



Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Engenharia Elétrica



Trabalho de Conclusão de Curso

Controle por Realimentação de Estados \mathcal{H}_∞ para MJLS Discretos com Matrizes de Probabilidade de Transição Incertas via LMIs com Parâmetro Escalar

Jean Carlos Freitas Maia

João Monlevade, MG
2019

Jean Carlos Freitas Maia

**Controle por Realimentação de Estados \mathcal{H}_∞
para MJLS Discretos com Matrizes de
Probabilidade de Transição Incertas via LMIs
com Parâmetro Escalar**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga

**Universidade Federal de Ouro Preto
João Monlevade
2019**

M217c

Maia, Jean Carlos Freitas.

Controle por realimentação de estados Hinf para MJLS discretos com matrizes de probabilidades de transição incertas via LMIs com parâmetro escalar [manuscrito] / Jean Carlos Freitas Maia. - 2019.

34f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Departamento de Engenharia Elétrica.

1. Sistemas lineares. 2. Sistemas de controle por realimentação. 3. Controladores elétricos. 4. Probabilidades. 5. Matrizes. I. Braga, Márcio Feliciano. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 681.5

Catálogo: ficha.sisbin@ufop.edu.br



**AUTORIZAÇÃO DO COLEGIADO PARA LANÇAMENTO DA NOTA ATV600 NO
HISTÓRICO ESCOLAR EM SUBSTITUIÇÃO À ATA DE DEFESA**

Autorização

O colegiado do curso de engenharia elétrica autoriza ao orientador Márcio Feliciano Braga o lançamento da nota do Trabalho de Conclusão de Curso - ATV 600 do aluno Jean Carlos Freitas Maia em virtude do aproveitamento do artigo publicado em evento científico ou periódico, conforme previsto no § 3º do Art 5º da resolução COEE nº 011/2018.

Nota atribuída ao aluno pelo orientador: 10,0

João Monlevade, 31 de outubro de 2019.

EDGARD GREGORY TORRES SARAIVA
Presidente do Colegiado de Engenharia Elétrica

Resumo

Este trabalho investiga o projeto de controladores \mathcal{H}_∞ em sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos a tempo discreto, assumindo que as probabilidades de transição são afetadas por incertezas politópicas pertencentes a um único domínio, denominado multi-simplex. Em virtude desta representação, o problema de estabilidade robusta por média quadrática com limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ é baseado na existência de desigualdades matriciais lineares com matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetro. A condição proposta permite estabilizar sistemas em malha fechada quando a disponibilidade do modo de operação é total, parcial ou completamente desconhecida. A partir da introdução de um parâmetro escalar, resultados menos conservadores podem ser obtidos quando comparados a outras condições presentes na literatura.

Palavras-chave: Sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos a tempo discreto; incertezas politópicas; realimentação estática de estados; norma \mathcal{H}_∞ ; relaxação LMI.

Abstract

This work investigates discrete-time Markov jump linear systems control design, assuming that the transition probabilities are affected by polytopic uncertainties belonging to a single domain, called multi-simplex. Owing to this representation, the robust mean square stability problem with \mathcal{H}_∞ norm bound is based on the existence of linear matrix inequalities with parameter-dependent Lyapunov matrices. The proposed condition allows to stabilize closed-loop systems with complete, partial or no observation of the Markov chain. Due to the introduction of a scalar parameter, less conservative results can be obtained when compared to other available conditions in the literature.

Keywords: Discrete-time Markov jump linear systems; polytopic uncertainty; static state feedback; \mathcal{H}_∞ norm; LMI relaxation.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Estabilidade segundo Lyapunov.	6
Figura 2 – Nuvem de autovalores do Exemplo 2.4.1.	9
Figura 3 – Resposta em magnitude do Exemplo 2.5.1.	12
Figura 4 – Trajetórias do Exemplo 2.6.1.	15
Figura 5 – Região de probabilidades da linha 1 de uma matriz de transição incerta dada em (2.33).	17
Figura 6 – Resultados do Exemplo 4.1.1.	24
Figura 7 – Custo garantido γ em função do parâmetro ξ para o sistema do Exemplo 4.1.2.	26
Figura 8 – Custo garantido γ em função do parâmetro ξ para o sistema do Exemplo 4.2.1.	28
Figura 9 – Limitante superior γ e a norma \mathcal{H}_∞ em malha fechada em função do parâmetro ξ computados, respectivamente, pelas condições do Teorema 1 e uma condição de análise com graus elevados.	29

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Contextualização	1
1.2	Objetivos	2
1.3	Estrutura do Trabalho	2
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	4
2.1	Desigualdades Matriciais Lineares	4
2.2	Estabilidade e a Equação de Lyapunov	5
2.3	Modelos Incertos e Robustez	7
2.4	Condições de Estabilidade em Sistemas Incertos	8
2.5	A Norma \mathcal{H}_∞	10
2.6	Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos	13
2.6.1	Estabilidade em MJLS	15
2.6.2	Norma \mathcal{H}_∞ em MJLS	15
2.7	MJLS com Matrizes de Probabilidades de Transição Incertas	16
2.8	Lema da Projeção	18
3	RESULTADOS E DISCUSSÃO	19
3.1	Controle \mathcal{H}_∞ em MJLS discretos com MTP incertas via LMIs com parâmetro escalar	19
4	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS	23
4.1	MJLS com MPT precisamente conhecida	23
4.2	MJLS com MPT incerta	27
5	CONCLUSÕES	31
	REFERÊNCIAS	32

1 Introdução

1.1 Contextualização

Muitos processos podem ser bem descritos, por exemplo, por modelos lineares invariantes no tempo, porém uma grande quantidade deles estão sujeitos a mudanças incertas em sua dinâmica. Um dos principais problemas em sistemas de controle é sua capacidade de manter os requisitos de desempenho mesmo na presença de mudanças abruptas na dinâmica do sistema. As mudanças podem ser devidas a, por exemplo, perturbações ambientais abruptas, falhas ou reparos de componentes, mudanças nas interconexões de subsistemas e mudanças no ponto de operação de uma planta. Nesse sentido, quando as variações causadas pelas mudanças alteram significativamente o comportamento dinâmico do sistema, um modelo estocástico que dá uma identificação quantitativa da probabilidade de vários cenários possíveis é preferível. Durante as últimas décadas, várias classes diferentes de modelos que levam em consideração possíveis cenários distintos foram propostas e estudadas (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005).

Em alguns casos, tais sistemas podem ser modelados por um conjunto de sistemas lineares discretos no tempo com transição modal dada por uma cadeia de Markov. Esse conjunto é conhecido como sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos (do inglês, *Markov Jump Linear System* — MJLS).

Embora as técnicas de controle clássico, no domínio da frequência, simplifiquem a representação dos sistemas por meio de equações algébricas e rapidamente forneçam informações sobre a estabilidade e a resposta transitória, sua aplicação é limitada para sistemas específicos, isto é, lineares ou aproximados por tal e invariantes no tempo. Apesar de não ser tão intuitivo quanto as técnicas de controle clássico, o modelo no domínio do tempo é atrativo e oferece novas perspectivas para o desenvolvimento de projetos, podendo ser utilizado para sistemas não lineares, variantes no tempo, de múltiplas entradas e saídas, entre outros (NISE, 2011).

Ao longo dos últimos anos, problemas formulados em termos de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) e resolvidos computacionalmente por métodos de pontos interiores, a maioria deles acessíveis gratuitamente, se tornaram comuns em diversos campos envolvendo engenharia e matemática aplicada. Especificamente na teoria de controle, o uso de tais ferramentas levaram a importantes resultados na análise de estabilidade, síntese de controladores robustos para sistemas incertos, entre outros (AGULHARI; OLIVEIRA; PERES, 2012).

Neste contexto, a teoria de Lyapunov trata uma grande variedade de problemas em sistemas lineares descritos por equações diferenciais e suas diferenças. O emprego de

funções de Lyapunov permite que procedimentos de otimização possam ser expressados na forma de LMIs de maneira eficiente. O uso de uma função de Lyapunov quadrática tem sido empregada como o ponto de partida para tratar diversos problemas como controle e filtragem robusta incluindo critérios como \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Os resultados baseados na estabilidade quadrática são especialmente adequados para tratar sistemas cujos parâmetros incertos variam no tempo (OLIVEIRA; PERES, 2005).

O projeto de controladores \mathcal{H}_∞ busca minimizar o maior pico da resposta em frequência do sistema e pode ser utilizado quando os níveis de desempenho e estabilidade com respeito a distúrbios externos devem ser garantidos, o que representa a minimização do maior pico da resposta em frequência do sistema em malha fechada (CABELLO, 2014).

O conhecimento exato das taxas de transição da cadeia de Markov é uma tarefa que pode demandar um alto custo, por isso é de grande interesse métodos de análise ou síntese capazes de tratar o conhecimento incompleto dos elementos (MORAIS, 2015), assim como a busca por condições de síntese menos conservadoras que permitem estabilizar uma classe mais ampla de sistemas. Desta forma, tem sido feito um grande esforço no sentido de estender as condições de estabilidade, seja considerando funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, seja por meio da inserção de variáveis de folga ou parâmetros escalares.

1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é propor uma condição LMI, empregando um parâmetro escalar, para sintetizar um controlador por realimentação de estados que garanta um limitante para norma \mathcal{H}_∞ de MJLS com incertezas em sua informação estocástica e cuja disponibilidade dos modos de operação seja completa, parcial ou totalmente desconhecida. As probabilidades associadas a cada linha podem ser completamente ou parcialmente conhecidas ou, ainda, totalmente desconhecidas e são modeladas em termos de parâmetros pertencentes a simplexes unitários distintos. Em seguida, o conjunto completo de parâmetros incertos é obtido empregando um procedimento sistemático, chamado multi-simplex (OLIVEIRA; BLIMAN; PERES, 2008a; OLIVEIRA; BLIMAN; PERES, 2008b), de tal forma que os parâmetros pertençam ao produto cartesiano de simplexes.

Com isso, este trabalho propõe uma nova estratégia, obtida a partir do Lema da Projeção, que tem como objetivo verificar a estabilidade estocástica dessa classe de sistemas e, além disso, obter um controlador robusto por realimentação de estados, que garanta o custo \mathcal{H}_∞ . Sendo assim, é possível comparar o método com técnicas apresentadas na literatura.

1.3 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está estruturado como segue:

- O Capítulo 2 aborda a revisão bibliográfica e os conceitos teóricos do trabalho, incluindo desigualdades matriciais lineares, as condições de estabilidade segundo Lyapunov, incertezas politópicas, sistemas sujeitos a saltos markovianos e a formulação matemática da norma \mathcal{H}_∞ .
- O Capítulo 3 introduz os resultados principais deste trabalho, mostrando o desenvolvimento de condições LMIs para estabilização \mathcal{H}_∞ de MJLS a partir do Lema da Projecção.
- O Capítulo 4 expõe os exemplos numéricos e aponta as vantagens do método proposto.
- O Capítulo 5 conclui o trabalho.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Desigualdades Matriciais Lineares

As desigualdades matriciais lineares estão envolvidas em alguns dos maiores eventos da teoria de controle. Com o advento de poderosas técnicas de otimização convexa, as LMIs se tornaram uma ferramenta prática para o futuro de aplicações em controle (BOYD et al., 1994a).

A história das LMIs na análise de sistemas dinâmicos iniciou-se por volta de 1890, quando surgiu a teoria de Lyapunov. Sendo assim, o primeiro uso de LMI para analisar a estabilidade de um sistema dinâmico foi por meio da desigualdade de Lyapunov, a qual podia ser resolvida analiticamente por meio de um conjunto de equações lineares (BOYD et al., 1994a).

Em 1940, Lur'e, Postnikov e outros na União Soviética aplicaram, pela primeira vez, o método de Lyapunov em alguns problemas práticos específicos na engenharia de controle, como por exemplo, o problema de estabilidade de um sistema de controle com não linearidade no atuador. As LMIs que resultaram eram resolvidas analiticamente, o que limitavam sua aplicação para somente pequenos sistemas (BOYD et al., 1994a).

Nos anos recentes, as LMIs emergiram como uma ferramenta poderosa para abordar problemas de controle que aparentavam ser difíceis, senão impossíveis, para serem resolvidos de forma analítica. Apesar do longo histórico, apenas nas últimas décadas poderosas técnicas de método de pontos interiores foram desenvolvidas para solucionar LMIs de uma forma prática e eficiente. Hoje, diversos pacotes de *software*, sejam comerciais ou não, estão disponíveis, que permitem a codificação de problemas gerais envolvendo LMIs. Por exemplo, o *Yalmip* (LÖFBERG, 2004) é uma ferramenta flexível e não comercial para definir e resolver problemas avançados de otimização (SCHERERA; WEILANDB, 2010).

Sendo assim, motivado pela disponibilidade de ferramentas computacionais rápidas, a pesquisa na teoria de controle robusto vem experimentando uma significativa mudança de paradigma (SCHERERA; WEILANDB, 2010).

Uma LMI é uma desigualdade matricial da forma

$$F(x) = F_o + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0 \quad (2.1)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é a variável, e $F_o, F_i = F_i^T, i = 1, 2, \dots, n$ são matrizes dadas. Com isso, uma LMI é uma *restrição* na variável x (BOYD et al., 1994b).

Na maioria das aplicações de controle, as LMIs são representadas como variáveis matriciais ao invés de variáveis vetoriais. O que significa que se considera desigualdades

da forma mais geral

$$F(X) > 0 \quad (2.2)$$

em que X é uma matriz que pertence a um espaço vetorial arbitrário de dimensão finita \mathcal{X} de matrizes. $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{S}^n$ é uma função afim. Funções afim assumem a forma $F(x) = F_o + T(x)$, em que F_o é fixa e $T(x)$ é um mapeamento linear. A desigualdade $F(x) > 0$ significa que x deve tornar a matriz simétrica $F(x)$ definida positiva, isto é, o mínimo autovalor de $F(x)$ deve ser positivo (SCHERERA; WEILANDB, 2010).

Em outras palavras, uma matriz simétrica $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é *definida positiva*, com notação $M > 0$, se $x^T M x > 0$ para todo vetor $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo. A matriz M é definida positiva (semidefinida positiva) se, e somente se, qualquer uma das condições a seguir se verificar (PERES; OLIVEIRA, 2018):

1. Todos os autovalores de M são positivos (não negativos).
2. Todos os menores principais líderes de M são positivos (não negativos).
3. Existe uma matriz $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular (uma matriz $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ singular ou uma matriz $N \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $m < n$) tal que $M = N^T N$.

2.2 Estabilidade e a Equação de Lyapunov

A análise de estabilidade de sistemas lineares e invariantes no tempo dispõe de muitas abordagens. Contudo, para sistemas não lineares e/ou variantes no tempo, a análise de estabilidade pode ser extremamente difícil. A análise de estabilidade segundo Lyapunov é um método que pode ser aplicado visando encontrar respostas a questões de estabilidade para esse e entre outros tipos de sistemas (OGATA; YANG, 2002).

Considere o sistema LIT (linear e invariante no tempo) discreto no tempo representado por

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (2.3)$$

com $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é vetor de estados e $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é a matriz dinâmica do sistema. A sequência $x(0), x(1), \dots$, gerada de acordo com (2.3), é chamada de trajetória do sistema.

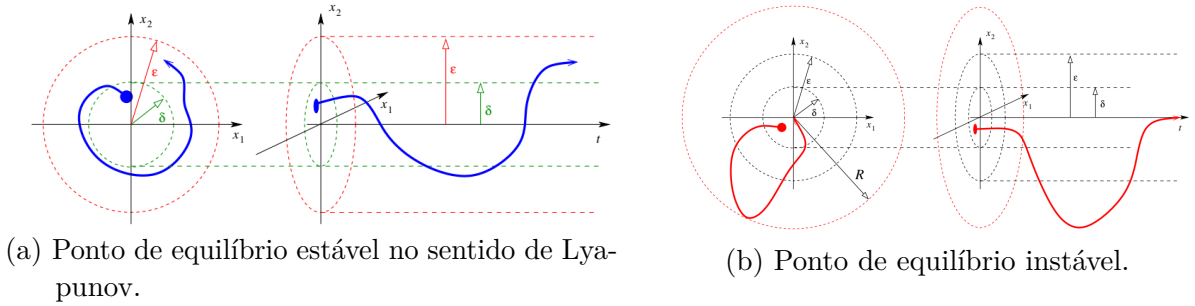
O sistema (2.3) é assintoticamente estável se qualquer uma das condições abaixo for verificada (PERES; OLIVEIRA, 2018)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0, \quad (2.4)$$

$$\max_i |\lambda_i(A)| < 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Um ponto de equilíbrio x_e é dito estável no sentido de Lyapunov se para cada $\epsilon > 0$ há um $\delta > 0$ tal que $\|x(k) - x_e\| < \delta$. O que significa que o ponto de equilíbrio é estável se, dada uma região $\epsilon > 0$ qualquer circundando o ponto de equilíbrio, pode-se encontrar uma trajetória que se inicia dentro da região δ e converge para a região interna ϵ (Figura 1a). Além disso, se a trajetória convergir para o ponto de equilíbrio, então é dito assintoticamente estável. Se a trajetória divergir para além da região ϵ (Figura 1b), é dito instável (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005).

Figura 1 – Estabilidade segundo Lyapunov.



Fonte: (TÔRRES, 2019).

A estabilidade do sistema (2.3) pode ser determinada por meio de uma *função de Lyapunov* $V(x)$. Uma função de Lyapunov deve respeitar três condições (PESSIM; OLIVEIRA; FERON, 2017):

$$V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (2.6)$$

$$\Delta V(x) < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (2.7)$$

$$V(0) = 0. \quad (2.8)$$

Considerando uma função de Lyapunov como a seguinte (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005):

$$V(x(k)) = x^T(k)Px(k) \quad (2.9)$$

com $V(x) > 0, \forall x \neq 0$. Então

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k) \\ &= x^T(k)A^T PAx(k) - x^T(k)Px(k) \\ &= x^T(k)(A^T PA - P)x(k). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Além disso, dado que (2.6) deve ser satisfeita, então $P > 0$.

Portanto, tem-se as duas condições para que o sistema (2.3) seja assintoticamente estável segundo Lyapunov, a saber,

$$\begin{aligned} P &> 0, \\ A^T P A - P &< 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Sendo assim, para determinar se A é estável, é necessário encontrar uma solução factível $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ simétrica para o problema.

2.3 Modelos Incertos e Robustez

A maioria dos projetos em controle são baseados no uso de modelos. A relação entre o modelo e a realidade que ele representa é sutil e complexa. Um modelo matemático provê um mapa de respostas para entradas. A qualidade de um modelo depende de quão próximo sua resposta se aproxima da resposta da planta real.

No entanto, o universo de modelos matemáticos é distinto do universo de modelos físicos. Assim, um modelo que representa a planta real não pode nunca ser construído. Um bom modelo, portanto, deve ser simples o suficiente para que facilite o projeto, mas ainda complexo o suficiente para que funcione na prática (ZHOU; DOYLE, 1998).

O termo *incerteza* se refere as diferenças entre o modelo e a realidade, e qualquer mecanismo que é usado para expressar esses erros são chamados de *representação de incertezas*.

Representação de incertezas varia principalmente em termos da quantidade de estruturas que contêm. Isso reflete tanto no conhecimento dos mecanismos físicos que causam diferenças entre o modelo e a planta real, quanto na habilidade de representar tais mecanismos de modo que facilitem manipulações convenientes (ZHOU et al., 1996).

Outro conceito de extrema importância é a robustez. Um controlador é dito *robusto* com relação a um conjunto de modelos especificados *a priori* se garante um certo nível mínimo de desempenho para qualquer um dos possíveis modelos pertencentes a tal conjunto. Ou seja, segundo Affonso et al. (1999), a robustez é um conceito de conjunto em que o modelo matemático juntamente com as incertezas que o afetam definem um domínio, devendo ser garantida pelo controlador robusto a estabilidade para todo o domínio. A robustez de um controlador pode ser interpretada como sendo a capacidade de manter a estabilidade do sistema na presença de incertezas, sendo as incertezas provenientes de mudanças no ponto de operação, aproximações no modelamento, entre outros aspectos.

2.4 Condições de Estabilidade em Sistemas Incertos

O sistema linear discreto

$$x(k+1) = A(\cdot)x(k)$$

possui parâmetros incertos. As incertezas podem ser classificadas em função da descrição do conjunto $A(\cdot)$ como incertezas politópicas, intervalares, estruturadas ou não estruturadas etc. O presente trabalho aborda a incerteza do tipo politópica, também conhecida como incerteza linear convexa. Sendo assim, a estabilidade robusta é garantida a partir da existência de uma função de Lyapunov dependente de parâmetro obtida a partir do teste de factibilidade de um conjunto de LMIs formuladas nos vértices do politopo de incertezas (LEITE et al., 2004).

Em um sistema precisamente conhecido, como (2.3), as condições em (2.11) são necessárias e suficientes para a estabilidade assintótica de A . Supondo agora que A não é precisamente conhecida, mas pertença a um politopo de incertezas $A(\alpha)$ que definem o sistema linear discreto

$$x(k+1) = A(\alpha)x(k). \quad (2.12)$$

Nesse caso, qualquer matriz $A(\alpha)$ dentro do domínio de incertezas pode ser escrita como a combinação convexa dos vértices A_i , $i = 1, \dots, N$ do politopo (LEITE et al., 2004), ou seja, $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ com

$$\mathcal{A} = \left\{ A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x} : A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (2.13)$$

As matrizes A_i referentes a cada ponto de operação i do sistema são conhecidas e definem os vértices do politopo $A(\alpha)$, que é um poliedro convexo. O escalar α_i permite a combinação linear convexa dos N vértices do politopo $A(\alpha)$ para a representação dos seus pontos internos (AFFONSO et al., 1999).

Uma primeira análise seria supor que a estabilidade dos vértices garantiria a estabilidade do politopo e que para mostrar que isso não é coerente, o Exemplo 2.4.1 é apresentado.

Exemplo 2.4.1. Considere as matrizes que representam os vértices de um politopo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,2098 & -0,4505 & 1,3844 \\ 1,1095 & 0,6493 & -1,5279 \\ -0,5196 & 0,0355 & -0,9285 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1,2340 & -0,7170 & 1,5800 \\ 3,5167 & 0,0485 & 0,0296 \\ 0,6974 & -0,5101 & 1,3217 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

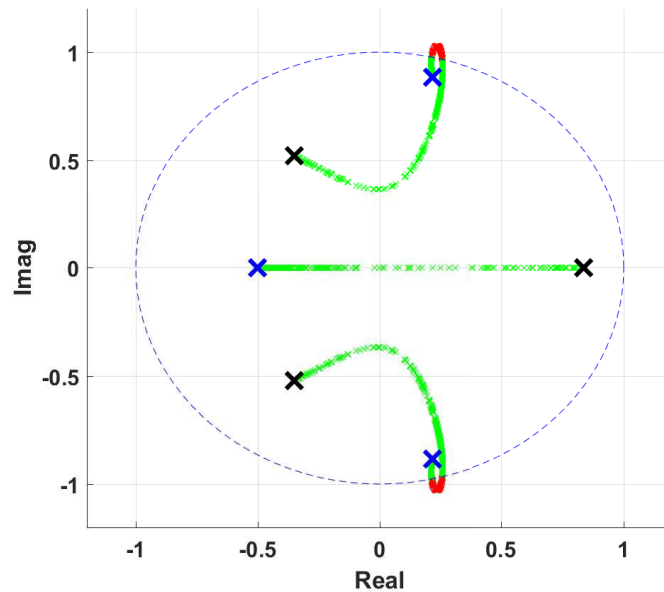
cujos autovalores são

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0,2159 + j0,8842 \\ 0,2159 - j0,8842 \\ -0,5013 + j0,0000 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} -0,3510 + j0,5227 \\ -0,3510 - j0,5227 \\ 0,8383 + j0,0000 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

Os autovalores da combinação convexa entre os dois vértices, que geram as raízes do sistema, pode ser descrita a partir de (2.13), como:

$$\lambda(A(\alpha)) = \lambda(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2), \quad \sum_{j=1}^2 \alpha_j = 1.$$

Figura 2 – Nuvem de autovalores do Exemplo 2.4.1.



Fonte: Do autor.

Na Figura 2 apresenta-se a nuvem de autovalores obtida a partir de mil combinações aleatórias. As marcações maiores, em azul e em preto, representam os autovalores dos vértices apresentados em (2.15). É possível observar que, como estão contidos no círculo unitário, o sistema é estável nos vértices. De fato, o resultado relacionado a estabilidade dos vértices pode ser verificado em um algoritmo que testa a estabilidade de Lyapunov ou ainda, basta calcular os autovalores das matrizes A_1 e A_2 e perceber que todos estão no interior do círculo de raio unitário. Os pontos menores, em verde e em vermelho, representam os autovalores a partir das combinações dos vértices. O trecho em vermelho, especificamente, mostra os autovalores fora do círculo unitário. Neste sentido, verifica-se que, para determinadas combinações, o sistema se torna instável.

Portanto, isso mostra que, de fato, a estabilidade nos vértices não é condição suficiente para estabilidade robusta. Consequentemente, são necessárias funções de Lyapunov capazes de verificar a estabilidade de todo o domínio de incertezas.

Supondo agora matrizes incertas $A(\alpha)$ para as condições de estabilidade (2.11),

tem-se

$$\begin{aligned} P &> 0, \\ A(\alpha)PA(\alpha) - P &< 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Aplicando o complemento de Shur na segunda expressão, obtêm-se

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} P & (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \dots + A_N\alpha_N)^T P \\ P(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \dots + A_N\alpha_N) & P \end{bmatrix} = \\ &\alpha_1 \begin{bmatrix} P & A_1^T P \\ PA_1 & P \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} P & A_2^T P \\ PA_2 & P \end{bmatrix} + \dots + \alpha_N \begin{bmatrix} P & A_N^T P \\ PA_N & P \end{bmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sabendo que α_i é um parâmetro não negativo, pode-se simplificar (2.17) aplicando o complemento de Schur em cada matriz individualmente, chegando à expressão conhecida na literatura como estabilidade quadrática, isto é,

$$\begin{aligned} P &> 0, \\ \begin{bmatrix} P & A_i^T P \\ PA_i & P \end{bmatrix} &> 0, \quad \forall i \in N, \end{aligned} \quad (2.18)$$

portanto, isso faz com que a condição em (2.18) seja equivalente a verificar a existência de $P = P^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ somente nos vértices do sistema.

A estabilidade quadrática assume que uma única matriz de Lyapunov é utilizada para verificar a estabilidade em todo o domínio incerto. A condição é suficiente para testar a estabilidade de um sistema incerto fornecendo um certificado de estabilidade que independe dos parâmetros incertos α . Apesar de ser uma condição apenas suficiente para a estabilidade robusta de $A(\alpha)$, e, portanto, pode produzir resultados conservadores, a estabilidade quadrática tem sido usada extensivamente para síntese de controladores e de filtros robustos nos mais diversos contextos (LEITE et al., 2004).

2.5 A Norma \mathcal{H}_∞

A norma \mathcal{H}_∞ é considerada útil para a obtenção de controladores eficientes nos quesitos de desempenho e estabilidade. A minimização da norma \mathcal{H}_∞ tem o compromisso de garantir a estabilidade do sistema mesmo que ocorra algum evento externo imprevisto que provoque uma amplificação excessiva na resposta da planta. O método \mathcal{H}_∞ considera três tipos de distúrbios: erro do controlador, distúrbio do sistema e erro de saída (LOPES, 2005).

Considere o sistema LIT discreto:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \\ y(k) = Cx(k) + Dw(k), \end{cases} \quad (2.19)$$

com $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ representando o vetor de estados, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ as entradas exógenas e $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ as saídas medidas.

A norma \mathcal{H}_∞ de um sistema discreto, linear e invariante no tempo é definida como sendo o máximo valor da magnitude do sinal da resposta em frequência do sistema (ASSUNÇÃO, 2000). Com isso, a norma \mathcal{H}_∞ é dada por

$$\|H(z)\|_\infty = \max_{\omega \in [-\pi, \pi]} \sigma_{max}(H(e^{j\omega})), \quad (2.20)$$

em que σ_{max} representa o máximo valor singular.

Considere que para qualquer entrada $w(k)$ é possível determinar um limitante $\gamma > 0$ tal que $y(k)$ satisfaça

$$\|y(k)\|_2 \leq \gamma \|w(k)\|_2. \quad (2.21)$$

Qualquer valor de γ que verifique (2.21) é chamado de um custo garantido \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada e é de grande interesse determinar o controle que fornece o menor nível de atenuação (MONTAGNER et al., 2004).

É possível escrever (2.21) como

$$y(k)^T y(k) \leq \gamma w(k)^T w(k). \quad (2.22)$$

Escolhendo $v(x) = x^T P x$ como função de Lyapunov para um sistema estável, e portanto, sabendo que $\Delta V(x) = x(k+1)^T P x(k+1) - x(k)^T P x(k) < 0$, pode-se escrever

$$x(k+1)^T P x(k+1) - x(k)^T P x(k) + y(k)^T y(k) - \gamma^2 w(k)^T w(k) < 0. \quad (2.23)$$

Empregando (2.19) em (2.23), tem-se

$$\begin{aligned} & (x^T C^T + w^T D^T)(C x + D w) - w w^T \gamma^2 + (x^T A^T + w^T B^T) P x + x^T P (A x + B w) = \\ & x^T (A^T P + P A + C^T C) x + w^T (D^T C + B^T P) x + x^T (P B + C^T D) w + w^T (I \gamma^2) w < 0. \end{aligned}$$

Finalmente, escrevendo a expressão acima na forma matricial, chega-se ao resultado conhecido como *Bounded Real Lemma*

$$\begin{bmatrix} A^T P A - P + C^T C & A^T P B + C^T D \\ B^T P A + D^T C & B^T P B + D^T D - I \gamma^2 \end{bmatrix} < 0. \quad (2.24)$$

Usando o complemento de Schur, é possível obter uma matriz equivalente (ASSUNÇÃO, 2000)

$$\begin{bmatrix} P & * & * & * \\ P A & P & * & * \\ 0 & B^T P & \gamma^2 I & * \\ C & 0 & D & I \end{bmatrix} > 0. \quad (2.25)$$

Para a obtenção do valor da norma \mathcal{H}_∞ , pode-se formular um problema de otimização. Para isso, defina $\mu = \gamma^2$ e obtenha a solução de

$$\min \mu, \quad (2.26)$$

$$\text{s.a. (2.25)}. \quad (2.27)$$

Para verificar o cálculo da norma \mathcal{H}_∞ usando LMIs, pela restrição em (2.25), é interessante utilizar um sistema precisamente conhecido, porque, diferente de sistemas incertos, o resultado poder ser confirmado em uma função do *Matlab*, *normhinf* e também pelo pico da resposta em magnitude do diagrama de Bode.

Exemplo 2.5.1. Seja o sistema em tempo discreto dado pela seguinte representação em espaço de estados

$$A = \begin{bmatrix} 0,28 & -0,315 \\ 0,63 & -0,84 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 3], \quad D = [0].$$

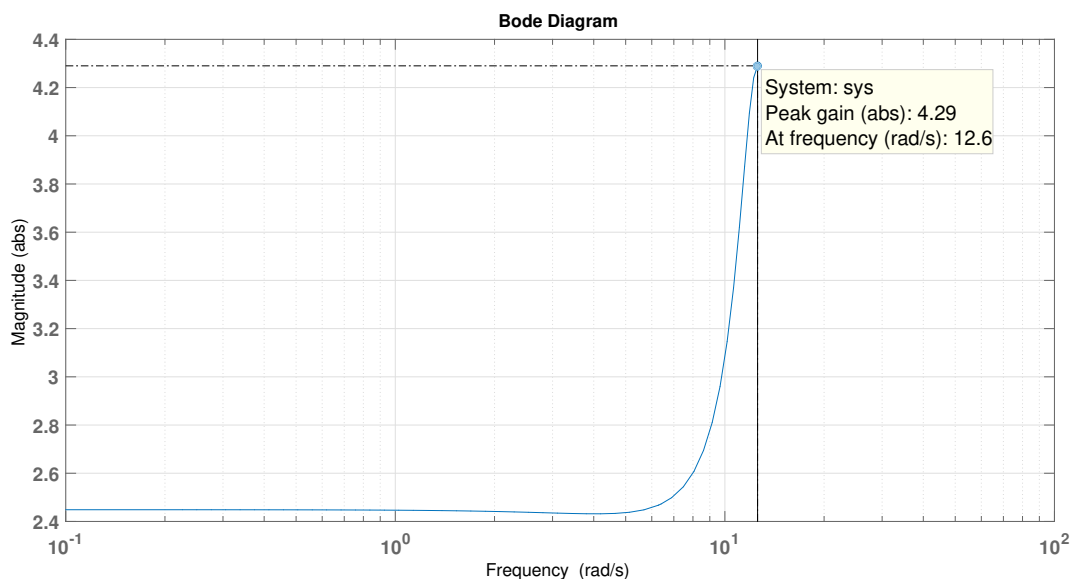
Assim sendo, os resultados obtidos são apresentados na Tabela 1 e a resposta em magnitude do sistema na Figura 3.

Tabela 1 – Resultados da Norma \mathcal{H}_∞ .

Método	γ
Algoritmo implementado usando (2.26) e (2.27)	4,2901
Função <i>Matlab</i>	4,2901
Pico do Diagrama de Magnitude	4,2901

Fonte: Do autor.

Figura 3 – Resposta em magnitude do Exemplo 2.5.1.



Fonte: Do autor.

Portanto, a coerência entre os três resultados permite verificar a validade do método para o cálculo da norma. Além disso, para o caso em que o sistema é precisamente conhecido, todos os métodos obtêm o mesmo resultado.

2.6 Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos

Um processo estocástico é dito ser um processo markoviano se a probabilidade condicional de um evento futuro ocorrer depender apenas de um estado presente, ou seja, é independente dos estados passados, por isso também é conhecido como processo sem memória. Além disso, quando um processo de Markov só pode assumir valores em um conjunto finito ou contável, ele recebe o nome de *cadeia de Markov*. Sendo assim, o conjunto de números naturais $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, \sigma\}$ representa o conjunto finito contendo todos os σ modos do MJLS.

Considere que $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_k, \mathbb{P}\}$ denote o espaço de probabilidades fundamental e que $\theta(k) = \theta_k$, com $k \geq 0$, represente a cadeia de Markov homogênea discreta. A matriz de probabilidades de transição, descrita por $\mathbb{P} = [p_{ij}]$, $\forall i, j \in \mathbb{K}$, apresenta probabilidades que evoluem de acordo com uma cadeia de Markov, ou seja, cada elemento de $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{\sigma \times \sigma}$ é dado por

$$p_{ij} = \text{Prob}(\theta_{k+1} = j | \theta_k = i), \quad \forall k \geq 0,$$

e possuem as seguintes propriedades

$$\sum_{j=1}^{\sigma} p_{ij} = 1, \quad \forall p_{ij} \geq 0. \quad (2.28)$$

Assim, uma cadeia de Markov composta por dois elementos tem como matriz de transição de estados, a seguinte representação

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

O termo p_{11} representa a probabilidade de um evento estar no primeiro estado e permanecer nele, enquanto o termo p_{12} representa a probabilidade de ocorrer o segundo evento, dado que o estado atual seja o primeiro e assim por diante.

Para os desenvolvimentos posteriores, considere um MJLS genérico discreto definido por

$$\mathcal{G} = \begin{cases} x(k+1) = A(\theta_k)x(k) + B(\theta_k)u(k) + B_w(\theta_k)w(k), \\ y(k) = C(\theta_k)x(k) + D(\theta_k)u(k) + D_w(\theta_k)w(k), \end{cases} \quad (2.30)$$

sendo $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$, o vetor de estados, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$, o vetor de entradas de controle, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$, as entradas de ruído e $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$, o vetor de saídas controladas. Além disso, as matrizes $A(\theta_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B(\theta_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $B_w(\theta_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$, $C(\theta_k) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$,

$D(\theta_k) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ e $D_w(\theta_k) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$ são supostas conhecidas. Com o objetivo de simplificar a notação, sempre que possível, θ_k é substituído por i , $\forall i \in \mathbb{K}$, como, por exemplo, em $A(\theta_k) = A_i$.

O Exemplo 2.6.1 é utilizado para ilustrar os conceitos apresentados anteriormente e destacar a característica estocástica do MJLS.

Exemplo 2.6.1. Considere um MJLS obtido em Costa, Fragoso e Marques (2005, Exemplo 1.1), com dois modos de operação \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 , dado por:

$$\mathcal{G}_1 : x(k+1) = 0,8x(k),$$

$$\mathcal{G}_2 : x(k+1) = 1,2x(k),$$

associado à seguinte matriz de probabilidades de transição

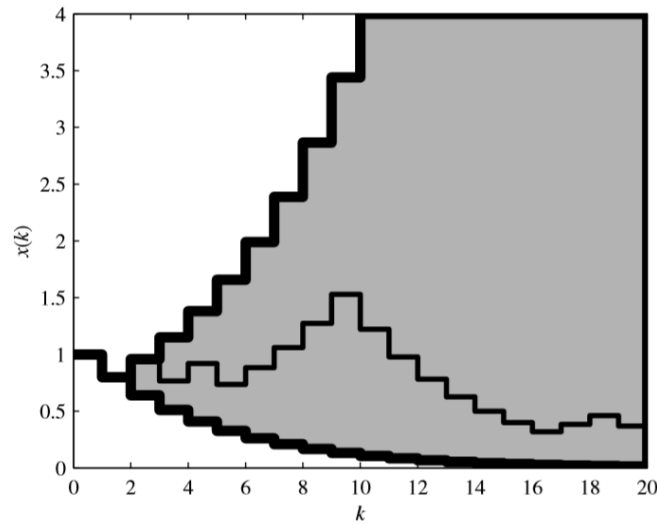
$$\mathbb{P} = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Isto significa que quando o sistema está no modo de operação 1, ele tem 30% de probabilidade de pular para o modo 2, evidentemente isso também mostra que existe 70% probabilidade de o sistema permanecer no modo 1. O mesmo raciocínio pode ser empregado na segunda linha da matriz: quando o sistema se encontra no modo 2, há 60% de probabilidade de mudança para o modo 1, assim como há 40% de probabilidade de o sistema permanecer no modo 2.

Quando o sistema está no modo de operação 1, o estado do sistema evolui de acordo com \mathcal{G}_1 , e quando o sistema está no modo de operação 2, o estado do sistema evolui de acordo com \mathcal{G}_2 , ocorrendo saltos de um modo para o outro. O conhecimento sobre quando ocorrerá um salto em um MJLS é desconhecido, sabe-se apenas a probabilidade de ocorrer o salto dado que o sistema se encontra em um dado modo.

Uma vez que a sequência dos modos de operação é essencialmente estocástica, não é possível saber, *a priori*, as trajetórias do sistema, apesar de que muitas informações podem ser obtidas empregando este tipo de estrutura. Conforme a Figura 4, quando $k = 0, 1, \dots, 20$ e assumindo que $\theta(0) = 1$, tem-se que existem $2^{20} = 1048576$ trajetórias possíveis para o MJLS. As linhas grossas que limitam a área cinza são as trajetórias das extremidades do MJLS, com isso, todas as outras possíveis trajetórias estão contidas na região cinza. É possível notar, portanto, que algumas trajetórias são instáveis enquanto outras tendem à zero a medida que k aumenta (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005). O conceito de estabilidade em MJLS é discutido nas seções seguintes.

Figura 4 – Trajetórias do Exemplo 2.6.1.



Fonte: (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005).

2.6.1 Estabilidade em MJLS

Em MJLS existem três formas equivalentes de se definir estabilidade. São elas: estabilidade por média quadrática (do inglês, *mean square stability* — MSS), estabilidade estocástica e estabilidade exponencial por média quadrática. As três definições são conhecidas na literatura de controle estocástico como estabilidade pelo segundo momento (do inglês, *Second Moment Stability* — SMS) (GONÇALVES, 2014).

Conseqüentemente, este trabalho aborda a definição que estabelece o conceito de MSS (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005), a qual assegura que $\mathcal{E} [\|x(k)\|] \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ para qualquer condição inicial $x(0) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\theta_0 \in \mathbb{K}$.

O sistema (2.30) com perturbação w nula e entrada de controle u também nula, é MSS, se e somente se, existirem matrizes $P_i = P_i^T > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$, tais que as σ desigualdades de Lyapunov sejam simultaneamente satisfeitas (OLATE; MATIAS et al., 2016)

$$\sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} A_i^T P_j A_i - P_i < 0, \quad i \in \mathbb{K}. \quad (2.31)$$

2.6.2 Norma \mathcal{H}_∞ em MJLS

A norma \mathcal{H}_∞ , critério para minimizar a influência de ruídos no sistema, também foi descrita para MJLS. Seja o sistema (2.30) MSS, a norma \mathcal{H}_∞ da entrada w para a saída y é tal, se, e somente se, as desigualdades abaixo forem satisfeitas para todo $i \in \mathbb{K}$

(OLATE; MATIAS et al., 2016)

$$\begin{bmatrix} P_i & * & * & * \\ 0 & \gamma^2 I & * & * \\ P_{p_i} A_i & P_{p_i} B_{wi} & P_{p_i} & * \\ C_{wi} & D_{wi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.32)$$

em que $P_{p_i} = \sum_{j=1}^N p_{ij} P_j$, $\forall i \in \mathbb{K}$ e o símbolo $*$ indica um bloco simétrico nas LMIs.

2.7 MJLS com Matrizes de Probabilidades de Transição Incertas

Segundo Morais (2015), em alguns problemas de aplicação prática, o conhecimento exato das probabilidades ou taxas de transição é uma tarefa trabalhosa que pode demandar um alto custo, o que aumenta o interesse por métodos de análise ou síntese capazes de tratar o conhecimento incompleto desses elementos. Sendo assim, muitos pesquisadores assumem que a matriz de transição seja incerta e pertença a um domínio politópico.

Em outras palavras, para considerar cenários em que as matrizes de transição \mathbb{P} são afetadas por algum tipo de incerteza, os parâmetros das linhas incertas podem ser combinados em um domínio convexo. A incerteza pode ser representada por intervalos limitados, ou a probabilidade pode ser completamente desconhecida. Desta forma, a cadeia de Markov é representada por um politopo cujos vértices são os limites conhecidos.

Portanto, em relação às incertezas da MPT, este trabalho considera que cada elemento p_{ij} da matriz pode variar entre dois limites conhecidos, isto é, $p_{ij} \in [0, 1]$, ou ainda possa ser completamente desconhecido (BOUKAS, 2009; ZHANG; BOUKAS, 2009a; ZHANG; BOUKAS, 2009b; ZHANG; BOUKAS, 2009c). Empregando o procedimento sistemático em dois passos descrito em Morais et al. (2015), cada linha incerta é modelada por um simplex unitário de tal forma que permita uma representação genérica das incertezas abordadas, conforme a Definição 1.

Definição 1 (Simplex unitário). *O simplex unitário Λ_{N_r} de dimensão N_r é o conjunto dado por*

$$\Lambda_{N_r} = \left\{ \zeta = [\zeta_1 \ \cdots \ \zeta_{N_r}]^T \in \mathbb{R}^{N_r} : \sum_{i=1}^{N_r} \zeta_i = 1, \zeta_i \geq 0, \ i = 1, \dots, N_r \right\}.$$

Com isso, cada linha da MTP pode ser descrita por uma combinação linear convexa de vértices que satisfaçam $\sum_{j=1}^{\sigma} p_{ij} = 1$.

Após definido os vértices de cada uma das linhas, o arranjo pode ser combinado em um único domínio, conhecido como multi-simplex, composto pelo produto cartesiano dos simplexes (Definição 2), gerando a matriz de probabilidades de transição incerta $\mathbb{P}(\alpha)$.

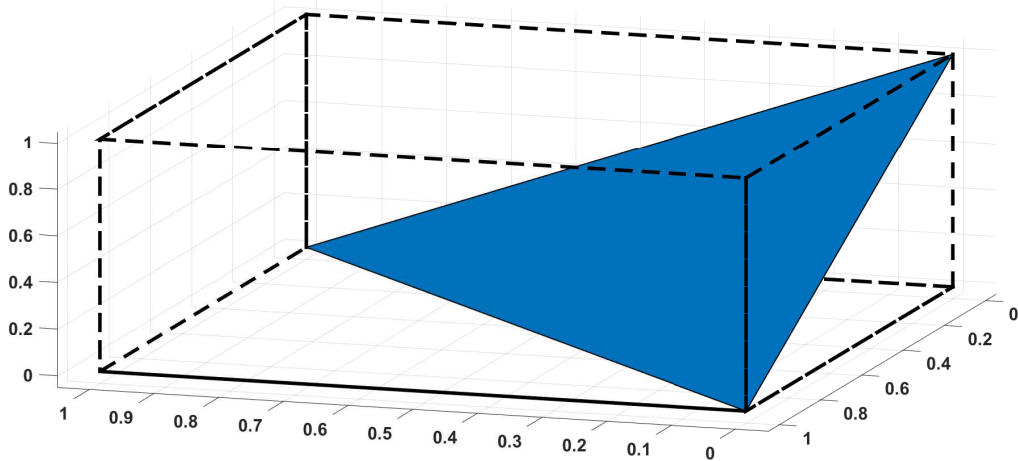
Definição 2 (Multi-simplex). *O multi-simplex Λ é o produto cartesiano $\Lambda_{N_1} \times \cdots \times \Lambda_{N_m}$ de um número finito de simplexos $\Lambda_{N_1}, \dots, \Lambda_{N_m}$. A dimensão de Λ é denotada pelo espaço \mathbb{R}^N , em que $N = N_1 + \cdots + N_m$. Um dado elemento α de Λ é decomposto pelo conjunto $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ de acordo com a estrutura de Λ . Consequentemente, cada elemento α_k em $\Lambda_k \in \mathbb{R}^{N_k}$, por sua vez, é decomposto em $(\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kN_k})$.*

Exemplo 2.7.1. Considere que as probabilidades de uma única linha da matriz de transição, organizada em um simplex, seja completamente desconhecida e dada por

$$p_1 = [[0 \ 1] \ [0 \ 1] \ [0 \ 1]] \quad (2.33)$$

Neste caso, os vértices do politopo podem ser representados por um cubo de arestas de tamanho um. A região em que $\sum_{j=1}^{\sigma} p_{ij} = 1$ definem o plano de cor azul, representado na Figura 5.

Figura 5 – Região de probabilidades da linha 1 de uma matriz de transição incerta dada em (2.33).



Fonte: Do autor.

A região pôde ser gerado pela ferramenta *MPT* (*Multi-Parametric Toolbox*) (HERCEG et al., 2013), que permite encontrar a restrição $\sum_{j=1}^{\sigma} p_{ij} \leq 1$ contida no politopo.

Cada ponto no plano azul tem a soma dos eixos igual a um e representa a região de probabilidades da matriz de transição. O conceito pode ser estendido para σ transições, que definem um hiperplano $\sigma \times \sigma$.

O lema a seguir apresenta uma extensão para a condição de análise de estabilidade (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005), descrita por condições LMIs dependentes de parâmetros, para um MJLS discreto com matriz de probabilidades de transição incerta $\mathbb{P}(\alpha)$ pertencente ao domínio multi-simplex.

Lema 1. *O sistema (2.30) com perturbação $w(k)$ nula, é robustamente estável por média quadrática se, e somente se, existirem matrizes dependentes de parâmetro $P_i(\alpha) = P_i(\alpha)^T > 0$ de grau arbitrário $g = (g_1, g_2, \dots, g_m) \in \mathbb{N}^m$, para todo $i \in \mathbb{K}$, tais que as σ desigualdades de Lyapunov sejam simultaneamente satisfeitas*

$$\sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij}(\alpha) A_i^T P_j(\alpha) A_i - P_i(\alpha) < 0, \quad \alpha \in \Lambda.$$

O lema a seguir, apresenta uma extensão do *Bounded Real Lemma* (SEILER; SENGUPTA, 2003) para MJLS discretos com matriz de probabilidades de transição pertencente ao domínio multi-simplex.

Lema 2 (*Bounded Real Lemma*). *O sistema (2.30), com B_i e D_i nulos, é MSS e γ é um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema se, e somente se, existem matrizes definidas positivas dependentes de parâmetro $P_i(\alpha)$ de grau arbitrário $g = (g_1, g_2, \dots, g_m) \in \mathbb{N}^m$, tais que para todo $i \in \mathbb{K}$ e para todo $\alpha \in \Lambda$, sendo $P_{p_i}(\alpha) = \sum_{j=1}^N p_{ij}(\alpha) P_j(\alpha)$, as seguintes desigualdades dependentes de parâmetro sejam simultaneamente satisfeitas*

$$\begin{bmatrix} A_i & B_{w_i} \\ C_i & D_{w_i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{p_i}(\alpha) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & B_{w_i} \\ C_i & D_{w_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{p_i}(\alpha) & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0.$$

2.8 Lema da Projeção

O Lema da Projeção, reproduzido a seguir, é utilizado para o desenvolvimento das condições LMIs apresentadas neste trabalho.

Lema 3 (Lema da Projeção). *Dadas uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e duas matrizes U e V com m colunas, existe uma matriz não estruturada X que satisfaz*

$$Q + U^T X V + V^T X^T U < 0, \quad (2.34)$$

se e somente se as seguintes desigualdades de projeção em relação a X são satisfeitas

$$N_v^T Q N_v < 0, \quad (2.35)$$

$$N_u^T Q N_u < 0, \quad (2.36)$$

sendo que N_u e N_v são matrizes arbitrárias cujas colunas formam uma base para o espaço nulo de U e V , respectivamente.

3 Resultados e Discussão

3.1 Controle \mathcal{H}_∞ em MJLS discretos com MTP incertas via LMIs com parâmetro escalar

A técnica proposta neste trabalho, que busca produzir resultados menos conservadores a partir da busca de um parâmetro escalar às desigualdades matriciais, é apresentada nesta seção. O Teorema 1 apresenta uma condição LMI para a síntese de um ganho robusto de realimentação dos estados com custo \mathcal{H}_∞ garantido.

Teorema 1. *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $X_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, de grau arbitrário $g = (g_1, g_2, \dots, g_m) \in \mathbb{N}^m$, matrizes $G_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Z_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e um dado parâmetro escalar $\xi \in (-1, 1)$, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas, para $i \in \mathbb{K}$,*

$$\begin{bmatrix} \xi \Upsilon_i \bar{A}_i \mathcal{I} + (\xi \Upsilon_i \bar{A}_i \mathcal{I})^T - \text{Diag}(\Upsilon_i) \text{Diag}(\mathcal{X}) & * & * & * \\ \bar{A}_i^T \Upsilon_i^T - \xi G_i \mathcal{I} & X_i(\alpha) - G_i - G_i^T & * & * \\ \xi(C_i G_i + D_i Z_i) \mathcal{I} & C_i G_i + D_i Z_i & -\gamma^2 I & * \\ B_w^T \Upsilon_i^T & 0 & -D_w^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.1)$$

em que

$$\Upsilon_i = \begin{bmatrix} p_{i1}(\alpha) I \\ p_{i2}(\alpha) I \\ \vdots \\ p_{i\sigma}(\alpha) I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \\ \vdots \\ X_\sigma(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I} = \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix},$$

para todo $p_{ij}(\alpha) \neq 0$ e $i, j \in \mathbb{K}$, $\bar{A}_i = A_i G_i + B_i Z_i$, então $K_i = Z_i G_i^{-1}$ é um ganho por realimentação de estados dependente de modo, associado à lei de controle $u(k) = K_i x(k)$, que estabiliza por média quadrática o sistema (2.30) e γ é um limitante superior (custo garantido) para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada.

Prova. Note que (3.1) pode ser reescrita, pelo Lema da Projeção (Lema 3), como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\text{Diag}(\Upsilon_i) \text{Diag}(\mathcal{X}) & * & * & * \\ 0 & X_i(\alpha) & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * \\ B_w^T \Upsilon_i^T & 0 & D_w^T & -I \end{bmatrix}}_{\text{Q}} + \underbrace{\left[A_{c_i}^T \Upsilon_i^T \quad -I \quad C_{c_i} \quad 0 \right]^T}_{\text{V}} G_i \underbrace{\left[\xi \mathcal{I} \quad I \quad 0 \quad 0 \right]}_{\text{U}} + \underbrace{\left[\xi \mathcal{I} \quad I \quad 0 \quad 0 \right]^T}_{\text{U}} G_i^T \underbrace{\left[A_{c_i}^T \Upsilon_i^T \quad -I \quad C_{c_i} \quad 0 \right]}_{\text{U}} < 0,$$

em que $A_{c_i} = A_i + B_i K_i$ e $C_{c_i} = C_i + D_i K_i$. Escolhendo

$$N_u = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A_{c_i}^T \Upsilon_i^T & C_{c_i} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad N_v = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -\xi \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

então, pelo Lema 3, o produto $N_u^T Q N_u < 0$ é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_i A_{c_i} X_i A_{c_i}^T \Upsilon_i^T - \text{Diag}(\Upsilon_i) \text{Diag}(\mathcal{X}) & * & * \\ C_{c_i} X_i A_{c_i}^T \Upsilon_i^T & C_{c_i} X_i(\alpha) C_{c_i} - \gamma^2 I & * \\ B_w^T \Upsilon_i^T & D_w^T & -I \end{bmatrix} < 0.$$

Aplicando o complemento de Schur na expressão acima, tem-se

$$\begin{bmatrix} -X_i^{-1}(\alpha) & * & * & * \\ \Upsilon_i A_{c_i} & -\text{Diag}(\Upsilon_i) \text{Diag}(\mathcal{X}) & * & * \\ C_{c_i} & 0 & -\gamma^2 I & * \\ 0 & B_w^T \Upsilon_i^T & D_w^T & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.2)$$

Novamente, aplicando o complemento de Schur, com respeito ao termo (2,2), pode-se reescrever (3.2) como

$$\begin{bmatrix} A_{c_i}^T P_{p_i}(\alpha) A_{c_i} - P_i(\alpha) & * & * \\ C_{c_i} & -\gamma^2 I & * \\ B_w^T P_{p_i}(\alpha) A_{c_i}^T & D_w^T & -I + B_w^T P_{p_i}(\alpha) B_w \end{bmatrix} < 0,$$

sendo empregadas as seguintes transformações $\Upsilon_i^T \text{Diag}(\Upsilon_i)^{-1} \text{Diag}(\mathcal{X})^{-1} \Upsilon_i = P_{p_i}(\alpha)$ e $X_i^{-1}(\alpha) = P_i(\alpha)$. Aplicando o complemento de Schur e, em seguida, pré e pós-multiplicando o resultado por $\text{Diag}(\gamma I, \gamma I, \gamma I, \gamma^{-1} I)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} -P_i(\alpha) & * & * & * \\ P_{p_i}(\alpha) A_{c_i} & -P_{p_i}(\alpha) & * & * \\ 0 & B_w^T P_{p_i}(\alpha) & -\gamma^2 I & * \\ C_{c_i} & 0 & D_w & -I \end{bmatrix} < 0.$$

Finalmente, aplicando o complemento de Shur, recursivamente, chega-se ao *Bounded Real Lemma* (Lema 2).

A seguir, utilizando a condição (2.35) do Lema 3, tem-se

$$\begin{bmatrix} -\text{Diag}(\Upsilon_i) \text{Diag}(\mathcal{X}) + \text{Diag}(\xi^2 X_i(\alpha)) & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * \\ B_w^T(\Upsilon_i)^T & -D_w & -I \end{bmatrix} < 0.$$

Da condição de negatividade, a partir do primeiro menor principal líder da desigualdade anterior, tem-se que

$$\begin{aligned}
 & - \text{Diag}(\Upsilon_i) \text{Diag}(\mathcal{X}) + \text{Diag}(\xi^2 X_i(\alpha)) = \\
 & \quad \text{Diag}(-p_{i1}(\alpha)X_1(\alpha) + \xi^2 X_i(\alpha) - p_{i2}(\alpha)X_2(\alpha) \\
 & \quad \quad + \xi^2 X_i(\alpha) - \dots - p_{i\sigma}(\alpha)X_\sigma(\alpha) + \xi^2 X_i(\alpha)) < 0.
 \end{aligned}$$

Se todos os termos diagonais devem ser definidos negativos, então a soma de todos ainda atende a restrição que, por sua vez, também deve ser válido para a soma de todo $i \in \mathbb{K}$, portanto

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{\sigma} \left[-p_{i1}(\alpha)X_1(\alpha) + \xi^2 X_i(\alpha) - p_{i2}(\alpha)X_2(\alpha) + \right. \\
 \left. \xi^2 X_i(\alpha) - \dots - p_{i\sigma}(\alpha)X_\sigma(\alpha) + \xi^2 X_i(\alpha) \right] < 0.
 \end{aligned}$$

Expandido o somatório, pode-se reescrever

$$\begin{aligned}
 & - (p_{11}(\alpha) + p_{21}(\alpha) + \dots + p_{\sigma 1}(\alpha) + \sigma \xi^2) X_1(\alpha) - \\
 & \quad \dots - (p_{1\sigma}(\alpha) + p_{2\sigma}(\alpha) + \dots + p_{\sigma\sigma}(\alpha) + \sigma \xi^2) X_\sigma(\alpha) < 0.
 \end{aligned}$$

Dado que $X_i(\alpha) > 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$, pode-se generalizar a expressão anterior, $\forall j \in \mathbb{K}$, da forma

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^{\sigma} p_{ij}(\alpha) + \sigma \xi^2 < 0 \\
 & - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\sigma} p_{ij}(\alpha)}{\sigma}} < \xi < \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\sigma} p_{ij}(\alpha)}{\sigma}}. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Portanto, obtêm-se possíveis valores de ξ em que as condições em (3.1) são válidas. Como o valor máximo que cada elemento de uma coluna de \mathbb{P} pode ter é 1, então pode-se simplificar (3.3) e buscar o parâmetro escalar no intervalo $(-1, 1)$, ou seja, $\xi \in (-1, 1)$. \square

Note que a busca pelo parâmetro escalar ξ representa um grau de liberdade para a factibilidade do problema. Sendo assim, é possível testar soluções em um conjunto predefinido de valores de ξ ou ainda realizar uma busca unidimensional.

A disponibilidade do modo de operação do sistema pode ser limitada por custo, restrições físicas, dificuldades de medição, entre outros fatores. Com isso, quando alguns modos de operação não são totalmente acessíveis, pode-se sintetizar um controlador que dependa parcialmente dos modos de operação do sistema. Para lidar com este cenário, o corolário a seguir considera o conjunto $\mathbb{Q} = \{1, 2, \dots, \sigma_c\}$, $\sigma_c \leq \sigma$, que contém os índices q dos *clusters* do sistema, e o conjunto \mathbb{U}_q , que contém os modos pertencentes ao *clusters* q , os quais são agrupados de tal forma que $\mathbb{K} \equiv \cup_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{U}_q$ e $\cap_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{U}_q \equiv \emptyset$ (MORAIS et al., 2015).

Corolário 1. *Substituindo, respectivamente, G_i e Z_i por G_q e Z_q , $\forall q \in \mathbb{Q}$ e $\forall i \in \mathbb{U}_q \subset \mathbb{K}$, no Teorema 1, pode-se obter ganhos parcialmente dependentes de modo $K_q = Z_q G_q^{-1}$ associados à lei de controle $u(k) = K_q x(k)$ e um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada dado por γ .*

Note que o desenvolvimento apresentado no Teorema 1 e no Corolário 1 é feito considerando a minimização do custo garantido \mathcal{H}_∞ . Por outro lado, caso deseje-se obter controladores robustos que apenas garantam a estabilidade do sistema (2.30) por média quadrática, o corolário, a seguir, derivado do Teorema 1, pode ser utilizado.

Corolário 2. *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $X_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, de grau arbitrário $g = (g_1, g_2, \dots, g_m) \in \mathbb{N}^m$, matrizes $G_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Z_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e um dado parâmetro escalar $\xi \in (-1, 1)$, tais que as LMIs (3.1), removendo-se a terceira e quarta linhas e colunas, sejam verificadas, $\forall i \in \mathbb{K}$, então $K_i = Z_i G_i^{-1}$ é um ganho por realimentação de estados dependente de modo, associado à lei de controle $u(k) = K_i x(k)$, que estabiliza por média quadrática o sistema (2.30).*

Note que fazendo $\xi = 0$, a condição apresentada recupera outras condições presentes na literatura, tendo-as como casos particulares. Assim, dado que a condição proposta possui um espaço de busca por soluções mais abrangente, os resultados obtidos são sempre melhores ou iguais, mas nunca piores.

4 Experimentos Numéricos

O objetivo dos experimentos numéricos é comparar o Teorema 1 com a condição de síntese \mathcal{H}_∞ em Gonçalves, Fioravanti e Geromel (2012) e Morais et al. (2015). Resultados menos conservadores podem ser obtidos ao testar o parâmetro escalar ξ dentro do intervalo $(-1, 1)$, por consequência, é possível, por exemplo, verificar a diferença entre o custo garantido e a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada. Um segundo tipo de experimento consiste em aplicar um parâmetro adicional β multiplicado à matriz de estados e buscar, por meio de um procedimento numérico, qual o máximo valor do parâmetro β possível para cada condição, com o intuito de verificar o conservadorismo das condições testadas. Todas as rotinas foram implementadas em Matlab, utilizando Yalmip (LÖFBERG, 2004), SeDuMi (STURM, 1999) e MPT (HERCEG et al., 2013).

4.1 MJLS com MPT precisamente conhecida

Exemplo 4.1.1. Para ilustrar como MJLS são usados em problemas práticos, considerou-se o caso mostrado em Costa, Fragoso e Marques (2005). A abordagem por cadeia de Markov está associada com o desempenho *esperado*, em termos probabilísticos. Isso significa que a partir de uma sequência infavorável de modos de operação, o desempenho pode ser precário, porém, a longo prazo, com um maior número de sequências, é provável que apresente os melhores resultados possíveis.

Sendo assim, um controlador para uma planta solar localizada em *Dagget, California* foi proposto em Costa, Fragoso e Marques (2005), cujo interesse principal é controlar a vazão de água para que ela possa ser mantida em um limite de temperatura. Trata-se de um sistema que contém um conjunto de espelhos que redirecionam os raios solares para aquecerem o fluxo de água que passa por um tanque. A partir do histórico das condições atmosféricas, o sistema pode ser modelado como uma cadeia de Markov com dois modos: 1) Ensolarado, e 2) Nublado, uma vez que a dinâmica do sistema depende fortemente da insolação instantânea, que pode ser prejudicada, por exemplo, devido a mudanças na posição das nuvens.

Pode-se considerar como um modelo razoável pois, não se sabe como serão as condições de tempo no futuro mas se sabe as condições presentes e as probabilidades de um tempo ensolarado ou nublado em um futuro próximo (COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2005). O problema foi modelado como um simples sistema de primeira ordem e foi modificado para acrescentar perturbações, cujas matrizes da dinâmica do processo são dadas por

$$A_1 = [0,8353], \quad B_1 = [0,0915], \quad B_{w_1} = [0,05], \quad C_1 = [0,0355],$$

$$D_1 = [1], \quad D_{w_1} = [0,2].$$

$$A_2 = [0,9646], \quad B_2 = [0,0915], \quad B_{w_2} = [0,03], \quad C_2 = [0,0355],$$

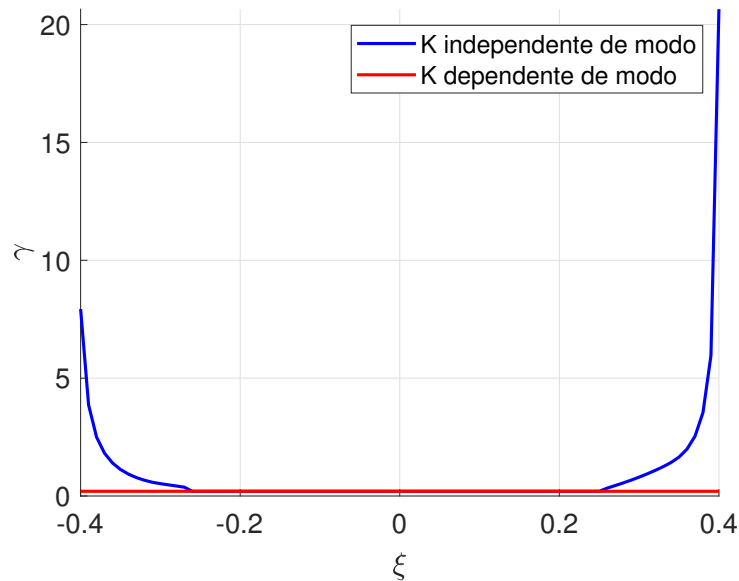
$$D_2 = [1], \quad D_{w_2} = [0,1].$$

A partir do histórico coletado, estimou-se que o tempo médio de um período nublado era de 2,3 min enquanto o do período ensolarado, 4,3 min. A partir disso, a matriz de transição foi obtida, com tempo de amostragem de seis segundos,

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,9767 & 0,0233 \\ 0,0435 & 0,9565 \end{bmatrix}.$$

O resultado da norma em função do parâmetro escalar ξ é mostrado na Figura 6.

Figura 6 – Resultados do Exemplo 4.1.1.



Fonte: Do autor.

Neste caso, as melhores soluções para o caso de um único ganho K para os dois modos e também para um ganho dependente de modo são em torno de $\xi = 0$. Essa conclusão já era esperada, pois para o caso em que um controlador dependente de modo é desejado, a condição com $\xi = 0$ é necessária e suficiente. Os próximos exemplos mostram que melhores resultados podem ser obtidos ao testar a condição proposta em valores de $\xi \neq 0$, quando deseja-se obter controladores independentes de modo ou em *clusters*.

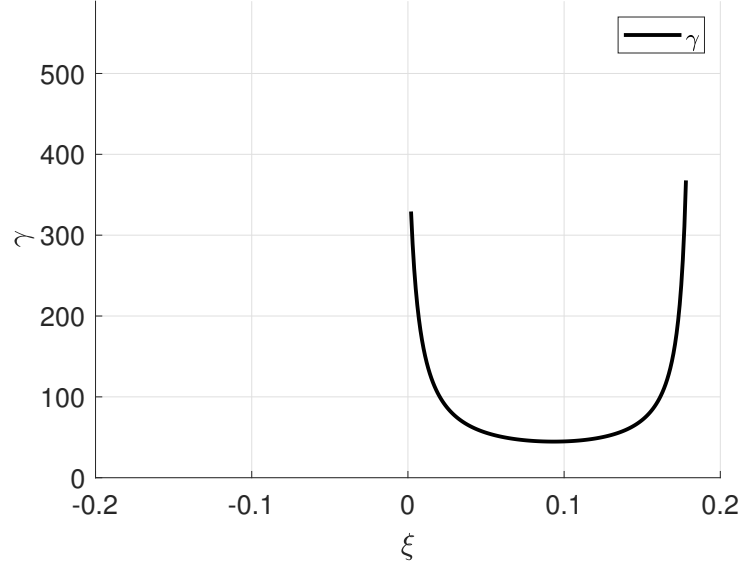
Exemplo 4.1.2. Considere o exemplo numérico a seguir adaptado de Che e Wang (2010) com quatro modos, todos instáveis em malha aberta e dado por

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} 1,2458 & 1,5853 & 0,2032 \\ 0,2586 & 1,3509 & 1,303 \\ 1,4742 & 1,5595 & 1,252 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0,8411 & 0,7048 & 1,6731 \\ 1,6861 & 2,1354 & 0,2802 \\ 1,9038 & 1,0191 & 0,6718 \end{bmatrix}, \\
A_3 &= \begin{bmatrix} 0,6397 & 0,891 & 1,8837 \\ 1,7723 & 0,5213 & 1,452 \\ 1,5856 & 1,9217 & 0,7628 \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} 0,1313 & 0,436 & 0,2699 \\ 0,1137 & 0,2767 & 0,5481 \\ 0,7679 & 0,9521 & 0,2643 \end{bmatrix}, \\
B_1 &= \begin{bmatrix} 0,193 & 0,4204 \\ 0,7359 & 0,0346 \\ 0,5073 & 0,9077 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0,4164 & 0,0244 \\ 0,8297 & 0,4366 \\ 0,09 & 0,8416 \end{bmatrix}, \\
B_3 &= \begin{bmatrix} 0,2458 & 0,7409 \\ 0,2501 & 0,158 \\ 0,1709 & 0,7205 \end{bmatrix}, & B_4 &= \begin{bmatrix} 0,3458 & 0,6009 \\ -0,1101 & 0,238 \\ 0,3009 & 0,2105 \end{bmatrix}, \\
B_{w_1} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0 \\ -0,2 & 0 \end{bmatrix}, & B_{w_2} &= \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0 \\ -0,1 & 0 \end{bmatrix}, \\
B_{w_3} &= \begin{bmatrix} 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0 \\ -0,2 & 0 \end{bmatrix}, & B_{w_4} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0 \end{bmatrix}, \\
C_1 &= [0,3815 \quad 0,692 \quad 0,7183], & C_2 &= [0,0591 \quad 0,8258 \quad 0,4354], \\
C_3 &= [0,5204 \quad 0,801 \quad 0,9708], & C_4 &= [0,6995 \quad 0,3081 \quad 0,8767], \\
D_1 &= D_2 = D_3 = D_4 = [0 \quad 0], \\
D_{w_1} &= [0 \quad 0,3], & D_{w_2} &= [0 \quad 0,5], \\
D_{w_3} &= [0 \quad 0,1], & D_{w_4} &= [0 \quad 0,2], \\
\mathbb{P} &= \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Para o caso em que os ganhos são independentes de modo, utilizando $g = (0,0,0,0)$, encontrou-se $\gamma = 457,5187$ empregando a condição apresentada em Morais et al. (2015). Por outro lado, o ganho retornado pelo Corolário 2 leva ao custo garantido $\gamma = 44,6791$ ao fazer $\xi = 0,0950$, o que corresponde a apenas 9,76% do resultado obtido pelo método

anterior, ou seja, uma melhoria de 90,23% mostrando a redução do conservadorismo da solução. Os resultados são resumidos na Figura 7.

Figura 7 – Custo garantido γ em função do parâmetro ξ para o sistema do Exemplo 4.1.2.



Fonte: Do autor.

Exemplo 4.1.3. Considere o MJLS precisamente conhecido em (BOUKAS, 2009, Exemplo 4.2) incluindo o parâmetro β nas matrizes de estados, em que os modos de operação do sistema são agrupados em dois *clusters*, $U_1 = \{1\}$ e $U_2 = \{2,3\}$, dado por

$$A_1 = \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$B_{w1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \quad B_{w2} = B_{w3} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [1 \ 0 \ 0], \quad C_2 = C_3 = [0,1 \ 0 \ 0],$$

$$D_1 = [0,1], \quad D_2 = [0,2], \quad D_3 = [0,3],$$

$$D_{w1} = D_{w2} = D_{w3} = 0,$$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 & 0,0 \\ 0,5 & 0,0 & 0,5 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

Para este caso, tem-se que a matriz de Lyapunov utilizada é independente de parâmetro, isto é, $g = 0$. Escolhendo valores de $\beta = 1,30$ e $1,35$, obtêm-se os resultados reportados na Tabela 2, a qual mostra os valores obtidos pelo Corolário 1, assim como pelas metodologias apresentadas em Gonçalves, Fioravanti e Geromel (2012) e Morais et al. (2015). Note que, em termos do custo garantido, os valores obtidos pelo Corolário 1 são menores e mais próximos da norma do sistema em malha fechada do que resultados obtidos por Gonçalves, Fioravanti e Geromel (2012) e Morais et al. (2015), sendo que para as duas últimas técnicas são observados os mesmos valores, mostrando a superioridade da condição proposta. Adicionalmente, o aumento do parâmetro β ocasiona a elevação da norma, uma vez que o sistema se torna mais instável. Por exemplo, ao fazer $\beta = 1,4079$, as condições em Gonçalves, Fioravanti e Geromel (2012) e Morais et al. (2015) são infactíveis, enquanto ainda apresenta solução pelo Corolário 1, escolhendo $\xi = -0,60$.

Outro fator importante a ser analisado é o número de variáveis escalares necessárias para solucionar o problema. Utilizando a condição em Gonçalves, Fioravanti e Geromel (2012) emprega-se um total de 124 variáveis. Por outro lado, o método abordado em Morais et al. (2015) e o Teorema 1 utilizam o mesmo número de variáveis escalares, isto é, 43.

Tabela 2 – Resultados do Exemplo 4.1.3

Método	β	γ	\mathcal{H}_∞
Gonçalves, Fioravanti e Geromel (2012)		0,6822	0,3834
Morais et al. (2015)	1,30	0,6822	0,3834
Corolário 1 ($\xi = -0,20$)		0,6439	0,3762
Gonçalves, Fioravanti e Geromel (2012)		1,3400	0,4565
Morais et al. (2015)	1,35	1,3400	0,4565
Corolário 1 ($\xi = -0,20$)		1,2488	0,4525

4.2 MJLS com MPT incerta

Os próximos exemplos mostram que com o método proposto é possível encontrar melhores resultados ao empregar a condição em sistemas com matrizes de probabilidades de transição incertas.

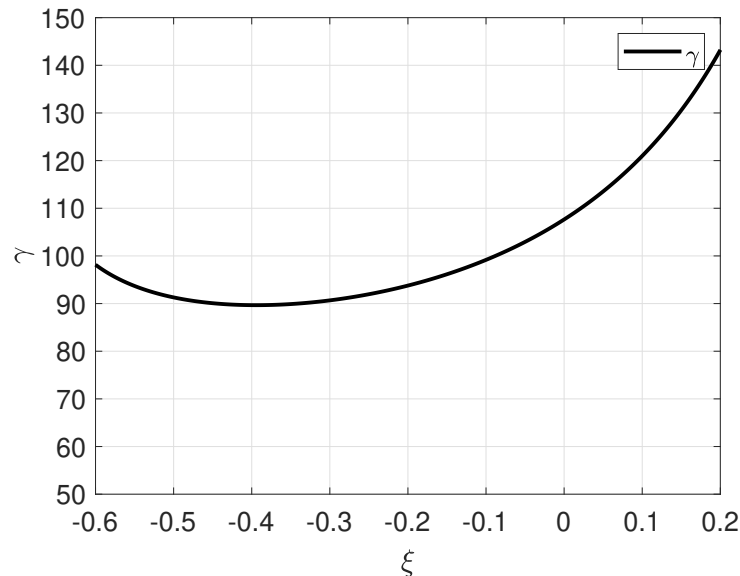
Exemplo 4.2.1. Neste exemplo, controladores \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados independentes de modo são projetados para um MJLS com dois modos de operação e matriz

de probabilidade de transição incerta obtido em Oliveira et al. (2009, Exemplo 1), o qual é dado por

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 B_{w1} &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix}, & B_{w2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{bmatrix}, \\
 C_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & D_1 = D_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
 D_{w1} = D_{w2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbb{P} &= \left[\begin{array}{cc} [0,4 & 0,9] & [0,1 & 0,6] \\ [0,3 & 0,8] & [0,2 & 0,7] \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Na Figura 8, ilustram-se os resultados obtidos com $g = (1,1)$ para o Corolário 1. Note que melhores valores para o custo garantido \mathcal{H}_∞ podem ser obtidos com a variação do parâmetro escalar ξ . Por exemplo, o ganho com $\xi = 0$ fornece o mesmo resultado obtido por meio de Morais et al. (2015), com $g = (1,1)$, o que leva ao custo garantido $\gamma = 107,6481$. Em contrapartida, ao fazer $\xi = -0,394$ no Corolário 1, ocorre o menor custo, o qual é reduzido para $\gamma = 89,667$: uma melhoria de 20,05%. Finalmente, é digno de nota que a condição em Gonçalves, Fioravanti e Geromel (2012) não apresenta resultado factível, uma vez que emprega apenas matrizes de Lyapunov independentes de parâmetro.

Figura 8 – Custo garantido γ em função do parâmetro ξ para o sistema do Exemplo 4.2.1.



Fonte: Do autor.

Exemplo 4.2.2. Neste exemplo, é investigado a aplicação do método proposto para a minimização do custo garantido e compará-los com a norma \mathcal{H}_∞ do MJLS em malha fechada, a qual é obtida empregando uma condição de análise com graus elevados. Considere um MJLS, gerado aleatoriamente, composto por dois modos de operação e com matriz de probabilidades de transição incerta representado por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,224 & -0,280 \\ 0,560 & -0,560 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,056 & -0,182 \\ 0,560 & -0,784 \end{bmatrix},$$

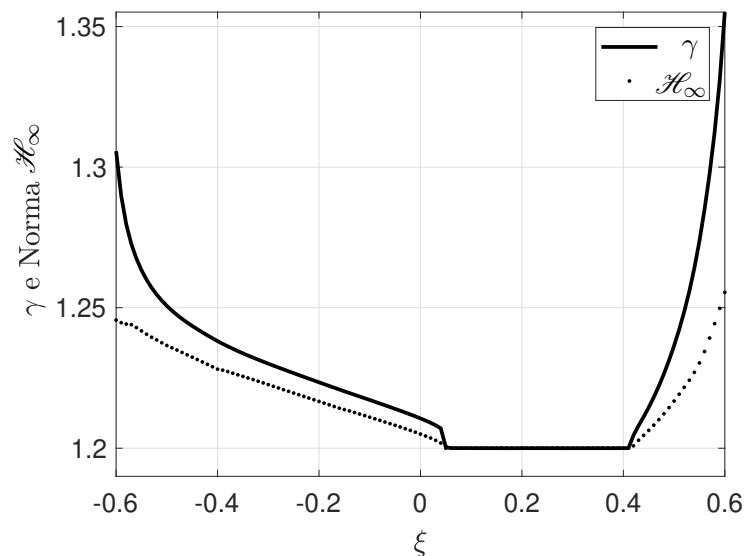
$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_{w_1} = B_{w_2} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,5 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = [0,5 \ 0], \quad D_1 = D_2 = [0,8],$$

$$D_{w_1} = D_{w_2} = [1,2], \quad \mathbb{P} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 & 0,5 \\ 0,3 & 0,5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 0,6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Utilizando $g = (1,1)$ e $\xi = 0$, no Teorema 1, tem-se que $\gamma = 1,2092$, que também é o mesmo valor obtido utilizando a condição em Morais et al. (2015) com $g = (1,1)$, e a norma \mathcal{H}_∞ , por sua vez, é de 1,2031. Em contrapartida, empregando ξ entre 0,02 e 0,42 no Teorema 1, o custo garantido obtido é a própria norma calculada, resultando em $\gamma = 1,2000$, conforme Figura 9 e resumido na Tabela 3. Note ainda que se for aplicada a condição de Gonçalves, Fioravanti e Geromel (2012) obtém-se um custo garantido igual a 1,2340, valor superior aos encontrados pela condição proposta.

Figura 9 – Limitante superior γ e a norma \mathcal{H}_∞ em malha fechada em função do parâmetro ξ computados, respectivamente, pelas condições do Teorema 1 e uma condição de análise com graus elevados.



Fonte: Do autor.

Tabela 3 – Resultados do Exemplo 4.2.2.

Método	γ	\mathcal{H}_∞
Gonçalves, Fioravanti e Geromel (2012)	1,2340	1,2255
Morais et al. (2015)	1,2092	1,2031
Teorema 1	1,2000	1,2000

Exemplo 4.2.3. Considere um MJLS discreto com dois modos de operação gerados aleatoriamente, cujas matrizes são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,32 & -0,40 \\ 0,80 & -0,80 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \beta \begin{bmatrix} 0,08 & -0,26 \\ 0,80 & -1,12 \end{bmatrix},$$

em que B_1 e B_2 são as matrizes reportadas no Exemplo 4.2.2 e β é um parâmetro escalar variável. Além disso, considera-se que a matriz de probabilidades de transição é incerta e dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} [0.30 \ 0.65] & [0.45 \ 0.70] \\ [0.15 \ 0.50] & [0.60 \ 0.80] \end{bmatrix}.$$

O objetivo desse exemplo é analisar quais são os valores máximos que β pode assumir tal que o sistema seja estabilizável tanto para controladores dependentes quanto para independentes de modo, empregando as condições do Corolário 2 e a metodologia apresentada em Morais et al. (2015), adaptada para estabilização de MJLS, todas empregando matrizes de Lyapunov independentes de parâmetro. Os valores de β_{\max} foram obtidos por bisseção, os quais são apresentados na Tabela 4. Além disso, para o Corolário 2, foram testados 19 valores igualmente espaçados no intervalo $(-0,9, 0,9)$ e são apresentados apenas os melhores resultados obtidos. Note que o emprego do parâmetro escalar permite estabilizar uma família maior de sistemas, comprovando a superioridade da técnica proposta.

Tabela 4 – Resultados do Exemplo 4.2.3.

	Método	β_{\max}
Dependente de Modo	Morais et al. (2015)	19,6745
	Corolário 2 ($\xi = -0,2$)	21,1865
Independente de Modo	Morais et al. (2015)	7,1251
	Corolário 2 ($\xi = -0,2$)	7,7725

5 Conclusões

Este trabalho estudou MJLS a tempo discreto com matriz de probabilidades de transição incertas. Novas condições LMIs para a estabilidade estocástica e o controle \mathcal{H}_∞ foram propostas, de acordo com a existência de um ganho robusto via realimentação dos estados.

Devido às limitações existentes sobre a medição do modo de operação do MJLS, a condição proposta é adequada mesmo sob o conhecimento parcial ou inexistente dos modos. Além disso, empregando a modelagem de incertezas no domínio multi-simplex, é possível estabilizar MJLS com probabilidades de transição desconhecidas, construindo matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetros. Dessa forma, controladores robustos dependentes, parcialmente dependentes ou independentes de modo são projetados de tal forma a assegurar a estabilidade estocástica e o custo \mathcal{H}_∞ .

A introdução de um parâmetro escalar ξ na condição apresentada possibilitou um maior grau de liberdade, ampliando o espaço de busca por soluções factíveis. Sendo assim, a nova condição é capaz de estabilizar uma maior quantidade de sistemas, além de reduzir o custo \mathcal{H}_∞ , produzindo resultados menos conservadores do que condições padrão da literatura, conforme investigado pelos experimentos numéricos.

A elaboração de algoritmos para a análise de estabilidade e síntese de controladores em sistemas de controle via LMIs permitiu estudar, por meio de simulações, determinados exemplos que foram significativos para a compreensão dos métodos abordados. Com isso, problemas de otimização convexa puderam ser computados de maneira eficiente e o uso de figuras para análise do assunto foi consistente para avaliar de modo intuitivo os casos evidenciados.

Como trabalhos futuros, propõe-se estudar LMIs utilizando funções de Lyapunov com diferenças de ordem superior dos estados e introduzir incertezas nas matrizes dos modos do MJLS.

Artigo publicado em congresso nacional

MAIA, J. C. F.; FIORE, W. L.; BRAGA, M. F. Controle por realimentação de estados \mathcal{H}_∞ para MJLS discretos com matrizes de probabilidade de transição incertas via LMIs com parâmetro escalar. *XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Ouro Preto, 2019.

Referências

- AFFONSO, C. d. M. et al. *Aplicação de técnicas de controle robusto baseadas em LMIs para sistemas elétricos de potência*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, 1999. 7, 8
- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. D.; PERES, P. L. Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems. In: SN. *XIX Brazilian Conference on Automation (CBA 2012)*. [S.l.], 2012. p. 2298–2305. 1
- ASSUNÇÃO, E. R. *Redução \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de modelos através de desigualdades matriciais lineares: Otimização Local e Global*. Tese (Doutorado) — UNICAMP, Campinas, SP, 2000. 11
- BOUKAS, E. K. \mathcal{H}_∞ control of discrete-time Markov jump systems with bounded transition probabilities. *Optimal Control Applications and Methods*, Wiley Online Library, v. 30, n. 5, p. 477–494, 2009. 16, 26
- BOYD, S. et al. History of linear matrix inequalities in control theory. In: IEEE. *Proceedings of 1994 American Control Conference-ACC'94*. [S.l.], 1994. v. 1, p. 31–34. 4
- BOYD, S. et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: SIAM, 1994. v. 15. 4
- CABELLO, R. V. C. *Projeto de controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida e compensação de saturação em estruturas flexíveis*. Tese (Doutorado) — UNICAMP, Campinas, SP, 2014. 2
- CHE, W.-W.; WANG, J.-L. Static output feedback \mathcal{H}_∞ control for discrete-time markov jump linear systems. In: IEEE. *Control and Automation (ICCA), 2010 8th IEEE International Conference on*. [S.l.], 2010. p. 2278–2283. 25
- COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; MARQUES, R. P. *Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems*. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 2005. 1, 6, 14, 15, 17, 23
- GONÇALVES, A. P. C. *Introdução aos Sistemas de Controle Através da Rede*. 2014. Disponível em: <dsce.fee.unicamp.br/~alimpe/ia361_slides_2_2014.pdf>. 15
- GONÇALVES, A. P. C.; FIORAVANTI, A. R.; GEROMEL, J. C. \mathcal{H}_∞ robust and networked control of discrete-time MJLS through LMIs. *J. Franklin Inst.*, 2012. 23, 27, 28, 29, 30
- HERCEG, M. et al. Multi-Parametric Toolbox 3.0. In: *Proc. of the European Control Conference*. Zürich, Switzerland: [s.n.], 2013. p. 502–510. <<http://control.ee.ethz.ch/~mpt>>. 17, 23
- LEITE, V. J. et al. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, SciELO Brasil, v. 15, n. 1, p. 24–40, 2004. 8, 10
- LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: . Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289. <<http://yalmip.github.io>>. 4, 23

- LOPES, J. C. *Controle \mathcal{H}_2 \mathcal{H}_∞ de estruturas flexíveis através de desigualdades matriciais lineares com alocação de polos*. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP, Campinas, SP, 2005. 10
- MAIA, J. C. F.; FIORE, W. L.; BRAGA, M. F. Controle por realimentação de estados \mathcal{H}_∞ para MJLS discretos com matrizes de probabilidade de transição incertas via LMIs com parâmetro escalar. *XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Ouro Preto, 2019. 31
- MONTAGNER, V. F. et al. Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados linear variante com parâmetros: uma abordagem LMI. In: *Anais do Congresso Brasileiro de Automática*. [S.l.: s.n.], 2004. 11
- MORAIS, C. F. *Controle e filtragem de sistemas lineares incertos sujeitos a saltos markovianos usando LMIs*. Tese (Doutorado) — UNICAMP, Campinas, SP, 2015. 2, 16
- MORAIS, C. F. et al. Robust \mathcal{H}_∞ state feedback control for MJLS with uncertain probabilities. *Automatica*, Elsevier, v. 52, n. 2, p. 317–431, February 2015. 16, 21, 23, 25, 27, 28, 29, 30
- NISE, N. S. Control system engineering, John Wiley & Sons. Inc, New York, 2011. 1
- OGATA, K.; YANG, Y. *Modern control engineering*. [S.l.]: Prentice Hall India, 2002. v. 4. 5
- OLATE, P.; MATIAS, J. et al. *Trade-off entre norma \mathcal{H}_∞ e transmissões globais aplicado a projetos de filtragem através da rede*. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP, Campinas, SP, 2016. 15, 16
- OLIVEIRA, R.; PERES, P. L. Condições para a existência de uma função de Lyapunov linearmente dependente de parâmetros para estabilidade de sistemas lineares incertos. In: *Anais do XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (Sao Paulo, SP)*. [S.l.: s.n.], 2005. 2
- OLIVEIRA, R. C. et al. Robust stability, \mathcal{H}_2 analysis and stabilisation of discrete-time markov jump linear systems with uncertain probability matrix. *International Journal of Control*, v. 82, n. 3, p. 470–481, 2009. 28
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; BLIMAN, P.-A.; PERES, P. L. D. LMIs robustas com parâmetros em um multi-simplex: Existência de soluções e aplicações em estabilidade de sistemas lineares. In: . Juiz de Fora, MG, Brasil: [s.n.], 2008. 2
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; BLIMAN, P.-A.; PERES, P. L. D. Robust LMIs with parameters in multi-simplex: Existence of solutions and applications. In: . Cancun, Mexico: [s.n.], 2008. p. 2226–2231. 2
- PERES, P. L. D.; OLIVEIRA, R. C. L. F. *Análise e controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)*. 2018. Disponível em: <dt.fee.unicamp.br/~ricfow/IA892/ia892.htm>. 5
- PESSIM, P. S.; OLIVEIRA, B. d.; FERON, L. M. J. Análise de estabilidade de sistemas incertos usando funções de Lyapunov com derivadas de ordem superior dos estados. *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Porto Alegre, 2017. 6

- SCHERERA, C. W.; WEILANDB, S. *Linear Matrix Inequalities in Control*. Pfaffenwaldring: SCR SimTech, 2010. 4, 5
- SEILER, P.; SENGUPTA, R. A bounded real lemma for jump systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 48, n. 9, p. 1651–1654, 2003. 18
- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. v. 11, n. 1–4, p. 625–653, 1999. <<http://sedumi.ie.lehigh.edu/>>. 23
- TÔRRES, L. A. B. *Teoria de Estabilidade de Lyapunov*. 2019. Disponível em: <cpdee.ufmg.br/~torres/wp-content/uploads/2018/02/Estabilidade_Lyapunov.pdf>. 6
- ZHANG, L.; BOUKAS, E. K. \mathcal{H}_∞ control for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, v. 19, n. 8, p. 868–883, July 2009. 16
- ZHANG, L.; BOUKAS, E. K. Mode-dependent filtering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities. *Automatica*, Elsevier, v. 45, n. 6, p. 1462–1467, June 2009. 16
- ZHANG, L.; BOUKAS, E. K. Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities. *Automatica*, Elsevier, v. 45, n. 2, p. 463–468, February 2009. 16
- ZHOU, K.; DOYLE, J. C. *Essentials of robust control*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1998. v. 104. 7
- ZHOU, K. et al. *Robust and optimal control*. [S.l.]: Prentice hall New Jersey, 1996. v. 40. 7



TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado "Controle por realimentação de estados Hinf para MJLS discretos com matrizes de probabilidade de transição incertas via LMIs com parâmetro escalar" é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem a devida citação ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 20 de novembro de 2019.

João Carlos Freitas Maia
Nome completo do(a) aluno(a)