



Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP - Escola de
Minas - Colegiado do curso de Engenharia de Controle
e Automação - CECAU



Romário César Da Silva

ESTUDO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UM CHASSI TUBULAR DE UM PROTÓTIPO BAJA OFFROAD

Monografia de Graduação em Engenharia de Controle e Automação

Ouro Preto, 2019

Romário César Da Silva

**ESTUDO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UM CHASSI
TUBULAR DE UM PROTÓTIPO BAJA OFFROAD**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para a obtenção do Grau de Engenheiro de Controle e Automação.

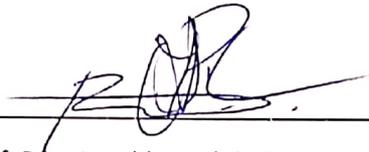
Orientador: Prof. MSc. Marcelo Teodoro Assunção
Coorientador: Prof. DSc. Agnaldo José da Rocha Reis

Ouro Preto, 2019

Monografia intitulada Estudo das Frequências Naturais de um Chassi Tubular de um Protótipo Baja Offroad defendida e Aprovada em 12 de julho de 2019, pela comissão avaliadora constituída pelos professores:



Prof. MSc. Marcelo Teodoro Assunção – Orientador



Prof. DSc. Agnaldo José da Rocha Reis – Coorientador



Prof. DSc. Diogo Antônio de Sousa – Professor Convidado



Prof. MSc. Thomás Vargas Barsante e Pinto – Professor Convidado

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado força e saúde.

Aos meus pais e irmão, pela compreensão e apoio incondicional em todos momentos. Sem vocês nada seria possível.

Aos meus familiares, pelo carinho e pelos momentos de amizade que muito me ajudaram.

Aos professores Marcelo Teodoro Assunção, Gustavo Paulinelli Guimarães e Francisco de Assis das Neves pelos ensinamentos e conselhos imprescindíveis na realização deste trabalho.

Aos professores do curso de Engenharia de Controle e Automação, em especial o professor Agnaldo José Da Rocha Reis, por terem me fornecido as ferramentas para me tornar um excelente profissional.

Aos amigos da República Batcaverna, pela amizade e camaradagem que levarei para sempre comigo.

“He who has a why to live can bear almost any how.” (Friedrich Nietzsche)

Resumo

Ensaio de vibração em estruturas que requerem normas de segurança se fazem necessários para que haja uma diminuição do número de acidentes causados por algum tipo de desgaste na estrutura. O objetivo deste trabalho é a extração das frequências naturais de um chassi tubular de um protótipo Baja offroad. A função do chassi é, entre outras, proteger e oferecer conforto ao piloto. Dessa forma, surge a necessidade de se realizar uma análise aprofundada do comportamento vibracional da estrutura. Com esta análise é possível obter os parâmetros modais do chassi (frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração) que validarão o projeto desenvolvido pela equipe Inconfidentes Baja Clube. O teste foi realizado em um ambiente de laboratório, com condições controladas. Os resultados obtidos se mostraram coerentes com aqueles obtidos através da modelagem computacional do chassi.

Palavras-chaves: parâmetros modais, frequência natural, ressonância, função de resposta em frequência.

Abstract

Vibration tests on structures that require safety standards are necessary to prevent accidents caused by some type of wear in the structure. The goal of this project is to extract the natural frequencies from a tubular chassis of a Baja offroad prototype. The role of the chassis is, among other things, to protect and guarantee the comfort of the rider. Thus, the need arises to perform an in-depth analysis of the vibrational behavior of the structure. With this analysis it is possible to obtain the modal parameters of the chassis (natural frequencies, damping factors and vibration modes) that will validate the project developed by the Inconfidentes Baja Clube team. The test was performed in a laboratory environment, under controlled conditions. The results showed the coherenrence between those parameters obtained in the experiment and the ones obtained by means of a computational model.

Key-words: modal parameters, natural frequencies, ressonance, frequency response functions

Lista de ilustrações

Figura 1	Modelo para sistema com um grau de liberdade. Fonte: (EWINS, 2000).	29
Figura 2	Movimentos para diferentes tipos de amortecimento. Fonte: (RAO, 2008).	30
Figura 3	Parâmetros de uma vibração livre amortecida para sistemas com um grau de liberdade. Fonte: (EWINS, 2000)	31
Figura 4	Modelo para sistemas com múltiplos graus de liberdade. Fonte: (BALACHANDRAN; MAGRAB, 2008)	31
Figura 5	Estrutura tubular do veículo. Fonte: (INCONFIDENTES BAJA CLUBE, 2017).	33
Figura 6	Representação tridimensional de uma FRF. Fonte: (FU; HE, 2001) . .	34
Figura 7	Representação da receptância de uma FRF com escala linear. Fonte: Adaptado de (EWINS, 2000)	35
Figura 8	Diferenças no aspecto de FRF com e sem amortecimento. Fonte: Adaptado de (EWINS, 2000).	35
Figura 9	Representação da receptância de uma FRF com escala logarítmica. Fonte: Adaptado de (EWINS, 2000)	36
Figura 10	Armação comum para testes modais. Fonte: Adaptado de (FU; HE, 2001).	38
Figura 11	Impulso devido ao tipo de ponta. Fonte: (SEGUNDINHO et al., 2012).	38
Figura 12	Força de impulso e respectivo espectro de frequências. Fonte: Adaptado de (EWINS, 2000).	39
Figura 13	Armação comum para testes com martelo de impacto. Fonte: (FU; HE, 2001).	40
Figura 14	Placa apoiada com molas macias. Fonte: (FU; HE, 2001).	41
Figura 15	Comportamento típico de sistemas livremente apoiados. Fonte: Adaptado de (AGILENT, 2000).	41
Figura 16	Relações típicas de fase e sensibilidade com a frequência. Fonte: Adaptado de (FU; HE, 2001)	42
Figura 17	Esquema de acelerômetro piezoelétrico Fonte: Adaptado de (FU; HE, 2001)	43
Figura 18	Métodos e de fixação e FRF características de cada modelo. Fonte: (MATEUS, 2017)	43
Figura 19	Análise no tempo, análise espectral e aproximações pela DFT. Fonte: (EWINS, 2000)	45
Figura 20	Fenômeno de <i>aliasing</i> (EWINS, 2000).	46

Figura 21	Janelamentos (a) Boxcar; (b) Hannig; (c) Cosseno-cônico; (d) Exponencial. Fonte: (MATEUS, 2017).	46
Figura 22	Exemplo de ajuste de curva. Fonte: (MATEUS, 2017).	47
Figura 23	Diferentes densidades de modos. Fonte: Adaptado de (SCHWARZ; RICHARDSON, 1999).	48
Figura 24	Efeitos de modos de vibração distantes. Fonte: Adaptado de (AGILENT, 2000).	48
Figura 25	Importância da escolha do número correto de polos. Fonte: Adaptado de (EL-BADAWY, 2003).	50
Figura 26	Estrutura tubular protótipo Inconfidentes Baja. Fonte: (INCONFIDENTES BAJA CLUBE, 2017)	51
Figura 27	Localização dos acelerômetros. Fonte: Pesquisa Direta (2019).	52
Figura 28	Arranjo para teste de impacto. Fonte: Pesquisa Direta (2019).	53
Figura 29	Martelo de impacto. Fonte: (BRUEL & KJAER, 2019).	54
Figura 30	Intensidade do impulso de diferentes pontas no tempo. Fonte: Adaptado de (BRUEL & KJAER, 2019).	54
Figura 31	Acelerômetro e cera utilizados. Fonte: (MATEUS, 2017).	55
Figura 32	Acelerômetros fixados. Fonte: Autor.	55
Figura 33	Placa de aquisição. Fonte: (NATIONAL INSTRUMENTS, 2015).	56
Figura 34	Setup do sistema de aquisição. Fonte: (DUARTE, 2018).	56
Figura 35	Interface da ferramenta <i>SOLIDWORKS</i> . Fonte: Pesquisa Direta (2019).	57
Figura 36	Lógica de tomada de decisão do algoritmo RFP. Fonte: (MATEUS, 2017).	58
Figura 37	Função de ponderação dos numeradores e denominadores. Fonte: (ACUÑA, 2007).	60
Figura 38	Definição das frações parciais para polinômios complexos. Fonte: (ACUÑA, 2007).	60
Figura 39	Solução dos coeficientes de polinômios ortogonais. Fonte: (ACUÑA, 2007).	61
Figura 40	Solução dos coeficientes do polinômios de ajuste. Fonte: (ACUÑA, 2007).	61
Figura 41	Obtenção dos parâmetros da modais globais a partir dos polos da função de transferência sintetizada. Fonte: (ACUÑA, 2007).	62
Figura 42	Gráfico de Bode para a FRF obtida pelo teste 1. Fonte: Pesquisa Direta (2019).	63
Figura 43	Gráfico de Bode para a FRF obtida pelo teste 2. Fonte: Pesquisa Direta (2019).	64
Figura 44	Gráfico de Bode para a FRF obtida pelo teste 3. Fonte: Pesquisa Direta (2019).	65
Figura 45	Amplitude (dB) para a FRF obtida pelo teste 1. Fonte: Pesquisa Direta (2019).	65

Figura 46	Coerência do teste 1. Fonte: Pesquisa Direta (2019).	66
Figura 47	Conjunto de FRF medidas em escala logarítmica. Fonte: Pesquisa Direta (2019).	66
Figura 48	Ajuste realizado com número excessivo de polos. Fonte: Pesquisa Direta (2019).	67
Figura 49	Ajuste realizado com um número insuficiente de polos. Fonte: Pesquisa Direta (2019).	67
Figura 50	Ajuste da curva obtida pelo teste 1. Fonte: Pesquisa Direta (2019). . .	68
Figura 51	Ajuste da curva obtida pelo teste 2. Fonte: Pesquisa Direta (2019). . .	68
Figura 52	Ajuste da curva obtida pelo teste 3. Fonte: Pesquisa Direta (2019). . .	69
Figura 53	Função de coerência para o teste 2. Fonte: Pesquisa Direta (2019). . . .	69
Figura 54	Forma modal para o quinto modo de vibração (144,36 Hz). Fonte: Pesquisa Direta (2019).	71
Figura 55	Forma modal para o primeiro modo de vibração (49,465 Hz). Fonte: Pesquisa Direta (2019).	72
Figura 56	Forma modal para o segundo modo de vibração (70,826 Hz). Fonte: Pesquisa Direta (2019).	72
Figura 57	Forma modal para o terceiro modo de vibração (107,92 Hz). Fonte: Pesquisa Direta (2019).	73
Figura 58	Forma modal para o quarto modo de vibração (136,250 Hz). Fonte: Pesquisa Direta (2019).	73
Figura 59	Forma modal para o sexto modo de vibração (159,27 Hz). Fonte: Pesquisa Direta (2019).	74

Lista de tabelas

Tabela 1	Definições de FRF	34
Tabela 2	Dados da estrutura tubular	52
Tabela 3	Frequências naturais obtidas experimentalmente nos testes	70
Tabela 4	Fatores de amortecimento obtidos experimentalmente nos testes	71
Tabela 5	Frequências naturais obtidas na simulação.	71

Lista de abreviaturas e siglas

FRF	Função(ões) de Resposta em Frequência
DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i>
RFP	<i>Rational Fraction Polynomial</i>
SAE	<i>Society of Automotive Engineers</i>

Lista de símbolos

f	Força (N)
x	Deslocamento (m)
t	Tempo (s)
m	Massa (kg)
ω	Frequência (rad/s)
c	Constante de Amortecimento (N.s/m)
k	Constante Elástica (N/m)
dt	Taxa de tempo (s)
ω_n	Frequência Natural (rad/s)
\dot{x}	Derivada primeira do deslocamento (m/s)
\ddot{x}	Deriva segunda do deslocamento (m/s ²)
ζ	Fator de Amortecimento
F_a	Força de Amortecimento (N)
ω_c	Frequência de Ressonância (Hz)
T_c	Duração do Impulso (s)
T	Período do Evento (s)
c_k, d_k	Coefficientes da Função de Polinômios Ortogonais
ω_i	i-ésima Frequência Avaliada
θ, ϕ	Ponderações da Função de Polinômios Ortogonais
$P_{i,k}$	k-ésimo Polinômio Complexo gerado para i-ésima Frequência
$R_{i,k}$	k-ésimo Polinômio Real gerado para i-ésima Frequência

Sumário

1	Introdução	23
1.1	Contextualização Teórica	23
1.2	Objetivos	24
1.2.1	Gerais	24
1.2.2	Específicos	25
1.3	Estrutura do Trabalho	25
2	Revisão Bibliográfica	27
2.1	Conceitos Básicos de Vibrações	27
2.2	Vibração em sistemas com um grau de liberdade	28
2.3	Vibração em sistemas com múltiplos graus de liberdade	31
2.4	Características do veículo mini Baja	32
2.5	Representações e propriedades de funções de resposta em frequência	33
2.6	Análise modal experimental	36
2.7	Sistemas para medição de FRF	37
2.7.1	Mecanismo de excitação da estrutura	37
2.7.2	Preparação da estrutura e transdutores	40
2.8	Processamento digital de sinais	44
2.9	Extração de parâmetros por ajuste de curvas	46
2.9.1	Método RFP – (Rational Fraction Polynomial)	49
3	Materiais e Métodos	51
3.1	Objeto de estudo	51
3.2	Teste de impacto	52
3.2.1	Suspensão da estrutura.	53
3.2.2	Martelo de Impacto	54
3.2.3	Acelerômetros	54
3.2.4	Placa de aquisição	55
3.3	Coleta dos dados	56
3.4	Modelagem computacional	57
3.5	Ajuste de curva pelo método <i>Rational Fraction Polynomial</i> (RFP)	58
3.5.1	Geração de polinômios ortogonais	59
3.5.2	Identificação dos parâmetros modais.	61
4	Resultados	63
4.1	Funções de Resposta em Frequência obtidas pelo teste de impacto	63

4.2	Ajuste de curva e extração dos parâmetros modais	66
4.3	Validação dos resultados	70
Conclusões e Recomendações		75
4.4	Conclusões	75
4.5	Recomendações	75
Referências		77

1 Introdução

1.1 Contextualização Teórica

O programa Baja SAE é um desafio estudantil que tem como objetivo, promover aos participantes um meio de aplicar os conhecimentos teóricos adquiridos em sala de aula, sob a forma de um processo integrado de desenvolvimento. O programa tem como principais metas a preparação do aluno para o mercado de trabalho e uma vivência real no desenvolvimento de projetos. Afim de participar das competições Baja SAE Brasil, cada equipe deve projetar e construir um veículo, monoposto, offroad, esportivo, cuja estrutura contenha o condutor (SAE BRASIL, 2018).

Das partes integrantes do projeto, uma das mais importantes é a fabricação da estrutura (chassi), pois ela permite a interação entre os demais sistemas do veículo (ASSUNÇÃO, 2016). Tal etapa deve obedecer ao regulamento da SAE (Society of Automotive Engineers) que especifica todos os aspectos que o protótipo deve seguir, entre eles, o dimensionamento da gaiola e as propriedades físicas do material a ser utilizado. O mais importante, o chassi deve ser projetado e fabricado de modo a prevenir qualquer falha de sua integridade.

É possível encontrar elementos de vibrações nas mais variadas atividades do cotidiano. Somos capazes de ouvir sons porque nossos tímpanos vibram, e vemos porque as ondas de luz sofrem vibrações. Qualquer movimento que se repita ciclicamente, ou seja, após um determinado intervalo de tempo é chamado de vibração ou oscilação (RAO, 2008).

Problemas associados a vibrações continuam se apresentando como grandes riscos e limitadores de vários projetos de engenharia. Existem diversas ocasiões em que o conhecimento das características dinâmicas da estrutura é essencial para a manutenção da sua integridade (EWINS, 2000). Estruturas ou componentes de máquina, quando sujeitos à vibrações podem falhar devido a fadiga do sistema a uma exposição cíclica de tensões induzidas. Além disso, sempre que a frequência natural de vibração de uma estrutura coincidir com uma determinada fonte vibração externa um fenômeno denominado ressonância ocorre, resultando em deflexões excessivas e falhas (RAO, 2008). Em outros casos, um modelo vibracional otimizado pode estar diretamente ligado com a redução de ruídos e desconforto no uso de equipamentos, resultando em uma melhor performance.

Sistemas vibratórios encontrados na prática, normalmente apresentam um grau de complexidade muito elevado. Desse modo, apenas as características mais relevantes devem ser consideradas afim de prever o comportamento do sistema a excitações específicas. “Um sistema vibratório é um sistema dinâmico para o qual as variáveis como as excitações (entradas) e respostas (saídas) são dependentes do tempo” (RAO, 2008).

A análise modal se apresenta nesse contexto, como uma técnica viável para a análise dinâmica de sistemas estruturais. Por uma abordagem experimental, é possível estudar o comportamento dinâmico da estrutura formulando um modelo matemático que permita estabelecer as relações entre as entradas e saídas do sistema, em termos de parâmetros modais (BORGES, 2006). A obtenção de parâmetros modais, como frequências naturais, fatores de amortecimento e formas modais é extremamente importante. Tais parâmetros representam informações técnicas fundamentais para a análise de um projeto.

A análise modal experimental ou teste modal é uma estratégia de teste não destrutiva baseada nas respostas do sistema perante excitações. Uma das técnicas usadas em análise modal consiste na excitação do sistema por um martelo de impacto. As saídas são medidas e transformadas em Funções de Resposta em Frequência (FRF). Por fim, as FRF podem ser utilizadas para extrair os parâmetros modais (KAEWUNRUEN; REMENNIKOV, 2005).

A realização de um teste modal envolve normalmente três etapas: preparação, medição das respostas no domínio da frequência e identificação modal dos parâmetros. Na preparação, vários aspectos do experimento devem ser estabelecidos, como por exemplo, o tipo de suporte da estrutura, o tipo de excitação, os instrumentos de medição a serem utilizados e a identificação dos mecanismos que podem influenciar no resultado da análise (FU; HE, 2001).

1.2 Objetivos

1.2.1 Gerais

Este trabalho tem como objetivo geral realizar um estudo, sobre as frequências naturais de vibração que um chassi de estrutura tubular apresenta sobre condições de excitação específicas. Para atingir tal meta, deve-se realizar um levantamento bibliográfico do assunto, mais especificamente métodos para a identificação dos parâmetros modais da estrutura. Deste modo espera-se obter dados que sejam relevantes para a validação do projeto do veículo.

1.2.2 Específicos

- Realizar um estudo teórico acerca dos fundamentos das vibrações mecânicas, análise modal, técnicas de medição, extração de parâmetros e aplicabilidade;
- Realizar um estudo das frequências naturais do chassi com o auxílio de softwares de modelagem e simulação.
- Elaborar o procedimento experimental, para coleta de dados e tratamento matemático das FRF;
- Aplicar técnicas para a identificação das frequências naturais da estrutura;

1.3 Estrutura do Trabalho

O trabalho será dividido em cinco capítulos, organizados da seguinte forma:

O primeiro capítulo será a introdução, onde uma breve contextualização teórica do problema é apresentada, assim como os objetivos e a estrutura do trabalho.

O segundo capítulo consiste em uma revisão dos assuntos que precisam ser abordados para um perfeito entendimento do trabalho. Entre eles, uma revisão dos conceitos básicos de vibrações, técnicas para obtenção de FRF e extração dos parâmetros modais.

O terceiro capítulo expõe a metodologia e materiais utilizados no experimento.

Os resultados da análise modal experimental em um chassi de um protótipo Baja são apresentados no quarto capítulo.

O quinto capítulo apresenta as conclusões do trabalho.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Conceitos Básicos de Vibrações

Rao (2008) define vibração como qualquer movimento que se repita após um determinado intervalo de tempo. Assim sendo, a teoria da vibração trata do estudo de fenômenos oscilatórios e as consequências provenientes destes.

Sistemas oscilatórios encontrados na prática normalmente contêm um meio de armazenamento de energia potencial, uma mola por exemplo, um meio de armazenamento de energia cinética, como uma massa, e um meio para a perda gradual de energia, ou seja, amortecimento (RAO, 2008).

Um fenômeno de vibração se caracteriza pela conversão alternada entre energia cinética e energia potencial, com a perda gradual de energia do sistema a cada ciclo de vibração (HARRIS; PIERSOL, 2002).

Define-se como grau de liberdade o número mínimo de coordenadas independentes que permitem definir completamente as posições das partes integrantes de um sistema a qualquer instante (RAO, 2008).

Alguns sistemas podem ser definidos por um número finito de graus de liberdade, mas devido aos elementos elásticos dos materiais, as estruturas encontradas na realidade caracterizam-se por um número infinito de graus de liberdade, tais sistemas são denominados sistemas contínuos (RAO, 2008).

Na análise de vibrações é normal decompor sistemas contínuos, em outros mais simples com um número finito de graus de liberdade, denominados sistemas discretos. A resolução analítica de sistemas contínuos, apesar de apresentar excelente exatidão, possui uma pequena gama de aplicabilidade, ficando limitada a geometrias bem específicas.

Um modelo matemático simplificado vai então, quando analisado, produzir as informações pretendidas com uma exatidão aceitável, de maneira econômica, ou seja com um número de interações que permita a resolução analítica do problema. É desejável ao modelo, ser capaz de identificar os nós da estrutura. Esses são pontos onde a estrutura não vibra com uma amplitude considerável e podem ser projetados para aplicações distintas, como por exemplo, para instalação de elementos mecânicos sensíveis a vibrações (BEARDS, 1996).

Rao (2008) classifica qualquer sistema oscilatório em que haja perda de energia, seja por atrito ou pela resistência do material como sistemas amortecidos. Por outro lado, caso nenhuma energia seja dissipada a cada ciclo de vibração, o fenômeno é descrito como vibração não amortecida. Em muitos casos a quantidade de amortecimento é tão pequena que o fenômeno pode ser descrito como não amortecido.

Quando um sistema, após uma determinada perturbação inicial continua a vibrar por conta própria, a vibração resultante é chamada de vibração livre. Em contrapartida, se o sistema oscila sobre a ação de uma força externa, denomina-se a vibração resultante como vibração forçada (RAO, 2008).

Na realidade, é normal se encontrar fenômenos de vibração forçada. Caso a frequência da ação externa coincida com a frequência natural do corpo, um fenômeno de ressonância ocorre, resultando em oscilações de amplitudes excessivas que podem resultar em falhas na estrutura. No caso de sistemas contínuos existem infinitas frequências naturais, uma para cada grau de liberdade (BEARDS, 1996).

Beards (1996) explica ainda que para cada frequência natural do sistema existe um modo de vibração específico que caracteriza o modo particular de como uma estrutura vibra. Observa-se que normalmente, não é necessário analisar todos os modos de vibração de uma estrutura, pois estruturas encontradas na prática raramente estão sujeitas a um vasto espectro de frequências. Além disso, tais frequências podem resultar em pequenas amplitudes de ressonância devido a um alto amortecimento para modos de vibração específicos.

2.2 Vibração em sistemas com um grau de liberdade

Apesar de poucas estruturas poderem ser representadas por modelos de um grau de liberdade, o seu estudo é essencial para o entendimento de problemas mais complexos envolvendo sistemas com múltiplos graus de liberdade (EWINS, 2000).

Na maioria dos exemplos encontrados na prática, a massa do sistema é distribuída, porém, com intuito de simplificar a análise, ela pode ser representada por uma massa pontual. O mesmo pode acontecer para a elasticidade do sistema, apesar de normalmente estar distribuída pelo corpo devido as propriedades físicas do material, ela pode ser representada por uma mola apenas (RAO, 2008).

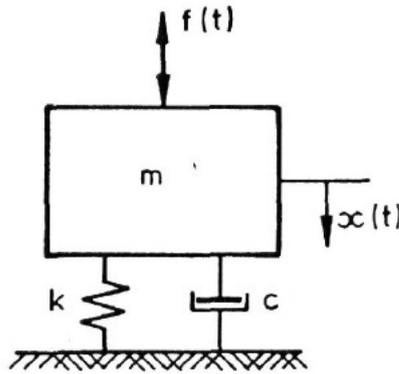


Figura 1: Modelo para sistema com um grau de liberdade. Fonte: (EWINS, 2000).

Um modelo básico para sistemas com um grau de liberdade pode ser visto na Figura 1, onde $f(t)$ e $x(t)$ são variáveis de força e deslocamento atuantes na massa m . As constantes de amortecimento e de elasticidade da mola são representadas por c e k , respectivamente. O sistema caracteriza-se como um grau de liberdade devido ao fato de sua posição poder ser inteiramente descrita apenas pela coordenada $x(t)$.

Pela segunda lei de Newton, a Equação 2.1 relaciona as grandezas de força e deslocamento presentes no sistema (RAO, 2008).

$$\vec{F}(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right) = m \ddot{\vec{x}} \quad (2.1)$$

Considerando uma vibração não amortecida tem-se que a força aplicada pela mola é kx e o diagrama de corpo livre do modelo pode ser descrito como na equação 2.2.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.2)$$

O sistema massa-mola da Figura 1 pode ser interpretado como um oscilador harmônico. Quando o fenômeno oscilatório é repetido em intervalos de tempos iguais, o movimento é denominado periódico, sendo o movimento periódico mais simples, o movimento harmônico. O movimento harmônico caracteriza-se pela vibração apresentar uma aceleração proporcional ao deslocamento da massa, dirigida a posição média (RAO, 2008).

Para sistemas de um grau de liberdade a frequência natural, ω_n , é definida pela Equação 2.3 (BALACHANDRAN; MAGRAB, 2008).

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.3)$$

E o fator de amortecimento, ζ , pela Equação 2.4 (BALACHANDRAN; MAGRAB, 2008).

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (2.4)$$

O fator de amortecimento é uma quantidade adimensional indicativa do tipo de amortecimento do sistema. Um sistema com, $0 < \zeta < 1$, é considerado subamortecido, caso $\zeta > 1$, o sistema é superamortecido e quando o sistema apresenta $\zeta = 1$, é classificado como criticamente amortecido. A Figura 2 mostra o perfil de diferentes tipos de amortecimento.

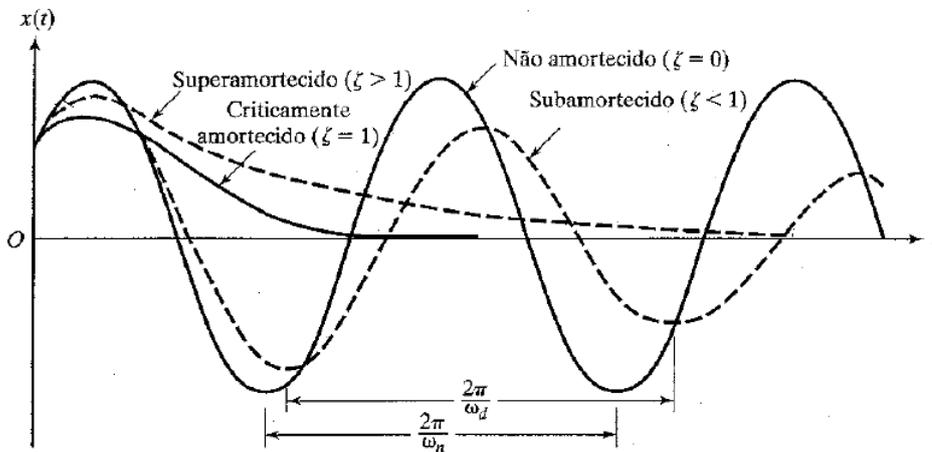


Figura 2: Movimentos para diferentes tipos de amortecimento. Fonte: (RAO, 2008).

A força de amortecimento pode ser descrita como sendo diretamente proporcional à velocidade de vibração do corpo, ou seja, $F_a = c\dot{x}$. Para sistemas amortecidos, vibrando livremente, tem-se então a Equação 2.5 para descrever o movimento (EWINS, 2000).

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.5)$$

A resolução da equação diferencial implica que,

$$x(t) = X e^{(-\bar{\omega}_n \zeta t)} e^{i(\bar{\omega}_n \sqrt{1-\zeta^2})t}$$

A equação acima descreve o modo de vibração particular do sistema com uma frequência natural complexa contendo uma parte imaginária e uma parte real, que descrevem a frequência de vibração e o perfil de decaimento da amplitude do movimento devido ao amortecimento (EWINS, 2000). O significado prático desses parâmetros pode ser observado na Figura 3.

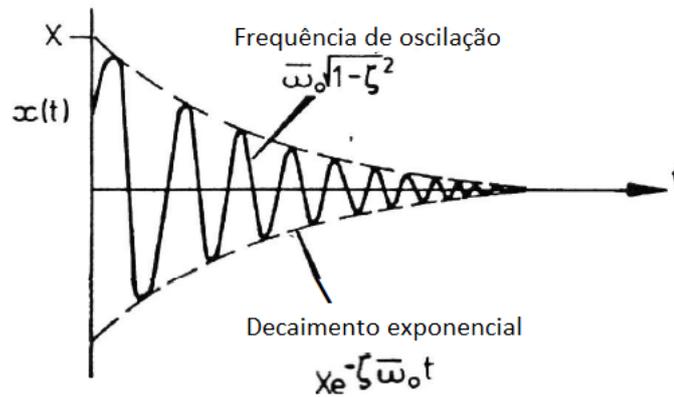


Figura 3: Parâmetros de uma vibração livre amortecida para sistemas com um grau de liberdade. Fonte: (EWINS, 2000)

2.3 Vibração em sistemas com múltiplos graus de liberdade

Sistemas que necessitam ser descritos por mais de uma coordenada independente são classificados como sistemas com múltiplos graus de liberdade. Para esse tipo de sistemas, além das variáveis temporais, é necessário realizar a análise espacial da estrutura através da análise dos modos de vibração obtidos pelo estudo da vibração livre do sistema (BALACHANDRAN; MAGRAB, 2008).

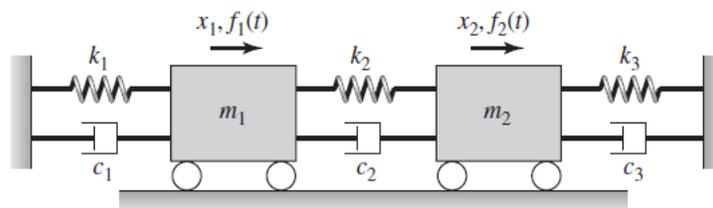


Figura 4: Modelo para sistemas com múltiplos graus de liberdade. Fonte: (BALACHANDRAN; MAGRAB, 2008)

A Figura 4 representa o modelo de um sistema com dois graus de liberdade. Expressa-se o balanço de forças atuantes no sistema, assim como no caso de sistemas com um grau de liberdade, pelas equações abaixo.

$$m\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = f_1(t) \quad (2.6)$$

$$m\ddot{x}_2 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1 = f_2(t) \quad (2.7)$$

É notável que as Equações 2.6 e 2.7 são independentes apenas quando $c_2 = k_2 = 0$, o que implicaria que as massas m_1 e m_2 não estivessem fisicamente ligadas. Conclui-se que o movimento da massa m_1 influencia o movimento de m_2 e vice-versa (RAO, 2008).

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

As equações podem ser escritas na forma matricial, como visto na Equação 2.8. Deste modo, para um sistema amortecido com N graus de liberdade, as equações que governam o movimento podem ser escritas como na Equação 2.9, onde $[m]$, $[c]$ e $[k]$ são matrizes $N \times N$, respectivamente de massa, amortecimento e rigidez. Os vetores \vec{x} e \vec{F} são vetores $N \times 1$ contendo os deslocamentos e forças atuantes, variantes no tempo (EWINS, 2000).

$$[m]\vec{\ddot{x}} + [c]\vec{\dot{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \quad (2.9)$$

É importante observar que para o caso da figura 4, as equações diferenciais que descrevem o movimento não podem ser resolvidas individualmente. Na representação matricial do sistema, caso haja algum termo não-zero fora da diagonal da matriz de massa, o sistema é classificado como dinamicamente acoplado. Caso haja algum termo não-zero fora da diagonal da matriz de rigidez diz-se que o sistema é estaticamente acoplado (RAO, 2008).

Com a resolução das equações de movimento em vibração livre, isto é, com $\vec{F} = 0$, é possível obter os parâmetros modais globais do sistema, ou seja, as frequências naturais e modos de vibração.

2.4 Características do veículo mini Baja

"O veículo mini baja é um carro de corrida fora-de-estrada monoposto, projetado e construído em estrutura tubular"(COSTA, 2006).

É requerido que as equipes de desenvolvimento do projeto, construam um veículo competitivo, ou seja, com uma boa performance. Para isso características de massa e rendimento devem ser observadas na elaboração de um projeto para a estrutura.

O chassi tubular (gaiola) de um veículo Baja SAE deve ser capaz de suportar todos demais subsistemas do veículo, incluindo a suspensão, freios, direção e motor (COLOMBO; NASCIMENTO, 2017). A principal função da gaiola é proteger o piloto de possíveis colisões. Os pontos de fixação dos subsistemas citados devem ser planejados levando e conta as tensões geradas por estes.

É comum nesse tipo de projeto, realizar análises com o intuito de prever o comportamento do veículo, descobrindo suas frequências naturais e modos de vibrar. Caso tais parâmetros sejam conhecidos é possível, prever quais frequências de operação causarão

uma elevada amplitude de vibração. Tal excitação pode ser resultante de algum obstáculo que veículo atravesse ou dos próprios componentes do carro. (FURTADO; GUIMARÃES, 2016).

Caso a frequência de excitação seja muito similar à frequência natural do veículo, podem ocorrer oscilações de amplitudes excessivas que podem resultar em falhas na estrutura. A integridade estrutural do sistema fica comprometida podendo originar acidentes.

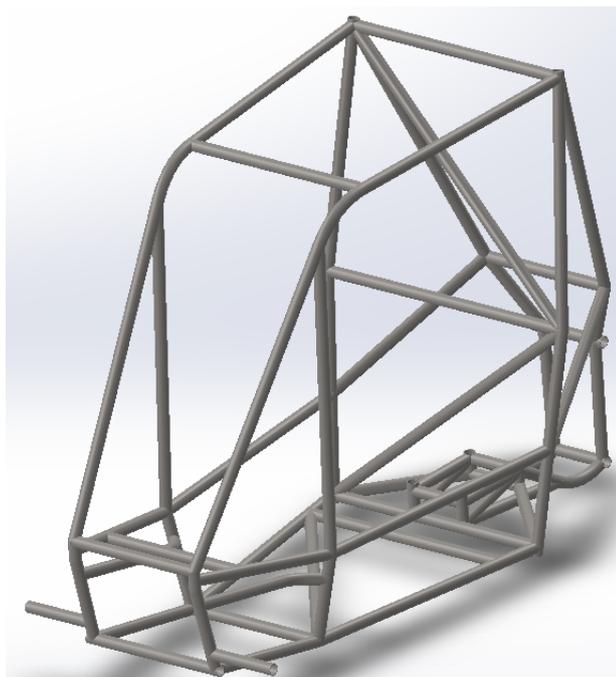


Figura 5: Estrutura tubular do veículo. Fonte: (INCONFIDENTES BAJA CLUBE, 2017).

Estruturas como a apresentada na Figura 5 são classificadas como uma de treliça espacial, se inserindo no grupo de Estruturas Reticuladas (ASSUNÇÃO, 2016). Estruturas desse tipo apresentam diversos aspectos vantajosos como baixo peso, alta rigidez e fácil fabricação (MAKOWSKI, 1987).

2.5 Representações e propriedades de funções de resposta em frequência

É possível representar as respostas de um sistema em função da frequência e tais representações apresentam várias propriedades que podem ser úteis na análise de dados obtidos em um teste modal (EWINS, 2000).

As respostas em função da frequência são normalmente definidas como a razão entre a resposta de deslocamento do sistema e a força excitadora. A razão entre essas duas grandezas é de caráter complexo pois apresenta uma amplitude e uma fase entre as duas

funções senoidais e pode ser descrita pela Equação 2.10 para o caso de sistemas com um grau de liberdade.

$$\alpha(\omega) = \frac{X}{F} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + i(\omega c)} \quad (2.10)$$

De forma análoga pode-se considerar a velocidade ou a aceleração como parâmetros de saída do sistema ao invés do deslocamento. A Tabela 1 ilustra os diferentes métodos e nomenclaturas de como obter as funções de resposta em frequência (FRF).

Tabela 1: Definições de FRF.

Parâmetro de Resposta R	FRF padrão R/F
Deslocamento	Receptância
Velocidade	Mobilidade
Aceleração	Acelerância

Fonte: Adaptado de (EWINS, 2000)

Existe uma dificuldade em representar uma FRF graficamente. Tal dificuldade consiste no fato de que FRF são funções complexas que requerem que três grandezas sejam representadas, a frequência e as duas partes complexas, que não podem ser totalmente descritas em gráfico x-y habitual.

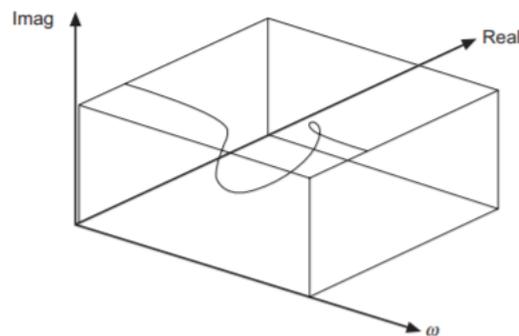


Figura 6: Representação tridimensional de uma FRF. Fonte: (FU; HE, 2001)

Uma representação tridimensional pode ser vista na Figura 6. Tal interpretação pode ser considerada completa pois descreve inteiramente o comportamento da função. Por outro lado, para análise modal, um gráfico tridimensional dificilmente poderá ser utilizado, pois existe a necessidade de que parâmetros modais estejam visualmente disponíveis para uma análise preliminar dos resultados (FU; HE, 2001).

As projeções da curva nos planos Imaginário-Frequência e Real-Frequência correspondem às partes imaginária e real da FRF, respectivamente.

Um método comum de representação de funções de resposta em frequência é através de um gráfico de Bode, consistindo em dois gráficos contendo o módulo e a fase da função complexa, como pode ser observado na Figura 7 para receptância.

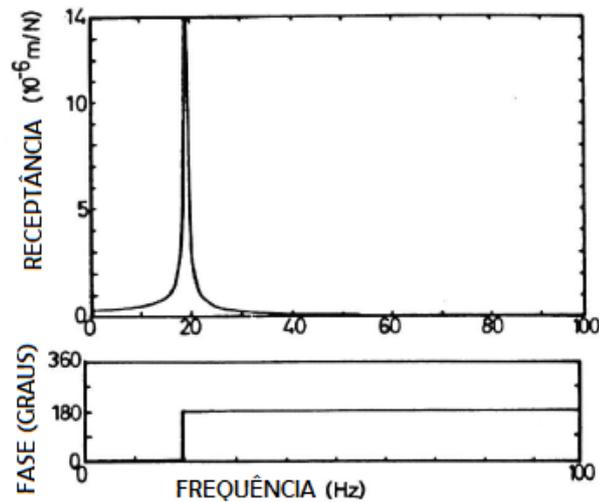
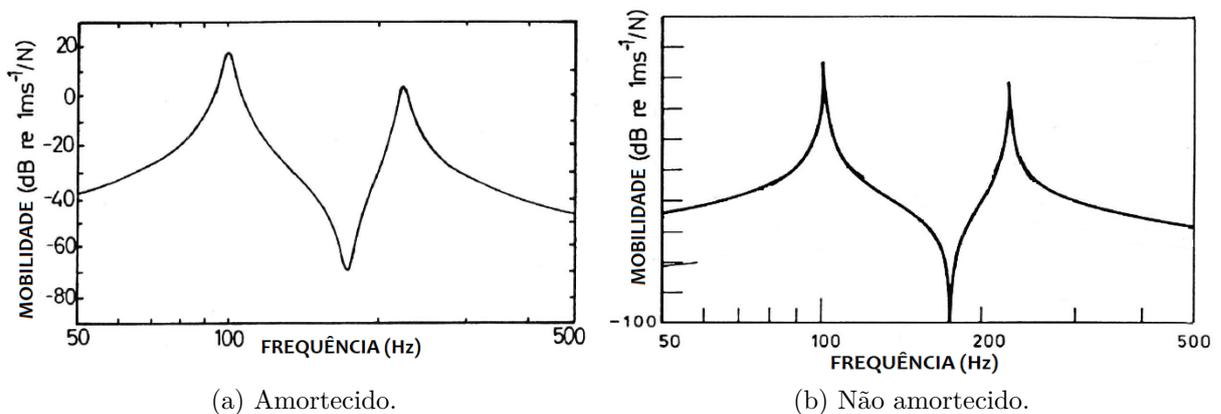


Figura 7: Representação da receptância de uma FRF com escala linear. Fonte: Adaptado de (EWINS, 2000)

As características de amortecimento do sistema influenciam o aspecto da FRF, como pode ser visto nas Figuras 8a e 8b, os ângulos das fases também são alterados pelo amortecimento. Ainda assim, observa-se que a aparência geral da FRF não sofre grandes alterações, sendo apenas uma extensão do sistema não amortecido (EWINS, 2000).

Um problema comum para esse tipo de plotagem se deve ao fato de os valores na região de ressonância frequentemente suprimirem as demais informações contidas no gráfico. Por isso, é comum o emprego de escalas logarítmicas para melhorar a identificação das propriedades do sistema (FU; HE, 2001).



(a) Amortecido.

(b) Não amortecido.

Figura 8: Diferenças no aspecto de FRF com e sem amortecimento. Fonte: Adaptado de (EWINS, 2000).

As escalas logarítmicas podem ser obtidas transformando apenas o eixo da amplitude ou ambos. Nos dois casos a magnitude da FRF é convertida para uma escala de decibéis definida pela Equação 2.11.

$$FRF_{dB} = 20 \log_{10} \frac{\text{Magnitude Linear}}{\text{Unidade da FRF}} \quad (2.11)$$

Sabe-se que a expressão analítica da FRF é definida pelo modelo espacial do sistema (massa, amortecimento e rigidez), desse modo, é de se esperar que tais parâmetros sejam facilmente identificados na análise gráfica da FRF. Contudo para representações lineares, tais propriedades acabam sendo perdidas devido às magnitudes elevadas em frequências de ressonância (FU; HE, 2001).

A teoria de vibrações indica que o comportamento de um sistema vibracional em frequência menores é dominado pela sua rigidez característica. Já no caso de frequência mais elevadas, as propriedades de massa discriminam o comportamento. As escalas logarítmicas, como vista na Figura 9, podem ser empregues para identificar tais propriedades pois detalham as informações contidas nas regiões de não ressonância do gráfico (FU; HE, 2001).

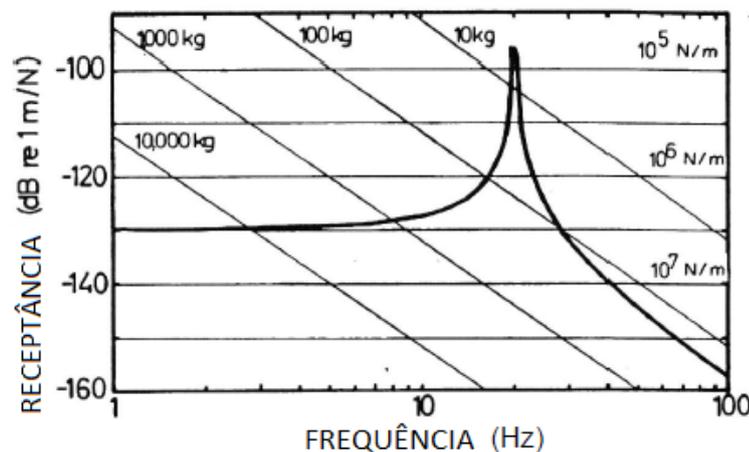


Figura 9: Representação da receptância de uma FRF com escala logarítmica. Fonte: Adaptado de (EWINS, 2000)

2.6 Análise modal experimental

O teste modal é uma técnica experimental utilizada para encontrar o modelo modal (frequências naturais e modos de vibração) de um sistema vibratório (FU; HE, 2001).

Se tratando de análise modal experimental, três etapas do procedimento se destacam. Para um bom resultado é necessário que ambas sejam compreendidas e bem executadas. De acordo com Ewins (2000), são:

- Uma boa base teórica de vibrações;
- A medição correta dos fenômenos vibratórios;
- Análise realística e detalhada dos dados obtidos.

Para a realização de um ensaio adequado, o experimentador deve se atentar aos diferentes métodos de medição e selecionar aquele que seja mais apropriado para a obtenção das FRF.

A base teórica desse tipo de ensaio consiste primariamente em saber relacionar as vibrações de resposta do sistema com a excitação fornecida ao mesmo. Com uma entrada conhecida é possível medir as respostas do sistema e prosseguir para a identificação das suas propriedades.

Com uma forte base teórica se torna viável dar seguimento aos aspectos práticos do teste, como a escolha do método de excitação da estrutura, os transdutores para a medição das respostas e a obtenção das FRF.

O comportamento linear de uma estrutura é essencial para a obtenção das FRF corretas. Tal característica é facilmente verificada experimentalmente, fazendo variar a intensidade da força de entrada do sistema e verificando as diferentes respostas obtidas. Para estruturas em que a linearidade não é observada, a análise modal experimental vai representar um modelo matemático linearizado da estrutura (FU; HE, 2001).

Em testes onde apenas um ponto de excitação é utilizado, a resposta obtida traduz o comportamento da FRF diretamente. Tais sistemas são classificados como SISO(*single input, single output*) ou SIMO(*single input, multiple output*). Uma composição padrão para testes modais pode ser vista na Figura 10 (EWINS, 2000).

2.7 Sistemas para medição de FRF

Um arranjo para sistemas de medição de respostas no domínio da frequência deve conter três partes. Uma responsável pela excitação da estrutura, aplicando-a uma força com uma determinada magnitude; uma segunda para medir e adquirir as respostas; e uma terceira parte, capaz de processar o sinal proveniente dos transdutores para a obtenção das FRF (FU; HE, 2001).

2.7.1 Mecanismo de excitação da estrutura

A primeira etapa de um sistema para medição de FRF, consiste em um mecanismo capaz de fornecer estímulos de determinada frequência e amplitude à estrutura. Como explicitado na seção anterior, existem diferentes tipos de equipamentos para esse fim, porem, entre eles, os mais utilizados são os *shakers* eletromagnéticos e o martelo de impacto (FU; HE, 2001).

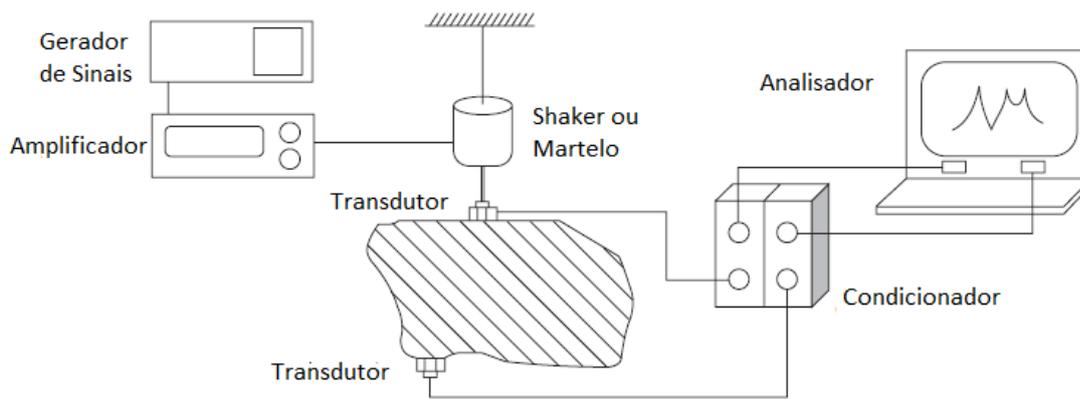


Figura 10: Armação comum para testes modais. Fonte: Adaptado de (FU; HE, 2001).

Um *shaker* ou excitador eletromagnético, é um equipamento utilizado para excitar uma estrutura podendo operar a diferentes frequências e amplitudes. Consiste em um núcleo magnético, envolvido por uma bobina e uma parte móvel responsável pelo movimento do equipamento. É conhecido da eletromagnética, que quando uma corrente elétrica atravessa um certo campo magnético, uma força eletromotriz é gerada, proporcional à intensidade da corrente e à densidade do fluxo magnético (FU; HE, 2001).

O martelo de impacto instrumentado é um equipamento que fornece à estrutura um tipo de sinal equivalente a um impulso, sendo portanto de caráter transiente. O martelo de impacto contém um transdutor de força que faz a leitura da amplitude do sinal fornecido. A ponta do martelo, onde o impacto ocorre, pode ser constituída de diferentes materiais, a escolha do material adequado se faz de acordo com as propriedades da estrutura e das frequências que se pretende observar. Tal comportamento pode ser observado no gráfico da Figura 11 (FU; HE, 2001).

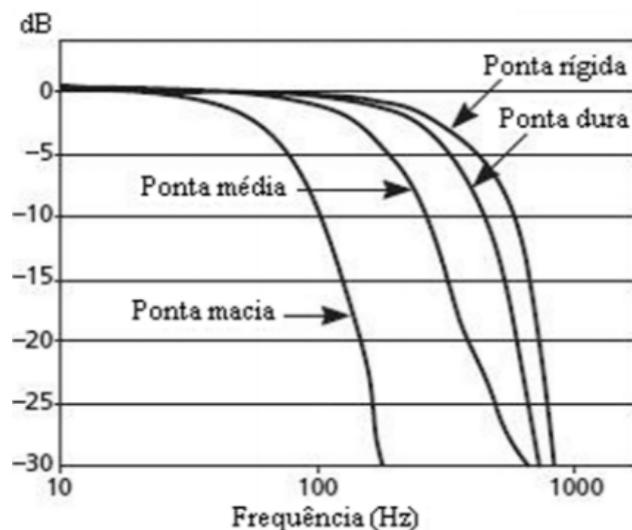


Figura 11: Impulso devido ao tipo de ponta. Fonte: (SEGUNDINHO et al., 2012).

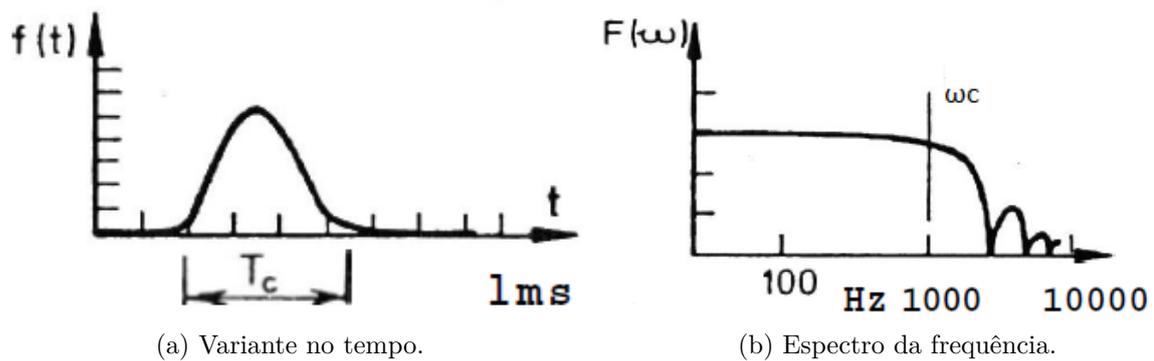


Figura 12: Força de impulso e respectivo espectro de frequências. Fonte: Adaptado de (EWINS, 2000).

O espectro de frequências que é efetivamente excitado por esse tipo de equipamento, depende da elasticidade das superfícies de contato do martelo e da estrutura. Há uma frequência de ressonância, ω_c , indicada pelos parâmetros espaciais do sistema, a partir da qual se torna muito difícil fornecer energia a este. Tal comportamento pode ser observado na Figura 12b, onde observa-se uma amplitude constante para uma determinada janela de frequências, delimitada por ω_c . Para maiores frequências a energia diminui em magnitude e apresenta maior instabilidade. Desse modo, fica claro que um impulso desse tipo se torna ineficaz a frequências superiores a ω_c . Surge então, a necessidade de controlar esse parâmetro e garantir que o intervalo de interesse esteja no raio de ação do martelo (EWINS, 2000).

Sabe-se que existe uma relação direta entre a frequência de corte, ω_c , e a duração do impulso, T_c , visto na Figura 12a. A duração do impulso, por sua vez, depende da elasticidade das superfícies de contato e da massa do corpo de impacto. Por esse motivo, o martelo de impacto comercial, normalmente contém diversos materiais diferentes para a ponteira e cabeça do martelo (EWINS, 2000).

A força de impacto será proporcional à massa e à velocidade de impacto do martelo, deste modo existem diferentes tipos de martelos, com massas diferentes para testes específicos (SEGUNDINHO et al., 2012).

O martelo contendo um transdutor de força poderá então ser utilizado para excitar pontualmente um corpo. Os sinais de resposta medidos por acelerômetros em conjunto com o processamento realizado por um analisador (utilizando a transformada rápida de Fourier, por exemplo) indicam as funções de transferência planejadas (KISTLER INSTRUMENT CORPORATION, 2019).

Os martelos instrumentados apresentam vantagens sobre os excitadores eletromagnéticos devida a facilidade em excitar a estrutura em pontos diferentes sem a necessidade de fazer grande mudanças na armação de teste, um arranjo comum para testes com martelo de impacto pode ser vista na Figura 13. Além disso, martelos de impacto apresentam

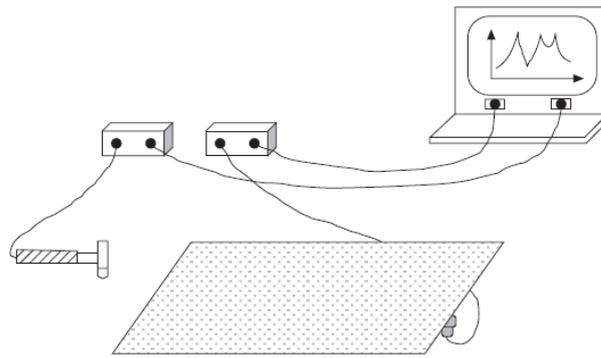


Figura 13: Armação comum para testes com martelo de impacto. Fonte: (FU; HE, 2001).

maior praticidade devido ao menor porte e preço (SEGUNDINHO et al., 2012).

Entre os pontos negativos do uso desse tipo de equipamento, destaca-se a ineficácia em induzir vibrações consideráveis a estruturas de grande porte. Além disso, o correto uso do martelo de impacto depende da experiência do operador, podendo acontecer erros na aplicação da força e até múltiplos contatos no momento do impacto, resultando em ruídos e informações falsas (SEGUNDINHO et al., 2012).

2.7.2 Preparação da estrutura e transdutores

Uma estrutura encontrada no mundo real sempre estará conectada à algo. Deste modo, seu comportamento será resultado da sua interação com esse meio e de suas características (EWINS, 2000).

Em fases iniciais de um projeto é comum realizar-se uma análise modal do sistema isolado, tal análise pode ser utilizada em estudos sobre a integridade estrutural do sistema. Neste caso, o ensaio deverá ser realizado sobre condições ideais de laboratório (EWINS, 2000).

O primeiro passo na preparação de um teste modal consiste na escolha dos mecanismos de suporte da estrutura. Tal etapa apresenta grande relevância, pois pode influenciar no comportamento da estrutura e assim prejudicar as análises subsequentes das respostas em frequência obtidas (AGILENT, 2000).

Tais condições de contorno podem inferir um sistema com apoio livre ou restrito. Na prática, é impossível obter um suporte efetivamente livre ou restrito. Um suporte livre implicaria na realização do teste com a estrutura flutuando, ou seja, com nenhuma conexão aos arredores e se comportando como um corpo rígido com frequência nula.

Com o intuito de aproximar um sistema livremente apoiado, é comum, suspender a estrutura com o uso de materiais elásticos e macios, como exemplificado na Figura 14, que tendem a influenciar pouco no comportamento do corpo. Qualquer suporte introduzirá

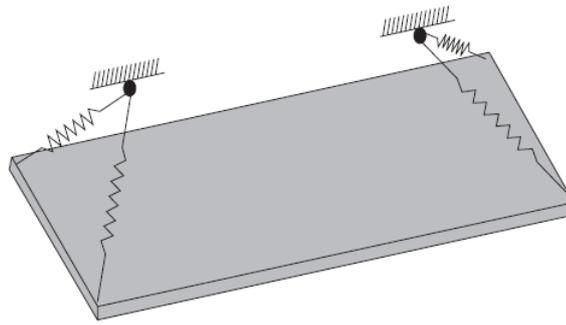


Figura 14: Placa apoiada com molas macias. Fonte: (FU; HE, 2001).

ao sistema uma determinada frequência devido a sua elasticidade. É necessário que essa frequência de corpo rígido seja menor do que um décimo das frequências dos modos de vibração que se pretende estudar, a Figura 15 mostra a resposta em frequência típica de sistemas livremente apoiados.

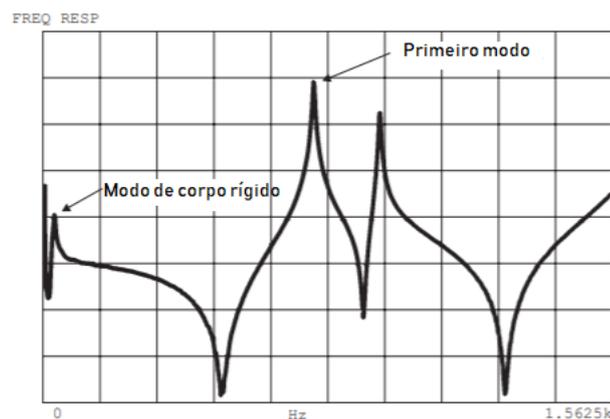


Figura 15: Comportamento típico de sistemas livremente apoiados. Fonte: Adaptado de (AGILENT, 2000).

Um sistema com apoio totalmente restrito também se torna muito difícil de simular. Tal apoio implicaria que todos os seis graus de liberdade de corpo rígido da estrutura estivessem rigidamente fixados. Na prática, toda tentativa de fixação apresenta algum grau de liberdade devido à elasticidade e amortecimento dos materiais utilizados (FU; HE, 2001).

Outra etapa importante é a seleção dos transdutores que serão utilizados. O uso de sensores piezoelétricos é amplamente difundido para testes modais. Entre as vantagens do uso desse tipo de transdutor destaca-se a aplicação a um vasto intervalo de frequências, uma boa linearidade e durabilidade.

O sensor piezoelétrico gera uma determinada diferença de potencial nos seus terminais quando sujeito à ação de alguma força. Tal fenômeno ocorre devida a composição física desse tipo de sensores, onde um cristal é utilizado internamente, capaz de criar uma

carga elétrica quando tensionado.

O acelerômetro é o sensor mais comum para a aquisição das respostas em testes modais. Ele mede a aceleração no ponto onde foi instalado e apresenta uma pequena tensão elétrica na saída de seus terminais que deve ser tratada e em seguida, analisada pelo analisador (FU; HE, 2001).

O acelerômetro deve ser capaz de obter bons resultados mesmo com diferentes frequências e amplitudes. Um sensor ideal deve ter uma relação linear entre a sua entrada e saída, de modo a garantir que os resultados sejam confiáveis (FU; HE, 2001).

Na prática, acelerômetros encontrados no mercado apresentam uma relação entre a sensibilidade da saída e a frequência, assim como um desvio de fase para frequências específicas. Tal comportamento pode ser observado na Figura 16.

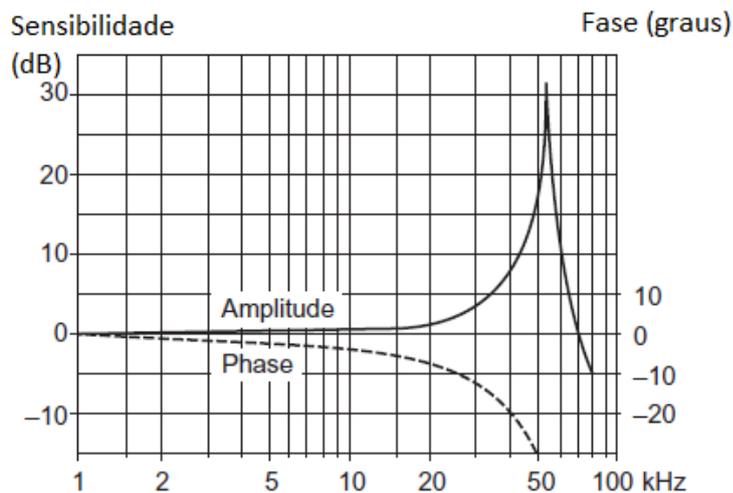


Figura 16: Relações típicas de fase e sensibilidade com a frequência. Fonte: Adaptado de (FU; HE, 2001)

No caso de acelerômetros piezoelétricos, uma massa sísmica é utilizada para aplicar uma tensão sobre um cristal quando existir movimento, gerando assim uma carga elétrica proporcional à aceleração. Um esquema da sua composição pode ser observado na Figura 17.

É essencial que algumas características de operação dos transdutores sejam observadas afim de realizar a melhor escolha, como sensibilidade, frequências de operação e influência da temperatura. A melhor sensibilidade deve ser escolhida. Contudo, grandes sensibilidades equivalem a sensores cada vez maiores e mais pesados, podendo influenciar nas FRF (AGILENT, 2000).

Um acelerômetro fixado a uma estrutura, naturalmente criará uma frequência natural de corpo rígido resultante do método de fixação utilizado. Diferentes métodos de fixação resultam em diferentes rigidezes e diferentes modos de vibração. Procura-se então

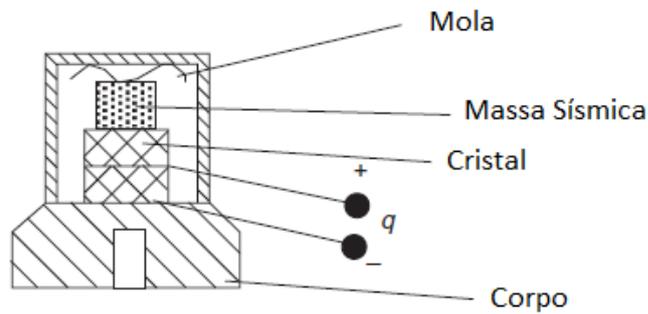


Figura 17: Esquema de acelerômetro piezoelétrico Fonte: Adaptado de (FU; HE, 2001)

que essas frequências sejam menores que um décimo das frequências naturais da estrutura. Nesse caso, as medições realizadas pelos acelerômetros serão idênticas às reais (AGILENT, 2000).

A instalação e o posicionamento correto dos transdutores é muito importante, especialmente para acelerômetros. Existem várias formas de os fixar na estrutura. Novamente, cada método apresenta vantagens e desvantagens, cabe ao experimentador encontrar aquele que apresente maior praticidade e uma medição coerente das FRF. No gráfico da Figura 18, é possível encontrar algumas características típicas dos métodos de fixação mais utilizados (EWINS, 2000).

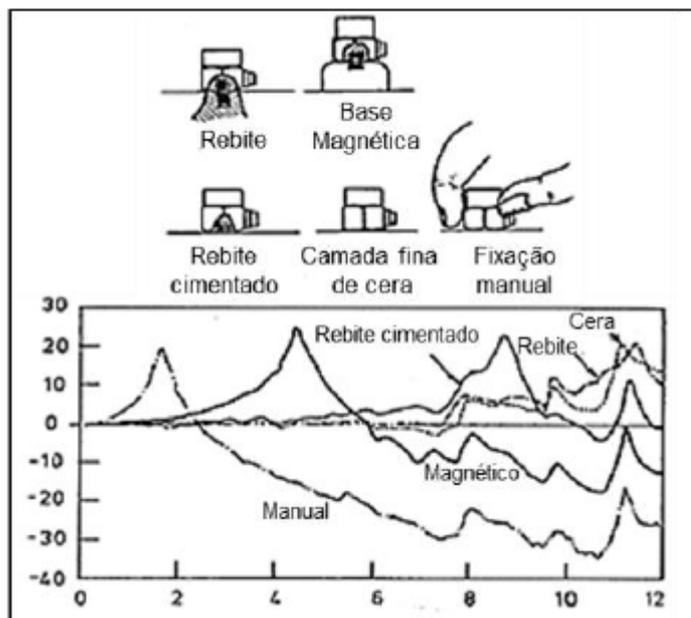


Figura 18: Métodos e de fixação e FRF características de cada modelo. Fonte: (MATEUS, 2017)

É importante observar que qualquer método de fixação introduzirá inevitavelmente um comportamento elástico ao acoplamento, e como já foi observado, tal efeito poderá interferir na fidelidade dos dados obtidos.

Para uma obtenção adequada das formas modais da estrutura é importante definir *driving points*. Um *driving point* é um ponto onde a excitação e resposta do sistema são realizadas no mesmo local e direção (MATEUS, 2017).

Um problema comum que pode ocorrer na localização dos sensores consiste na fixação de acelerômetros em pontos próximos aos nós dos modos de vibração da estrutura. Esses são pontos onde a estrutura não apresenta vibrações consideráveis, as FRF obtidas não seriam então úteis para o cálculo dos parâmetros modais da estrutura. Tal obstáculo pode ser superado ao se realizar uma análise prévia dos nós, por algum método diferente, como por exemplo, o método de elementos finitos (EWINS, 2000).

2.8 Processamento digital de sinais

O processamento de sinais digitais consiste em adquirir e analisar sinais provenientes de eventos reais (a vibração de um corpo por exemplo) e utilizar ferramentas matemáticas com o intuito de realizar transformações ou extrair elementos para análise do sistema (PENHA et al., 1999).

Para isso, deve-se estimar as transformadas de Fourier dos sinais que são alimentados ao analisador. As versões mais relevantes da transformada de Fourier relacionam os domínios do tempo e frequência, descrevendo o sinal como uma superposição de senoides complexas. Na forma mais simples (Equação 2.12), a transformada de Fourier descreve uma função periódica $x(t)$, como uma série infinita (HAYKIN; VEEN, 2001).

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right) \quad (2.12)$$

Onde a_n e b_n são descritas em relação à $x(t)$,

$$a_n = \left(\frac{2}{T}\right) \int_0^T x(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \left(\frac{2}{T}\right) \int_0^T x(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

Os coeficientes a_n e b_n são os coeficientes espectrais da função $x(t)$ e são normalmente representados em módulo, para um período T . A função $x(t)$ com duração finita pode ser discretizada para ser definida como um conjunto de N valores no tempo ($t_k; k = 1, N$) (EWINS, 2000).

$$x(t_k) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nt_k}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt_k}{T}\right) \right); k = 1, N \quad (2.13)$$

A Equação 2.13 representa a forma da transformada de Fourier a ser aplicada em procedimentos como a análise modal. Os sinais dos acelerômetros são originados no domínio do tempo e suas propriedades de interesse serão observadas no domínio da frequência. A Figura 19 mostra sinais adquiridos no domínio do tempo e suas respectivas análises espectrais e aproximações discretizadas pela Transformada de Fourier Discreta (DFT - *Discrete Fourier Transform*) (EWINS, 2000).

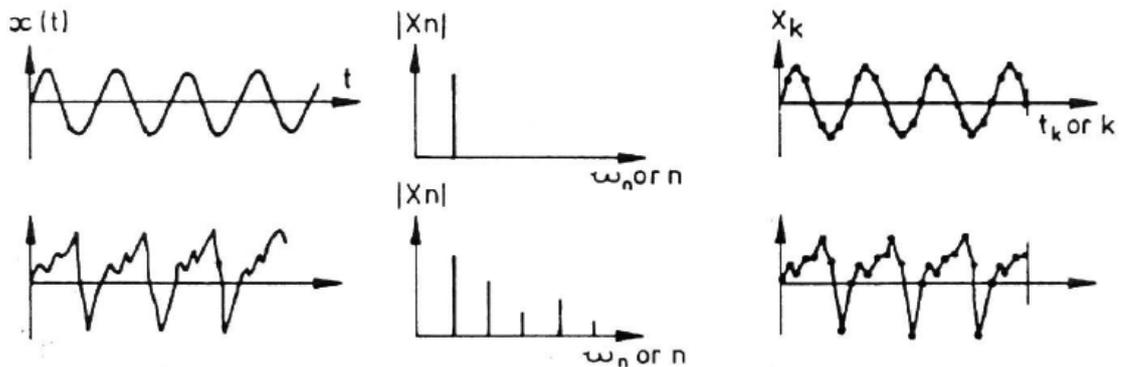


Figura 19: Análise no tempo, análise espectral e aproximações pela DFT. Fonte: (EWINS, 2000)

Qualquer medição apresentará ruído. Existem situações em um teste modal onde ruídos podem ser ignorados. Para medição das frequências de ressonância, o ruído se torna insignificante quando comparado a resposta do sistema. Por outro lado, para frequências de antirressonância, o ruído se torna irrelevante para a medição do sinal de entrada (FU; HE, 2001).

Alguns fenômenos associados ao processamento digital de sinais devem ser levados em conta para um bom tratamento dos dados.

Um desses casos consiste no fenômeno de *aliasing*. Ao se adquirir um sinal discreto de um sinal original com frequências muito elevadas, existe o risco de esses dados serem mal interpretados caso a frequência de amostragem seja muito baixa (EWINS, 2000).

É possível que um sinal com frequência muito elevada produza o mesmo sinal discreto de um sinal original com menor frequência, como pode ser visto na Figura 20. Por este motivo, existem métodos de *anti-aliasing* que fazem uso de filtros para condicionar o sinal. Placas de aquisição modernas possuem ferramentas de *anti-aliasing* que permitem uma correta obtenção do sinal (EWINS, 2000).

O janelamento (*windowing*) é uma ferramenta que permite a mitigação do efeito de espectro disperso (*leakage*) (LEME, 2014). O *leakage* é uma consequência da necessidade de se avaliar o sinal a um intervalo finito de tempo. Com isso, certas presunções de periodicidade podem induzir a um espectro de frequência não representativo do comportamento da FRF (EWINS, 2000).

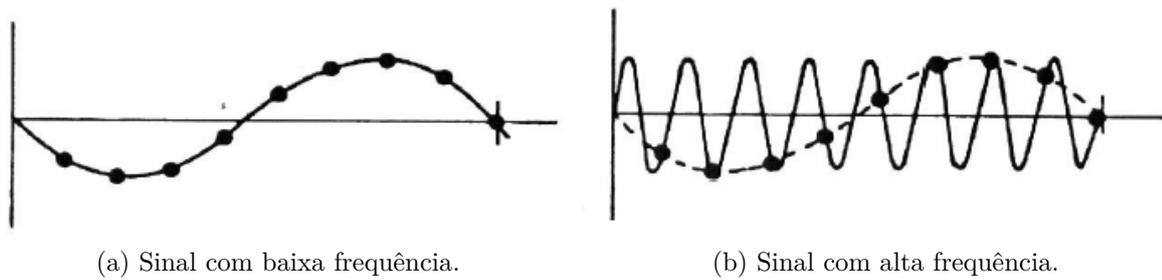


Figura 20: Fenômeno de *aliasing* (EWINS, 2000).

O janelamento envolve o envio de um sinal no domínio do tempo, que funciona como uma *janela* de seleção do espaço que será discretizado. A Figura 21 ilustra o resultado do *windowing* utilizando diferentes métodos (MATEUS, 2017).

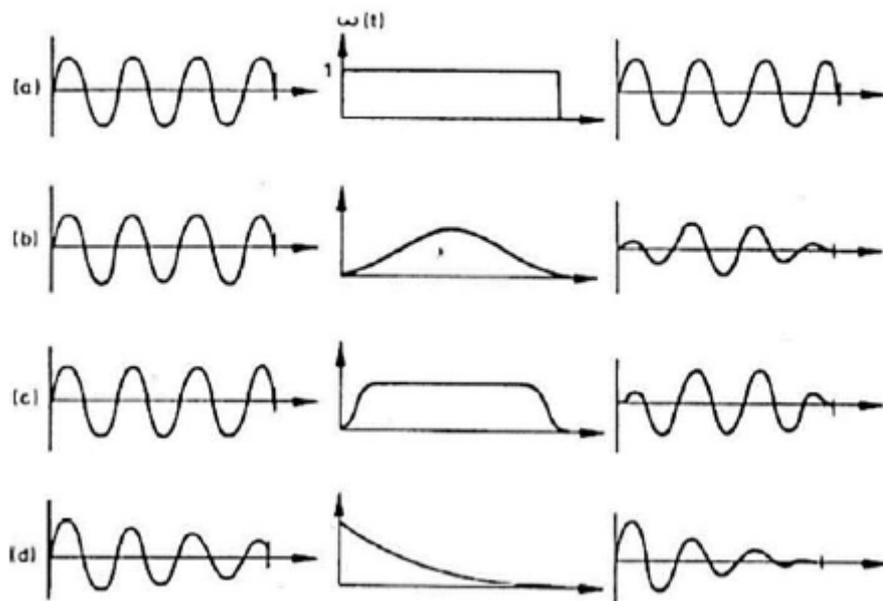


Figura 21: Janelamentos (a) Boxcar; (b) Hannig; (c) Cosseno-cônico; (d) Exponencial. Fonte: (MATEUS, 2017).

2.9 Extração de parâmetros por ajuste de curvas

O método de extração de parâmetros modais por ajuste de curva é vastamente utilizado em análises modais quando uma precisão maior é requerida ou o sinal medido apresenta ruído excessivo (BRUEL & KJAER, 1988).

Existem diversos tipos diferentes de algoritmos computacionais que podem ser utilizados para a realização de uma análise eficiente. Contudo, para obter resultados confiáveis é necessário assegurar que os dados fornecidos ao algoritmo sejam confiáveis.

Devido ao grande uso de diferentes algoritmos para ajuste de curvas de dados estruturais, é cada vez mais difícil determinar aquele que melhor se adequam a um teste específico. Existem métodos muito semelhantes, com pequenas variações ou extensões no critério de ajuste (AGILENT, 2000).

O método por ajuste de curva tende a conciliar a teoria matemática sobre a obtenção das FRF e as medições realizadas na prática. O ajuste de curva é um processo analítico para determinar os parâmetros matemáticos que melhor se adequam às grandezas medidas (BRUEL & KJAER, 1988). Um exemplo de ajuste de curva pode ser observado na Figura 22.

A forma mais comum de se classificar os diferentes métodos é entre os para sistemas com um grau de liberdade e os com múltiplos graus de liberdade. O nível de sofisticação e acurácia varia para diferentes metodologias. Métodos para análises de múltiplos modos de vibração normalmente requerem mais recursos computacionais (AGILENT, 2000).

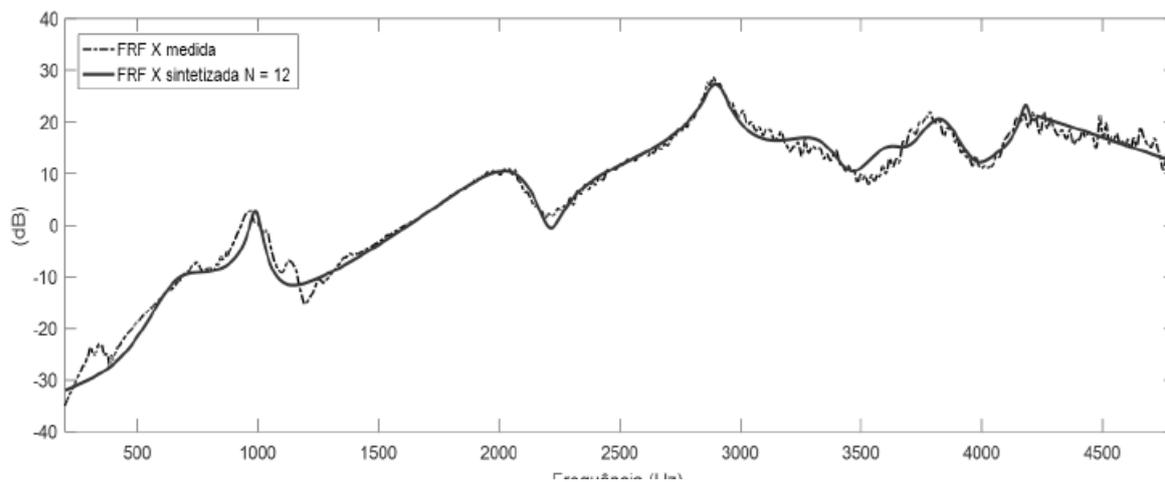


Figura 22: Exemplo de ajuste de curva. Fonte: (MATEUS, 2017).

Para análises de sistemas com um grau de liberdade deve-se considerar o comportamento do sistema na vizinhança da frequência de ressonância, como sendo consequência desse único modo de vibração (AGILENT, 2000).

Métodos para um grau de liberdade são normalmente utilizados para sistemas com modos de vibração bem separados. A faixa de frequência em torno da ressonância deve ser escolhida de forma a maximizar a qualidade dos dados, sem que um excesso de informações sobre outros modos, prejudique a análise do sistema como um grau de liberdade (BRUEL & KJAER, 1988).

O método de ajuste para sistemas com múltiplos graus de liberdade é aplicado quando se pretende obter parâmetros de diversos modos de vibração para um determinado intervalo de frequências, ou seja, quando os modos de vibração se encontram próximos no espectro da frequência. Tal característica pode ser observada na Figura 23 (BRUEL &

KJAER, 1988).

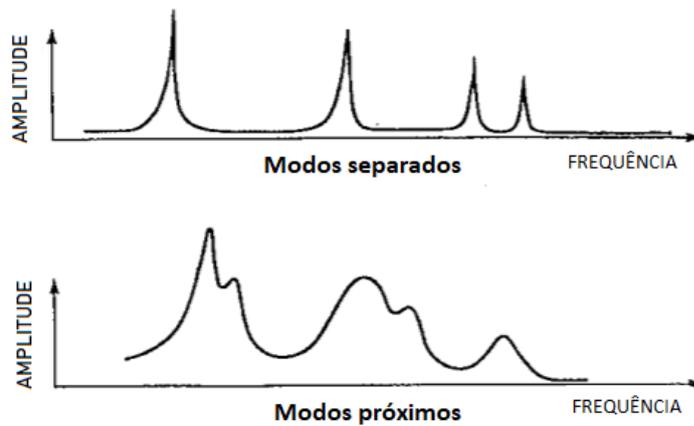


Figura 23: Diferentes densidades de modos. Fonte: Adaptado de (SCHWARZ; RICHARDSON, 1999).

Existem métodos globais e locais. Métodos locais são capazes de analisar apenas uma FRF por vez, enquanto que métodos globais são capazes de analisar várias FRF simultaneamente (SCHWARZ; RICHARDSON, 1999).

Em qualquer método de interpretação de FRF, é importante observar que nem todos modos estarão inseridos na janela de análise escolhida. Observa-se que normalmente, diversas frequências de ressonância não farão parte do espectro de frequência observado. Porém, tais ressonâncias terão um efeito residual na análise das FRF. Apesar dos parâmetros fora da faixa de frequências de interesse não poderem ser identificados, os seus efeitos nos modos de vibração de interesse podem ser estimados.

Pela Figura 24 é possível observar que os modos com frequências mais baixas tendem a ter um efeito de massa na curva, enquanto que modos com frequências mais elevadas tendem a ter um efeito elástico (AGILENT, 2000).

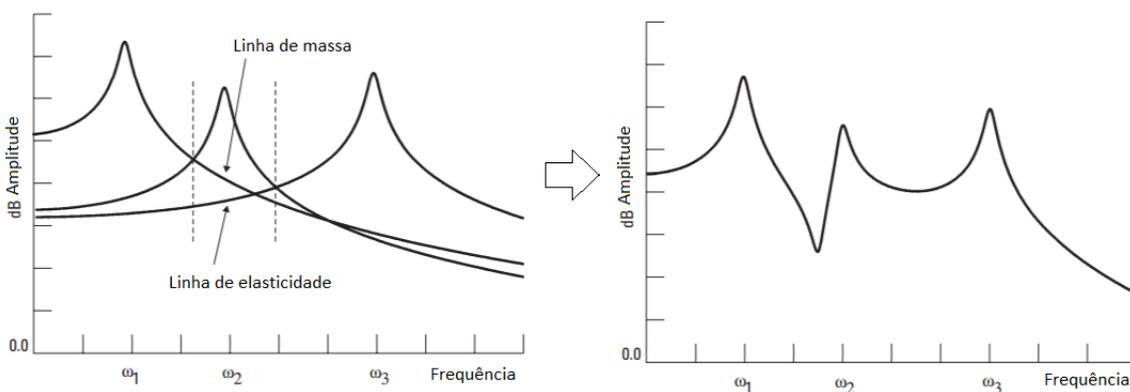


Figura 24: Efeitos de modos de vibração distantes. Fonte: Adaptado de (AGILENT, 2000).

2.9.1 Método RFP – (Rational Fraction Polynomial)

O método RFP (*Rational Polynomial Method*) é considerado um dos mais adequados para a análise de sistemas com múltiplos graus de liberdade. Ele é baseado em uma formulação teórica, pela seguinte razão de polinômios:

$$H(\omega) = \frac{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_m(j\omega)^m}{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_n(j\omega)^n} \quad (2.14)$$

A forma apresentada na Equação 2.14 consiste na razão de dois polinômios. As ordens do numerador e denominador são independentes. O denominador da equação é o polinômio característico do sistema (EWINS, 2000).

Considerando a FRF uma função de transferência, observa-se que as raízes do polinômio característico são os polos do sistema enquanto que as raízes do numerador são os valores onde a função de transferência se anula, sendo assim, são chamados de zeros do sistema. Conclui-se que ao se resolver as raízes de ambos polinômios é possível determinar os zeros e os polos do sistema (RICHARDSON; FORMENTI, 1982).

A resolução desse problema de ajuste de curva consiste em encontrar os termos desconhecidos da expressão analítica 2.14 (a_0, a_1, \dots, a_m e b_0, b_1, \dots, b_n), de modo que o erro em relação as FRF medidas seja o menor possível. Para isso, define-se H_i , como sendo o valor da FRF medido na frequência ω_i , e o erro entre os valores medidos e a aproximação pelo ajuste da curva como:

$$e_i = \sum_{k=0}^m a_k(j\omega_i)^k - H_i \left[\sum_{k=0}^n b_k(j\omega_i)^k + (j\omega_i)^n \right] \quad (2.15)$$

Define-se então a seguinte função de erro, a qual se pretende minimizar, afim de realizar uma bom ajuste de curva para L frequências:

$$J = \sum_{i=0}^L e_i^* e_i = \{E^*\}^t \{E\} \quad (2.16)$$

O vetor de erro pode ser escrito como uma equação de matrizes e vetores.

$$\{E\} = [P] \{A\} - [T] \{B\} - \{W\} \quad (2.17)$$

A identificação dos coeficientes da função de transferência desconhecidos, envolve a resolução seguinte expressão de $(m + n + 1)$ equações:

$$\begin{bmatrix} Y & X \\ X^t & Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G \\ F \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Os termos da equação 2.18 são de valores reais, incluindo os vetores $\{A\}$ e $\{B\}$ que são as soluções procuradas. Espera-se portanto que os coeficientes sejam encontrados resolvendo a equação linear 2.18.

Por outro lado, sabe-se que para casos encontrados na prática, essas equações normalmente são mal condicionadas e difíceis de resolver. Assim sendo, o método procede a uma reformulação das equações utilizando expansão de frações parciais por polinômios ortogonais (RICHARDSON; FORMENTI, 1982).

Após a obtenção dos coeficientes b_0, b_1, \dots, b_n , os parâmetros modais são identificados resolvendo os polinômios que compõem a Equação 2.14. O denominador indicará as frequências naturais e fatores de amortecimento (RICHARDSON; FORMENTI, 1982).

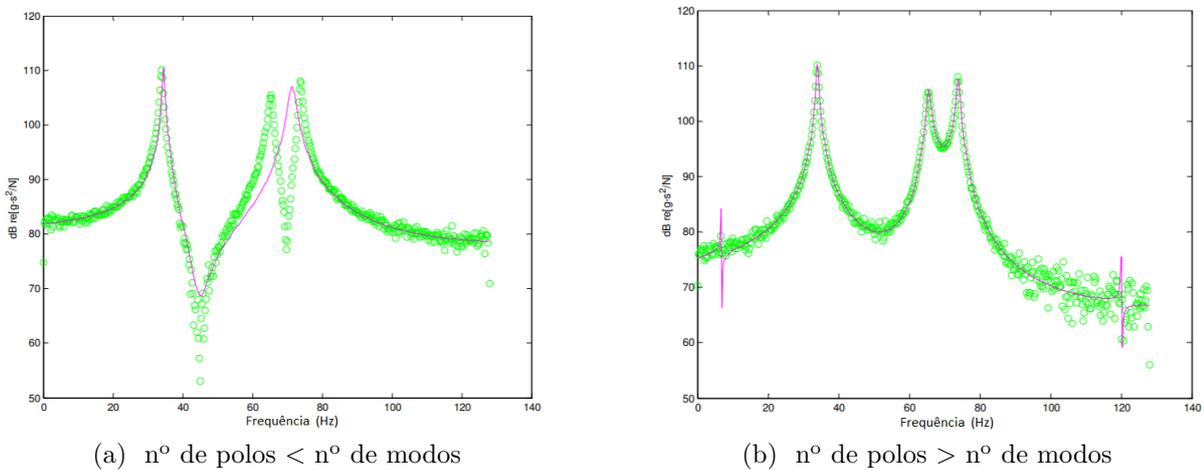


Figura 25: Importância da escolha do número correto de polos. Fonte: Adaptado de (EL-BADAWY, 2003).

É importante, seguir uma escolha adequada do número de polos da função de ajuste. Caso um número pequeno de polos seja escolhido, existe o risco do ajuste não identificar todos os modos de vibração. Em contrapartida, o uso de um número excessivo de polos pode resultar em ajuste muito sensível, indicando parâmetros que não estão presentes na FRF, tal comportamento pode ser observado na Figura 25b. As linhas sólidas da Figuras 25a e 25b representam as FRF sintetizadas pelo método, enquanto que os círculos representam as medições obtidas (MATEUS, 2017).

3 Materiais e Métodos

3.1 Objeto de estudo

A estrutura de teste utilizada neste trabalho consiste em um chassi tubular de um protótipo mini Baja offroad. O chassi foi projetado e construído pela equipe Inconfidentes Baja Clube com intuito de participar em competições estudantis promovidas pela SAE Brasil e pode ser visto na Figura 26. A estrutura teve de ser dimensionada com um design aerodinâmico, buscando otimizar os aspectos competitivos do carro, aumentando a resistência, diminuindo o peso e o custo de fabricação.

O projeto deve seguir normas de ângulos e medidas bem específicas para assegurar a segurança e conforto do piloto. Tais normas são redigidas e divulgadas pela SAE Brasil. O chassi projetado pela equipe é do tipo *space frame*, confeccionado a partir de um estrutura com treliças, com o objetivo de aumentar a rigidez e a resistência à flexão, quando sujeito a diversos tipos de esforços (HAPPIAN-SMITH, 2001).



Figura 26: Estrutura tubular protótipo Inconfidentes Baja. Fonte: (INCONFIDENTES BAJA CLUBE, 2017)

Para a construção da estrutura tubular utilizou-se tubos da liga de aço DIN 2391 St 52. Os tubos têm 32 mm de diâmetro e 1,8 mm de espessura. A Tabela 2 mostra dados da estrutura.

Tabela 2: Dados da estrutura tubular.

Estrutura tubular	Mista com treliças definidas e em áreas de maiores esforços
Processo de Soldagem	MAG
Massa	45 kg
Comprimento	1726 mm
Largura	832 mm
Altura	1282 mm

Fonte: Adaptado de (INCONFIDENTES BAJA CLUBE, 2017)

3.2 Teste de impacto

Optou-se pelo teste de impacto com o uso de um martelo de impacto instrumentado, três acelerômetros e uma placa de aquisição de dados com quatro canais de comunicação. O objetivo do teste é obter as FRF para extração dos parâmetros modais.

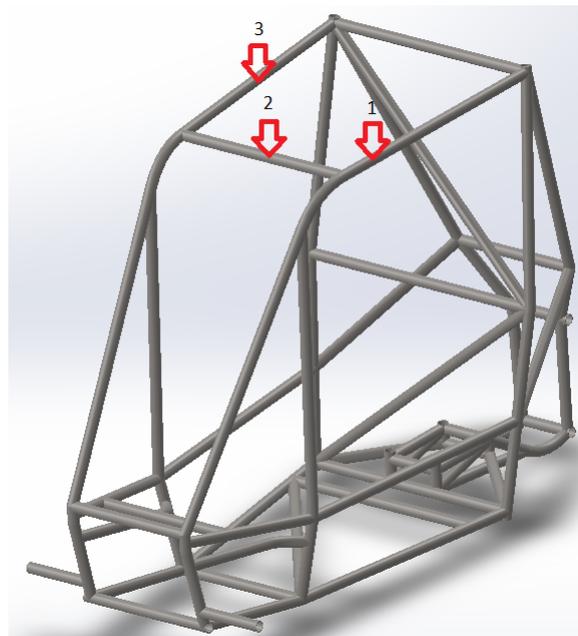


Figura 27: Localização dos acelerômetros. Fonte: Pesquisa Direta (2019).

A localização dos acelerômetros, vista na Figura 27, foi escolhida de modo a evitar os nós dos modos de vibração que se pretende estudar. Com o auxílio de estudos anteriores sobre os modos de vibração desse tipo de estrutura, como aqueles realizados por Furtado e Guimarães (2016), e com testes de diferentes opções, optou-se por fixar os acelerômetros na parte superior da gaiola. Tal escolha se torna ainda mais conveniente ao se notar que os demais subsistemas do veículo serão fixados na parte inferior da estrutura, limitando a componente de vibração livre da região (RAJPUT et al., 2013).

Foram realizados três testes de impacto em três *driving points* diferentes, correspondendo aos três pontos apresentados pela Figura 27. Para cada teste, foram realizados quatro impactos. O software realiza a média das respostas dos diferentes impactos e fornece os resultados obtidos na análise dos três acelerômetros.

3.2.1 Suspensão da estrutura.

Com o fim de obter as frequências naturais e demais parâmetros modais do chassi, simulou-se um apoio livre, ou seja, com a estrutura vibrando livremente, para isso, utilizou-se elásticos macios para suspender o corpo a uma viga no Laboratório de Acústica, Vibrações e Sistemas Inteligentes, da Escola de Minas, como visto na Figura 28. Certificou-se que a frequência de vibração da estrutura neste arranjo fosse pequena o suficiente para não influenciar nas FRF obtidas no teste.



Figura 28: Arranjo para teste de impacto. Fonte: Pesquisa Direta (2019).

Ganchos em formato de S foram utilizados para facilitar a fixação do chassi aos elásticos. Assegurou-se que um material macio fosse utilizado para que os ganchos não

influenciassem o comportamento do corpo. Além disso, garantiu-se que as frequências de vibração livre do sistema fossem pequenas o suficiente para não influenciar o comportamento das FRF no espectro de frequência pretendido.

3.2.2 Martelo de Impacto

O martelo de impacto utilizado nos experimentos para excitação da estrutura foi o modelo 8206-002, da Brüel & Kjær como pode ser visto na Figura 29. O martelo contém diferentes ponteiros que devem ser escolhidas de acordo com o espectro de frequência que se pretende analisar.

A ponta de nylon escolhida para o teste modal deste trabalho apresentou melhor coerência para os dados obtidos na faixa de frequências de interesse. Uma relação dos diferentes estímulos resultantes dos diversos materiais pode ser vista na Figura 30.



Figura 29: Martelo de impacto. Fonte: (BRUEL & KJAER, 2019).

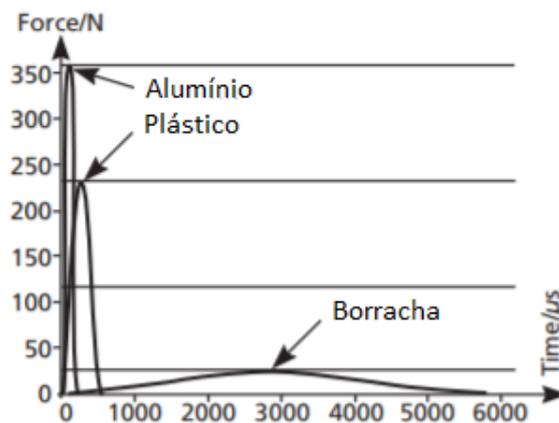


Figura 30: Intensidade do impulso de diferentes pontas no tempo. Fonte: Adaptado de (BRUEL & KJAER, 2019).

3.2.3 Acelerômetros

Utilizou-se acelerômetros fabricados pela PCB *Piezotronics* INC, modelo 352C33. Os acelerômetros foram fixados com o uso de cera. A Figura 31 mostra o modelo e método

de fixação utilizados. Todos os acelerômetros foram posicionados na mesma direção Z, de acordo com Figura 32.



Figura 31: Acelerômetro e cera utilizados. Fonte: (MATEUS, 2017).



Figura 32: Acelerômetros fixados. Fonte: Autor.

3.2.4 Placa de aquisição

Utilizou-se a placa de aquisição produzida pela *National Instruments*, modelo NI9234 USB vista na Figura 33. É um módulo de aquisição de sinais de sensores piezoelétricos, contendo 4 canais. A ferramenta inclui um filtro *anti-aliasing* que ajusta automaticamente a frequência de aquisição do sinal (NATIONAL INSTRUMENTS, 2015).

como da aceleração que será medida. Outra configuração importante que o operador deve se atentar é quanto à orientação dos sensores e à resolução destes.

Os dados adquiridos no *LabVIEW* são então exportados para o *MS Excel*. Utiliza-se o método RFP para a extração dos parâmetros modais globais da estrutura, com o algoritmo desenvolvido por Acuña (2007) no *MATLAB*. O software permite a geração de gráficos da curva sintetizada que permitem uma avaliação do ajuste desenvolvido pelo método.

3.4 Modelagem computacional

O software *SOLIDWORKS* permite a modelagem e simulação das frequências de vibração do chassi. É possível replicar com excelente exatidão a geometria da estrutura (Figura 35), e aplicar as propriedades do material utilizado na fabricação. Com uso da ferramenta *SOLIDWORKS Simulation*, realiza-se uma análise de frequência da estrutura, especificando, o número de modos de vibração a serem identificados, assim como, o espectro de frequência a ser analisado.

O software produz então, uma renderização do comportamento da estrutura nos modos de vibração identificados e as respectivas frequências naturais.

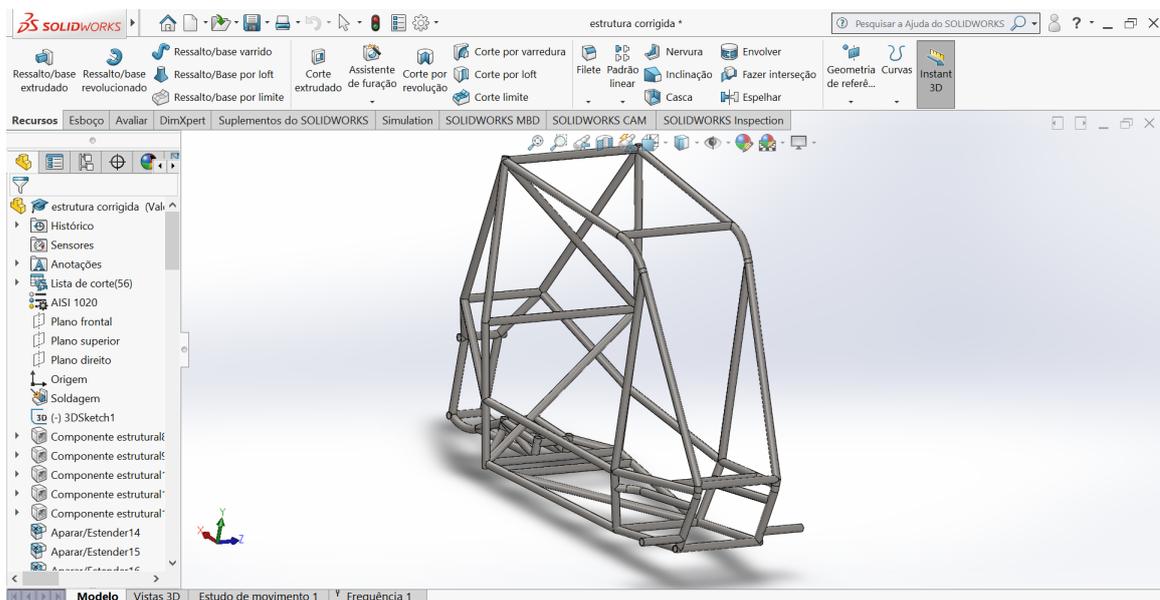


Figura 35: Interface da ferramenta *SOLIDWORKS*. Fonte: Pesquisa Direta (2019).

3.5 Ajuste de curva pelo método *Rational Fraction Polynomial* (RFP)

Baseado no trabalho de Richardson e Formenti (1982), Acuña (2007) desenvolveu um algoritmo capaz de extrair os parâmetros modais globais (frequências naturais e fatores de amortecimento) e locais utilizando o método RFP.

Como explicado em capítulos anteriores, o método tem uma formulação analítica que faz o ajuste da curva obtida experimentalmente, ao encontrar os coeficientes da função de transferência característica do sistema (RICHARDSON; FORMENTI, 1982).

O algoritmo segue a lógica apresentada na Figura 36, com a geração de polinômios ortogonais afim de simplificar matrizes mal condicionadas. A geração dos polinômios ortogonais é realizada pelo método de Forsythe, explicado em detalhes em Richardson e Formenti (1982).

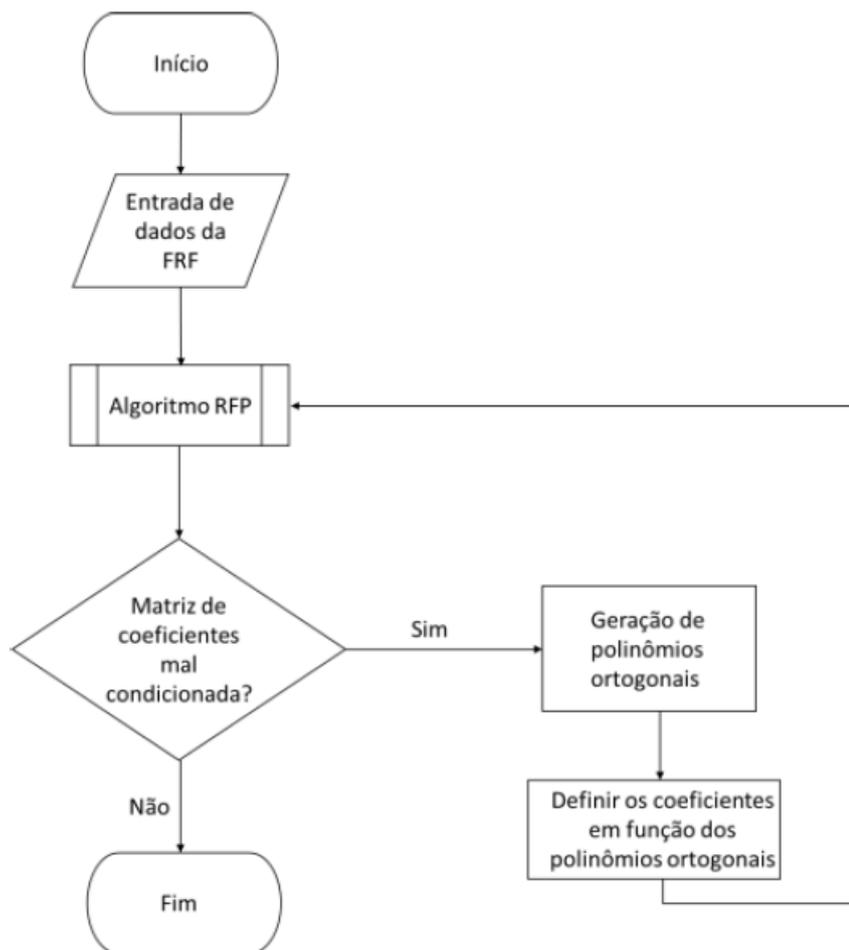


Figura 36: Lógica de tomada de decisão do algoritmo RFP. Fonte: (MATEUS, 2017).

O algoritmo de Acuña (2007) foi escrito na linguagem do software matemático *MATLAB* e é constituído de duas funções que devem ser executadas juntamente. A

primeira realiza a conversão do numerador e denominador da FRF de ajuste em polinômios ortogonais enquanto a segunda identifica os parâmetros modais fazendo o ajuste da curva.

3.5.1 Geração de polinômios ortogonais

A FRF pode ser escrita em termos de polinômios ortogonais assumindo a seguinte forma:

$$H(\omega_i) = \frac{\sum_{k=0}^m c_k \phi_{i,k}}{\sum_{k=0}^n d_k \theta_{i,k}} \quad (3.1)$$

Os coeficientes $c_k, k = 0, \dots, m$ e $d_k, k = 0, \dots, n$ são as soluções da equação. O polinômio do denominador difere do numerador pois têm condições de ortogonalidade diferentes. Os polinômios contêm ponderações ϕ e θ distintas. Sendo ϕ uma função com peso unitário e θ equivalente à magnitude ao quadrado da FRF medida (RICHARDSON; FORMENTI, 1982).

A equação de solução pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} I_1 & X \\ X^t & I_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Quando comparada à Equação 2.18, observa-se que houve uma simplificação considerável da complexidade da resolução. As matrizes $[Y]$ e $[Z]$ são substituídas por matrizes identidade que permitem que a Equação 3.2 seja escrita como um conjunto de equações não acopladas:

$$[I - [X]^t[X]] \{D\} = -[X]^t\{H\} \quad (3.3)$$

$$\{C\} = \{H\} - [X]\{D\} \quad (3.4)$$

Para encontrar as soluções numéricas das Equações 3.3 e 3.4, utiliza-se o método de *Forsythe*. Neste método, os polinômios complexos, $P_{i,k}$ podem ser gerados a partir de polinômios com valores reais $R_{i,k}$, sendo estes referentes ao k-ésimo polinômio gerado para i-ésima frequência (RICHARDSON; FORMENTI, 1982).

As saídas da função apresentada nas Figuras 37 e 38 são as matrizes de polinômio complexo e transformada complexa, utilizadas respectivamente para minimização da função de erro e recuperação dos coeficientes originais $\{A\}$ e $\{B\}$ (MATEUS, 2017).

```

if phitheta==1
    q=ones(size(omega));
elseif phitheta==2
    q=(abs(rec)).^2;
else
    error('phitheta must be 1 or 2.')
end

```

Figura 37: Função de ponderação dos numeradores e denominadores. Fonte: (ACUÑA, 2007).

```

for k=1:kmax,
    Vkm1=2*sum(omega.*R(:,k+1).*R(:,k).*q);
    Sk=omega.*R(:,k+1)-Vkm1*R(:,k);
    Dk=sqrt(2*sum((Sk.^2).*q));
    R=[R,(Sk/Dk)];
    coeff(:,k+2)=-Vkm1*coeff(:,k);
    coeff(2:k+1,k+2)=coeff(2:k+1,k+2)+coeff(1:k,k+1);
    coeff(:,k+2)=coeff(:,k+2)/Dk;
end

R=R(:,2:kmax+2);
coeff=coeff(:,2:kmax+2);

i=sqrt(-1);
for k=0:kmax,
    P(:,k+1)=R(:,k+1)*i^k;
    jk(1,k+1)=i^k;
end
coeff=(jk'*jk).*coeff;

```

Figura 38: Definição das frações parciais para polinômios complexos. Fonte: (ACUÑA, 2007).

3.5.2 Identificação dos parâmetros modais.

Na função para a obtenção dos parâmetros modais, o autor inicia declarando os componentes do vetor erro que, por sua vez, serão utilizados na solução dos coeficientes de ajuste da Equação 3.2.

$$[E] = [P]\{C\} - \{T\}\{D\} - \{W\} \quad (3.5)$$

Os vetores solução $\{C\}$ e $\{D\}$ são então encontrados como pode ser observado na Figura 39.

```
X=-2*real(Phi'*T);
G=2*real(Phi'*W);

d=-inv(eye(size(X))-X.*X)*X.*G;
C=G-X*d;
D=[d;1];
```

Figura 39: Solução dos coeficientes de polinômios ortogonais. Fonte: (ACUÑA, 2007).

Com os coeficientes dos polinômios ortogonais uma fórmula analítica da FRF pode ser sintetizada, assumindo a forma da Equação 3.1. A Figura 40 descreve a parte da função que encontra os vetores solução originais $\{A\}$ e $\{B\}$ (MATEUS, 2017).

```
A=coeff_A*C;
[r,c]=size(A);
A=A(r:-1:1).';

B=coeff_B*D;
[r,c]=size(B);
B=B(r:-1:1).';
```

Figura 40: Solução dos coeficientes do polinômios de ajuste. Fonte: (ACUÑA, 2007).

Os vetores de solução $\{A\}$ e $\{B\}$ permitem o cálculo dos polos e zeros da FRF para o melhor ajuste de curva em relação à FRF medida. Com isso é possível encontrar os parâmetros modais globais do sistema (frequências naturais e fatores de amortecimento), como visto na Figura 41 (MATEUS, 2017).

```
freq=abs(Polos);  
damp=-real(Polos)./abs(Polos);  
  
Ai=-2*(real(Residuos).*real(Polos)+imag(Residuos).*imag(Polos));  
Bi=2*real(Residuos);  
const_modal=complex(Ai,abs(Polos).*Bi);  
    Ci=abs(const_modal);  
    Oi=angle(const_modal).*(180/pi);  
  
modal_par=[freq, damp, Ci, Oi];
```

Figura 41: Obtenção dos parâmetros da modais globais a partir dos polos da função de transferência sintetizada. Fonte: (ACUÑA, 2007).

4 Resultados

4.1 Funções de Resposta em Frequência obtidas pelo teste de impacto

Com a realização do teste de impacto, detalhado no capítulo anterior, é possível obter as respostas do sistema para os diferentes estímulos aplicados. O software analisador (*LabVIEW*), permite a visualização da resposta da estrutura. São gerados gráficos da amplitude (resposta/impacto), fase e coerência. Como citado no capítulo 2, as informações de amplitude e fase juntas consistem em um gráfico de Bode. As Figuras 42, 43 e 44 mostram os gráficos de Bode obtidos nos testes. A identificação dos testes é feita de acordo com os pontos de excitação mostrados na Figura 27.

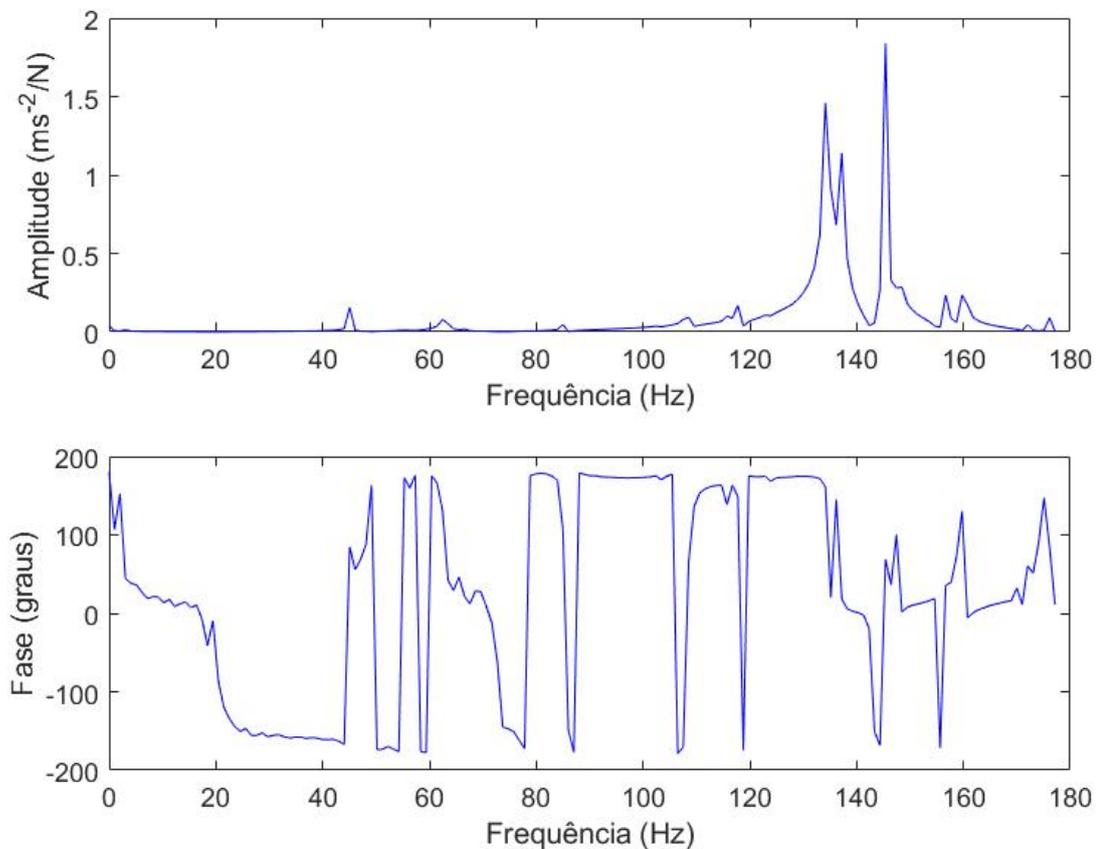


Figura 42: Gráfico de Bode para a FRF obtida pelo teste 1. Fonte: Pesquisa Direta (2019).

Para uma melhor visualização da FRF é comum o uso de uma escala logarítmica

na representação da função. Tal operação equivale à fórmula apresentada na Equação 2.11 e pode ser facilmente implementada no *MATLAB* como visto na equação abaixo.

```
plot (FRF1 (:, 1), 20*log10 (abs (FRF1 (:, 2))) )
```

Com isso é possível plotar um gráfico da FRF em decibéis, que permite uma melhor visualização dos parâmetros modais medidos. As funções de coerência avaliam a linearidade das entradas e saídas do sistema e a qualidade das medições. Uma coerência baixa pode ser causada por ruídos, resolução insuficiente ou por um comportamento não linear da estrutura (CRYSTAL, 2016).

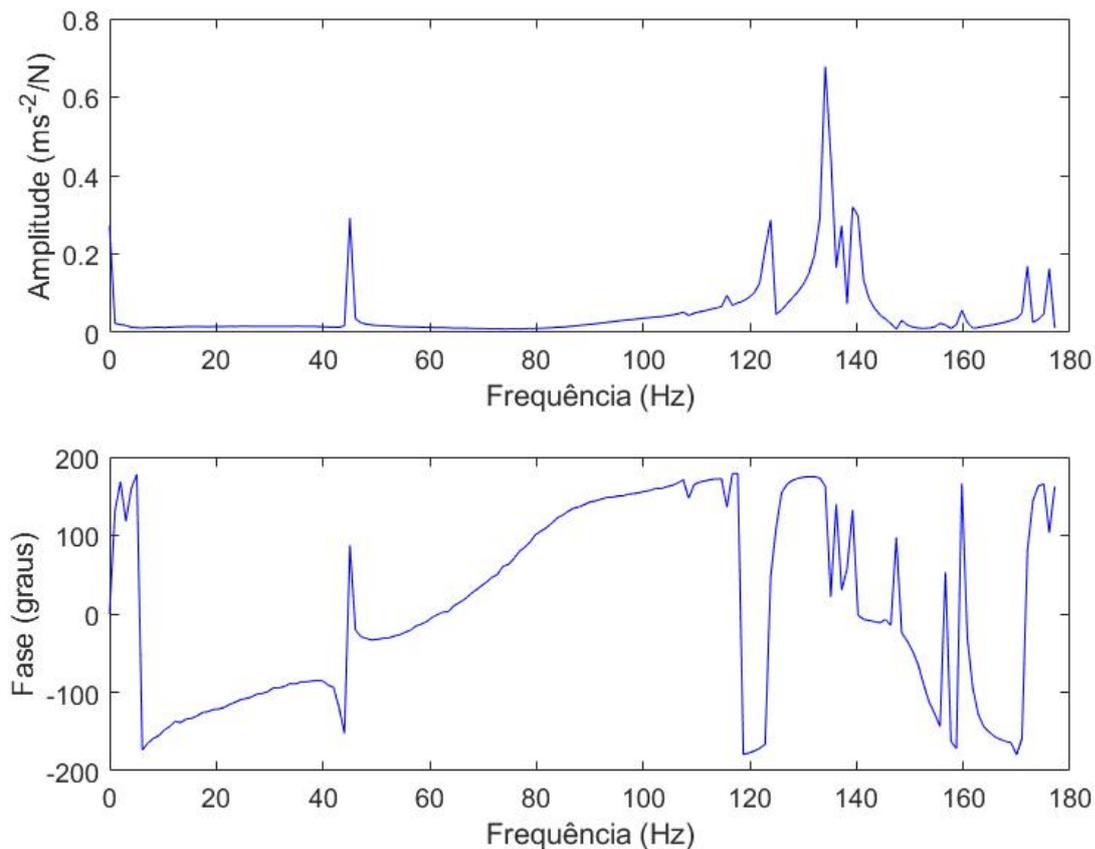


Figura 43: Gráfico de Bode para a FRF obtida pelo teste 2. Fonte: Pesquisa Direta (2019).

A Figura 45 mostra a FRF obtida pelo teste 1, os impactos foram efetuados em pontos de acordo com a Figura 27. É possível observar valores de frequência onde a amplitude apresenta um pico. Tais pontos correspondem às frequências naturais do sistema e caracterizam os seus modos de vibrar. Observa-se entre os picos, vales, onde a estrutura vibra com menores amplitudes. Essas são as regiões de antirressonância.

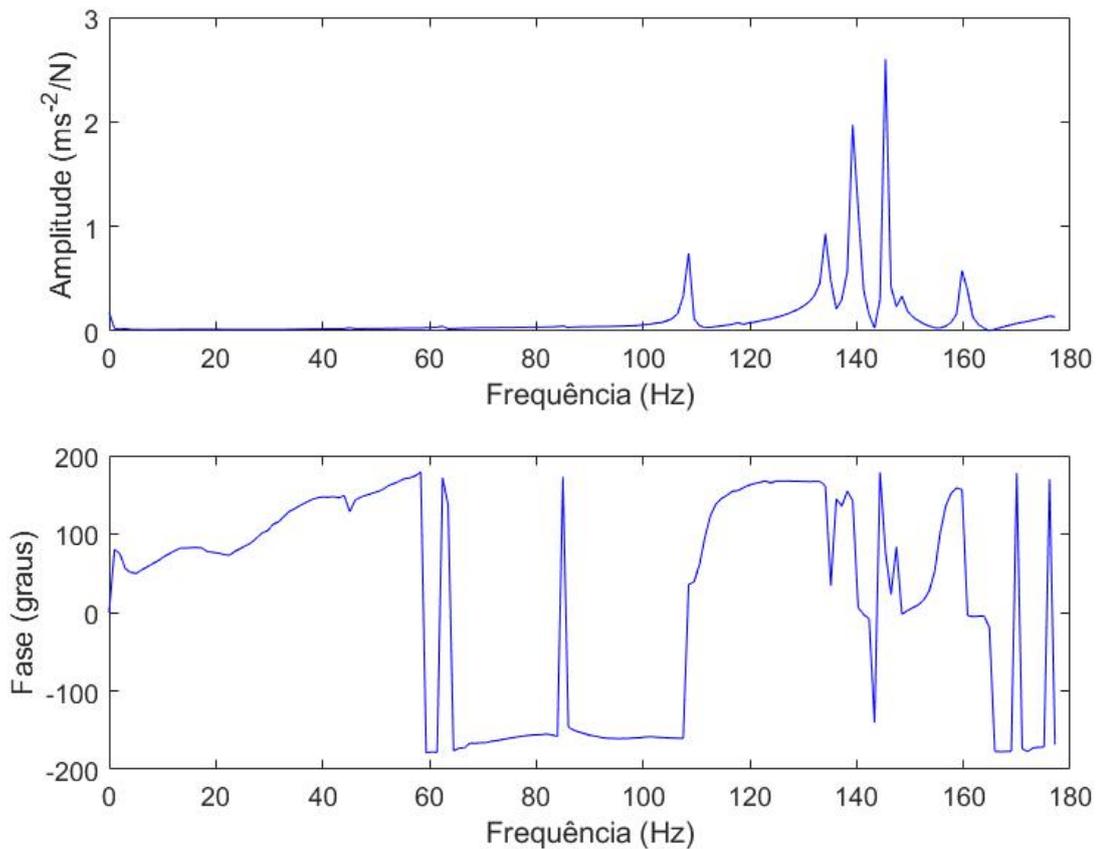


Figura 44: Gráfico de Bode para a FRF obtida pelo teste 3. Fonte: Pesquisa Direta (2019).

A função de coerência do teste 1, vista na Figura 46, apresenta valores baixos para frequências menores. Tal fenômeno pode ser justificado pelas frequências introduzidas na sustentação da estrutura, ou no método de fixação dos acelerômetros.

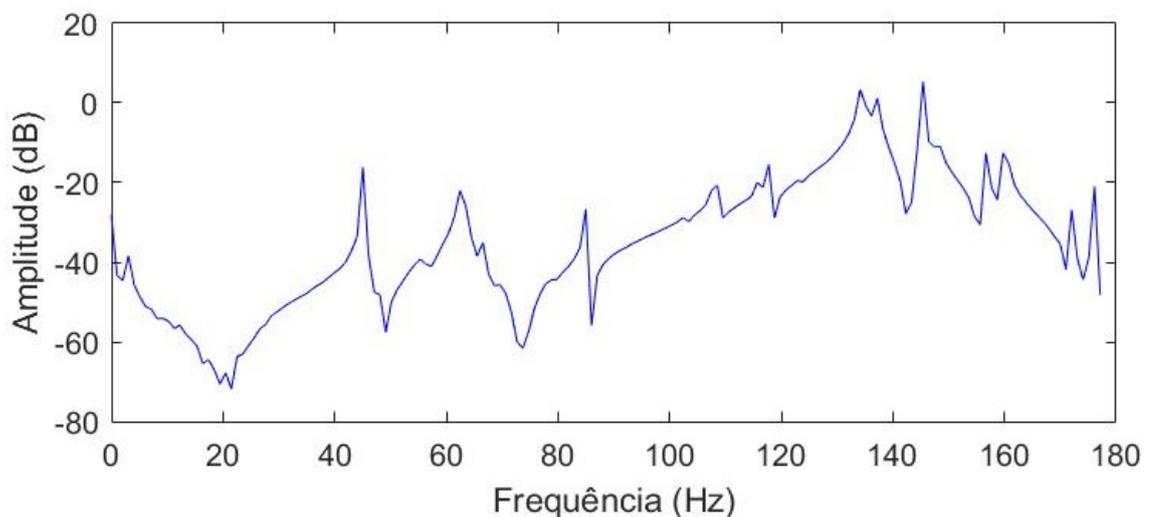


Figura 45: Amplitude (dB) para a FRF obtida pelo teste 1. Fonte: Pesquisa Direta (2019).

As mudanças de fase repentinas vistas na Figuras 42, 43 e 44, são indicativos das regiões de ressonância do sistema (MATEUS, 2017). A Figura 47 reúne as FRF obtidas pelos testes. Observa-se que as tendências das amplitudes das três FRF foram semelhantes, apresentando valores maiores na faixa de frequências de 120 Hz a 160Hz. Por outro lado, os formatos gerais das FRF se mostraram discordantes entre si.

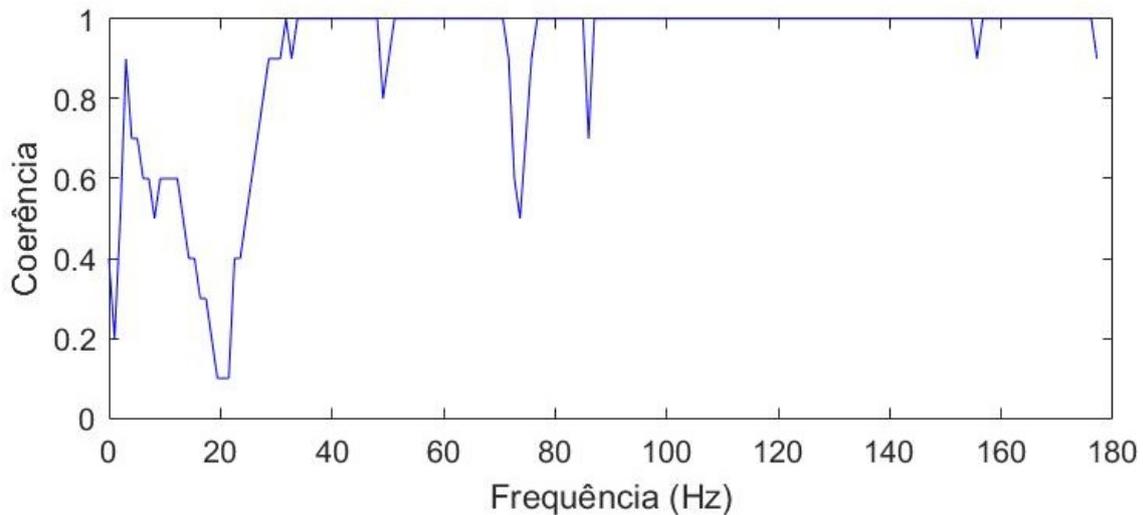


Figura 46: Coerência do teste 1. Fonte: Pesquisa Direta (2019).

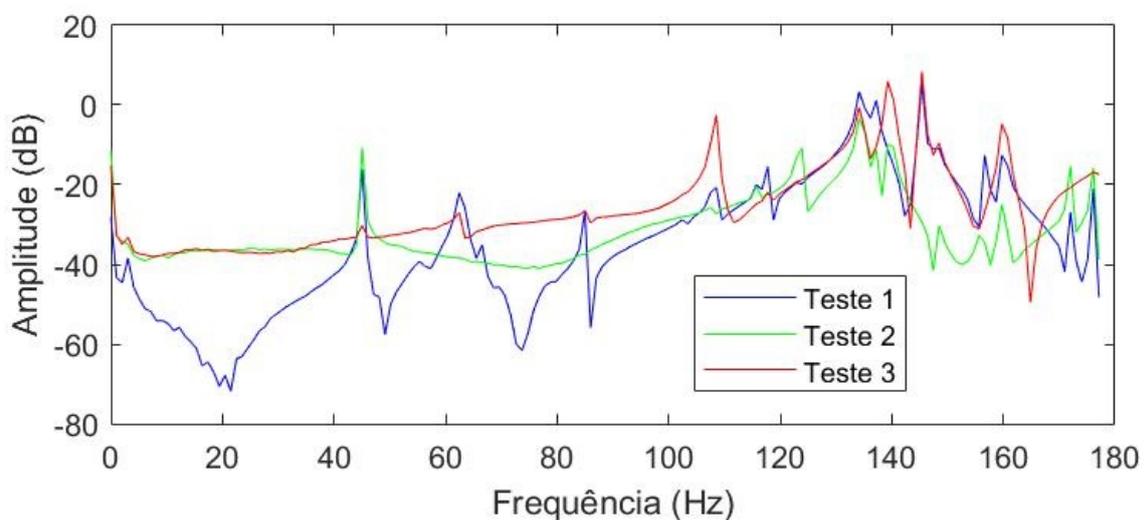


Figura 47: Conjunto de FRF medidas em escala logarítmica. Fonte: Pesquisa Direta (2019).

4.2 Ajuste de curva e extração dos parâmetros modais

O algoritmo implementado por Acuña (2007) permite o ajuste da FRF medida e a respectiva extração dos parâmetros modais globais do sistema. Para isso é necessário fornecer as frequências e respostas medidas, e definir o número de polos que será utilizado. Como explicitado no capítulo 2, um boa escolha do número de polos é essencial para um

ajuste representativo da FRF medida. Um número excessivo de polos pode resultar na identificação de modos de vibrações inexistentes, como visto na Figura 48. Enquanto que se poucos polos forem especificados, existe o risco de algumas frequências de ressonância não serem identificadas, como visto na Figura 49.

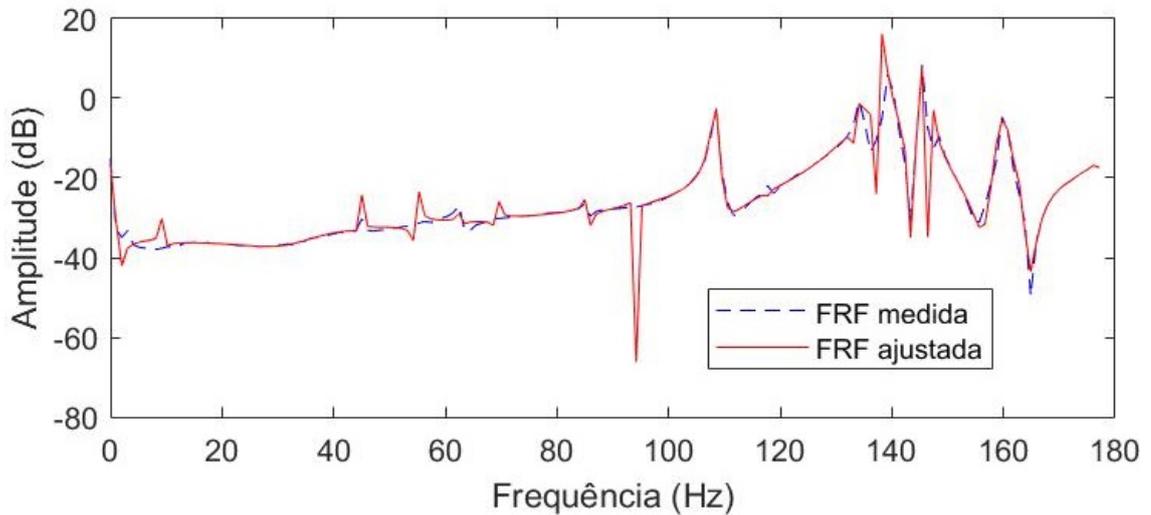


Figura 48: Ajuste realizado com número excessivo de polos. Fonte: Pesquisa Direta (2019).

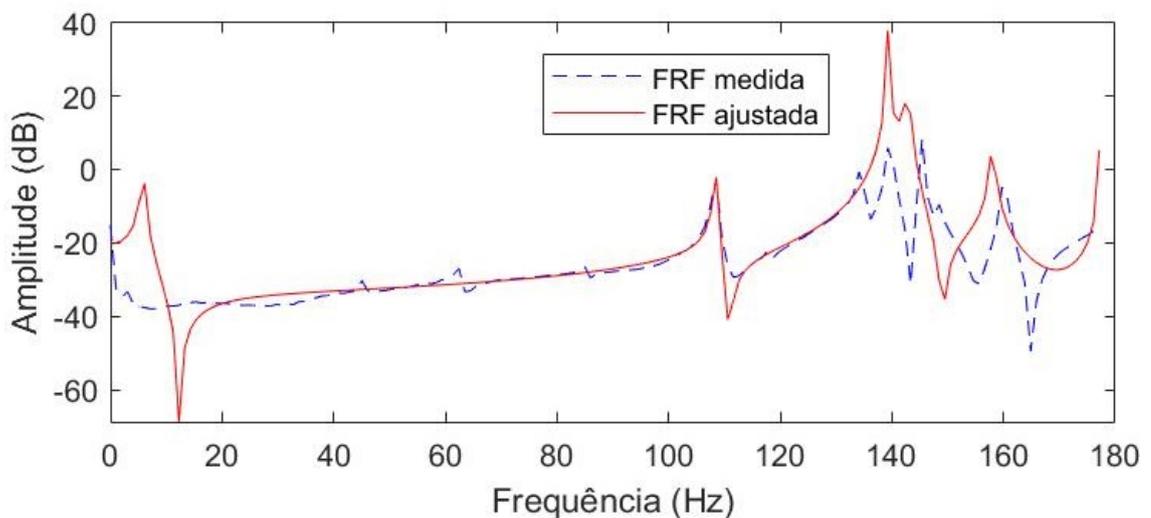


Figura 49: Ajuste realizado com um número insuficiente de polos. Fonte: Pesquisa Direta (2019).

Optou-se por um método visual na escolha do número de polos. A ferramenta *MATLAB*, permite a plotagem da FRF original, produzida pelas medições, e da curva ajustada. Desse modo, por tentativa e erro, escolhe-se o número de polos que melhor se ajusta às medições. A representação gráfica dos ajustes adequados realizados pelo método pode ser vistas nas Figuras 50, 51 e 52.

Os ajuste foram realizados com o principal intuito de identificar as frequências de ressonância apresentadas pelas FRF, mantendo as características de amortecimento

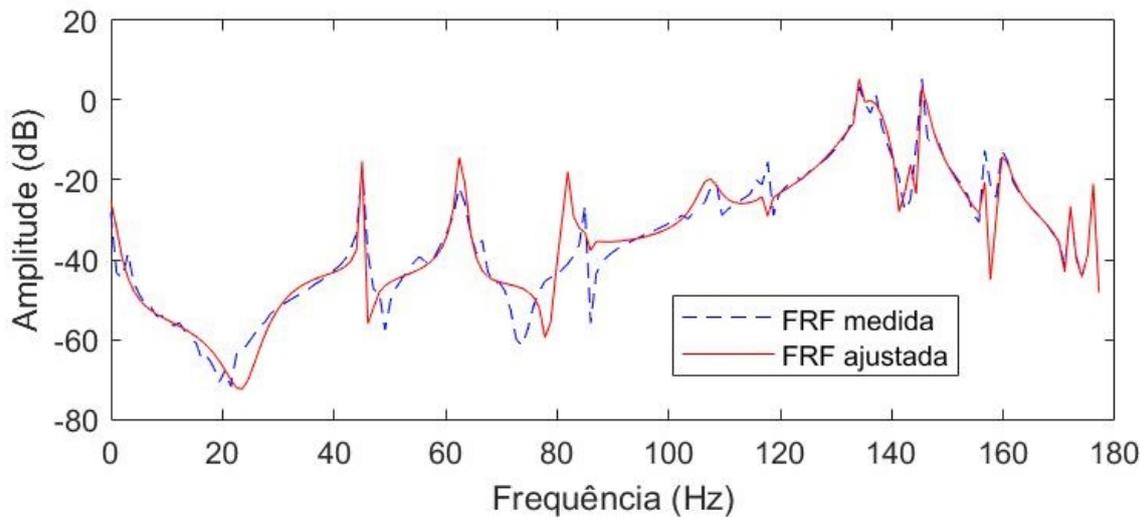


Figura 50: Ajuste da curva obtida pelo teste 1. Fonte: Pesquisa Direta (2019).

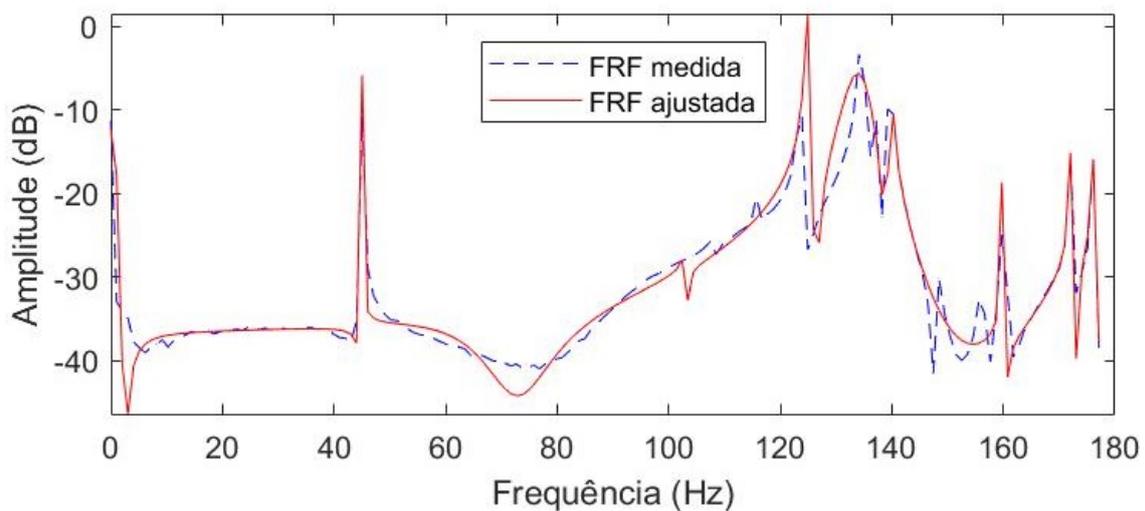


Figura 51: Ajuste da curva obtida pelo teste 2. Fonte: Pesquisa Direta (2019).

apresentadas pelo sistema. Observa-se que o método implementado por Acuña (2007) realiza um ajuste satisfatório das curvas, sendo capaz de desconsiderar certas amplitudes geradas por ruídos e identificar propriamente os modos de vibração do sistema.

Observa-se na Figura 51 um vale na região de frequências entre 60 Hz e 80 Hz. Observando a função de coerência (Figura 53) da medição para o teste 2, verifica-se que houve uma diminuição da qualidade dos dados nessa faixa. Tal fato pode ser decorrido, entre outros fatores, da geometria da estrutura. Há de se ressaltar que após a análise das frequências naturais obtidas pelo método, houve uma discrepância do valor obtido pelo teste 2, nessa faixa de frequências.

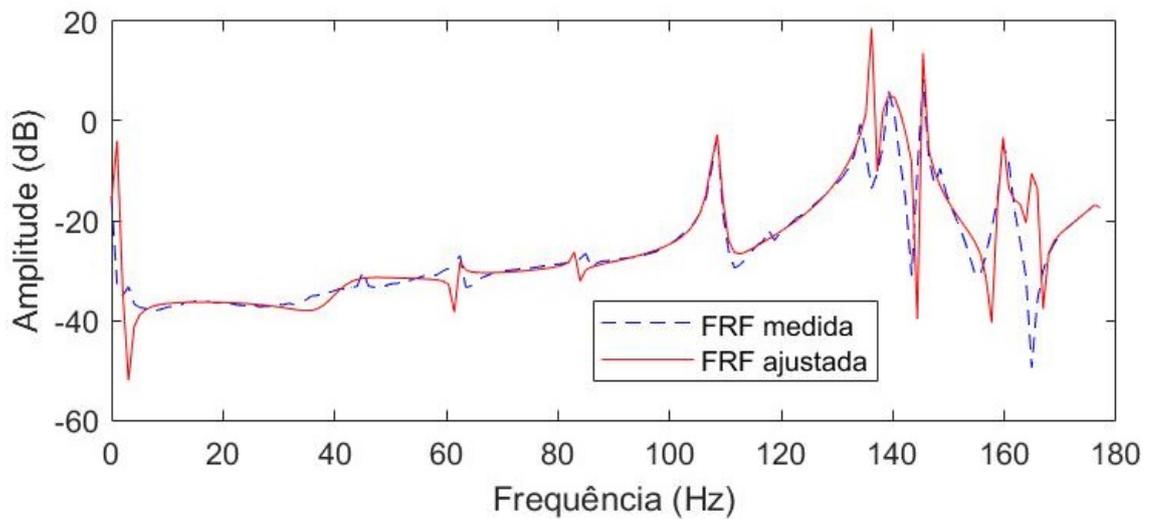


Figura 52: Ajuste da curva obtida pelo teste 3. Fonte: Pesquisa Direta (2019).

Por vezes, verificou-se a necessidade de aumentar a sensibilidade do ajuste, aumentando o número de polos, com o intuito de compensar alguns ruídos presentes na medição. Com o ajuste realizado é possível proceder para a extração dos parâmetros modais globais do sistema, como as frequências naturais, vistas na Tabela 3. É importante lembrar, que todos os testes apresentaram, altas amplitudes para frequências muito baixas. Isso se deve aos graus de liberdade adicionados ao sistema pela sustentação da estrutura. Durante o ensaio, realizou-se uma medição da frequência de vibração do sistema quando vibrando livremente. Constatou-se que o sistema só apresentava amplitude considerável para vibrações muito baixas, que como exposto por Fu e He (2001), não têm grande influencia nos resultados.

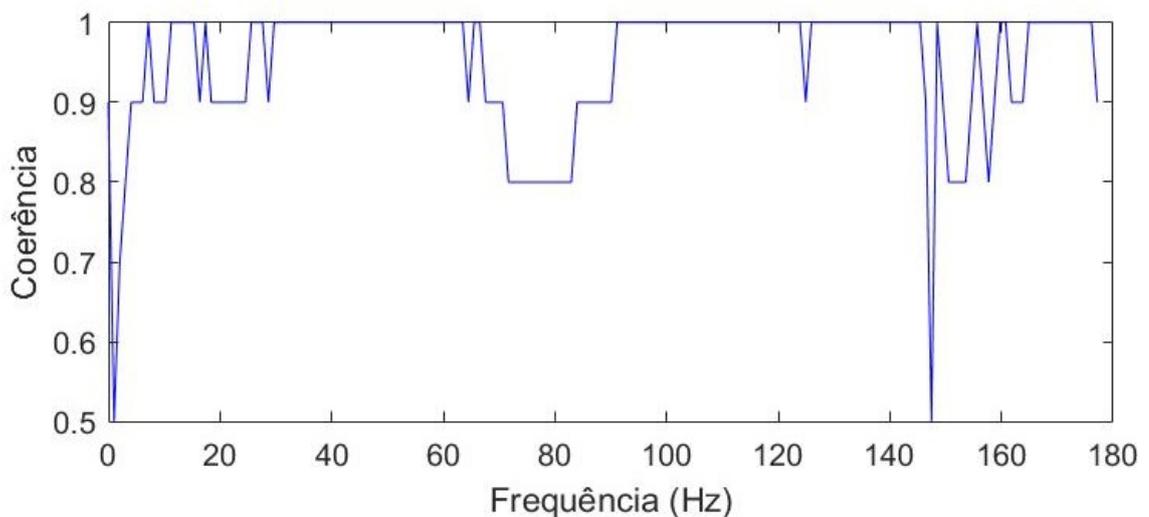


Figura 53: Função de coerência para o teste 2. Fonte: Pesquisa Direta (2019).

4.3 Validação dos resultados

Foram então produzidos os resultados presentes nas Tabelas 3 e 4. Elas contêm as frequências naturais e fatores de amortecimento encontrados pelo algoritmo desenvolvido com base no método de RFP (*Rational Fraction Polynomial*), por Acuña (2007).

Os três testes de impacto realizados, apontaram três FRF, que foram utilizadas para o ajuste da curva. Os ajustes exigiram um número diferente de polos para cada teste, garantindo assim, a identificação adequada das frequências de ressonância das FRF e tentando manter ao máximo as características de amortecimento das curvas.

Obtiveram-se valores coerentes para as frequências naturais. Os três testes obtiveram resultados parecidos. Por outro lado, o algoritmo não encontrou nenhum amortecimento relevante para vários desses modos de vibração. Tal fato, já era previsível a partir de uma análise visual das curvas obtidas (EWINS, 2000). As curvas obtidas experimentalmente e ajustadas, apresentam picos pontiagudos que caracterizam baixo amortecimento.

Contudo, as FRF obtidas apresentaram um grau de inconsistência elevado na análise dos fatores de amortecimento, para os modos identificados. Tal inconsistência pode ter sido resultado de uma prática equivocada no momento da excitação da estrutura. Podem ter havido erros na operação do martelo de impacto, assim como na escolha dos períodos de tempo entre os impactos. Mudanças no posicionamento dos acelerômetros também podem ter resultado na adição de diferentes massas e rigidezes que influenciam a forma da FRF.

Tabela 3: Frequências naturais obtidas experimentalmente nos testes 1, 2 e 3.

<i>Frequências (Hz)</i>			
N	Teste 1	Teste 2	Teste 3
1	45,1022	45,0488	40,6376
2	62,8080	72,6605	61,8605
3	107,1439	103,0926	108,4510
4	134,0686	134,3975	136,2881
5	145,4035	139,7355	139,6029
6	156,4177	159,7977	159,4691

Fonte: Pesquisa Direta (2019)

Enfim prosseguiu-se para a obtenção das frequências naturais da gaiola no *SOLIDWORKS*, através da ferramenta *SOLIDWORKS Simulation*. Aplicou-se um material ao modelo que se espelha naquele que foi utilizado na fabricação do chassi, de acordo com certificado de conformidade da Norma DIN 2391 fornecido pela empresa Açotubos. O software utiliza o método de análise de elementos finitos para encontrar as frequências de ressonância da estrutura. Ao se analisar os dados da Tabela 5, conclui-se que a simulação obteve resultados coerentes com aqueles obtidos experimentalmente.

Tabela 4: Fatores de amortecimento obtidos experimentalmente nos testes 1, 2 e 3.

<i>Amortecimento ζ</i>			
N	Teste 1	Teste 2	Teste 3
1	0	0	0
2	0,0084	0,1530	0
3	0,0191	0	0
4	0,0259	0,0260	0
5	0,0122	0	0,0180
6	0	0	0

Fonte: Pesquisa Direta (2019)

A visualização dos modos de vibrar da estrutura para as respectivas frequências naturais pode ser obtida através da simulação como visto nas Figuras 55 a 59, as cores indicam o grau de deformação dos tubos.

Tabela 5: Frequências naturais obtidas na simulação.

N	<i>Frequências (Hz)</i>
1	49,465
2	70,826
3	107,92
4	136,250
5	144,36
6	159,27

Fonte: Pesquisa Direta (2019)

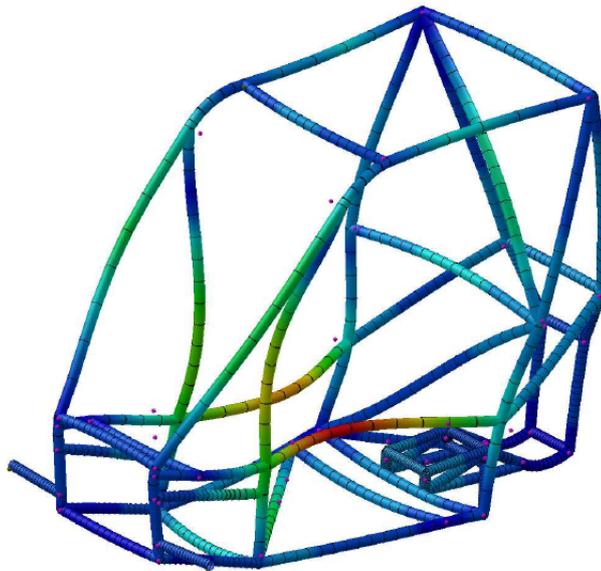


Figura 54: Forma modal para o quinto modo de vibração (144,36 Hz). Fonte: Pesquisa Direta (2019).

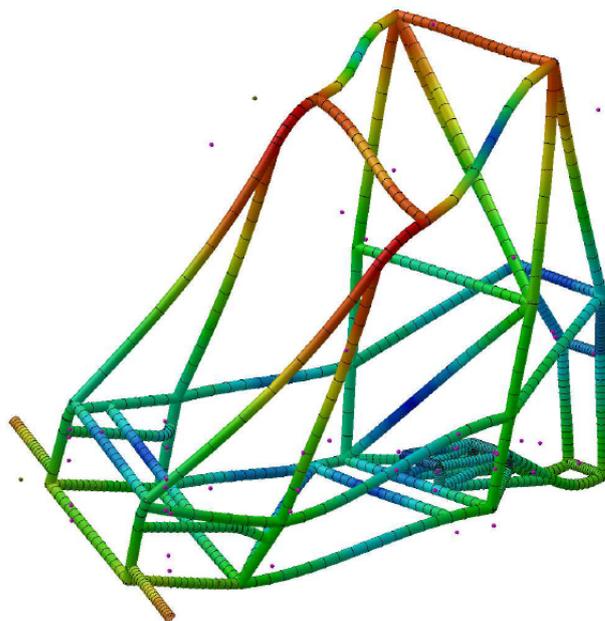


Figura 55: Forma modal para o primeiro modo de vibração (49,465 Hz). Fonte: Pesquisa Direta (2019).

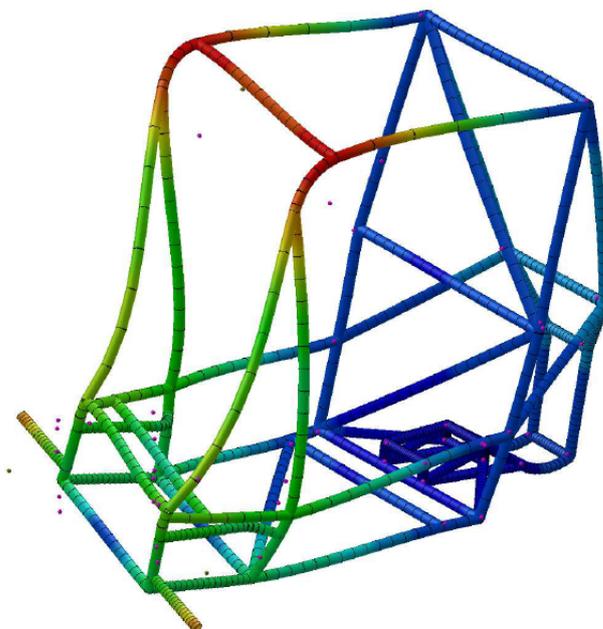


Figura 56: Forma modal para o segundo modo de vibração (70,826 Hz). Fonte: Pesquisa Direta (2019).

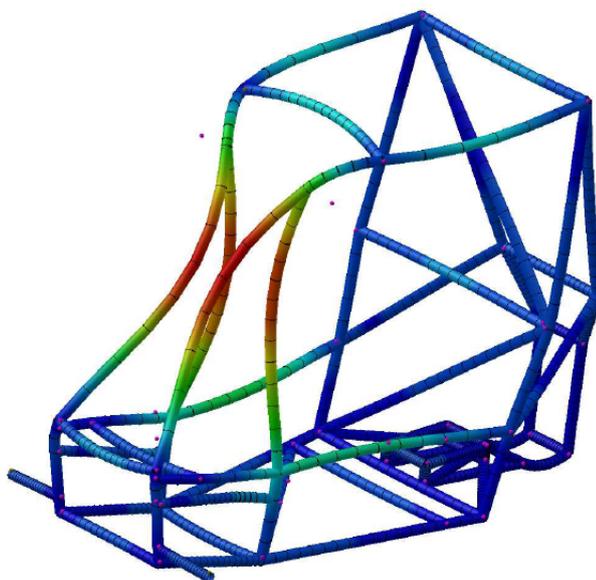


Figura 57: Forma modal para o terceiro modo de vibração (107,92 Hz). Fonte: Pesquisa Direta (2019).

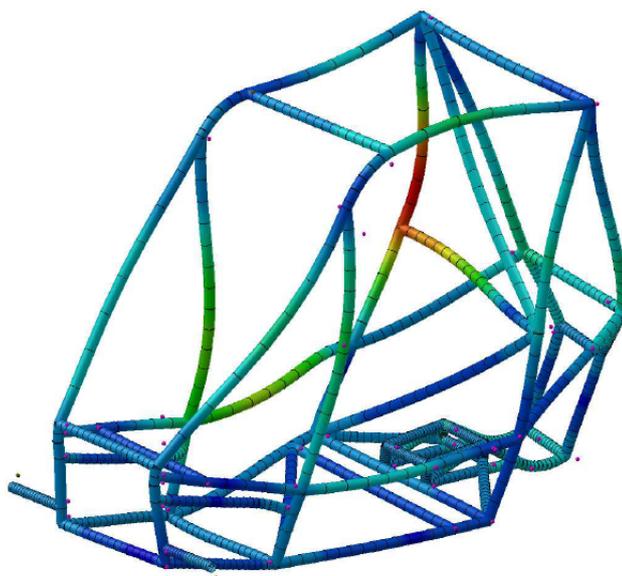


Figura 58: Forma modal para o quarto modo de vibração (136,250 Hz). Fonte: Pesquisa Direta (2019).

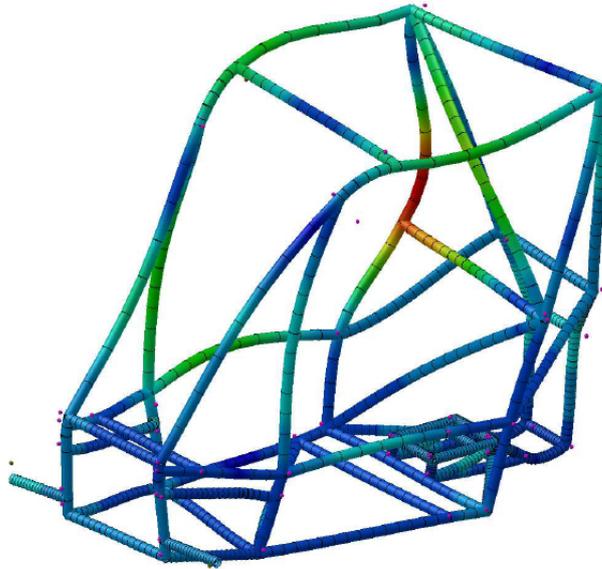


Figura 59: Forma modal para o sexto modo de vibração (159,27 Hz). Fonte: Pesquisa Direta (2019).

Conclusões e Recomendações

4.4 Conclusões

Foi realizado um levantamento bibliográfico sobre análise modal. Nele, foram estudados princípios básicos de vibrações, técnicas para a obtenção das FRF e extração dos parâmetros modais. Com isso, foi possível escolher a metodologia adequada para a identificação das frequências naturais do chassi.

O experimento proposto neste trabalho foi capaz de apontar, de forma coerente as primeiras frequências naturais do chassi tubular de um protótipo Baja *offroad*. A escolha dos transdutores se mostrou acertada, sendo capazes de medir as respostas do sistema no domínio da frequência. Os resultados apoiaram o projeto desenvolvido pela equipe, destacando a importância da análise do espectro de vibrações do chassi.

O método RFP para o ajuste das FRF se mostrou eficiente, sendo capaz de extrair coerentemente os parâmetros modais globais das FRF. A modelagem computacional da estrutura permitiu a análise dos diferentes modos de vibração e a comparação das frequências naturais obtidas experimentalmente com aquelas fornecidas pelo software. Verificou-se assim a confiabilidade da ferramenta de modelagem computacional. Os resultados obtidos são importantes para a validação do projeto, tendo em vista que os ensaios simulados têm agora o respaldo dos resultados obtidos no experimento.

4.5 Recomendações

Para trabalhos futuros, recomenda-se que o grau de complexidade da análise seja elevado. Com o intuito de obter as respostas do veículo como um todo, seria importante o acréscimo de engastes na estrutura que simulassem os demais subsistemas fixados ao chassi. Além disso, recomenda-se que as medições sejam realizadas em mais eixos, afim de obter informações mais detalhadas sobre o amortecimento do sistema.

Referências

- ACUÑA, C. A. G. *Rational Fraction Polynomial Method*. 2007. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3805-rational-fraction-polynomial-method>>. Citado 4 vezes nas páginas 12, 60, 61 e 62.
- AGILENT, T. *The fundamentals of modal testing*. 2000. Disponível em: <<http://www.modalshop.com/techlibrary/Fundamentals%20of%20Modal%20Testing.pdf>>. Citado 8 vezes nas páginas 11, 12, 40, 41, 42, 43, 47 e 48.
- ASSUNÇÃO, M. T. *Análise experimental e estudo através do método dos elementos finitos das forças atuantes em um chassi tubular de um protótipo Baja offroad*. 2016. Monografia, Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Citado 2 vezes nas páginas 23 e 33.
- BALACHANDRAN, B.; MAGRAB, E. B. *Vibrations*. [S.l.]: Cengage Learning, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 11, 29, 30 e 31.
- BEARDS, C. *Structural vibration: analysis and damping*. [S.l.]: Elsevier, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- BORGES, A. S. *Análise modal baseada apenas na resposta: decomposição no domínio da frequência*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2006. Citado na página 24.
- BRUEL & KJAER. *Structural Testing Part 2 - Modal Analysis and Simulation*. 1988. Citado 3 vezes nas páginas 46, 47 e 48.
- BRUEL & KJAER. *Impact Hammers — Types 8206, 8206-001, 8206-002 and 8206-003*. [S.l.], 2019. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 54.
- COLOMBO, M. H.; NASCIMENTO, R. *Análise dinâmica da gaiola do projeto baja sae*. 2017. 2017. Citado na página 32.
- COSTA, V. A. D. S. *Dimensionamento e calibração de suspensão tipo duplo a para veículos mini baja*. *Departamento de engenharia mecânica da escola politécnica da universidade de São Paulo. São Paul-SP*, 2006. 2006. Citado na página 32.
- CRYSTAL, I. *Basics of Modal Testing and Analysis*. 2016. Disponível em: <<https://www.crystalinstruments.com/basics-of-modal-testing-and-analysis>>. Citado na página 64.
- DUARTE, W. R. *Avaliação do incremento de medições na estimação de parâmetros modais para análise do diagrama de estabilidade no processo de fresamento*. 2018. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 56.
- EL-BADAWY, A. *The use of rational polynomials and orthogonal polynomials for frequency-response curve fitting*. In: . [S.l.: s.n.], 2003. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 50.

- EWINS, D. J. *Modal testing: theory, practice and application*. [S.l.]: Research Studies Press Letchworth, 2000. Citado 20 vezes nas páginas 11, 23, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 43, 44, 45, 46, 49 e 70.
- FU, Z.-F.; HE, J. *Modal analysis*. [S.l.]: Elsevier, 2001. Citado 12 vezes nas páginas 11, 24, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 43 e 45.
- FURTADO, F. F. d. A. L.; GUIMARÃES, T. A. Uma metodologia de análise e projeto de um chassi para um veículo mini baja de competição. 2016. 2016. Citado na página 33.
- HAPPIAN-SMITH, J. *An introduction to modern vehicle design*. [S.l.]: Elsevier, 2001. Citado na página 51.
- HARRIS, C. M.; PIERSOL, A. G. *Harris' shock and vibration handbook*. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 2002. Citado na página 27.
- HAYKIN, S. S.; VEEN, B. V. *Sinais e sistemas*. [S.l.]: Bookman, 2001. Citado na página 44.
- INCONFIDENTES BAJA CLUBE. *Relatório de Projeto*. 2017. Citado 5 vezes nas páginas 11, 12, 33, 51 e 52.
- KAEWUNRUEN, S.; REMENNIKOV, A. Application of experimental modal testing for estimating dynamic properties of structural components. 2005. 2005. Citado na página 24.
- KISTLER INSTRUMENT CORPORATION. *Impulse Force Hammer; Extended High Force Range*. 2019. Disponível em: <<https://www.kistler.com/?type=669fid=69549model=document>>. Citado na página 39.
- LEME, L. M. M. *Estudo comparativo de técnicas de análise modal experimental no domínio da frequência em uma barra na condição de contorno livre-livre*. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014. Citado na página 45.
- MAKOWSKI, Z. A worldwide review of space structures in sports buildings. *Space structures for sports buildings*, 1987. 1987. Citado na página 33.
- MATEUS, G. F. A. *Análise modal do sistema eixo-árvore-ferramenta de um centro de usinagem para análise de estabilidade*. 2017. Monografia, Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Citado 12 vezes nas páginas 11, 12, 43, 44, 46, 47, 50, 55, 58, 59, 61 e 66.
- NATIONAL INSTRUMENTS. *Datasheet NI 9234*. [S.l.], 2015. Citado 3 vezes nas páginas 12, 55 e 56.
- PENHA, R. M. L. da et al. *ANÁLISE DE SINAIS EM REGIME TRANSIENTE APLICANDO A TÉCNICA DE WA VELET*. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, 1999. Citado na página 44.
- RAJPUT, Y. S. et al. A vibration analysis of vehicle frame. *International Journals Of Engineering Research And Application (IJERA)*, 2013. v. 3, n. 2, p. 348–350, 2013. Citado na página 52.
- RAO, S. *Vibrações mecânicas. Tradução de Arlete Simille Marques*. [S.l.]: São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, 2008. Citado 9 vezes nas páginas 11, 23, 24, 27, 28, 29, 30, 31 e 32.

- RICHARDSON, M. H.; FORMENTI, D. L. Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials. In: UNION COLLEGE SCHENECTADY, NY. *Proceedings of the 1st international modal analysis conference*. [S.l.], 1982. v. 1, p. 167–186. Citado 4 vezes nas páginas 49, 50, 58 e 59.
- SAE BRASIL. *Regulamento Administrativo e Técnico Baja SAE Brasil*. 2018. Disponível em: <http://portal.saebrasil.org.br/Portals/0/Users/223/39/28639/RATBSB_emenda_02.pdf>. Citado na página 23.
- SCHWARZ, B. J.; RICHARDSON, M. H. Experimental modal analysis. *CSI Reliability week*, 1999. Orlando FL, v. 35, n. 1, p. 1–12, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 48.
- SEGUNDINHO, P. Gutemberg de A. et al. Aplicação do método de ensaio das frequências naturais de vibração para obtenção do módulo de elasticidade de peças estruturais de madeira. *Revista Árvore*, 2012. Universidade Federal de Viçosa, v. 36, n. 6, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 11, 38, 39 e 40.