço ou resultado exclusivo, com um início e fim definidos. O término de um projeto é alcançado não somente quando os objetivos iniciais são atingidos, mas também caso o cliente queira encerrá-lo por necessidade ou por não atingimento dos objetivos propostos. Podendo ser tangível ou intangível, um projeto criará sempre um resultado único, mesmo possibilitando a existência de elementos comuns durante as atividades do projeto.

Para realizar o gerenciamento de um projeto é necessária a aplicação do conhecimento, habilidades, ferramentas e técnicas para atender aos seus requisitos. Cinco macro grupos de processos podem ser definidos para auxiliar o gerenciamento de projetos: Iniciação, Planejamento, Execução, Monitoramento e Controle, e Encerramento (PMI, 2013, p. 5).

Segundo Kolish (2013), projetos são divididos em três etapas: aquisição dos dados, sequenciamento das atividades e realização do planejamento do projeto. A primeira etapa é indispensável para a gestão do projeto, pois reúne as quantidades e tipos de recursos disponíveis, define as atividades e suas durações, as exigências dos recursos, relações de precedência e as especificações do objetivo a ser atingido. O sequenciamento de atividades define a melhor combinação possível para realizar as atividades respeitando sempre as relações de precedência entre elas, assim como suas durações e restrições de recursos. A terceira etapa é execução do plano que foi proposto anteriormente.

Sendo assim, um fator importante a ser considerado na realização de um projeto é o de sequenciar as atividades. Segundo o PMI (2013, p. 153), “sequenciar atividades é o processo de identificação e documentação dos relacionamentos entre as atividades do projeto. O principal benefício deste processo é definir a sequência lógica do trabalho a fim de obter o mais alto nível de eficiência em face de todas as restrições do projeto”. Deste modo, com as atividades previamente definidas, é possível elaborar um diagrama de precedência, que identifica a ordem

adequada das atividades que devem ser realizadas. Para melhor definição deste método, duas técnicas foram desenvolvidas com o objetivo de auxiliar no planejamento, programação e controle das atividades de modo mais eficiente. PERT (*Program Evaluation and Review Technique* – Técnica de revisão e Avaliação de Programas) e CPM (*Critical Path Method* – Método do Caminho Crítico) são usadas para gerenciar as informações advindas de tempo, custos e recursos, onde cada atividade (exceto o início e fim) é conectada pelo menos a um predecessor e a um sucessor. A construção de um diagrama de rede de cronograma do projeto (PERT) utiliza nós, representados em diagramas como quadrados, círculos ou retângulos para simbolizar as atividades e flechas que são usadas para conectar as atividades de acordo com a relação lógica que existe entre elas. Como mostrado na Figura 1, as atividades são representadas pelas letras dentro dos retângulos e as relações lógicas entre elas são determinadas pelo sentido das setas que ligam as atividades.

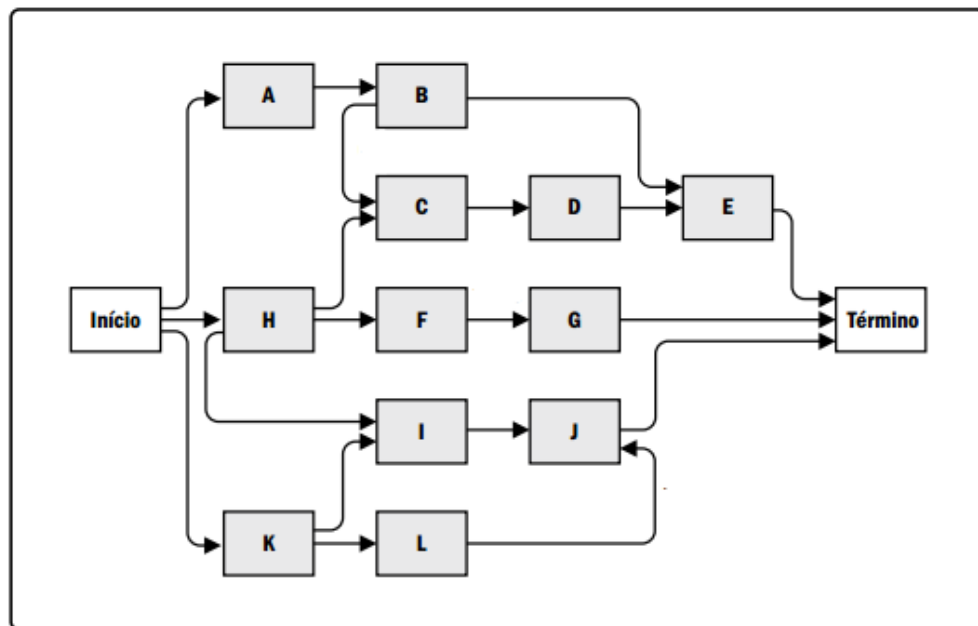


Figura 1 – Relação de precedência
 Fonte: PMI (2013, P. 6)

Desenhada a rede PERT do projeto, é necessário calcular as datas de ocorrência dos eventos finais e iniciais, e a partir delas, identificar as atividades consideradas críticas e não críticas. As atividades críticas são atividades que não possuem folga de tempo, e caso haja atraso em sua realização, o projeto todo também irá sofrer atraso. Por outro lado, as atividades não críticas possuem folga de tempo, e são admissíveis certos de intervalos de atraso sem que o projeto inteiro atrase (ANDRADE, 2004, p.150).

Assim, para cada atividade da rede PERT, define-se duas datas distintas para a ocorrência do seu início: data mais cedo possível para iniciar a atividade e a data mais tarde

possível considerando que não haja atrasos futuros. Assim como acontece para iniciar a atividade, também se considera duas datas para finalizar uma atividade, sendo elas a data mais cedo para finalizar caso haja possibilidade de antecipação da execução da atividade e a data mais tarde de término.

Além disso, existem ainda os custos que envolvem as atividades do projeto. É de suma importância no processo de planejamento e programação de projetos, que o gerente do projeto se preocupe com o orçamento dos custos do projeto como um todo, custos individuais de cada atividade, bem como as necessidades de alocação de recursos. Com todas essas etapas realizadas, torna-se mais fácil a avaliação para o uso de recursos, como o cálculo das necessidades de recursos em cada intervalo de tempo, confronto das necessidades com a disponibilidade de recursos por intervalo de tempo e nivelamento dos recursos para evitar altos índices de utilização e não ultrapassar a disponibilidade máxima (ANDRADE, 2004, p. 160).

Artigues *et al.* (2008) definem um problema de sequenciamento de projeto com restrição de recurso como o conjunto de recursos com capacidade limitada, atividades com duração conhecida e quantidade exigida de recursos, conectados com relações de precedências. Em suma, o problema consiste em encontrar uma sequência gastando a menor duração possível e respeitando a relação de precedência e disponibilidade de recursos.

3.2 Fluxo de caixa

Gitman (1997, p.79) considera o fluxo de caixa como uma preocupação básica para qualquer empresa, uma vez que é de grande relevância na gestão das finanças do dia-a-dia, no planejamento e na tomada de decisões estratégicas voltada para a criação de valor para o acionista. Assim, pode-se definir como fatores mais importantes, a depreciação, os fluxos de caixa operacional e livre. Parte do custo de aquisição de ativos permanentes da empresa é chamado depreciação, isto é, um ativo é depreciado durante certo prazo e este valor é considerado seu valor de depreciação.

Os fluxos de caixa operacionais são aqueles que uma organização é capaz de gerar produção e venda de bens ou serviços em suas atividades operacionais regulares, enquanto os fluxos de caixa livre representam o volume de fluxo de caixa disponível para os investidores (GITMAN, 1997).

Existe ainda a diferença do valor do dinheiro no tempo, pois devido a existência de juros, o valor do dinheiro no presente vale mais ou menos que o valor do dinheiro de amanhã, através da ocorrência de juros a serem creditados ou debitados. Assim, pode-se utilizar uma

linha de tempo para representar os fluxos de caixa de um investimento através de uma linha horizontal, simbolizando o zero na extremidade esquerda, e os períodos futuros crescentes simbolizados por marcos da esquerda para direita. Deste modo, uma linha abrangendo cinco períodos é representado pela Figura 2. No fim do primeiro período existe uma seta apontando para baixo que significa um valor de saída de caixa, negativo, enquanto as setas na direção para cima representam entrada no caixa, valores positivos no fim de cada período seguinte.

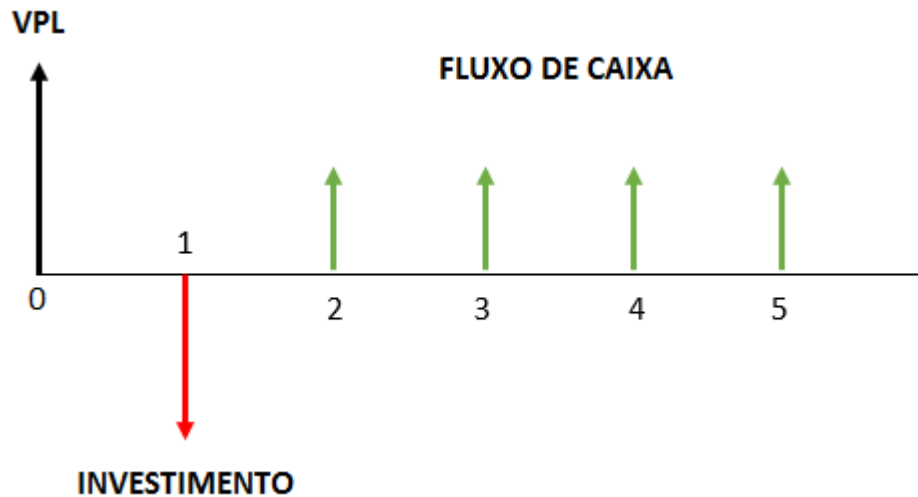


Figura 2 – Diagrama de fluxo de caixa
Fonte: Elaborado pelo autor

Além das setas representadas pelo fluxo de caixa positivo e negativo, como explicado anteriormente, o dinheiro possui valor diferenciado com o passar do tempo, os períodos devem ser medidos na mesma data para base de comparação. “A técnica do valor futuro emprega o processo de composição para determinar o valor futuro de cada fluxo de caixa no final do prazo do investimento e, em seguida, adiciona esses valores para determinar o valor futuro do investimento” (GITMAN, 1997, p.130).

Segundo Luenberger (1998), um investimento é definido de acordo com o resultado de uma sequência de fluxo de caixa, ou seja, a quantidade de dinheiro que é gasta e recebida por um investidor durante certo período de tempo, geralmente com durações previamente já definidas, como no final de cada trimestre ou no final de cada ano.

O problema de ajuste de fluxo de caixa (*cash matching problem*) é definido pelo autor como o encontro de uma série de obrigações a serem pagas em um futuro conhecido e um investimento a ser realizado, ou seja, deseja-se investir agora para que os pagamentos futuros coincidam com o retorno do investimento realizado. Realizando a formulação desse problema, temos conjuntos, variáveis, parâmetros, função objetivo e restrições definidas como:

Conjuntos:

- J : Conjunto de títulos disponíveis indexadas em j
 I : Conjunto de períodos indexados em i

Parâmetros:

- p_j : Preço dos títulos j disponíveis para investimento
 c_{ij} : Retorno dos investimentos j no período i
 y_i : Valor das obrigações que deverão ser cumpridas no período i

Variáveis:

- x_j : Quantidade de títulos j adquiridos

Modelo:

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^m p_j x_j \quad (1)$$

Sujeito à:

$$\sum_{j=1}^m c_{ij} x_j \geq y_i \quad \forall i \in I \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (3)$$

A função objetivo deseja minimizar o custo total da carteira, de modo que seja possível pagar as futuras obrigações. A restrição (2) garante que o pagamento vai ser realizado no período i uma vez que o montante investido ($c_{ij}x_j$) é maior ou igual que a obrigação a ser paga. A restrição (3) fornece o domínio das variáveis.

3.3 Integração do sequenciamento de projetos e do ajuste de fluxo de caixa

De acordo com Liu e Wang (2008), problemas de sequenciamento de projetos com limitação de recursos são comumente encontrados no mercado de construção civil. Embora muitas técnicas já existam para a resolução de fluxo de caixa envolvendo o sequenciamento de projetos, a questão de utilização de recursos não é amplamente discutida e ainda faltam estudos para solucionar esse problema. Sendo assim, os autores propõem um modelo matemático que visa maximizar o lucro líquido de um projeto de construção levando em conta a restrição de recursos a serem utilizados. A formulação do modelo pode ser observada abaixo:

Conjuntos:

- A : Conjunto de pares de atividades com relação de precedência
- D_i : Conjunto das possíveis durações das atividades i
- SE_k : Conjunto de atividades em processo no dia k
- R : Conjunto de recursos tipo r
- n : Conjunto do número total de combinações de recursos
- T : Duração do projeto

Parâmetros:

- S_i : Data de início da atividade i
- d_i : Duração da atividade i
- R_{d_i} : Total de recursos diários r para executar a atividade i
- RL_r : Quantidade disponível do recurso r por dia
- Pa_i : Pagamento diário da atividade i
- m : Número de dias por período
- $C_{d,r}$: Custo diário da atividade i usando o recurso r
- E_t : Despesas totais no período t
- O_t : Despesas operacionais no período t
- I_t : Encargos de juros ao fim do período t
- W : Taxa de juros
- CL : Limite de crédito
- L : Último período do projeto

Variáveis:

- r : Combinação de recursos usados para realizar atividade i
- PA_k : Pagamento total do dia k
- P_t : Pagamento total ao final do período t
- DC_k : Custo direto total no dia k

- N_t : Fluxo de caixa líquido ao fim do período t
 F_t : Fluxo de caixa acumulado ao fim do período t

Modelo:

$$\text{Maximizar} \quad Z(x) = N_L \quad (4)$$

Sujeito à:

$$S_j - S_i \geq d_i \quad \forall (i, j) \in A; \forall d_i \in D_i \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{SE_k} R d_i \leq RL_r \quad \forall i \in SE_k \quad (6)$$

$$PA_k = \sum_{i=1}^{SE_k} PA_i \quad \forall i \in SE_k; \forall k \quad (7)$$

$$P_t = \sum_{k=1}^m PA_k \quad (8)$$

$$DC_k = \sum_{i=1}^{SE_k} C_{d_i r} \quad \forall i \in SE_k \quad (9)$$

$$E_t = \sum_{k=1}^m DC_k + O_t + I_t \quad (10)$$

$$I_t = (R \times N_{t-1}) + \frac{R}{2} \left(\sum_{k=1}^m DC_k + O_t \right) \quad t \geq 1; \forall k \quad (11)$$

$$F_t = N_{t-1} + E_t \quad (12)$$

$$N_{t-1} = F_{t-1} + P_{t-1} \quad (13)$$

$$|F_t| \leq |CL| \quad \forall t \quad (14)$$

A equação (4) representa a função objetivo do problema, que é a maximização do fluxo de caixa líquido no último período do projeto. A restrição (5) obedece a relação de precedência, ou seja, garante que todas as atividades j devem ser realizadas após concluir as atividades i , sem ultrapassar a duração de cada atividade i . A restrição (6) garante que os recursos alocados por dia para realização das atividades com duração d_i não ultrapassem a quantidade de recursos disponíveis r durante todo o projeto. A equação (7) mostra o total diário do fluxo de caixa que entra no dia k . A equação (8) calcula o total do fluxo de caixa até o final do período t (que tem m dias). A restrição (9) representa o custo direto total no dia k , que é a soma dos custos individuais das atividades i combinadas com os recursos. A restrição (10) representa todas as despesas gerais, que é a soma dos custos diretos dos dias k , despesas operacionais e encargos de juros. (11) mostra como os encargos de juros são calculados, através da soma do fluxo de caixa do período anterior multiplicado pela taxa de juros e a soma dos custos diretos diários e

despesas operacionais multiplicados por metade da taxa de juros. Restrição (12) mostra que a soma do fluxo de caixa anterior e das despesas totais é o fluxo de caixa acumulado. A restrição (13) representa o fluxo de caixa líquido do período anterior, que é a soma do fluxo de caixa anterior e o pagamento total anterior. E a restrição (14) impede que o fluxo de caixa acumulado ultrapasse o limite de crédito definido no projeto.

De maneira análoga, a autora Pereira (2014) formula em seu trabalho de conclusão de curso, um modelo que se assemelha com os objetivos propostos pelo modelo de Liu e Wang (2008).

Conjuntos:

- R : Conjunto de recursos renováveis indexados em r
- J : Conjunto de atividades indexados em j
- N : Conjunto de recursos não renováveis indexados em n
- T : Conjunto de períodos (horizonte de planejamento) indexados em t
- M : Conjunto de títulos indexados em m
- V_j : Conjunto de todos antecessores imediatos das atividades j

Parâmetros:

- ES_j : Data mais cedo de início da atividade j
- LF_j : Data mais tarde da atividade j
- d_j : Tempo necessário para realizar a atividade j
- k_{jn}^v : Total de recursos não renováveis n necessário para executar a atividade j
- k_{jr}^p : Quantidade necessário do recurso renovável r para realizar a atividade j , por unidade de tempo
- k_{rt}^p : Disponibilidade de recurso renovável r no tempo t
- k_{nt}^v : Custo da obtenção do recurso não renovável n no tempo t
- FD_t : $\frac{1}{(1+i)^t}$ (Fator de desconto no tempo t)
- V : Valor recebido ao final do projeto
- i : Taxa de juros
- AF : Última atividade a ser realizada
- p_m : Preço dos títulos m disponíveis
- c_{mt} : Retorno dos títulos m no período t

Variáveis:

- S_t : Variável que indica a sobra de recursos não renováveis no tempo t
- x_{jt} : Variável que indica o término da atividade j no tempo t
- y_m : Variável que indica a quantidade de títulos a ser realizado na carteira

Modelo:

$$\text{Maximizar VPL} = \sum_t^T \text{VFD}_t x_{AFt} - \sum_{m=1}^M p_m y_m + \sum_{t=ES_j+d_j}^{LF_j} \sum_j^J S_t \text{FD}_t \quad (15)$$

Sujeito à:

$$\sum_{t=ES_j+d_j}^{LF_j} x_{jt} = 1 \quad \forall j \in J \quad (16)$$

$$\sum_{t=ES_j+d_j}^{LF_j} t x_{jt} \leq \sum_{t=ES_j+d_j}^{LF_j} (t - d_j) x_{jt} \quad \forall j \in V_j; \forall j \in J \quad (17)$$

$$\sum_j^J k_{jr}^p \sum_{q=t}^{t+d_j-1} x_{jt} \leq k_{rt}^p \quad \forall r; \forall t \quad (18)$$

$$S_t = k_{nt}^v - \sum_j^J k_{jn}^v \sum_{t=ES_j+d_j}^{LF_j} x_{jt} \quad \forall n; \forall t \quad (19)$$

$$\sum_{m=1}^M c_{tm} y_m \geq k_{nt}^v \quad \forall n; \forall t \quad (20)$$

$$x_{jt} \in \{0,1\} \quad \forall j; \forall t \quad (21)$$

$$S_t \geq 0 \quad \forall t \quad (22)$$

$$y_m \geq 0 \quad \forall m \quad (23)$$

A equação (15) mostra a função objetivo do problema, que é a maximização do VPL (Valor Presente Líquido), cuja definição do VPL é o ganho projetado somado ao valor de estoque menos o custo de investimento. Sendo assim, fornece o lucro real do projeto. A restrição (16) garante que todas as atividades devem ser realizadas. A restrição (17) garante que as precedências das atividades sejam cumpridas, ou seja, só se pode iniciar a atividade j se o intervalo de tempo entre o início da atividade j e tempo de término da predecessora j' for maior que zero. A restrição (18) garante que não seja ultrapassada a quantidade de recursos renováveis que estão disponíveis em determinado tempo t . Já a restrição (19) fornece a sobra de recursos não renováveis que não foram utilizados para realizar a tarefa no tempo t , neste caso esse recurso é financeiro. Na restrição (20), temos a garantia que a quantidade de investimento a ser captado seja maior que a quantidade necessária para realizar o projeto. Já as últimas restrições (21), (22) e (23) limitam o domínio das variáveis em análise.

Para comparação entre os dois modelos, considera-se as semelhanças e diferenças na função objetivo, nas restrições e parâmetros. Ambos modelos são caracterizados pelo mesmo objetivo de maximizar o valor presente líquido. Em relação as restrições, é possível realizar a

comparação através do modo como as variáveis são usadas no modelo. No modelo de Liu e Wang (2008), existe um limite de crédito máximo definido para impedir que o fluxo de caixa ultrapasse determinado valor, enquanto a restrição que é definida no segundo modelo garante que a quantidade de recursos gerada pelo investimento realizado seja suficiente para realizar o projeto, ou seja, há uma diferença básica e essencial na origem da captação de recursos. Enquanto os recursos do modelo de Liu e Wang (2008) provém da completude de atividades, o modelo de Pereira (2014) é obtido através do retorno dos investimentos.

Além disso, diferentemente do modelo de Pereira (2014), o primeiro modelo define uma quantidade maior de parâmetros relacionados ao fluxo de caixa, como montantes que determinam um fluxo de caixa positivo (representado pelo recebimento de capital do projeto) e parâmetros que decrescem o fluxo de caixa, como custos diretos, custos de atividades, despesas totais e operacionais e encargos de juros. Por outro lado, no segundo modelo pode-se perceber a utilização de uma variável que indica a sobra de recursos utilizados no modelo, que também faz parte da função objetivo como capital que contribui para aumentar o valor presente líquido.

No modelo de Liu e Wang (2008), o fluxo de caixa é considerado cumulativo (assumindo a possibilidade de ter valores negativos) durante todos os períodos de tempo de execução, enquanto Pereira (2014) define que investimentos podem ser resgatados ao longo do tempo. A Tabela 1 resume as informações comparativas de ambos modelos.

3.4 Relaxação Linear

Segundo Wolsey (1998), a definição de relaxação de programação linear para um modelo consiste em relaxar as condições de integralidade das variáveis de decisão. A solução encontrada para o problema de programação inteira pode ser viável, porém não necessariamente é ótima. Deste modo, modelos que objetivam alcançar a maximização terão valores para função objetivo maiores, ou pelo menos iguais, aos valores do modelo original inteiro. Contrariamente, os modelos de minimização obterão resultados para função objetivo menores, ou pelo menos iguais, aos valores do modelo inteiro. Na maioria dos casos, a relaxação irá prover maiores valores para os limites de solução se compararmos à solução do modelo de programação inteiro.

Tabela 1 – Comparação de modelos

		Modelo Liu e Wang (2008)	Modelo Pereira (2014)
Função Objetivo		Maximizar o VPL.	Maximizar o VPL subtraindo o preço pago pelas opções de investimentos e somando a sobra de recursos (valor de estoque).
Restrições	Atividades	Considera duração de atividades e relação de precedência entre elas.	Considera número de atividades, exige que todas atividades sejam realizadas e obedeçam a relação de precedência.
	Recursos	Origem de recursos provenientes de pagamento por atividades completas.	Estabelece dois tipos de recursos: renováveis e não renováveis. Origem dos não renováveis provém do retorno dos investimentos
	Fluxo de caixa	Considera montantes que entram e saem no fluxo de caixa, como o recebimento de pagamento das atividades e custos diretos, despesas gerais.	Considera investimento em títulos, a quantidade e o preço a ser pago por eles. Deve ser maior que o custo de execução do projeto.
	Tempo	Recursos não necessariamente obedecem a relação por dia	Tratamento do tempo em dias
	Montante máximo	Autor define limite de crédito máximo para que não seja ultrapassado.	Considera que o retorno dos investimentos deve ser capaz de pagar o projeto.
Decisão		Fluxo de caixa acumulado	Valor presente líquido
Fluxo de caixa		Fluxo de caixa pode ser negativo	Investimentos podem ser resgatados em determinado prazo

Fonte: Elaborado pelo autor

3.5 Relaxação Lagrangeana

De acordo com Fisher (1981), a técnica denominada relaxação lagrangeana consiste em remover algumas das restrições da formulação original de um problema de otimização, com a introdução das mesmas na função objetivo, de modo que possa penalizar a função objetivo quando as restrições removidas forem violadas. Assim, na função objetivo é definido um novo coeficiente chamado multiplicador lagrangeano que tem como objetivo, controlar o peso dessas penalidades.

4 PROBLEMA PROPOSTO

O trabalho prossegue com a elaboração de um novo modelo incorporando e aperfeiçoando os modelos propostos pelos dois autores mencionados na revisão bibliográfica. Sendo assim, optou-se por usar as melhores características de cada modelo para criar um novo que fosse mais completo, contemplando os seguintes pontos:

- Completude de atividades. Um conjunto de atividades remuneradas foi criado para que ao fim da atividade, a mesma possa oferecer retorno quando é finalizada;
- Implemento de possibilidade de empréstimo. Caso o modelo necessite, é possível adquirir valores financeiros que auxiliem a viabilidade do projeto. Conseqüentemente, adquirindo qualquer valor de empréstimo, uma dívida é criada e a mesma pode ser amortizada nos períodos seguintes;
- Diferenciação das taxas de juros. Assim como os juros de empréstimo da dívida incorrem no horizonte do tempo, foi criada outra taxa de juros para render positivamente o valor financeiro disponível;
- A função objetivo considera o valor da sobra de recursos do último período trazido para o presente, ou seja, durante a execução do projeto a sobra é cumulativa e atualizada para cada período de tempo.

Assim, similarmente ao que foi feito no capítulo de revisão de literatura, dentre as características de ambos modelos da revisão e as características do modelo proposto pelo autor, a Tabela 2 mostra o comparativo entre a função objetivo, as principais restrições que delimitam o problema.

Os conjuntos, parâmetros, variáveis, restrições e objetivos podem ser vistos a seguir:

Conjuntos:

- | | | |
|-------|---|---|
| J | : | Conjunto de atividades |
| R | : | Conjunto de recursos renováveis |
| T | : | Conjunto de períodos |
| M | : | Conjunto de títulos |
| J_a | : | Conjunto de todos antecessores das atividades j |
| J_b | : | Conjunto de todas atividades remuneradas |

Tabela 2 – Comparação dos modelos com proposto

		Modelo Liu e Wang (2008)	Modelo Pereira (2014)	Modelo Proposto
Função Objetivo		Maximizar o VPL.	Maximizar o VPL subtraindo o custo de investimentos e somando a sobra de recursos (valor de estoque).	Maximizar o VPL descontando o custo de investimentos.
Restrições	Atividades	Considera duração de atividades e relação de precedência entre elas.	Considera número de atividades, exige que todas atividades sejam realizadas e obedeçam a relação de precedência.	Considera relação de precedência entre as atividades.
	Recursos	Origem de recursos provenientes de pagamento por atividades completas.	Estabelece dois tipos de recursos: renováveis e não renováveis. Origem dos não renováveis provém do retorno dos investimentos	Origem de recursos provém de retorno de atividades e de investimentos, além de empréstimos.
	Fluxo de caixa	Considera montantes que entram e saem no fluxo de caixa, como o recebimento de pagamento das atividades e custos diretos, despesas gerais.	Considera investimento em títulos, a quantidade e o preço a ser pago por eles. Deve ser maior que o custo de execução do projeto.	Considera a sobra atualizada em cada período, contabilizando retorno de atividades e investimentos, dívida, empréstimo, recursos utilizados e disponíveis.
	Tempo	Recursos não necessariamente obedecem a relação por dia	Tratamento do tempo em dias	Tempo é tratado em períodos.
	Montante máximo	Autor define limite de crédito máximo para que não seja ultrapassado.	Considera que o retorno dos investimentos deve ser capaz de pagar o projeto.	Existe um limite de crédito de empréstimo máximo a ser adquirido.
Decisão		Fluxo de caixa acumulado.	Valor presente líquido.	Fluxo de caixa acumulado.
Fluxo de caixa		Fluxo de caixa pode ser negativo.	Investimentos podem ser resgatados em determinado prazo.	Fluxo de caixa pode assumir valores negativos.

Fonte: Elaborado pelo autor

Parâmetros:

- ES_j : Data mais cedo de início da atividade j
 LF_j : Data mais tarde de fim da atividade j
 d_j : Tempo necessário para realizar a atividade j
 k_j^f : Montante de recurso financeiro necessário para executar a atividade j
 k_{jr}^p : Quantidade necessário do recurso renovável r para realizar a atividade j

- k_r^p : Disponibilidade de recurso renovável r no tempo t
 V_j : Retorno da atividade j
 FD_t : $\frac{1}{(1+i)^t}$ (Fator de desconto no tempo t)
 i_e : Taxa de juros de empréstimo
 i_a : Custo do capital
 p_m : Preço dos títulos m
 c_{mt} : Retorno dos títulos m no período t
 t_{\max} : Último período
 I_0 : Investimento inicial
 E_{\max} : Limite de crédito para empréstimos

Variáveis:

- S_t : Variável que indica a sobra de recursos não renováveis no tempo t
 x_{jt} : Variável binária que indica o término da atividade j no tempo t
 y_m : Variável inteira que indica a quantidade de títulos a ser adquirida
 E_t : Variável que indica a quantidade de empréstimos no tempo t
 A_t : Variável que indica a quantidade financeira amortizada no tempo t
 D_t : Variável que indica a dívida no tempo t
 K_t : Variável que indica o montante no tempo t

Modelo:

$$\text{Maximizar } VPL = S_{t_{\max}} FD_{t_{\max}} - \sum_{m=1}^M p_m y_m \quad (24)$$

Sujeito à:

$$\sum_{t=ES_j+d_j-1}^{LF_j} x_{jt} = 1 \quad \forall j \in J \quad (25)$$

$$\sum_{t=ES_j+d_j-1}^{LF_j} t x_{jt} + 1 \leq \sum_{t=ES_j+d_j-1}^{LF_j} (t - d_j + 1) x_{jt} \quad \forall j \in J_a; \forall j \in J \quad (26)$$

$$\sum_j k_{jr}^p \sum_{q=t}^{t+d_j-1} x_{jq} \leq k_r^p \quad \forall r \in R; \forall t \in T \quad (27)$$

$$S_t = E_t + K_t - \sum_j k_j^f \sum_{q=t}^{t+d_j-1} x_{jq} + \sum_j V_j x_{jt} \quad \forall t \in T : t=1 \quad (28)$$

$$S_t = S_{t-1} \times (1 + i_a) + E_t + K_t - A_t - \sum_j k_j^f \sum_{q=t}^{t+d_j-1} x_{jq} + \sum_j V_j x_{jt} \quad \forall t \in T : t > 1 \quad (29)$$

$$\sum_m^M c_{tm} y_m = K_t \quad \forall t \in T \quad (30)$$

$$\sum_m^M p_m y_m \leq I_0 \quad (31)$$

$$\sum_t^T E_t \leq E_{\max} \quad (32)$$

$$D_t = D_{t-1} \times (1 + i_e) - A_t + E_t \quad \forall t \in T : t > 1 \quad (33)$$

$$A_t \leq D_{t-1} \times (1 + i_e) \quad \forall t \in T : t > 1 \quad (34)$$

$$D_1 = E_1 \quad \forall t \in T : t = 1 \quad (35)$$

$$D_{t_{\max}} = 0 \quad \forall t \in T \quad (36)$$

$$x_{jt} \in \{0,1\} \quad \forall j \in J; \forall t \in \{ES[j], LF[j]\} \quad (37)$$

$$S_t \geq 0 \quad \forall t \in T \quad (38)$$

$$y_m \in N \quad \forall m \in M \quad (39)$$

$$E_t \geq 0 \quad \forall t \in T \quad (40)$$

$$A_t \geq 0 \quad \forall t \in T : t > 1 \quad (41)$$

$$D_t \geq 0 \quad \forall t \in T \quad (42)$$

$$K_t \geq 0 \quad \forall t \in T \quad (43)$$

A função objetivo do modelo é descrita na equação (24), que é a maximização do valor presente líquido definido como a sobra de recursos do último período trazido para o presente menos o custo de investimento em títulos disponíveis no mercado. A restrição (25) garante que todas as atividades do conjunto J sejam realizadas durante o período de tempo definido. A restrição (26) cumpre a regra de precedência, ou seja, as atividades sucessoras só serão realizadas a partir do período em que as atividades predecessoras terminarem. A restrição (27) garante que a quantidade de recursos disponíveis em cada período de tempo não seja ultrapassada pela quantidade necessária de recursos para realizar cada atividade. A restrição (28) calcula a sobra específica para o primeiro período, que é definida pela soma das quantidades de empréstimo, montante e retorno das atividades remuneradas subtraída pela quantidade de recursos financeiros utilizados no primeiro período. Similarmente, a restrição (29) calcula a sobra para os demais períodos de tempo, adicionando ao cálculo, a sobra do período anterior multiplicada pelos juros correntes de retorno e subtraída pela quantidade financeira que foi amortizada. A restrição (30) garante que a quantidade dos investimentos em títulos seja igual ao montante financeiro necessário. A restrição (31) estabelece que a compra dos títulos de investimento não ultrapasse o limite inicial I_0 . A restrição (32) garante que a soma

do valor dos empréstimos adquiridos durante os períodos de tempo não ultrapasse o limite total de crédito do empréstimo. A restrição (33) calcula o valor da dívida a partir do primeiro período. A restrição (34) garante que a quitação da dívida não seja um valor maior que a própria dívida. A restrição (35) estabelece que o valor da dívida no primeiro período seja igual ao valor do empréstimo adquirido no mesmo período. A restrição (36) garante que o projeto termine com a dívida zerada. As restrições (37), (38), (39), (40), (41), (42) e (43) limitam o domínio das variáveis em análise.

Com o intuito de exemplificar a funcionalidade do modelo foi criado um conjunto de atividades fictícias que demonstrassem como o modelo comporta e como calcula os valores das variáveis e da função objetivo. Os valores detalhados na Figura 3 são os dados relacionados aos parâmetros para as atividades. Neste caso, observa-se a relação de atividades predecessoras, a duração de cada atividade, a quantidade de recurso financeiro necessária para realizar cada atividade, a quantidade de cada tipo de recurso renovável (1 e 2) necessária e o retorno que cada atividade possui ao ser finalizada.

Atividades - J	Predecessoras, J_a	Duração, d_i	Recursos Financeiro, k_f	Recursos Renováveis, k_p		Retorno, V_j
				1	2	
A		2	5	1	2	7
B	A	1	2	1	2	
C	A	3	4	1	1	5
D	B	2	5	2	1	6
E	C D	3	6	2	3	8

Figura 3 – Dados para conjunto de atividades

Fonte: Elaborado pelo autor

Além disso, a Figura 4 mostra a disponibilidade de recursos renováveis em função do tempo, ou seja, apresenta a quantidade disponível dos dois recursos renováveis (1 e 2) durante os 10 períodos de tempo.

Recursos	Disponibilidade de recursos renováveis no tempo									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6
2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	5

Figura 4 – Disponibilidade de recursos renováveis no tempo

Fonte: Elaborado pelo autor

Em relação aos títulos, a Figura 5 representa o retorno que é gerado em cada um dos 10 períodos de tempo por cada título de investimento (1, 2 e 3), além do preço que deve ser pago ao adquirir cada unidade dos títulos disponíveis.

Retorno dos títulos no tempo			
	1	2	3
1	6	8	7
2	6	8	7
3	6	8	7
4	7	9	8
5	7	9	8
6	7	9	8
7	7	9	8
8	8	10	9
9	8	10	9
10	8	10	9

Títulos			
	1	2	3
Preço	46	51	48

Figura 5 – Retorno e preço dos títulos
Fonte: Elaborado pelo autor

Por fim, os valores dos dados para o restante dos parâmetros do modelo apresentado foram definidos pelo autor no exemplo como:

- Investimento inicial, $I_0 = 60$
- Limite de crédito para empréstimos, $E_{\max} = 100$
- Taxa de juros de empréstimo, $i_e = 2\%$
- Custo do capital, $i_a = 1\%$

Após isso, obtém-se através da relação de precedência entre as atividades, uma sequência de atividades que deve ser respeitada, ou seja, só é possível realizar a atividade seguinte caso a antecessora tenha sido finalizada. O esboço representado pela Figura 6 trata da relação entre as atividades.

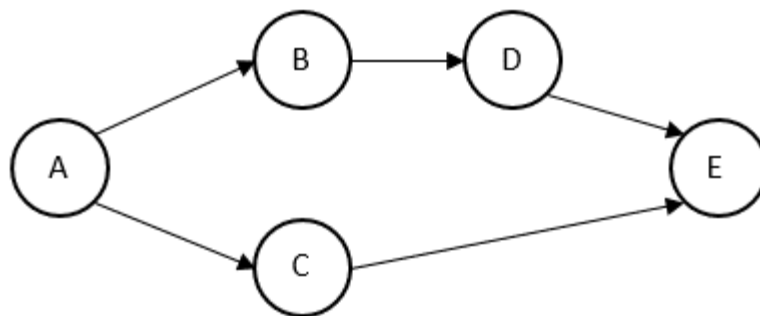


Figura 6 – Diagrama de atividades
Fonte: Elaborado pelo autor

Deste modo, executando o modelo é possível saber quando as atividades terão seu início e fim, de acordo com a duração de cada atividade. Os resultados gerados no modelo são apresentados na Figura 7.

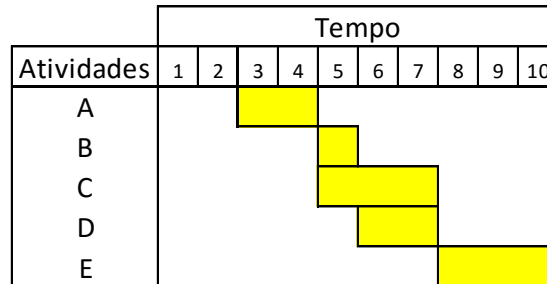


Figura 7 – Tempo gasto por atividade
Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, o modelo decide em qual período deve começar cada atividade para que o problema obtenha uma solução ótima. Os resultados do modelo definem também a quantidade y de títulos a ser adquirida como mostra a Tabela 3. O modelo ao realizar a otimização escolhe uma unidade do título 2 a ser comprado pelo preço estabelecido de 51.

Tabela 3 – Resultados da quantidade de títulos

Títulos	y
1	0
2	1
3	0

Fonte: Elaborado pelo autor

Além disso, calcula em todos os períodos de tempo, a sobra de recursos, os valores de empréstimo, amortização, dívida corrente e o valor da variável K como pode ser visualizado na Tabela 4.

Tabela 4 – Resultados dos valores das variáveis

Tempo	Sobra	E	A	D	K
1	8	0	.	0	8
2	16.08	0	0	0	8
3	19.241	0	0	0	8
4	30.433	0	0	0	9
5	33.738	0	0	0	9
6	34.075	0	0	0	9
7	45.416	0	0	0	9
8	49.87	0	0	0	10
9	54.369	0	0	0	10
10	66.912	0	0	0	10

Fonte: Elaborado pelo autor

Assim, pode-se concluir que o resultado da função objetivo gerado pelo modelo (VPL = 9.5745), pode ser encontrado facilmente realizando o seguinte cálculo:

$$VPL = S_{t_{\max}} FD_{t_{\max}} - \sum_{m=1}^M p_m y_m = \frac{66.912}{(1 + 0.01)^{10}} - 51 \times 1 = 9.5745$$

5 RESULTADOS

Para continuar o desenvolvimento deste trabalho, propôs-se a execução do modelo apresentado em 4 diferentes instâncias, tendo como variações mais significativas o aumento do tamanho nos dados do problema. Sendo assim, a primeira instância foi definida como de menor tamanho, enquanto a quarta instância obteve os maiores valores nos dados fornecidos para realizar a otimização do modelo. O intuito da diferença dos tamanhos é para obter maior custo computacional para a solução do problema, buscando a maior semelhança com a diversidade dos problemas práticos que ocorrem em situações na vida real. Os dados gerados em todas as instâncias foram criados de forma completamente aleatória pelo autor, tomando o devido cuidado para que alguns valores essenciais para execução do modelo se enquadrassem dentro dos limites das restrições definidas, ocasionando sempre a viabilidade da solução para o problema.

A Tabela 5 resume as diferenças de tamanho em todas as instâncias.

Tabela 5 – Tamanho das instâncias

	Períodos	Atividades	Recursos	Títulos
Instância 1	30	10	2	5
Instância 2	60	20	3	10
Instância 3	120	40	4	20
Instância 4	200	80	5	30

Fonte: Elaborado pelo autor

Sendo assim, o autor propôs somente alterações nos tamanhos dos conjuntos de índices indicados acima. Ao realizar o aumento do tamanho nas instâncias, os parâmetros não tiveram seus valores modificados, apenas adicionados à medida que a instância aumentava.

De acordo com o guia proposto por Fourer, Gay e Kernighan (2002), o modelo foi escrito em AMPL (*A Mathematical Programming Language*) seguindo os passos para construção de um modelo matemático de otimização.

Além disso, IBM (2014) define que o *software* de otimização *CPLEX* resolve o problema proposto através do método de *branch and bound* com pré-processamento e cortes de *Gomory*. Para a realização deste trabalho, o *software* escolhido foi o *CPLEX* na versão *11.1.1*, que basicamente faz a leitura dos dados, realiza iterações até encontrar a solução ótima e, em

seguida, apresenta os resultados em um documento do bloco de notas. Os testes foram realizados em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i7-3630-QM com velocidade CPU 2.40GHz, memória de 7.89 GB de RAM e 750 GB de HD com sistema operacional Windows 10 Home versão 1511.

Com todos os valores dos dados fornecidos, o modelo foi executado para cada instância e apresentou os resultados da função objetivo, assim como o tempo gasto para resolver cada problema. Os valores da função objetivo são apresentados na coluna VPL e o tempo é dado em segundos, como segue na Tabela 6.

Tabela 6 – Resultados do modelo

	VPL	Tempo (seg)
Instância 1	-105.190	0.34375
Instância 2	114.750	0.35938
Instância 3	487.741	23.7656
Instância 4	932.206	1994.780

Fonte: Elaborado pelo autor

Como pode ser observado acima, coincidentemente, os valores da função objetivo aumentam de acordo com o tamanho dos dados do modelo. Afirma-se ser coincidência, pois não há relação de clara dependência entre o aumento do tamanho nos dados e o resultado da solução ótima. Uma explicação plausível para tal fato seria que, além de existir um conjunto com maior número de atividades remuneradas, o modelo possui mais opções de escolha de valores para as variáveis, realizando maior número de iterações para encontrar a solução ótima. Porém, diferentemente do resultado da função objetivo, é esperado que o tempo gasto para otimizar o problema seja crescente à medida que se aumenta a dimensão dos dados, e por isso, o tempo para executar a instância 4 tende a ser muito maior que as restantes uma vez que possui os maiores valores.

Após a obtenção dos valores de cada instância, foram realizadas uma bateria de 5 testes. No primeiro teste, optou-se por realizar a relaxação linear das variáveis x e y do problema. No segundo teste, somente a variável x foi relaxada e no terceiro, o mesmo ocorreu para a variável y . O teste 4 foi realizado com as variáveis x e y inteiras, como proposto pelo modelo inicial, com a retirada da restrição 3 (restrição da disponibilidade de recursos) no modelo. O último teste refere-se à criação de um novo conjunto de dados escolhidos pelo autor para resolução do

problema e será tratado separadamente dos demais testes. A Tabela 7 resume as definições dos testes realizados.

Tabela 7 – Definição dos testes

	Definição
Teste 1	Variáveis X e Y relaxadas
Teste 2	Variável X relaxada
Teste 3	Variável Y relaxada
Teste 4	Restrição 3 ausente

Fonte: Elaborado pelo autor

A partir disso, com a execução dos testes, os resultados da função objetivo e o tempo gasto foram obtidos para cada instância. Os valores para a função objetivo (Valor Presente Líquido) podem ser visualizados na Tabela 8.

Tabela 8 – Resultados dos testes nas instâncias

	Valor Presente Líquido				
	Original	Teste 1	Teste 2	Teste 3	Teste 4
Instância 1	-105.19	-89.45	-102.88	-92.22	-102.57
Instância 2	114.75	211.67	116.90	209.52	117.03
Instância 3	487.74	744.21	500.81	731.14	506.27
Instância 4	932.21	1339.64	942.65	1329.21	934.61

Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando os resultados gerados, assim como era esperado, todos os valores dos testes foram maximizados se comparados com o modelo original. Uma vez que ocorre a relaxação das variáveis ou diminuição nas restrições, o modelo encontrará uma solução melhor. Diferentemente do que o modelo propõe, isso pode ser explicado pelo fato de as variáveis assumirem valores que não sejam inteiros, o que facilita a busca por uma solução vizinha, obtendo limites maiores para encontrar a solução ótima. Problemas com variáveis de restrição inteira são geralmente muito mais difíceis de serem resolvidos, pois produzem soluções viáveis que nem sempre são ótimas, e que, contrariamente aos problemas relaxados linearmente, não são resolvidos em tempo polinomial.

Ademais, pode-se perceber que existe um padrão para os valores encontrados, com o teste 1 apresentando os maiores valores para o Valor Presente Líquido, ligeiramente maiores que os encontrados no teste 3. Os testes 2 e 4 alternam entre os maiores valores para cada instância.

No entanto, para melhor analisar os resultados encontrados em cada teste nas diferentes instâncias, o autor apresenta na Tabela 9, os valores para os *gaps* de otimalidade para o problema, ou seja, a diferença relativa de valores obtidos pelos testes se comparados com os valores do problema original. Significa dizer o quão longe os resultados estão do valor da solução ótima, sendo que quanto menor o valor do *gap*, melhor será a proximidade dos resultados dos testes com o modelo original.

Tabela 9 – Gaps de otimalidade

	GAP de Otimalidade			
	Teste 1	Teste 2	Teste 3	Teste 4
Instância 1	0.1497	0.0220	0.1233	0.0249
Instância 2	0.8446	0.0187	0.8258	0.0199
Instância 3	0.5258	0.0268	0.4990	0.0380
Instância 4	0.4371	0.0112	0.4259	0.0026

Fonte: Elaborado pelo autor

Neste caso, é perceptível que o teste 2 possui em três instâncias (1, 2 e 3), os menores valores para os *gaps*, sendo possível afirmar que é o teste que mais se aproxima da solução ótima para o modelo. Em segundo lugar está o teste 4, que apresenta valores bem aproximados ao teste 2, porém com *gaps* ainda maiores, exceto na instância 4, quando possui o menor valor de *gap* de otimalidade. O teste 3 ocupa o terceiro lugar, seguido do teste 1, que tem os maiores *gaps* e mais distantes valores em relação a solução ótima do problema.

Em relação ao tempo gasto executando os testes, a Tabela 10 apresenta os valores encontrados. Assim como acontece com os valores de VPL, os tempos encontrados são quase sempre menores que o do modelo original, pois os testes sempre tratam da relaxação linear para o problema.

Tabela 10 – Resultados em relação ao tempo gasto

	Tempo Gasto (seg)				
	Original	Teste 1	Teste 2	Teste 3	Teste 4
Instância 1	0.3438	0.2650	0.2969	0.3438	0.2969
Instância 2	0.3594	0.3125	0.3906	0.3750	0.3594
Instância 3	23.7656	0.7188	1.1563	15.7812	0.4844
Instância 4	1994.7800	2.1875	4.2031	1908.7800	1.1719

Fonte: Elaborado pelo autor

Visualizando a tabela, não é possível estabelecer um padrão comum de comportamento, pois as instâncias reagiram diferente em relação ao tempo que foi gasto nos testes. Mas, um fato a ser ressaltado é que o teste 3 é o que mais se assemelha em comparação com o modelo proposto.

Deste modo, percebe-se que com a relaxação linear do problema, o teste 1 é resolvido em um tempo bastante curto e é o que adquire maior valor na função objetivo e com maior valor de *gap* de otimalidade, ou seja, é o teste que mais se difere do modelo original. Isso pode ser explicado pelo fato de as duas variáveis assumirem concomitantemente valores que não sejam inteiros, e, portanto, a função objetivo possui o maior valor possível. A partir do momento que as variáveis são relaxadas de forma separada, consegue-se perceber o quanto a variável relaxada influencia na solução ótima do problema. Os resultados do teste 2 se assemelham aos resultados do modelo original, e por isso possui o menor valor para o *gap* de otimalidade. Neste caso, somente com a variável x relaxada, o modelo ainda é capaz de buscar soluções ótimas com grande limitação, isto é, a variável x assumindo valores que não sejam inteiros, ainda não é capaz de maximizar o VPL em grandes proporções. Esta explicação serve também para o teste 4, que apesar de retirar a restrição de recursos para o problema, não consegue encontrar valores que maximizem consideravelmente a solução. Ao retirar a restrição 3, dificulta a obtenção da solução, uma vez que fornece um limite bastante estreito em relação a necessidade e disponibilidade de recursos do problema. A sugestão nesse caso, seria o uso de heurísticas baseada em relaxação lagrangeana, que como foi visto na revisão de literatura, consiste em remover algumas das restrições implementadas no modelo original, penalizando a função objetivo através da ocorrência de violação na restrição retirada.

No entanto, assim como o teste 1, o teste 3 é capaz de obter altos valores para a função objetivo ao se definir qualquer valor não inteiro para a variável y . Mesmo gastando tempos

similares ao modelo original, o teste 3 também apresenta grandes valores para *gap* de otimalidade, se distanciando consideravelmente da solução ótima do problema original. Por isso, podemos concluir que o fato de a variável y ser inteira é um fator bastante limitador para o problema, uma vez que ao realizar sua relaxação, o modelo é capaz de encontrar soluções bem maiores para o problema.

O teste 5 irá propor a realização de todos os testes anteriores usando um novo conjunto de dados dentro da instância 4, especificamente alterando apenas o parâmetro k_{jr}^p . Durante a execução deste trabalho, o autor percebeu que a consistência dos dados imputados teve forte influência na obtenção da solução ótima. Assim, através de várias tentativas, foi identificado que a quantidade de recursos necessários para realizar as atividades é o parâmetro que mais interfere no tempo gasto para o modelo encontrar a solução. Nas instâncias anteriores, os valores para tal parâmetro foram considerados bem abaixo dos valores do parâmetro de quantidade disponível de recursos, k_{rt}^p . Desta vez, a diferença entre os dois parâmetros foi encurtada, ou seja, a quantidade de recursos necessários foi aumentada para todas atividades enquanto a disponibilidade de recursos permaneceu constante.

Estabeleceu-se um tempo limite de execução do modelo de 7200 segundos (2 horas), e os resultados para cada teste podem ser vistos na tabela a seguir.

Tabela 11 – Resultados obtidos no Teste 5

Resultados Teste 5					
	Original	Teste 1	Teste 2	Teste 3	Teste 4
VPL	Sem Solução	1286.44	889.45	Sem Solução	934.61
Tempo (seg)	7193.3100	6.2969	15.2969	7179.1700	1.1875

Fonte: Elaborado pelo autor

Observando os resultados na Tabela 11, percebe-se que o modelo original e o teste 3 (variável y relaxada) não possuem solução inteira para o problema no tempo estipulado de 7200 segundos. Apesar disso, existe solução para os outros testes e os resultados obtidos são semelhantes aos resultados dos testes nas instâncias anteriores, ou seja, assim como antes, o teste 1 possui valor de função objetivo maior que todos os outros testes, à medida que os testes aumentam a dificuldade de se encontrar uma solução viável para o problema. Apesar disso, pode-se dizer que o teste 3 é o que mais se aproxima do modelo original em todos os aspectos, como a variação das instâncias e bateria de testes realizados por este trabalho.

6 CONCLUSÃO

Visto que a crescente necessidade em se diferenciar no mercado competitivo exige cada vez mais que as empresas e organizações mantenham e utilizem boas práticas de gerenciamento ou planejamento, um dos maiores desafios é sobreviver ao mercado obtendo grandes margens de lucro. Projetos ou empreendimentos devem ser bem planejados, e principalmente, executados para evitar surpresas desagradáveis que não estavam previstas, como maior custo de realização ou cumprimento depois do prazo determinado.

Portanto, após a realização de todos os testes e obtenção dos resultados, é possível afirmar que o modelo pode ser utilizado em situações práticas de projetos que demandem sequenciamento de atividades com limitação de recursos e com controle de fluxo de caixa. Buscou-se com a nova formulação proposta por este trabalho, um modelo que fosse mais completo e que abrangesse maior quantidade de situações provenientes do dia-a-dia, como por exemplo, a possibilidade de adquirir empréstimos. Além disso, o estudo de relaxação de variáveis e restrições contribuiu para um melhor entendimento sobre o que é possível modificar no modelo, ajustando os valores estimados de forma que o problema real seja modelado corretamente. Neste caso, é possível perceber no mundo real que a quantidade de títulos a ser adquirida em determinado investimento não necessariamente precisa ter valores inteiros. Títulos públicos do Tesouro Nacional Brasileiro podem ser comprados por valores fracionários de até 10% do valor total do título, ou pelo menos, R\$30,00.

No entanto, o trabalho poderia ter sido realizado com uma maior quantidade de testes, e que propusessem modificações e ou melhorias a serem desenvolvidas no modelo. Para trabalhos futuros, fica como sugestão a implementação de novos métodos, como a relaxação lagrangeana, com o intuito de melhorar ainda mais o desempenho de algoritmos para obter soluções ótimas para o problema. Com isso, a realização de um trabalho aplicado à situação real também se torna um fator bastante interessante para verificação e validação do modelo proposto.

Deste modo, adaptando-se a entrada dos dados para resolução do problema é sensato afirmar que o modelo pode servir como uma metodologia para tomada de decisão na realização de um projeto. O desafio em selecionar projetos com viabilidade econômica e restrição de recursos devido aos limites de capacidade ou disponibilidade pode ser mais facilmente superado através do encorajamento dos gestores das empresas a utilizarem a modelagem matemática. Modelos matemáticos como proposto por este trabalho tem o intuito de auxiliar a decisão da

execução dos projetos com forte base numérica em relação a viabilidade do empreendimento. Por isso, deve-se incentivar cada vez mais o uso dessas ferramentas que conseguem avaliar previamente resultados bastante expressivos e cobrados pelo mundo corporativo, para se obter a maximização do valor presente líquido de projetos.

7 REFERÊNCIAS

ANDRADE, Eduardo Leopoldino. **Introdução a pesquisa operacional**. 3.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

ARTIGUES Christian; DEMASSEY Sophie; NERON Emmanuel. **Resource-constrained project scheduling, models, algorithms, extensions and applications**. Wiley-Iste, 2008.

BERTRAND, J. Will M.; FRANSOO, Jan C. **International Journal of Operations & Production Management**. Operation management research methodologies using quantitative modeling, 2002.

FISHER, Marshall L. **The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems**. Management Science Vol.27, No. 1, 1981. Disponível em: [http://athena.uwindsor.ca/users/b/baki%20fazle/73-605.nsf/0/a0f56d9f30b19b7485256a6300120aaf/\\$FILE/Fisher_Lagrangian.pdf](http://athena.uwindsor.ca/users/b/baki%20fazle/73-605.nsf/0/a0f56d9f30b19b7485256a6300120aaf/$FILE/Fisher_Lagrangian.pdf). Acesso em 15 de julho de 2016.

FOURER, Robert; GAY, David M.; KERNIGHAN, Brian W. **AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming**. 2.ed. Cengage Learning, 2002.

GITMAN, Lawrence J. **Princípios de administração financeira**. São Paulo: Harbra, 1997.

IBM. **ILOG CPLEX Optimization Studio CPLEX User's Manual**. IBM Corp., 2014.

Disponível em:

<http://www.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P_12.6.1/ilog.odms.studio.help/pdf/usrcplex.pdf>. Acesso em 8 de julho de 2016.

KOLISH, Rainer. **Project Scheduling under Resource Constraints: Efficient Heuristics for Several Problem Classes**. Springer Science & Business Media, 2013.

LIU, Shu-Shun; WANG, Chang-Jung. **Resource-constrained construction project scheduling model for profit maximization considering cash flow.** Elsevier, 2008.

LUENBERGER, David. G. **Investment Science.** Oxford University Press, 1998.

MORABITO, Reinaldo; PUREZA, Vitória. **Modelagem e Simulação.** Em: Metodologia de Pesquisa em Engenharia de Produção e Gestão de Operações. P. C. Miguel (ed.). 2 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.

PEREIRA, Tábata Assunção. **Sequenciamento e seleção de títulos para financiamento e maximização do valor presente líquido de projetos.** Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Ouro Preto. João Monlevade, 2014.

PMI. **Um guia do conhecimento em gerenciamento de projetos.** Guia PMBOK. 5.ed. Project Management Institute, 2013.

WOLSEY, Laurence A. **Integer Programming.** John Wiley & Sons, Inc., 1998.