



Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Engenharia Elétrica



Trabalho de Conclusão de Curso

ESTUDO DE MÉTODOS ASSINTÓTICOS PARA A ANÁLISE DO ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO EM ALTAS FREQUÊNCIAS

Carlos Victor Bragatto Prates

João Monlevade, MG
2018

Carlos Victor Bragatto Prates

**ESTUDO DE MÉTODOS ASSINTÓTICOS
PARA A ANÁLISE DO ESPALHAMENTO
ELETROMAGNÉTICO EM ALTAS
FREQUÊNCIAS**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientadora: Prof.^a Aline Rocha de Assis, Msc.

**Universidade Federal de Ouro Preto
João Monlevade
2018**

P912e

Prates, Carlos Victor .

Estudo de métodos assintóticos para a análise do espalhamento eletromagnético em altas frequências [manuscrito] / Carlos Victor Prates. - 2018.

84f.: il.: color; grafs.

Orientadora: Profa. MSc. Aline Rocha de Assis.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Departamento de Engenharia Elétrica.

1. Engenharia elétrica. 2. Óptica geométrica. 3. Difração. I. Assis, Aline Rocha de. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 621.3:548.73



ANEXO IV - ATA DE DEFESA

Aos trinta dias do mês de julho de 2018, às 10 horas e 30 minutos, no bloco C deste instituto, foi realizada a defesa de monografia pelo formando **Carlos Victor Bragatto Prates**, sendo a comissão examinadora constituída pelos professores: **Aline Rocha de Assis**, **Carlos Renato Pontes** e **Felipe Eduardo Moreira Cota**. O candidato apresentou a monografia intitulada: Estudo de Métodos Assintóticos para a Análise do Espalhamento Eletromagnético em Altas Frequências. A comissão examinadora deliberou, por unanimidade, pela aprovação do candidato, com a nota média 9,0, de acordo com a tabela 1. Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da comissão examinadora e pelo formando.

Tabela 1 – Notas de avaliação da banca examinadora

Banca Examinadora	Nota
Aline Rocha de Assis	9,0
Carlos Renato Pontes	9,0
Felipe Eduardo Moreira Cota	9,0
Média	9,0

João Monlevade, 30 de julho de 2018.

Aline Rocha de Assis

Profª. MsC. Aline Rocha de Assis

Professora Orientadora

Carlos Renato Pontes

Prof. Dr. Carlos Renato Pontes

Professor Convidado

Felipe Eduardo Moreira Cota

Prof. MsC. Felipe Eduardo Moreira Cota

Professor Convidado

Carlos Victor Bragatto Prates

Carlos Victor Bragatto Prates

Aluno

ANEXO II - TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado "Estudo de métodos assintóticos para a análise do espalhamento eletromagnético em altas frequências" é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem a devida citação ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 03 de Agosto de 2018

Carlos Victor Braga Ho Prates
Nome completo do(a) aluno(a)

*Nada é tão grande que não possa ser alcançado
e nada é tão pequeno que não seja importante.*
Allan Kardec

Resumo

Este trabalho baseia-se em estudar, implementar e analisar o fenômeno do espalhamento eletromagnético causado por superfícies canônicas. O estudo é viabilizado pela Óptica Geométrica (GO - *Geometrical Optics*) e pela Teoria Uniforme da Difração (UTD - *Uniform Theory of Diffraction*), técnicas assintóticas que utilizam uma combinação entre traçados de raios para obter o resultado do campo eletromagnético espalhado. A obtenção dos resultados ocorre através de rastreamentos das trajetórias geradas entre transmissor e receptor, determinadas por algoritmos que traçam os raios refletidos e difratados em um espaço bidimensional baseado no método das imagens. O cálculo é feito no domínio da frequência e de modo determinístico, gerando resultados das contribuições individuais de cada raio no resultado final do campo observado. O fenômeno foi analisado em uma cunha condutora elétrica perfeita (sem perdas) e somente em campos incidentes com frentes de onda plana (único ângulo de incidência), pois a solução analítica só admite campos com essa característica. Essa análise foi apresentada tanto para campos elétricos (polarização *soft*) quanto para campos magnéticos (polarização *hard*). A validação dos códigos desenvolvidos foi obtida por meio de comparações com soluções analíticas já oferecidas pela literatura para casos semelhantes. As respostas obtidas das implementações computacionais mostraram que o modelo adotado para o tratamento desse fenômeno entregou resultados precisos e eficientes. Foram observadas diferentes situações onde as variáveis independentes envolvidas no espalhamento eletromagnético sofreram variações, possibilitando pontuar como cada um desses termos influencia nas respostas do fenômeno. O parâmetro utilizado para comparar o grau de aproximação das soluções, UTD e solução analítica, foi o erro quadrático médio.

Palavras-chave: Espalhamento eletromagnético. Óptica Geométrica. Teoria Uniforme da Difração.

Abstract

This work is based on studying, implementing and analyzing the phenomenon of electromagnetic scattering caused by canonical surfaces. The study is made possible by Geometric Optics (GO Geometrical Optics) and Uniform Theory of Diffraction (UTD), asymptotic techniques that use a combination of ray tracing to obtain the result of the electromagnetic field spread. The results are obtained by tracking trajectories generated between transmitter and receiver, determined by algorithms that trace the reflected and diffracted rays in a two dimensional space based on the images method. The calculation is done in the frequency domain and deterministically, generating results of the individual contributions of each radius in the final result of the observed field. The phenomenon was analyzed in a perfect electrical conducting wedge (without losses) and only in incident fields with flat wave fronts (single angle of incidence), because the analytical solution only admits fields with this characteristic. This analysis was presented for both electric fields (soft polarization) and magnetic fields (hard polarization). The validation of the developed codes was obtained through comparisons with analytical solutions already offered in the literature for similar cases. The answers obtained from the computational implementations showed that the adopted model for the treatment of this phenomenon gave precise and efficient results. Different situations were observed where the independent variables involved in the electromagnetic scattering suffered variations, making it possible to point out how each of these terms influences the responses of the phenomenon. The parameter used to compare the degree of approximation of solutions, UTD and analytical solution, was the mean square error.

Keywords: Electromagnetic scattering. Geometric Optics. Uniform Diffraction Theory.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Superfícies de formatos distintos e arbitrários, ambas contendo quantidades diferentes de cargas em seu interior (TIPLER; MOSCA, 2000).	6
Figura 2 – Fluxo de campo magnético passando por uma superfície fechada - Figura adaptada de (SADIKU, 2014).	7
Figura 3 – Fio em formato de anel em repouso em um campo magnético variável (TIPLER; MOSCA, 2000).	9
Figura 4 – Condições de contorno - Figura adaptada de (SEBOLD, 2011).	12
Figura 5 – Vetores campo elétrico e campo magnético projetados sobre uma onda eletromagnética que se desloca no espaço (TIPLER; MOSCA, 2000).	14
Figura 6 – Tubo de raios astigmático (KOUYOU MJIAN, 1965).	16
Figura 7 – Tubo de raios astigmático durante a reflexão (LOPEZ; CAMILO, 2015).	18
Figura 8 – Reflexão do raio sobre uma superfície plana (LOPEZ; CAMILO, 2015).	19
Figura 9 – Cone de Keller (SCHETTINO, 2002).	21
Figura 10 – Regiões e fronteiras de sombra da uma cunha (LOPEZ; CAMILO, 2015).	22
Figura 11 – Incidência e difração de um raio sobre uma aresta (SCHETTINO, 2002).	24
Figura 12 – Cunha condutora elétrica perfeita (SCHETTINO, 2002).	28
Figura 13 – Magnitude dos campos incidente, refletido e difratado para polarização <i>soft</i> .	30
Figura 14 – Fase dos campos incidente, refletido e difratado para polarização <i>soft</i> .	30
Figura 15 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\alpha = 0^\circ$).	31
Figura 16 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\alpha = 60^\circ$).	32
Figura 17 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\alpha = 90^\circ$).	32
Figura 18 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\alpha = 180^\circ$).	33
Figura 19 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\phi_i = 15^\circ$).	34
Figura 20 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\phi_i = 45^\circ$).	34
Figura 21 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\phi_i = 90^\circ$).	35
Figura 22 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($f = 3\text{ GHz}$).	36

Figura 23 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($f = 10\text{ GHz}$).	36
Figura 24 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($f = 28\text{ GHz}$).	37
Figura 25 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($f = 38\text{ GHz}$).	37
Figura 26 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($f = 60\text{ GHz}$).	38
Figura 27 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($s = 1\text{ m}$).	39
Figura 28 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($s = 100\text{ m}$).	39
Figura 29 – Campos difratados com polarização <i>soft</i> durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\phi_i = 15^\circ, 45^\circ, 90^\circ$).	40
Figura 30 – Campos difratados com polarização <i>hard</i> durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\phi_i = 15^\circ, 45^\circ, 90^\circ$).	41
Figura 31 – Campos difratados com polarização <i>soft</i> durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($f = 3, 10, 28, 38\text{ e }60\text{ GHz}$).	42
Figura 32 – Campos difratados com polarização <i>hard</i> durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($f = 3, 10, 28, 38\text{ e }60\text{ GHz}$).	43
Figura 33 – Campos difratados com polarização <i>soft</i> durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($s = 1, 100, 1000\text{ m}$).	44
Figura 34 – Campos difratados com polarização <i>hard</i> durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($s = 1, 100, 1000\text{ m}$).	44
Figura 35 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da solução analítica para polarização <i>soft</i> ($\alpha = 60^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10\text{ GHz}; \rho = 1\text{ m}$).	46
Figura 36 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da solução analítica para polarização <i>hard</i> ($\alpha = 60^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10\text{ GHz}; \rho = 1\text{ m}$).	47
Figura 37 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da solução analítica para polarização <i>soft</i> ($\alpha = 60^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10\text{ GHz}; \rho = 10\text{ m}$).	47

Figura 38 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da solução analítica para polarização <i>hard</i> ($\alpha = 60^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 10 \text{ m}$).	48
Figura 39 – Campo total espalhado por uma cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da solução analítica para polarização <i>soft</i> com 100, 1.000 e 10.000 termos do somatório da solução analítica ($\alpha = 60^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 10 \text{ m}$).	49
Figura 40 – Campo total espalhado por uma cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da solução analítica para polarização <i>hard</i> com 100, 1.000 e 10.000 termos do somatório da solução analítica ($\alpha = 60^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 10 \text{ m}$).	49
Figura 41 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da UTD e da solução analítica para polarização <i>soft</i> ($\alpha = 0^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 1 \text{ m}$).	50
Figura 42 – Erro quadrático médio dos campos encontrados através da UTD e da solução analítica para o caso da cunha condutora elétrica perfeita com polarização <i>soft</i> ($\alpha = 0^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 1 \text{ m}$).	51
Figura 43 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da UTD e da solução analítica para polarização <i>hard</i> ($\alpha = 0^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 1 \text{ m}$).	51
Figura 44 – Erro quadrático médio dos campos encontrados através da UTD e da solução analítica para o caso da cunha condutora elétrica perfeita com polarização <i>hard</i> ($\alpha = 0^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 1 \text{ m}$).	52
Figura 45 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da UTD e da solução analítica para polarização <i>soft</i> ($\alpha = 60^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 1 \text{ m}$).	53
Figura 46 – Erro quadrático médio dos campos encontrados através da UTD e da solução analítica para o caso da cunha condutora elétrica perfeita com polarização <i>soft</i> ($\alpha = 60^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 1 \text{ m}$).	53
Figura 47 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da UTD e da solução analítica para polarização <i>hard</i> ($\alpha = 60^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 1 \text{ m}$).	54
Figura 48 – Erro quadrático médio dos campos encontrados através da UTD e da solução analítica para o caso da cunha condutora elétrica perfeita com polarização <i>hard</i> ($\alpha = 60^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 1 \text{ m}$).	54
Figura 49 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da UTD e da solução analítica para polarização <i>soft</i> ($\alpha = 60^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 10 \text{ m}$).	55

Figura 50 – Erro quadrático médio dos campos encontrados através da UTD e da solução analítica para o caso da cunha condutora elétrica perfeita com polarização <i>soft</i> ($\alpha = 60^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 10 \text{ m.}$)	56
Figura 51 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da UTD e da solução analítica para polarização <i>hard</i> ($\alpha = 60^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 10 \text{ m.}$) . . .	56
Figura 52 – Erro quadrático médio dos campos encontrados através da UTD e da solução analítica para o caso da cunha condutora elétrica perfeita com polarização <i>hard</i> ($\alpha = 60^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 10 \text{ m.}$)	57
Figura 53 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da UTD e da solução analítica para polarização <i>soft</i> ($\alpha = 0^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 10 \text{ m.}$)	58
Figura 54 – Erro quadrático médio dos campos encontrados através da UTD e da solução analítica para o caso da cunha condutora elétrica perfeita com polarização <i>soft</i> ($\alpha = 0^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 10 \text{ m.}$)	58
Figura 55 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da UTD e da solução analítica para polarização <i>hard</i> ($\alpha = 0^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 10 \text{ m.}$) . . .	59
Figura 56 – Erro quadrático médio dos campos encontrados através da UTD e da solução analítica para o caso da cunha condutora elétrica perfeita com polarização <i>hard</i> ($\alpha = 0^\circ; \phi_i = 60^\circ; f = 10 \text{ GHz}; \rho = 10 \text{ m.}$)	59
Figura 57 – Superfície orientada com fronteira formada por uma curva C fechada, simples com orientação positiva (STEWART, 2006).	69
Figura 58 – Funções de Bessel de primeiro tipo.	71
Figura 59 – Funções de Bessel usadas na solução analítica do problema da cunha. .	72
Figura 60 – Seno e Cosseno de Fresnel.	74

Lista de abreviaturas e siglas

GO	Óptica Geométrica (<i>Geometrical Optic</i>)
UTD	Teoria Uniforme da Difração (<i>Uniform Theory of Diffraction</i>)
GTD	Teoria Geométrica da Difração (<i>Geometric Theory of Diffraction</i>)
FSR	Fronteira de Sombra dos raios Refletidos
FSI	Fronteira de Sombra dos raios Incidentes
TEM	Transversal Eletromagnética

Lista de símbolos

α	abertura angular da cunha
σ	condutividade do meio
ρ_v	densidade volumétrica de carga
ρ_s	densidade superficial de carga
ϕ_e	fluxo elétrico
ϕ_m	fluxo magnético
ω	frequência angular
ϵ_v	número de Newmann
ϵ	permissividade elétrica
ϵ_o	permissividade elétrica do vácuo
ϵ_r	permissividade elétrica relativa
μ	permeabilidade magnética
μ_o	permeabilidade magnética do vácuo
μ_r	permeabilidade magnética relativa

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação e Justificativa do Trabalho	1
1.2	Objetivo	2
1.2.1	Objetivos Específicos	3
1.3	Organização do Trabalho	3
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1	Introdução	4
2.2	Campo Eletromagnético	4
2.3	Equações de Maxwell	5
2.3.1	Lei de Gauss	5
2.3.2	Lei de Gauss Para o Magnetismo	7
2.3.3	Lei de Faraday	8
2.3.4	Lei de Ampère	10
2.4	Condições de Contorno	12
2.5	Equação da onda	13
2.6	Conclusões parciais	15
3	METODOLOGIA	16
3.1	Óptica Geométrica	16
3.1.1	Campos Incidentes	17
3.1.2	Campos Refletidos	18
3.2	Teoria Uniforme da Difração (UTD)	21
3.2.1	Formulações e Coeficientes de Difração da UTD	23
3.3	Conclusões Parciais	26
4	SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS	28
4.1	Introdução	28
4.2	Cunha Condutora Elétrica Perfeita	28
4.2.1	Solução pela UTD	28
4.2.1.1	Resultado geral da UTD	29
4.2.1.2	Resultados obtidos com variações da abertura angular da cunha condutora	31
4.2.1.3	Resultados obtidos com variações do ângulo de incidência da onda	33
4.2.1.4	Resultados obtidos com variações da frequência da onda incidente	35
4.2.1.5	Resultados obtidos com variações da distância do observador	38
4.2.1.6	Análise dos Resultados	40

4.2.2	Solução Analítica	45
4.2.3	Comparação das Soluções	50
4.3	Conclusões Parciais	60
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	62
5.1	Trabalhos Futuros	63
	REFERÊNCIAS	65
A	ANEXOS	68
A.1	Teorema do Divergente	68
A.2	Teorema de Stokes	68
A.3	Divergente do Rotacional	70
A.4	Função de Bessel	70
A.5	Integrais de Fresnel	73

1 Introdução

1.1 Motivação e Justificativa do Trabalho

As últimas décadas vêm sendo marcadas pelo expressivo crescimento da mobilidade dos sistemas de comunicação sem fio, assim como a necessidade de se transmitir grandes volumes de dados. Como consequência, a capacidade de transmissão nos canais de comunicação obtém abrangências cada vez maiores para conseguir acompanhar essa crescente demanda. Em geral três abordagens englobam o estudo dos modelamentos de canais sem fio: através de modelos empíricos, estatísticos ou determinísticos (LOPEZ; CAMILO, 2015).

Os modelos empíricos caracterizam-se por serem derivados de medições realizadas em determinadas localidades específicas, sendo assim podem falhar ao serem aplicados em diferentes ambientes. Os modelos estatísticos carecem de uma boa parametrização para entregar bons resultados, para a extração de amostras significativas do comportamento do campo são necessárias varias medições, elevando o custo do projeto. Por último, os modelos determinísticos (teóricos) empregam a teoria eletromagnética diretamente ao caso analisado, utilizando então as características específicas de cada local. Mesmo tendo como principal desvantagem a complexidade envolvida no modelamento, os modelos determinísticos representam atualmente uma importante alternativa em predições eficientes de propagações de campos eletromagnéticos, entregando resultados bastantes precisos mesmo usando métodos numéricos aproximados (SCHETTINO, 2002).

Diante o exposto, este trabalho tem como foco principal estudar, implementar computacionalmente e avaliar o modelo determinístico do comportamento da onda eletromagnética quando seu campo, causado por obstáculos de geometria canônica, sofre um efeito físico específico chamado espalhamento eletromagnético.

Inicialmente, será necessário entender o espaço onde a onda se encontra para que o modelo teórico criado descreva esse fenômeno com uma precisão aceitável, uma vez que o efeito em estudo depende intimamente da geometria do ambiente em análise. Esse modelo matemático terá que representar o espaço para essa onda levando em conta a eletrodinâmica de Maxwell, sendo cada ambiente caracterizado segundo propriedades específicas dos materiais que o compõe. Estudos dedicados a aplicação do eletromagnetismo em situações práticas concentram-se *a priori* no entendimento completo das equações de Maxwell e da equação da onda eletromagnética, e por consequência estendem-se aos fenômenos mais recorrentes envolvidos, como reflexão, refração e difração.

A análise do fenômeno do espalhamento eletromagnético será viabilizada através de dois métodos assintóticos de análise de campo, a Ótica Geométrica (GO – *Geometrical*

Optics) e a Teoria Uniforme da Difração (UTD – *Uniform Theory of Diffraction*), aplicados a meios homogêneos, lineares e isotrópicos. A validação desses resultados será confirmada por quão próximos esses estarão de resultados obtidos através de soluções analíticas já conhecidas e aplicadas aos mesmos casos propostos.

Esses métodos de análise, GO e a UTD, são técnicas de abordagens aproximadas que se tornam mais precisas a medida que a frequência assume valores muito altos, por isso chamadas de assintóticas. Elas permitem rastrear e determinar o campo espalhado através de trajetórias entre transmissor e receptor, fornecendo em certas situações soluções mais práticas que a solução exata das equações de Maxwell, como por exemplo para problemas de valor de contorno. Vale ressaltar que nos problemas em que são aplicadas essas técnicas, as dimensões utilizadas são válidas para altas frequências.

Uma característica dos modelos assintóticos é o fato de possuírem algumas restrições quando: o meio de propagação é considerado não homogêneo e quando o ambiente estudado não oferece total exatidão das suas características eletromagnéticas e geométricas. Formulações para problemas com geometria como a de cilindros, de cones e de bordas curvadas, já desenvolvidas, podem compor uma solução final de casos mais específicos. Portanto, em um problema com objeto ou ambiente de perfil complexo, onde é uma tarefa difícil modelar matematicamente e analisar sua geometria, essa deve ser representada como um conjunto de geometrias canônicas.

Um dos métodos apresentados nesse trabalho, a GO, foi inicialmente estudado de forma independente à teoria eletromagnética. Mesmo limitado por não considerar parâmetros fundamentais como intensidade, fase e polarização, seus princípios ainda compreendem a maioria dos instrumentos óticos da atualidade. Durante muito tempo esse método progrediu ao explicar efeitos como interferência e difração, criando uma conexão rigorosa entre as equações de campo eletromagnético de Maxwell e os antigos conceitos geométricos. Assim, pode-se dizer que a GO foi base para a criação do segundo método de análise usado nesse trabalho, a UTD.

Em resumo o fenômeno da difração que será abordado neste trabalho será útil na explicação de problemas canônicos, para posteriormente utilizar os resultados obtidos em casos de natureza mais gerais. “A prática da UTD consiste na obtenção sistemática de resultados recolhidos a partir de tais geometrias canônicas para analisar estruturas mais complexas” (MCNAMARA, 1990). Considerando todas as possíveis reflexões e difrações a UTD entrega resultados bastante precisos quando comparada a medições reais. (SCHETTINO, 2002)

1.2 Objetivo

Esse trabalho propõe um estudo das ondas eletromagnéticas quando essas sofrem um fenômeno físico chamado espalhamento eletromagnético. O objetivo principal é aplicar

um método assintótico de análise de campos espalhados e investigar os efeitos recorrentes desse fenômeno, validando os resultados obtidos através de comparações com soluções analíticas de casos com natureza semelhante.

1.2.1 Objetivos Específicos

- Abordagem da física envolvida no espalhamento eletromagnético através das equações de Maxwell, possibilitando entender com mais clareza a propagação da onda eletromagnética e por consequência os fenômenos ao qual essa possa estar envolvida.
- Análise do espalhamento eletromagnético utilizando dois métodos assintóticos de análise de campos, a Ótica Geométrica (GO – *Geometrical Optics*) e a Teoria Uniforme da Difração (UTD – *Uniform Theory of Diffraction*), ambos formulados e implementados no domínio da frequência.
- Aplicação dos métodos estudados em problemas canônicos.
- Análise e validação dos resultados através de comparações com soluções analíticas.

1.3 Organização do Trabalho

Esta monografia apresentará inicialmente uma contextualização geral através de alguns conceitos de eletromagnetismo. Essa revisão dará embasamento para compreender dois métodos de análise de campos eletromagnéticos espalhados por difração, a GO e a UTD. Após o estudo das técnicas, um capítulo se dedicará a aplicação dos mesmos em casos específicos, apresentando resultados e os comparando com soluções analíticas e referências paralelas dos mesmos casos.

O capítulo 2 introduz as leis fundamentais que regem a área da física que este trabalho utiliza do eletromagnetismo. Além da força de Lorentz, são apresentadas as equações de Maxwell e a formulação matemática da onda eletromagnética. Esse capítulo apresenta a base teórica necessária para entender as soluções analíticas de problemas de espalhamento eletromagnético.

A descrição das técnicas assintóticas de análise GO e UTD são apresentadas no capítulo 3, iniciando pela mais antiga e concluindo com a mais atual. O capítulo 4 compreende a aplicação dos métodos para casos com diferentes geometrias. A validade dos resultados obtidos através desses métodos é adquirida pela aplicação das soluções analíticas, já conhecidas, nos problemas propostos.

O capítulo 5 aborda as conclusões tiradas do trabalho, além de propor ao leitor possibilidades de trabalhos futuros embasados no mesmo tema. Por fim, encontra-se ao

final um capítulo referente aos anexos considerados necessários, assim como as referências utilizadas.

2 Revisão Bibliográfica

"Esta velocidade é tão próxima da velocidade da luz que parece que temos fortes motivos para concluir que a luz em si (incluindo calor radiante, e outras radiações do tipo) é uma perturbação eletromagnética na forma de ondas propagadas através do campo eletromagnético de acordo com as leis eletromagnéticas." James Clerk Maxwell, 1865.

2.1 Introdução

O desenvolvimento do eletromagnetismo no séc. XIX mostra que o avanço científico se faz, frequentemente, pelo confronto entre tradições de pesquisa distintas: no caso, a tradição britânica iniciada por Faraday e a tradição continental iniciada por Ampère. Mas foi com o cientista James Clerk Maxwell que a descrição do comportamento dos campos elétrico e magnético, bem como suas interações com a matéria, foi equacionada.

Esta revisão reforça os conceitos, sobre eletromagnetismo, necessários para compreender os campos eletromagnéticos quando estes sofrem o efeito da difração.

2.2 Campo Eletromagnético

Ao analisar uma carga elétrica, de massa desprezível deslocando-se, a existência de um campo eletromagnético pode ser constatada. Por não possuir massa relevante, descarta-se a ação da força gravitacional. Essa partícula carregada se movimenta por efeito da presença de um campo eletromagnético, sendo perturbada e impossibilitada de se manter inerte. A região, material ou substância onde se constata a presença deste campo é chamado de meio eletromagnético.

Para descrever os parâmetros que representam o campo eletromagnético deve-se primeiramente entender a força que atua sobre a partícula carregada. Essa força foi estabelecida por experiências, observações e medições, além da definição dos conceitos de campo elétrico e indução magnética para sua explicação. Conhecida como força de Lorentz, seu valor, direção e sentido são dados por: (RIBEIRO, 2004)

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (2.1)$$

sendo $\mathbf{E}$ o campo elétrico medido em volts/metro (V/m), $\mathbf{B}$ a indução magnética medida em teslas (T) e $\vec{v}$ a velocidade da partícula carregada.

A equação (2.1) mostra que quando a velocidade da partícula for nula a força dependerá apenas do campo elétrico, neste caso será chamada de força coulombiana. Para os outros casos, quando as grandezas variarem no tempo, o campo elétrico e a indução magnética existirão simultaneamente. Não havendo dissociabilidade entre os campos, um dependerá da presença do outro para existir, daí o termo campo eletromagnético (RIBEIRO, 2004).

2.3 Equações de Maxwell

Em geral, campos elétricos e magnéticos são quantidades vetoriais que têm tanto magnitude quanto direção. As relações e variações desses campos, de cargas e correntes elétricas, associam-se às ondas eletromagnéticas através de leis muito conhecidas da física e que compõem um conjunto de equações chamadas equações de Maxwell (BALANIS, 2012). Essas formulações foram batizadas em homenagem à James Clerk Maxwell, e expressam, seguindo a ordem apresentada no presente capítulo, como cargas elétricas produzem campos elétricos (Lei de Gauss), a ausência experimental de cargas magnéticas (Lei de Gauss para o magnetismo), como correntes elétricas produzem campos magnético (Lei de Ampère), e vice-versa (Lei da indução de Faraday). Ambas podem ser escritas em forma diferencial ou em forma integral (GRIFFITHS, 2011).

2.3.1 Lei de Gauss

A exemplificação dessa equação que compõe o conjunto das formulações de Maxwell pode ser feita da seguinte forma: imagine uma superfície fechada, semelhante uma bolha de sabão, ou seja, de forma indefinida como mostrada na **Figura 1**.

A primeira superfície engloba um dipolo elétrico. Pode-se notar que o número de linhas que se iniciam na carga positiva, ou seja, que estão saindo, é o mesmo número que está entrando na superfície direcionada para carga negativa. A segunda ilustra uma situação com uma distribuição diferente de cargas no interior da superfície, que quando somadas, as linhas de campo não se anulam como no primeiro caso (TIPLER; MOSCA, 2000). Esses casos ilustram a *Lei de Gauss*. Pode-se dizer, em outras palavras, que o fluxo elétrico (ϕ_e) que passa por qualquer superfície fechada é igual a carga total que está contida dentro dessa superfície (HAYT; BUCK, 2013).

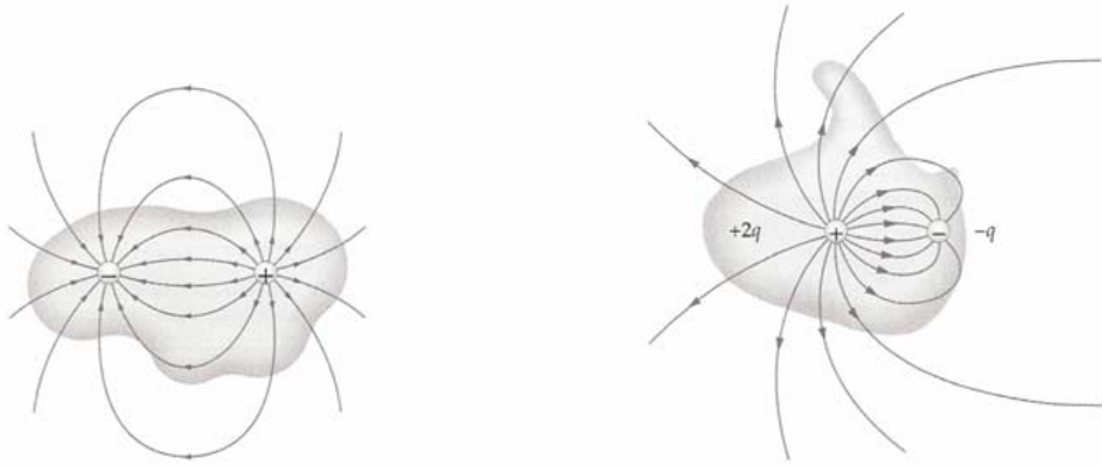


Figura 1 – Superfícies de formatos distintos e arbitrários, ambas contendo quantidades diferentes de cargas em seu interior (TIPLER; MOSCA, 2000).

Matematicamente (SADIKU, 2014):

$$\phi_e = Q_{eng}, \quad (2.2)$$

ou seja:

$$\phi_e = \oint d\phi_e = \oint_S \vec{D} \cdot dS. \quad (2.3)$$

Sendo:

$$Q_{eng} = \int \rho_v \cdot dv, \quad (2.4)$$

podemos concluir que:

$$\oint_S \vec{D} \cdot dS = \int \rho_v \cdot dv. \quad (2.5)$$

onde $\mathbf{D}$ é a densidade de fluxo elétrico e ρ_v é densidade volumétrica de carga.

Através da aplicação do teorema do divergente, encontrado no anexo (A.1), conclui-se que:

$$\oint_S \vec{D} \cdot dS = \oint_v \nabla \cdot \vec{D} \cdot dv, \quad (2.6)$$

a representação da *Lei de Gauss* em termos derivativos é apresentada sendo:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v. \quad (2.7)$$

2.3.2 Lei de Gauss Para o Magnetismo

Similar à densidade de fluxo elétrico, o campo magnético possui também uma densidade relacionada ao seu campo. Seguindo a mesma metodologia usada anteriormente, temos que o fluxo magnético (ϕ_m) total que atravessa uma superfície S pode ser dada por (TIPLER; MOSCA, 2000):

$$\phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (2.8)$$

onde $\vec{B}$ é a densidade de fluxo magnético.

Como foi visto, o fluxo de campo elétrico que passa por uma superfície fechada é igual à carga que está contida na mesma. Isso prova que ter uma carga elétrica isolada é possível, deixando claro que as linhas de fluxo elétrico não são obrigatoriamente fechadas, como visto na **Figura 1**. O fluxo de campo magnético se comporta de forma diferente, pois suas linhas de campo sempre se fecham sobre si mesmas (TIPLER; MOSCA, 2000), a **Figura 2** ilustra esse fato.

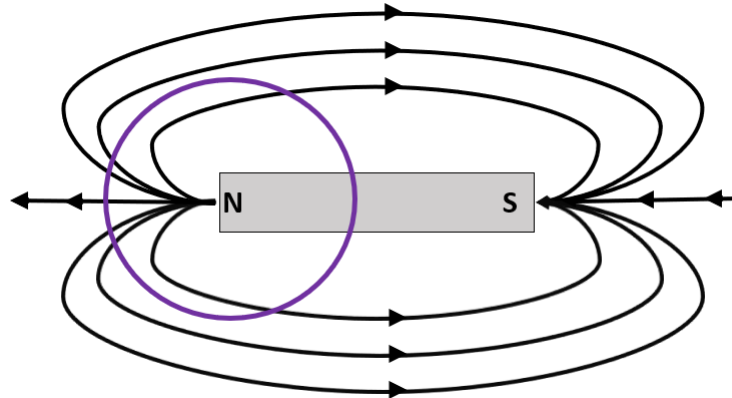


Figura 2 – Fluxo de campo magnético passando por uma superfície fechada - Figura adaptada de (SADIKU, 2014).

Podemos concluir então que, o fluxo de campo magnético total que atravessa uma superfície fechada é igual a zero, ou seja (SADIKU, 2014):

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (2.9)$$

Essa relação denominada de *Lei da conservação do fluxo magnético*, ou *Lei de Gauss para o magnetismo* prova então a inexistência de polos magnéticos isolados, ou em outras palavras, que a unidade fundamental do magnetismo é o dipolo magnético (TIPLER; MOSCA, 2000).

Assim como na *Lei de Gauss* o teorema da divergência também é usado aqui para obter a forma diferencial dessa equação, que também é uma das equações de Maxwell, assim (SADIKU, 2014):

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_v (\nabla \cdot \vec{B}) \cdot dv = 0, \quad (2.10)$$

ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.11)$$

2.3.3 Lei de Faraday

Michael Faraday através de seus experimentos provou que, um fluxo magnético variante no tempo atravessando uma superfície limitada por um caminho condutor poderia produzir uma corrente elétrica. Ao contrário de um campo magnético estático, um campo variável produz uma tensão induzida (chamada de *força eletromotriz* ou *fem*). Estando em um circuito fechado essa indução de tensão gera um fluxo de corrente elétrica (SADIKU, 2014):

Em outras palavras a *Lei de Faraday* diz que, se ao longo do perímetro da superfície houver um caminho condutor fechado, tal como um fio metálico, uma fem V_{fem} (em volts) será induzida ao longo do caminho que será igual em magnitude à taxa de variação do fluxo magnético através da superfície. Representada matematicamente da forma (TIPLER; MOSCA, 2000):

$$V_{fem} = -\frac{d\phi_m}{dt}. \quad (2.12)$$

O sinal negativo expõe o fato que a tensão induzida atua de forma a se opor ao fluxo que o produziu, ou seja, o sentido de fluxo da corrente no circuito é tal que o campo magnético produzido pela corrente induzida se opõe ao campo magnético original. Essa afirmativa é chamada *Lei de Lenz* (SADIKU, 2014).

A **Figura 3** mostra um fio em formato de anel em repouso em um campo magnético, onde uma fem é induzida devido a variação do fluxo. A fem pode ser vista como o trabalho realizado por uma unidade de carga, ou seja, devem haver forças sobre essas cargas movimento (TIPLER; MOSCA, 2000):

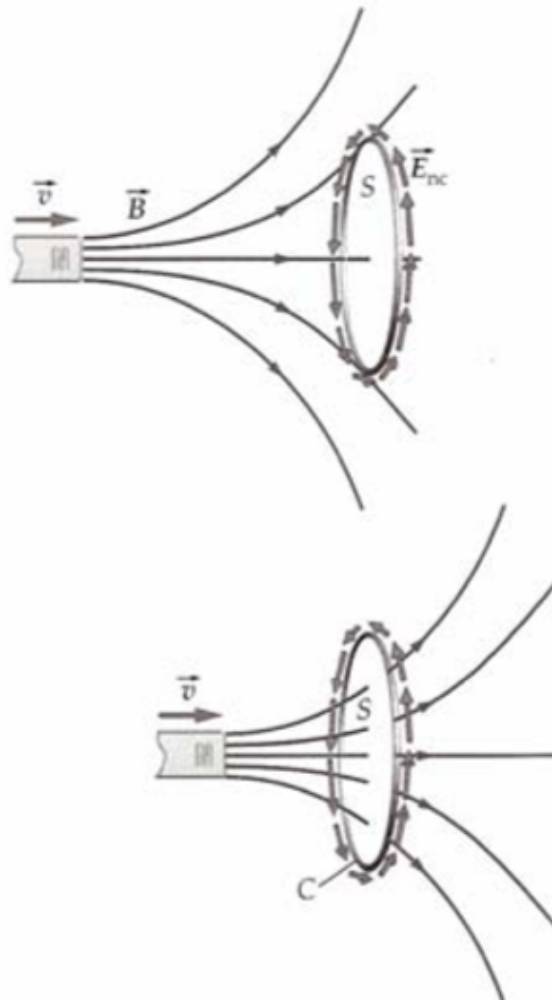


Figura 3 – Fio em formato de anel em repouso em um campo magnético variável (TIPLER; MOSCA, 2000).

Sabe-se que forças magnéticas não realizam trabalho, sendo assim quem realizam são as forças elétricas associadas ao campo elétrico não conservativo E_{nc} . A integral de linha desse campo ao longo do circuito será igual ao trabalho realizado por unidade de carga, sendo esse igual à fem induzida (SADIKU, 2014). Assim, pode-se afirmar que a integral de linha do campo elétrico é igual ao negativo da taxa de variação do fluxo magnético que atravessa qualquer superfície fechada, ou matematicamente (GRIFFITHS, 2011):

$$V_{fem} = \oint_c \vec{E} \cdot dL = -\frac{d\phi_m}{dt}. \quad (2.13)$$

Em termos de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ a eq. (2.13) pode ser reescrita sendo (GRIFFITHS, 2011):

$$\oint_c \vec{E} \cdot dL = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot dS. \quad (2.14)$$

Para obter a forma diferencial dessa equação de Maxwell usa-se o teorema de Stokes, que se encontra detalhado no anexo (A.2) (GRIFFITHS, 2011):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.15)$$

2.3.4 Lei de Ampère

Para obter uma expressão para o campo magnético na presença de situações com elevado grau de simetria a *Lei de Ampère* é usada e enuncia que, "a integral de linha da componente tangencial do campo magnético $\mathbf{H}$ em torno de um caminho fechado é igual a corrente líquida envolvida (I_{env}) por esse caminho", matematicamente (SADIKU, 2014):

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{L} = I_{env}. \quad (2.16)$$

Assim como a lei de Gauss, a lei de Ampère desempenha uma enorme importância teórica, tendo validade havendo ou não simetria do caso estudado (TIPLER; MOSCA, 2000). Através da aplicação do teorema de Stokes, encontrado em anexo no fim do trabalho, na parcela esquerda da equação obtêm-se (SADIKU, 2014):

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{L} = \oint_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}. \quad (2.17)$$

sendo que (GRIFFITHS, 2011):

$$I_{env} = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (2.18)$$

e que:

$$\vec{B} = \mu_o \cdot \vec{H}, \quad (2.19)$$

onde $\mathbf{J}$ é a densidade de corrente elétrica e μ_o é a permeabilidade magnética do vácuo, tendo valor de $4\pi \times 10^{-7} N/A$.

Os três equacionamentos acima fornecem a forma diferencial da *Lei de Ampère* para casos onde as correntes forem constantes e contínuas, ou seja, não variantes no tempo e sem qualquer acúmulo de cargas (TIPLER; MOSCA, 2000).

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J}. \quad (2.20)$$

Através da equação acima observa-se que o campo magnetostático não é um campo conservativo, uma vez que $\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} \neq 0$ (SADIKU, 2014).

Para contornar o fato da *Lei de Ampère* funcionar apenas para casos estacionárias, Maxwell propôs generaliza-la não só para os casos estáticos, mas também para os casos dinâmicos (TIPLER; MOSCA, 2000). Aplicando-se inicialmente o divergente na equação (2.20) (SADIKU, 2014):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\mu_o \vec{J}), \quad (2.21)$$

e lembrando que a divergência do rotacional é zero para qualquer campo vetorial, anexo (A.3) (SADIKU, 2014):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\mu_o \vec{J}) = 0, \quad (2.22)$$

podemos dizer que a *Lei de Ampère* não valida a continuidade da corrente, expressada matematicamente da forma (SADIKU, 2014):

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \neq 0. \quad (2.23)$$

Como solução a essa inconsistência Maxwell adiciona então um novo termo a equação, onde a corrente total seria agora uma composição de duas correntes somadas. O novo termo foi chamado de corrente de deslocamento de Maxwell (I_d) e equacionada como (TIPLER; MOSCA, 2000):

$$I_d = \varepsilon_o \frac{\partial \phi_e}{\partial t}, \quad (2.24)$$

onde ϕ_e é o fluxo do campo elétrico que atravessa a mesma superfície limitada pela curva C da equação (2.16) e ε_o é a permissividade elétrica do vácuo ($8,8541 \times 10^{-12} F/m$) (TIPLER; MOSCA, 2000).

Sendo assim, a nova forma integral para a *Lei de Ampère* fica sendo (TIPLER; MOSCA, 2000):

$$\oint_c \vec{H} \cdot dL = I + I_d, \quad (2.25)$$

em formato diferencial:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_d, \quad (2.26)$$

onde J_d é a densidade de corrente de deslocamento, dada por (SADIKU, 2014):

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (2.27)$$

2.4 Condições de Contorno

Através dessas formulações, as fronteiras entre os meios podem ser definidas sendo chamadas de condições de contorno (SEBOLD, 2011). A **Figura 4** exemplifica essa característica.

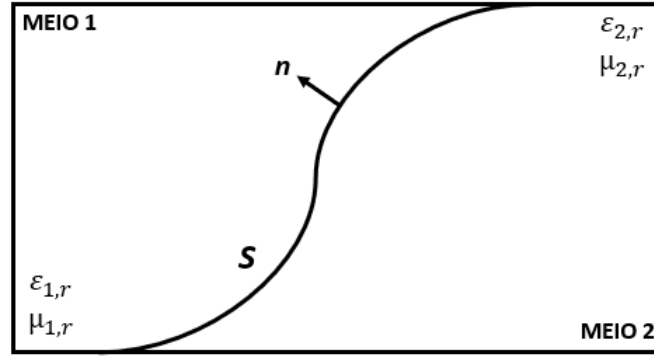


Figura 4 – Condições de contorno - Figura adaptada de (SEBOLD, 2011).

Pode-se resumir o comportamento das ondas eletromagnéticas quando presentes na fronteira entre dois materiais distintos com as seguintes relações entre campos normais e tangenciais (SADIKU, 2014):

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad (2.28)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s, \quad (2.29)$$

$$B_{1t} = B_{2t}, \quad (2.30)$$

$$H_{2t} - H_{1t} = j_s, \quad (2.31)$$

onde j_s é a densidade de corrente livre, ρ_s é a densidade superficial de carga e os índices n e t referem-se às componentes normal e tangencial, respectivamente.

O conceito de regiões de fronteira é fundamental para o estudo das soluções analíticas envolvendo os fenômenos reflexão e difração das ondas eletromagnéticas (GRIFFITHS, 2011).

2.5 Equação da onda

Para descrever a equação da onda tridimensional parte-se inicialmente da análise das equações de Maxwell, descritas na seção anterior, quando o meio analisado for isento da presença de cargas elétricas ($\rho = 0$). Com relação as leis relativas aos divergentes de $\vec{D}$ e $\vec{B}$, nota-se uma redundância parcial nas formulações (RIBEIRO, 2004).

O conjunto de equações diferenciais parciais acopladas são inicialmente de primeira ordem, envolvendo os campos elétrico e magnético. Neste equacionamento aplica-se um desacoplamento através do operador rotacional na eq. (2.15) e na eq. (2.26), juntamente com a identidade vetorial. O fato de serem acopladas significa que cada equação tem mais de um campo desconhecido e o processo de desacoplamento das equações gera consequências. Através desse procedimento, eleva-se de primeira para segunda ordem a equação referente a cada campo: (GRIFFITHS, 2011).

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}. \quad (2.32)$$

sendo $\vec{F}$ um campo vetorial aleatório e o operador ∇^2 é chamado de Laplaciano, dado por:

$$\nabla^2 \vec{F} = \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial z^2}, \quad (2.33)$$

Conhecendo a fonte que deu origem ao campo eletromagnético analisado, o laplaciano poderia ser reformulado afim de representar outros tipos de frente de onda como cilíndricas e esféricas (RIBEIRO, 2004).

Assim, para o modelamento campo elétrico fica da seguinte forma (GRIFFITHS, 2011):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (2.34)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = -\mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.35)$$

e para o campo magnético (GRIFFITHS, 2011):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \nabla \times \left(\mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (2.36)$$

$$= \mu_o \epsilon_o \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (2.37)$$

Sendo meio livre de cargas, ou seja, $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ e $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, temos que (RIBEIRO, 2004) :

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.38)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (2.39)$$

Este procedimento conclui que no vácuo cada componente dos campos elétrico e magnético satisfaz a equação da onda tridimensional ou *equação de Hemholtz* para campos harmônicos no tempo, do tipo (RIBEIRO, 2004):

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (2.40)$$

A **Figura 5** mostra a propagação da onda eletromagnética decomposta em vetores perpendiculares entre si e ao sentido de propagação, eles representam os campos elétrico e magnético (TIPLER; MOSCA, 2000).

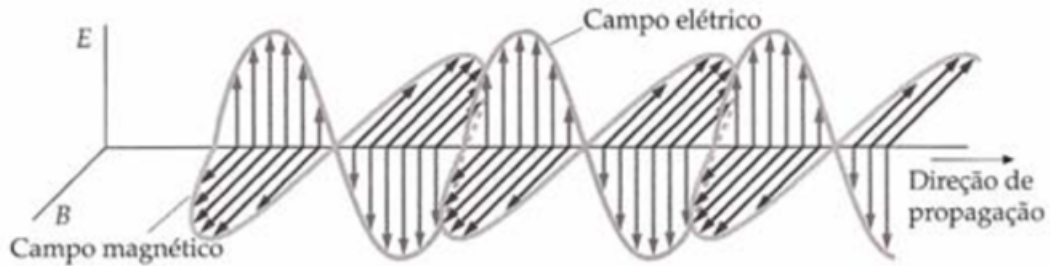


Figura 5 – Vetores campo elétrico e campo magnético projetados sobre uma onda eletromagnética que se desloca no espaço (TIPLER; MOSCA, 2000).

A eq. (2.40) sugere que, a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas viajando em um espaço vazio é precisamente o mesmo valor da velocidade da luz, tendo valor de (GRIFFITHS, 2011):

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o \mu_o}} = 3.00 \times 10^8 m/s \quad (2.41)$$

possibilitando assim provar que a luz é uma onda eletromagnética

É notável a contribuição de Maxwell à *lei de Ampère*, seu trabalho proporcionou o surgimento da equação da onda e por consequência a teoria eletromagnética da luz (GRIFFITHS, 2011).

2.6 Conclusões parciais

Neste capítulo foi apresentada a fundamentação teórica que deu base para o estudo das próximas secções, onde encontram-se os métodos matemáticos de análise que esse trabalho aborda, a Óptica Geométrica e a Teoria Uniforme da Difração, além dos modelos matemáticos analíticos usados para comprovações de resultados.

Juntamente com a formulação de Lorentz, onde a força gerada pela presença de campos elétricos e/ou magnéticos é definida, são apresentadas as equações de Maxwell, que são um grupo de quatro equações, assim chamadas em homenagem de James Clerk Maxwell, que descrevem o comportamento dos campos elétrico e magnético, bem como suas limitações e interações com a matéria. São elas a Lei de Gauss, Lei de Gauss para o magnetismo, Lei de Ampère e Lei da indução eletromagnética de Faraday. "Maxwell foi capaz de mostrar que as leis generalizadas da eletricidade e do magnetismo implicam na existência de ondas eletromagnéticas"(TIPLER; MOSCA, 2000).

O capítulo ainda apresenta a análise das equações sobre as regiões de contornos entre materiais elétricos, além da formulação matemática referente à onda eletromagnética.

3 Metodologia

"A flexibilidade dos raios é sua disposição para serem refletidos ou retornados ao mesmo meio de qualquer outro meio sobre cuja superfície eles caem. E os raios são mais ou menos reflexos, que são voltados mais ou menos facilmente."
Sir Isaac Newton, 1704.

3.1 Óptica Geométrica

A Óptica Geométrica (GO - *Geometrical Optics*) é um dos métodos de análise em alta frequência que este trabalho irá abordar. Sua principal característica se baseia em raios para modelar a incidência, reflexão e refração das ondas eletromagnéticas, pressupondo que viajam em linhas retas e são refletidas a partir das superfícies iluminadas de um objeto.

Essa técnica não inclui o estudo do fenômeno da difração, que será abordado através do próximo método apresentado, originado da extensão da óptica geométrica clássica. (OZGUN, 2016)

Assume-se que o comprimento de onda é suficientemente pequeno comparado com as dimensões dos obstáculos, dessa forma a onda eletromagnética pode ser considerado uma onda transversal elétrica e magnética (TEM) e localmente plana para toda a propagação (SCHETTINO, 2002).

Toda onda tem campos elétricos e magnéticos associados a sua propagação. Sua amplitude depende do campo emitido pelo transmissor, das perdas no espaço livre, das reflexões e difrações. (LOPEZ; CAMILO, 2015)

A análise da trajetória dos raios na óptica geométrica pode ser feita através do tubo de raios astigmático, caracterizado por gerar frentes de onda com raios de curvatura diferentes nos planos principais (frentes astigmáticas), conforme ilustrado na **Figura 6**.

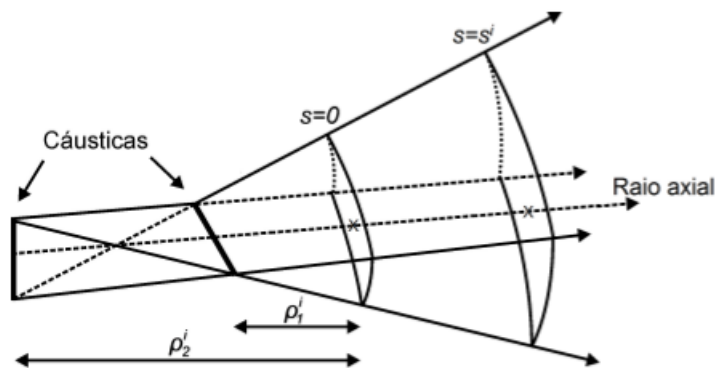


Figura 6 – Tubo de raios astigmático (KOUYOUMJIAN, 1965).

O campo elétrico visto pela óptica geométrica, que representa o caso do exemplo do tubo, será dado por (MCNAMARA, 1990) :

$$\vec{E}(s^i) = \vec{E}(s^i = 0)A(s^i)e^{-jks^i}, \quad (3.1)$$

sendo $\vec{E}(s^i = 0)$ fornecendo a polarização, amplitude e fase do campo elétrico no ponto de referência, s^i a distância percorrida ao longo da trajetória óptica, k a constante de propagação ($2\pi/\lambda$) e e^{-jks^i} a variação da fase ao longo do percurso do raio. $A(s^i)$ é o fator de espalhamento e é dado por (MCNAMARA, 1990):

$$A(s^i) = \sqrt{\frac{\rho_1^i}{\rho_1^i + s^i} \frac{\rho_2^i}{\rho_2^i + s^i}}, \quad (3.2)$$

em que ρ_1^i e ρ_2^i são os raios de curvatura principais da frente de onda no ponto de referência $s^i = 0$, como mostrado na **Figura 6** (LOPEZ; CAMILO, 2015).

A análise dos diferentes tipos de frente de onda está relacionada aos valores propostos para os raios de curvatura principais. Assim (LOPEZ; CAMILO, 2015):

- Para propagação de uma onda plana, $\rho_1^i \rightarrow \infty$ e $\rho_2^i \rightarrow \infty$, logo, $A(s^i) = 1$.
- Para uma frente de onda cilíndrica, $\rho_1^i \rightarrow \infty$ e $\rho_2^i \rightarrow \rho$, sendo ρ finito, nesse caso, $A(s^i) = \sqrt{\rho/(\rho + s^i)}$.
- Para uma frente de onda esférica, $\rho_1^i \rightarrow \rho$ e $\rho_2^i \rightarrow \rho$, dessa forma, $A(s^i) = \rho/(\rho + s^i)$.

3.1.1 Campos Incidentes

Para caracterizar o campo associado ao raio que atinge diretamente o receptor e o campo do raio que incide sobre um plano de reflexão ou uma borda de difração, vindo diretamente do transmissor, o seguinte modelamento se faz necessário (MILLIGAN, 2005)

$$\vec{E}(\theta, \Phi) = \sqrt{\frac{P_t G(\theta, \Phi) \eta_o}{4\pi}} \frac{e^{-jks^i}}{R} \text{sen}(\theta). \quad (3.3)$$

Esta formulação não leva em conta a polarização do campo elétrico, sendo P_t a potência do transmissor, $G(\theta, \Phi)$ o ganho máximo do transmissor em valor absoluto, η_o a impedância intrínseca do espaço livre ($\eta_o \simeq 120\pi$), e^{-jks^i} o termo da fase e R a distância radial desde o ponto fonte até o ponto observador (LOPEZ; CAMILO, 2015).

Para estabelecer a relação entre a potência do transmissor (P_t) e a potência entregue ao receptor (P_r) aplica-se a Fórmula de Friis, que em outras palavras determina as perdas na transmissão (BALANIS, 2005).

$$\frac{P_r}{P_t} = G_t G_r \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right), \quad (3.4)$$

onde G_t e G_r são os ganhos das antenas transmissora e receptora.

3.1.2 Campos Refletidos

Ao incidir sobre uma superfície plana, o raio é refletido tendo como origem um local chamado ponto de reflexão (Q_r). Esse local também representa a convergência dos tubos astigmáticos do raio incidente e refletido (SCHETTINO, 2002).

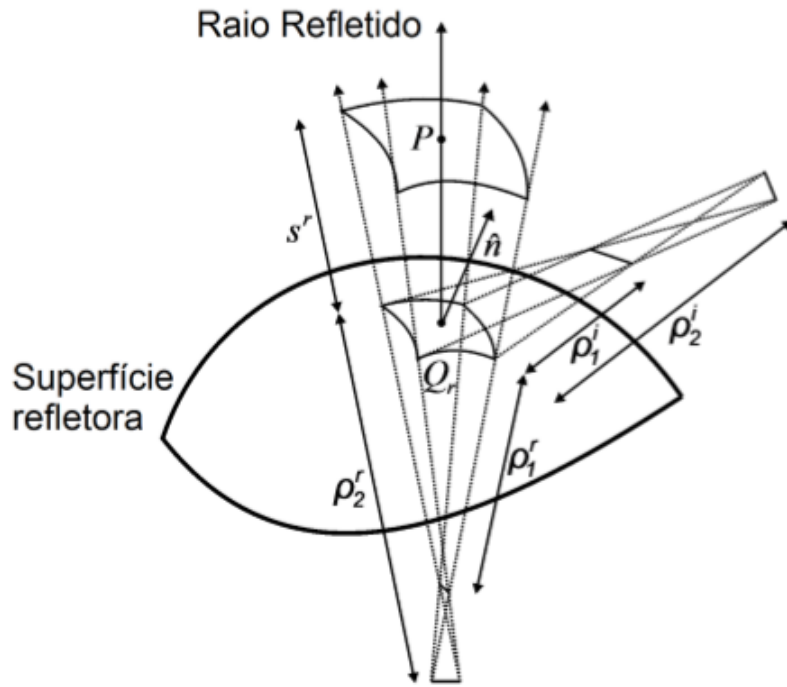


Figura 7 – Tubo de raios astigmático durante a reflexão (LOPEZ; CAMILO, 2015).

Seguindo a metodologia de análise proposta pela Óptica Geométrica, o campo refletido no ponto de observação (P), após a reflexão no ponto (Q_r) pode ser dado por (LOPEZ; CAMILO, 2015):

$$\vec{E}^r(P) = \vec{E}^r(Q_r) A(s^r) e^{-jks^r}, \quad (3.5)$$

sendo s^r a distância percorrida pelo raio refletido, e^{-jks^r} a variação da fase, $\vec{E}^r(Q_r)$ o campo elétrico refletido no ponto Q_r e $A(s^r)$ o fator de espalhamento do raio refletido que é dado por (LOPEZ; CAMILO, 2015) (MCNAMARA, 1990):

$$A(s^r) = \sqrt{\frac{\rho_1^r}{\rho_1^r + s^r} \frac{\rho_2^r}{\rho_2^r + s^r}}, \quad (3.6)$$

onde ρ_1^r e ρ_2^r são os raios de curvatura da frente de onda refletida. Assim como na onda incidente, esse cálculo determinará a variação da amplitude do campo. O campo elétrico $E^r(Q_r)$ quando ocorrida a reflexão é dado por (LOPEZ; CAMILO, 2015) (MCNAMARA, 1990):

$$\vec{E}^r(Q_r) = \vec{E}^i(Q_r) \cdot \bar{R}, \quad (3.7)$$

sendo $E^i(Q_r)$ o campo incidente antes da reflexão e $\bar{R}$ a diádica dos coeficientes de reflexão de Fresnel. Estes termos dependem diretamente das propriedades dos materiais, como polarização, ângulo de incidência e frequência da onda (LOPEZ; CAMILO, 2015) (MCNAMARA, 1990).

Por se tratar de um onda plana, o campo elétrico pode apresentar duas polarizações, a direção β representa a polarização *soft* ou perpendicular ao plano de incidência, a direção ϕ representa a polarização *hard* ou paralela ao plano de incidência. (LOPEZ; CAMILO, 2015) (MCNAMARA, 1990).

A **Figura 8** ilustra os ângulos e apresenta um sistema de coordenadas fixo. Sendo $\hat{n}$ o vetor unitário normal à superfície refletora no ponto de reflexão, $\hat{S}_i$ o plano que contém o raio incidente e $\hat{S}_r$ o plano que contém o raio refletido. O ângulo de incidência, definido entre a direção de propagação da onda incidente e o vetor normal, e o ângulo de reflexão, definido entre a direção de propagação da onda refletida e o vetor normal, são iguais. Essa igualdade é definida pela Lei de Snell, e será chamada de α na figura que ilustra o caso.

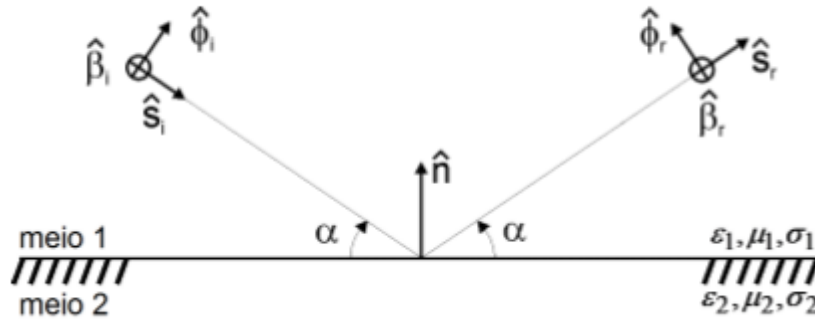


Figura 8 – Reflexão do raio sobre uma superfície plana (LOPEZ; CAMILO, 2015).

Como se observa os dois planos são coincidentes, isto é, o raio incidente, o raio refletido e a normal estão no mesmo plano. Os vetores $\hat{\phi}_i, \hat{\beta}_i, \hat{S}_i$ e $\hat{\phi}_r, \hat{\beta}_r, \hat{S}_r$ definem o sistema de coordenadas fixo aos raios incidente e refletido, respectivamente. Com isso os campos incidente e refletido podem ser escritos em função dos vetores unitários $\hat{\phi}$ e $\hat{\beta}$

Os coeficientes de reflexão de Fresnel para ambas polarizações são dadas da seguinte forma (LOPEZ; CAMILO, 2015) (MCNAMARA, 1990):

$$\bar{R} = R_s \hat{\beta}_i \hat{\beta}_r + R_h \hat{\phi}_i \hat{\phi}_r. \quad (3.8)$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_\beta^r(Q_r) \\ \vec{E}_\phi^r(Q_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{E}_\beta^i(Q_r) \\ \vec{E}_\phi^i(Q_r) \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

sendo R_s o coeficiente de reflexão para polarização perpendicular ou *soft* e R_h para paralela ou *hard*. Suas formulações são dadas por (RAPPAPORT, 2001):

$$R_s = \frac{(\alpha) - \sqrt{\hat{\epsilon}_r - \cos^2(\alpha)}}{(\alpha) + \sqrt{\hat{\epsilon}_r - \cos^2(\alpha)}}, \quad (3.10)$$

$$R_h = \frac{\hat{\epsilon}_r(\alpha) - \sqrt{\hat{\epsilon}_r - \cos^2(\alpha)}}{\hat{\epsilon}_r(\alpha) + \sqrt{\hat{\epsilon}_r - \cos^2(\alpha)}}, \quad (3.11)$$

para α representando o ângulo de incidência relacionado à superfície refletora (ângulo de reflexão) e $\hat{\epsilon}_r$ a permissividade elétrica do material refletor, sendo dada por (RAPPAPORT, 2001):

$$\hat{\epsilon}_r = \epsilon_r - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon_o}, \quad (3.12)$$

em que ϵ_r e σ são a permissividade elétrica relativa em $[F/m]$ e a condutividade em $[S/m]$ do obstáculo respectivamente. A frequência angular do campo incidente, ω , é dada por $2\pi f$ e ϵ_o é a permissividade elétrica do vácuo (LOPEZ; CAMILO, 2015).

As superfícies citadas possuem um comportamento ideal, porém, quando esta análise se estende a problemas reais, é necessário levar em conta as imperfeições das mesmas. Para este detalhe, inclui-se na análise dos coeficientes de reflexão de Fresnel um fator chamado fator de rugosidade (LOPEZ; CAMILO, 2015).

$$R_{s,h}^{rugos} = \delta R_{s,h}, \quad (3.13)$$

onde o fator de rugosidade δ é dado por (CHAMBERLIN; LUEBBERS, 1982):

$$\delta^2 = e^{-2\Delta\phi}, \quad (3.14)$$

para

$$\Delta\phi = \frac{4\pi\Delta h}{\lambda}(\alpha), \quad (3.15)$$

sendo Δh é a medida da rugosidade da superfície.

3.2 Teoria Uniforme da Difração (UTD)

Ao deparar-se com um obstáculo uma onda eletromagnética pode-se fazer presente em algumas regiões onde através da GO esse fenômeno não poderia ser explicado. Inerente a todo fenômeno ondulatório a difração é um mecanismo de propagação recorrente em obstáculos cujo formatos são por exemplo: bordas de superfícies, arestas formadas por interseção de superfícies, vértices de sólidos e superfícies curvadas, quando as ondas incidem de forma rasante. Esses, em conjunto, representam objetos reais onde ondas eletromagnéticas estão em contato diariamente, sendo esse o objetivo de análise desse trabalho.

A **Figura 9** exemplifica o caso de um raio difratado na aresta de um obstáculo, além de ilustrar o conceito de que quando uma onda eletromagnética incide sobre uma borda sua forma de onda espalhada é cônica (LOPEZ; CAMILO, 2015). Esse fenômeno pode ser explicado pelo princípio de Huygens, no qual cada ponto de uma frente de onda possui a funcionalidade de uma nova fonte pontual (SCHETTINO, 2002).

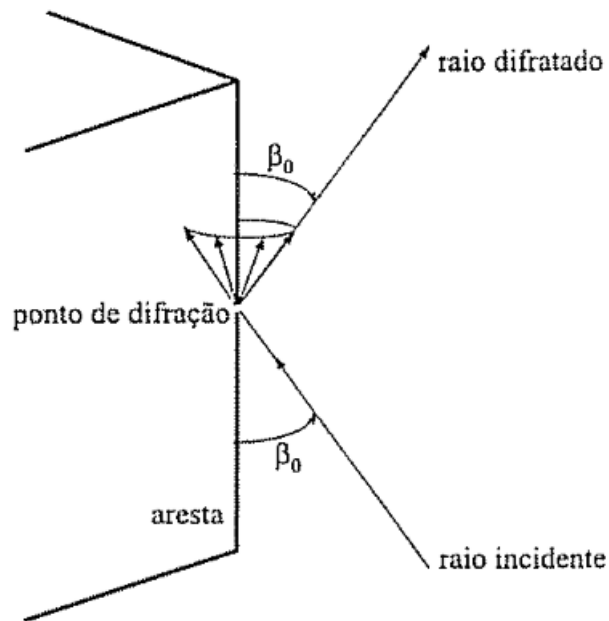


Figura 9 – Cone de Keller (SCHETTINO, 2002).

Antes de abordar a inconsistência existente na análise da GO e por consequência sua evolução para a UTD, se faz necessário apresentar e esclarecer as nomenclaturas que serão usadas durante o estudo do fenômeno da difração. A **Figura 10** mostra a incidência de uma onda sobre uma superfície canônica, onde estão evidenciadas as fronteiras sombra, que delimitam três regiões chamadas regiões de sombra (LOPEZ; CAMILO, 2015).

A região 1 corresponde à região que possui visibilidade para os raios refletido e direto. Sua fronteira é formada pelo raio refletido na aresta do obstáculo, sendo conhecida como FSR (fronteira de sombra dos raios refletidos) (SCHETTINO, 2002).

A região 2 corresponde à região onde só existe raio direto. Sua fronteira é formada pelo prolongamento do raio incidente sobre a aresta do obstáculo, sendo conhecida como FSI (fronteira de sombra dos raios incidentes) (SCHETTINO, 2002).

A região 3 corresponde à região de sombra, onde, pela ótica geométrica clássica, não há raio direto e nem raios refletidos (SCHETTINO, 2002) .

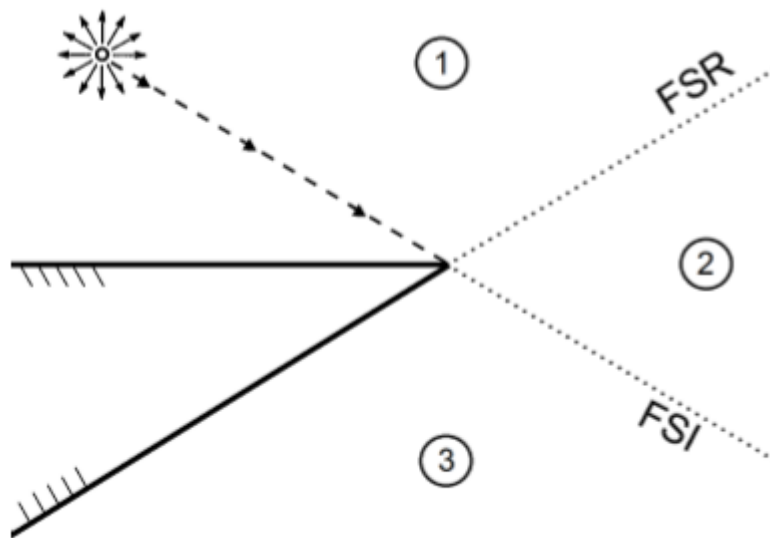


Figura 10 – Regiões e fronteiras de sombra da uma cunha (LOPEZ; CAMILO, 2015).

A GO não pôde prever o campo em uma região de sombra causada por uma borda, tendo uma imprecisão maior ainda quando aplicada sobre as fronteiras das regiões. Para superar essa inconsistência uma nova teoria foi formulada por Joseph B. Keller, em 1962, acrescentando à análise os campos difratados nas regiões onde o método era inexato (HOLM, 1996). Ele generalizou o princípio de Fermat, estabelecendo uma analogia entre os fenômenos de difração e os de reflexão e refração da GO. Essa primeira tentativa de corrigir tais discontinuidades nos cálculos do campo foi chamada de Teoria Geométrica da Difração (GTD - *Geometrical Theory of Diffraction*) (LOPEZ; CAMILO, 2015).

Essa nova metodologia de análise de campos espalhados tornou-se uma ferramenta de grande valor na engenharia, no entanto ainda apresentava singularidades nas regiões de transição ao redor de cada fronteira (MCNAMARA, 1990).

A proposta de modificação da GTD é apresentada doze anos depois com Kouyoumjian e Pathak (KOUYOUMJIAN; PATHAK, 1974). Nela o coeficiente de difração de Keller é melhorado para permanecer válido nos limites ópticos (sombra e limite de reflexão) por meio de uma função de transição, agora chamada de Teoria Uniforme da Difração (UTD - *Uniform Theory of Diffraction*) (SCHNEIDER; LUEBBERS, 1991).

Esse novo método de análise abriu novas discussões sobre suas diversas aplicações, tendo como consequência modificações matemáticas para cada uma delas. Durante as últimas décadas, várias abordagens foram tomadas para superar essas limitações, mais notavelmente por Tiberio e Kouyoumjian em 1982 (TIBERIO; KOUYOUMJIAN, 1982), (TIBERIO; KOUYOUMJIAN, 1984), Michaeli em 1985 (MICHAELI, 1985), (MICHAELI, 1987) e Tiberio et al. em 1989 (TIBERIO et al., 1989). Essas valiosas análises forneceram por exemplo informações a respeito de problemas envolvendo duas difrações consecutivas e são válidas para casos específicos, entretanto não são aplicáveis em geral (SCHNEIDER; LUEBBERS, 1991).

Outros estudos, esses acerca de quantificar os diversos tipos de perdas durante a transmissão de uma onda eletromagnética, também vem sendo de grande importância para a engenharia. Dentre as formulações apresentadas para a UTD afim de contornar esses problemas, (LOPEZ; CAMILO, 2015) apresenta em seu trabalho uma comparação de três coeficientes de autores diferentes: Luebbers (LUEBBERS, 1989), Guevara (GUEVARA; NAVARRO, 2011) e Schettino (SCHETTINO; MOREIRA; REGO, 2010), além de avaliar a qualidade de suas aproximações. A escolha de qual autor, ou coeficiente, seguir varia de acordo com a aplicação.

Usado neste trabalho, onde as superfícies analisadas serão de um material condutor elétrico perfeito (sem perdas), a UTD clássica de Kouyoumjian e Pathak irá ser suficiente para apresentar bons resultados.

3.2.1 Formulações e Coeficientes de Difração da UTD

O resultado do fenômeno da difração de uma onda eletromagnética, ou seja, o campo difratado, terá sua análise viabilizada pela UTD (KOUYOUMJIAN; PATHAK, 1974), e dado por (MCNAMARA, 1990) (SCHETTINO, 2002) (LOPEZ; CAMILO, 2015):

$$\vec{E}^d(P) = \vec{E}^d(Q_d)A(s^d)e^{-jks^d}, \quad (3.16)$$

sendo s^d a distância entre observador e ponto de difração, e^{-jks^d} a variação da fase, $\vec{E}^d(Q_d)$ o campo elétrico difratado no ponto Q_d , visto na **Figura 11**, e $A(s^d)$ o fator de espalhamento do raio difratado que é dado por (MCNAMARA, 1990) (SCHETTINO, 2002) (LOPEZ; CAMILO, 2015):

$$A(s^d) = \sqrt{\frac{\rho^d}{s^d(\rho^d + s^d)}}, \quad (3.17)$$

onde ρ^d é a distância entre fonte e obstáculo (ponto onde acontece a difração) e s^d a distância entre o obstáculo e o observador. $E^d(Q_d)$ é o campo elétrico quando ocorrida a difração e é dado por (MCNAMARA, 1990) (SCHETTINO, 2002) (LOPEZ; CAMILO, 2015):

$$\vec{E}^d(Q_d) = \vec{E}^i(Q_d) \cdot \bar{D}, \quad (3.18)$$

$E^i(Q_d)$ é o campo incidente antes da difração no ponto Q_d e $\bar{D}$ é a diádica que representa os coeficientes de difração da UTD para a cunha condutora (SCHETTINO, 2002).

A formulação dos coeficientes levará em conta duas polarizações, assim como na análise feita para o fenômeno da reflexão. Uma representando a polarização perpendicular ao plano de incidência (direção $\hat{\beta}$ ou *soft*), a outra representando a polarização paralela ao plano de incidência (direção $\hat{\varphi}$ ou *hard*) (MCNAMARA, 1990).

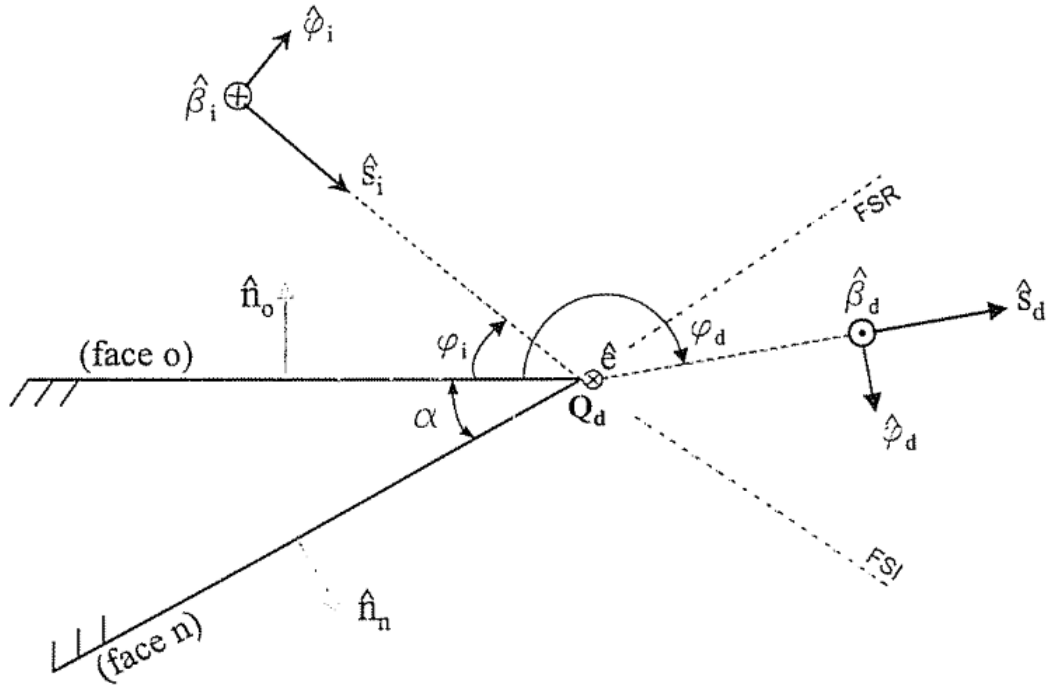


Figura 11 – Incidência e difração de um raio sobre uma aresta (SCHETTINO, 2002).

A **Figura 11** apresenta os principais parâmetros para o cálculo da difração por uma cunha de faces planas, α é o ângulo interno da cunha, φ_i é o ângulo da onda incidente e φ_d é o ângulo da onda difratada. Assim, a diádica dos coeficientes de difração em termos das

polarizações *soft* (D_s) e *hard* (D_h) é dada por (SCHETTINO, 2002) (LOPEZ; CAMILO, 2015):

$$\bar{D} = D_s \hat{\beta}_i \hat{\beta}_d + D_h \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_d. \quad (3.19)$$

De forma matricial, agora podemos representar o campo difratado sendo (SCHETTINO, 2002) (LOPEZ; CAMILO, 2015) :

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_\beta^d(Q_d) \\ \vec{E}_\varphi^d(Q_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_s & 0 \\ 0 & D_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{E}_\beta^i(Q_d) \\ \vec{E}_\varphi^i(Q_d) \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

e os coeficientes expressos por (LOPEZ; CAMILO, 2015) :

$$D_{s,h}(L^i, L^{ro}, L^{rn}, \varphi_i, \varphi_d, \beta_0, n) = D_1 + D_2 + R_{s,h}(D_3 + D_4) \quad (3.21)$$

$R_{s,h}$, já apresentados anteriormente, são os coeficientes de reflexão de Fresnel. Para o caso de uma cunha condutora elétrica perfeita, $R_{s,h} \mp 1$. Os coeficientes D_1 a D_4 são dados por (MCNAMARA, 1990) :

$$D_1 = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k} \sin \beta_0} \cot \left[\frac{\pi + (\varphi_d - \varphi_i)}{2n} \right] F \left[kL^i a^+(\varphi_d - \varphi_i) \right], \quad (3.22)$$

$$D_2 = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k} \sin \beta_0} \cot \left[\frac{\pi - (\varphi_d - \varphi_i)}{2n} \right] F \left[kL^i a^-(\varphi_d - \varphi_i) \right], \quad (3.23)$$

$$D_3 = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k} \sin \beta_0} \cot \left[\frac{\pi + (\varphi_d + \varphi_i)}{2n} \right] F \left[kL^{rn} a^+(\varphi_d + \varphi_i) \right], \quad (3.24)$$

$$D_4 = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k} \sin \beta_0} \cot \left[\frac{\pi - (\varphi_d + \varphi_i)}{2n} \right] F \left[kL^{ro} a^-(\varphi_d + \varphi_i) \right]. \quad (3.25)$$

L^i, L^{ro}, L^{rn} são chamados de parâmetros de distância, para o caso específico da cunha com superfícies planas esses termos serão iguais ($L^i = L^{ro} = L^{rn}$), β_0 é o semi-ângulo do cone de Keller e n esta relacionado com o ângulo interno da borda da cunha onde a difração ocorre sendo dado por (KOUYOUMJIAN; PATHAK, 1974)(SCHETTINO, 2002):

$$n = \frac{2\pi - \alpha}{\pi}. \quad (3.26)$$

$F(x)$ é chamada de função de transição sendo (KOUYOUMJIAN; PATHAK, 1974)(LOPEZ; CAMILO, 2015):

$$F(x) = 2j\sqrt{x}e^{jx} \int_{\sqrt{x}}^{\infty} e^{-ju^2} du, \quad (3.27)$$

para (KOUYOUMJIAN; PATHAK, 1974)(SCHETTINO, 2002) :

$$a^{\pm}(\theta^{\pm}) = 2 \cos^2 \left(\frac{2n\pi N^{\pm} - \theta^{\pm}}{2} \right), \quad (3.28)$$

onde $\theta^{\pm} = \varphi_d \pm \varphi_i$ e $N_{\pm}$ são os inteiros mais próximos que satisfazem as equações (KOUYOUMJIAN; PATHAK, 1974)(SCHETTINO, 2002) :

$$2\pi n N^{+} - (\varphi_d \pm \varphi_i) = \pi, \quad (3.29)$$

$$2\pi n N^{-} - (\varphi_d \pm \varphi_i) = -\pi. \quad (3.30)$$

O cálculo numérico da função de transição $F(x)$ possui duas aproximações, uma para argumentos com valores pequenos ($x < 0,3$) (KOUYOUMJIAN; PATHAK, 1974)(LOPEZ; CAMILO, 2015) :

$$F(x) \approx \left(\sqrt{\pi x} - 2xe^{j\pi/4} - \frac{2}{3}x^2e^{-j\pi/4} \right) e^{j(\pi/4+x)}, \quad (3.31)$$

e outra para argumentos com valores maiores ($x > 5,5$) (KOUYOUMJIAN; PATHAK, 1974)(LOPEZ; CAMILO, 2015):

$$F(x) \approx 1 + j\frac{1}{2x} - \frac{3}{4x^2} - j\frac{15}{8x^3} + \frac{75}{16x^4}. \quad (3.32)$$

Para argumentos intermediários utiliza-se uma interpolação de pontos sugeridos por autores para determinar a função de transição. Essa função é diretamente proporcional a integral de Fresnel, utilizada no próximo capítulo e anexada em (A.5) com uma explicação mais específica sobre essa ferramenta matemática (KOUYOUMJIAN; PATHAK, 1974)(LOPEZ; CAMILO, 2015).

3.3 Conclusões Parciais

Este capítulo apresentou dois métodos de análise de campos eletromagnéticos, a Óptica Geométrica (GO - *Geometrical Optics*) e a Teoria Uniforme da Difração (UTD - *Uniform Theory of Diffraction*). Estas técnicas foram abordadas afim de compreender os

campos eletromagnéticos quando entram em contato com obstáculos de diferentes formas geométricas, tendo assim seu campo espalhado de acordo com o formato destes obstáculos.

O capítulo mostrou que o campo total observado ao final do fenômeno irá depender de alguns fatores sendo eles: o ângulo de entrada da onda incidente, o ângulo ao qual o observador está localizado, os parâmetros que definem a forma de onda e a geometria do obstáculo, além dos coeficientes relacionados à cada fenômeno existente nos casos estudados (reflexão e a difração).

Os campos refletidos e difratados foram obtidos a partir do campo incidente, havendo a possibilidade de serem campos elétricos ou magnéticos, sendo assim campos já conhecidos, formulados e provados. Esse fato possibilitou quantificar os campos eletromagnéticos através de coeficientes distintos para cada fenômeno. Além disso vale lembrar que os coeficientes ainda passam por novas variações atualmente, pois as mudanças implicadas nos mesmos procuram refinar o modelamento da fórmula para cada caso analisado, de forma específica.

Como mencionado e mostrado, o espaço usado para análise do campo final é dividido em três áreas. Elas se diferenciam pela composição de campos que aparecem no campo final lido, ou seja, se possuem componentes referentes ao campo incidente, refletido e/ou difratado. Estas possuem suas fronteiras denominadas FSR (fronteira de sombra dos raios refletidos) e FSI (fronteira de sombra dos raios incidentes).

Pode-se dizer que o estudo destas fronteiras proporcionaram ao modelamento matemático do espalhamento das ondas eletromagnéticas incógnitas a serem respondidas, sendo a principal delas o fato que os equacionamentos utilizados possuíam soluções inconsistentes quando aplicadas nessas localidades. Dentre as propostas para esses problemas destaca-se a evolução da Teoria Geométrica da Difração (GTD - *Geometrical Theory of Diffraction*) para a UTD, sendo justamente uma melhoria na formulação para uma solução correta nas periferias das regiões de sombra.

4 Simulações Computacionais

4.1 Introdução

Esta secção apresenta os resultados obtidos através da utilização do método de análise UTD, explicado com detalhes no capítulo 3, quando usado para calcular campos eletromagnéticos espalhados sob contato com diferentes objetos (geometrias distintas).

A avaliação e validação desses resultados se deu a partir de comparações com soluções analíticas já conhecidas dos problemas escolhidos para o presente estudo. Os campos usados em ambas metodologias foram apresentados graficamente tanto com polarização visando campos elétricos (*soft*), quanto visando campos magnéticos (*hard*).

Além dos resultados, a lógica usada na programação dos métodos de análise também está presente, visando facilitar o uso dos resultados ao leitor.

4.2 Cunha Condutora Elétrica Perfeita

4.2.1 Solução pela UTD

Inicialmente serão analisados campos elétricos e campos magnéticos em relação à aresta de uma cunha condutora elétrica perfeita de faces planas. A **Figura 12** representa esse caso, porém com apenas um valor para a abertura da cunha e para o ângulo de incidência da onda. Os casos montados a partir desse, como planos e semiplanos, são também apresentados, uma vez que o código feito para esse caso pôde ser estendido para outros.

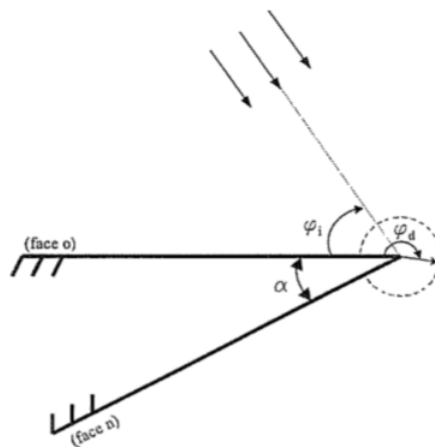


Figura 12 – Cunha condutora elétrica perfeita (SCHETTINO, 2002).

Os resultados a seguir representarão uma onda plana incidindo sob uma cunha, através da UTD, tendo em vista diversas variações dos parâmetros envolvidos no espalhamento eletromagnético. Os valores escolhidos para a abertura da cunha condutora (α), do ângulo de incidência (ϕ_i), da frequência da onda incidente (f) e da distância adotada para o observador (s) serão mencionadas a cada análise gráfica. A estrutura seguida será de variar uma das variáveis citada acima, enquanto as outras se mantêm fixas, alternando essa metodologia entre todas.

Os gráficos representam os campos elétricos (polarização *soft*) e magnéticos (polarização *hard*) da onda eletromagnética quando essa incide sob uma cunha condutora elétrica perfeita, a onda incidente possui frentes de onda plana. Para cada polarização foi ilustrado o comportamento tanto do campo total, quanto do campo difratado.

4.2.1.1 Resultado geral da UTD

O objetivo dessa subsecção é apresentar a solução geral para o campo eletromagnético espalhado sob uma cunha condutora elétrica perfeita. Porém evidenciando a contribuição de cada campo, incidente, refletido e difratado, na resposta final entregue pela UTD. As figuras apresentarão separadamente cada componente para polarização *soft*, além de analisar a magnitude e a fase de cada caso.

Os valores usados para os parâmetros referentes às variáveis independentes dos equacionamentos foram escolhidas como, 60° para a abertura angular da cunha condutora, um ângulo de incidência da onda eletromagnética de também 60° , tendo essa uma frequência de 10 Ghz. Por fim, o observador do fenômeno foi posicionado a uma distância de 100 metros do mesmo. Sendo assim, será na fase dos campos rastreados que estarão evidentes as diferenças entre os mesmos.

É importante salientar, que esse tipo de ilustração promove a separação das contribuições de cada campo em particular para o campo total somente é possibilitada através do método assintótico UTD que, ao contrário da solução analítica, apresenta em seu modelamento a presença de cada um desses campos em cada região de sombra separadamente.

As **Figuras 13 e 14** apresentam as amplitudes e as fases dos campos incidente, refletido e difratado respectivamente, ambos para polarização *soft* e representando uma componente do campo final. Nota-se ao observar que tanto a fase quanto a magnitude dos campos possuem em seus gráficos os evidentes locais onde estão localizadas as fronteiras de sombra.

Analisando a magnitude e a fase do campo incidente, pode-se verificar que a fronteira de sombra dos raios incidentes se apresenta em $\phi_{FSI} = 240^\circ$, como esperado. Já a magnitude e a fase do campo refletido fornecem a localização da fronteira de sombra dos raios refletidos, sendo para esse caso $\phi_{FSR} = 120^\circ$, também concordando com a teoria. O

campo difratado é mostrado juntamente nas **Figuras 13 e 14**, e será melhor detalhado na secção 4.2.1.6.

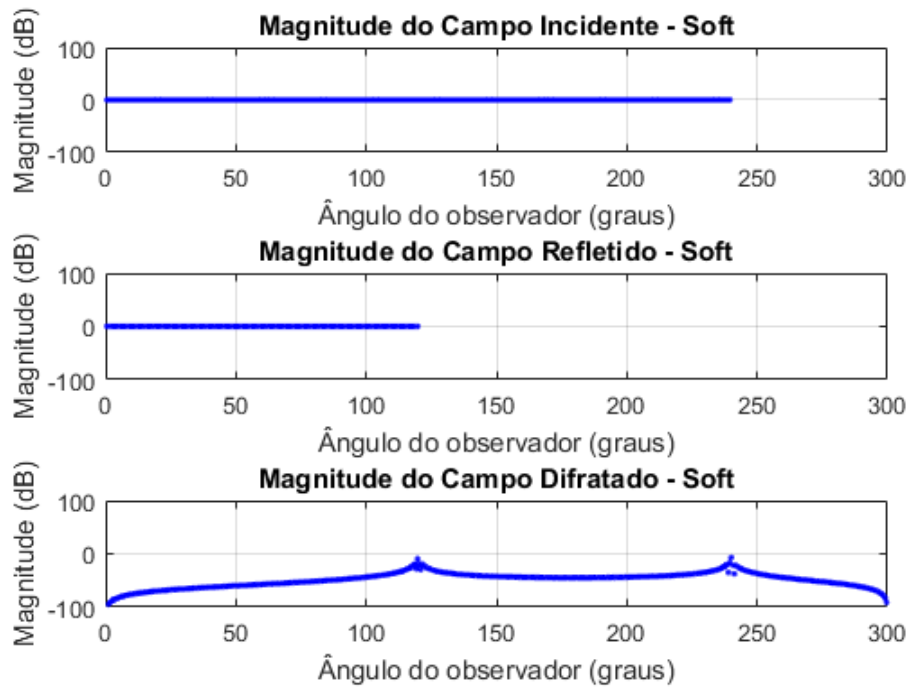


Figura 13 – Magnitude dos campos incidente, refletido e difratado para polarização *soft*.

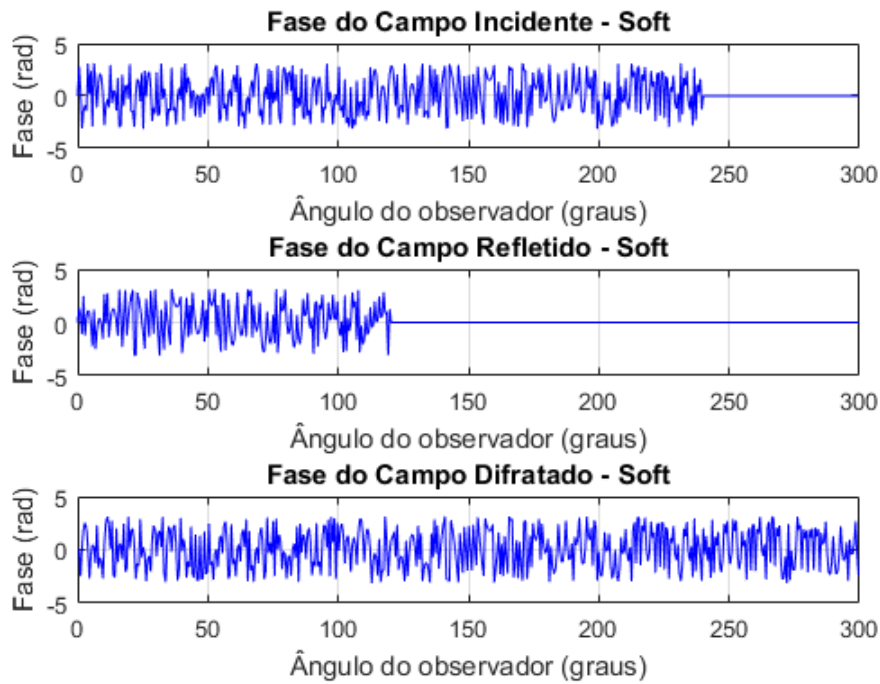


Figura 14 – Fase dos campos incidente, refletido e difratado para polarização *soft*.

4.2.1.2 Resultados obtidos com variações da abertura angular da cunha condutora

O primeiro teste foi feito analisando os resultados obtidos através da GO e da UTD para o caso da cunha condutora elétrica perfeita, promovendo variações no parâmetro responsável pela abertura angular da cunha, as outras variáveis envolvidas no fenômeno permaneceram com os mesmos valores durante os teste: ângulo de incidência ($\phi_i = 60^\circ$), frequência da onda incidente ($f = 10 \text{ GHz}$) e distância do observador ($s = 100 \text{ m}$).

Os valores escolhidos para o teste foram: 0° , 60° , 90° e 180° . Os resultados dos campos totais e difratados são entregues separadamente, seguindo a teoria dos métodos usados. Através das implementações computacionais foi possível mostrá-los em um mesmo espaço bidimensional, permitindo observar as similaridades entre o comportamento dos campos.

- $\alpha = 0^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $s = 100 \text{ m}$.

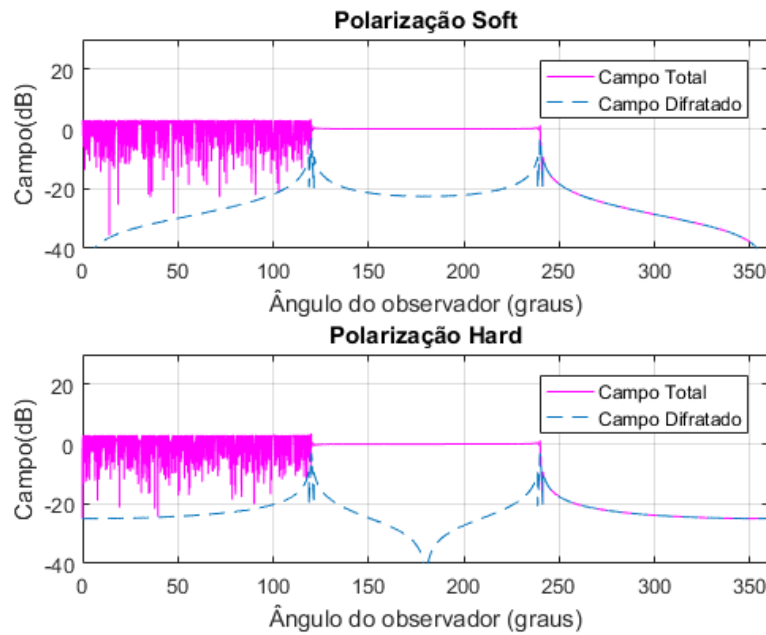


Figura 15 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\alpha = 0^\circ$).

- $\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $s = 100 \text{ m}$.

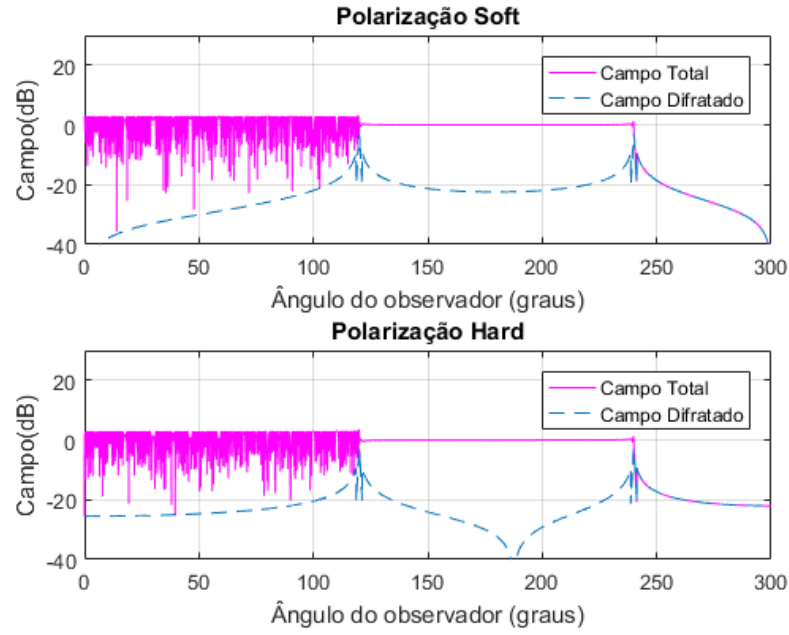


Figura 16 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\alpha = 60^\circ$).

- $\alpha = 90^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $s = 100 \text{ m}$.

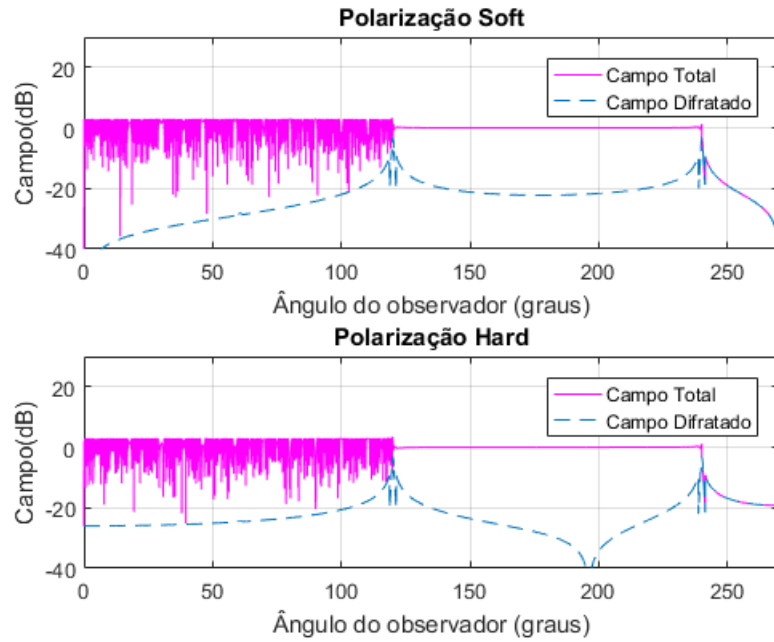


Figura 17 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\alpha = 90^\circ$).

- $\alpha = 180^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $s = 100 \text{ m}$.

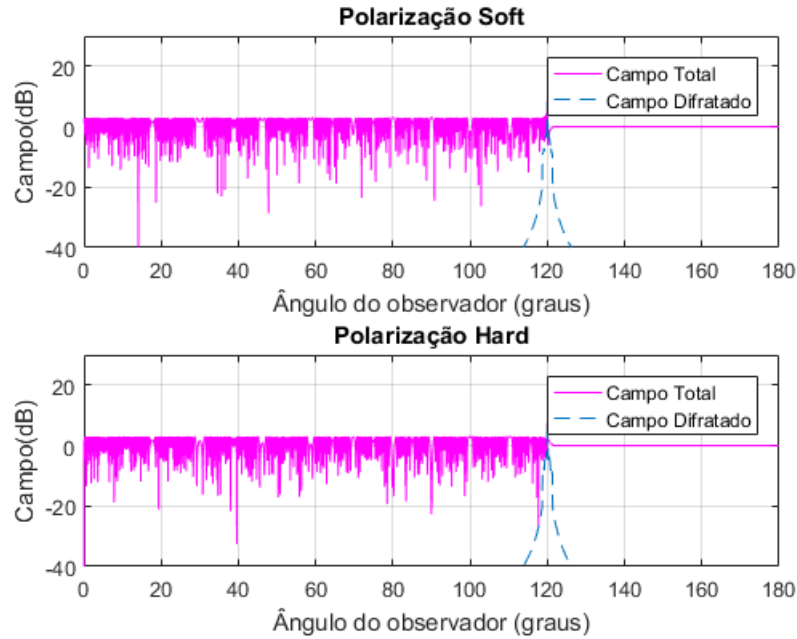


Figura 18 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\alpha = 180^\circ$).

4.2.1.3 Resultados obtidos com variações do ângulo de incidência da onda

Essa subsecção refere-se ao segundo teste e representa os resultados obtidos promovendo variações no parâmetro responsável pelo ângulo de incidência da onda, as outras variáveis envolvidas no espalhamento eletromagnético permaneceram com os mesmos valores durante os teste: abertura angular da cunha ($\alpha = 60^\circ$), frequência da onda incidente ($f = 10 \text{ GHz}$) e distância do observador ($s = 100 \text{ m}$).

Os valores escolhidos para o teste foram: 15° , 45° e 90° . Os gráficos são apresentados como na subseção anterior, contendo os campos total e difratado para cada caso. Uma subseção ao final dos resultados obtidos através das variações dos parâmetros, é dedicada a mostrá-los graficamente em um mesmo espaço bidimensional tornando a análise da influência de cada variável mais clara. Porém somente os campos difratados, evidenciando melhor o funcionamento da UTD com relação às regiões e fronteiras de sombra.

- $\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 15^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $s = 100 \text{ m}$.

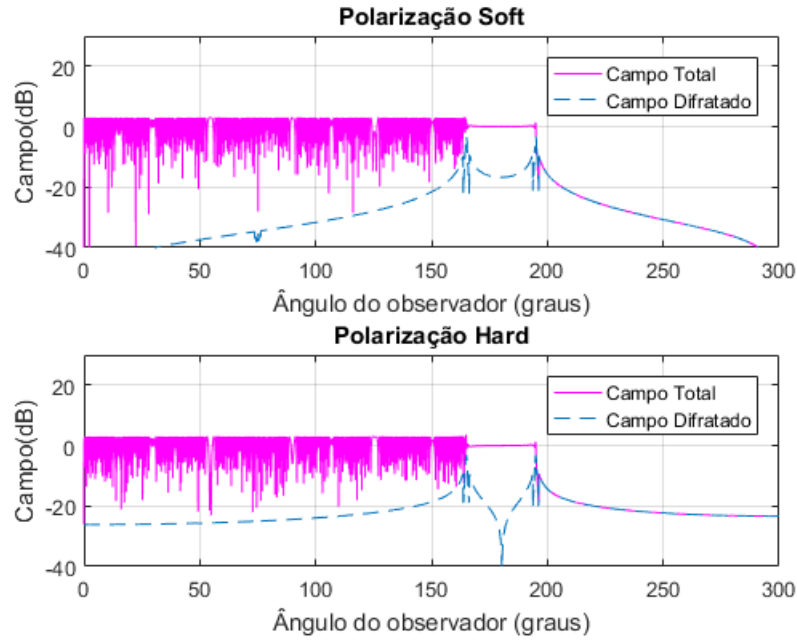


Figura 19 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\phi_i = 15^\circ$).

- $\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 45^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $s = 100 \text{ m}$.

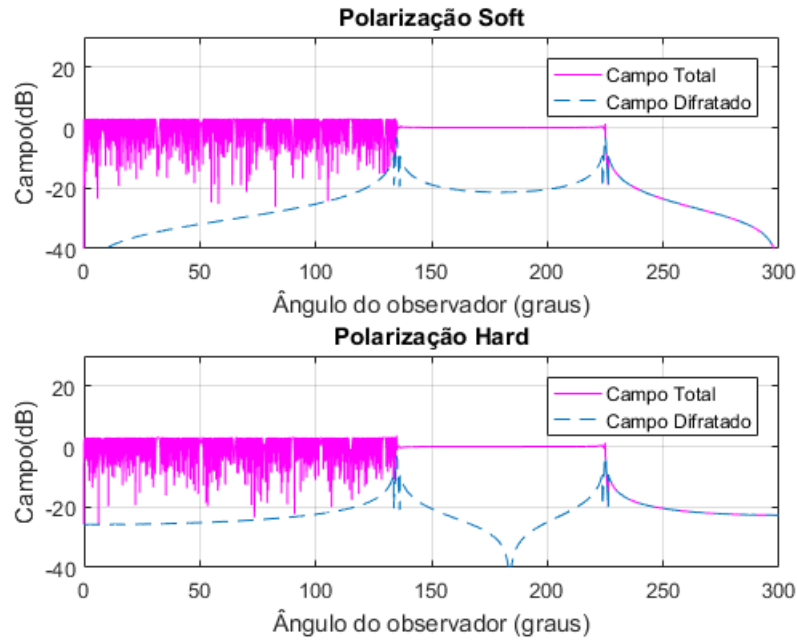


Figura 20 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\phi_i = 45^\circ$).

- $\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 90^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $s = 100 \text{ m}$.

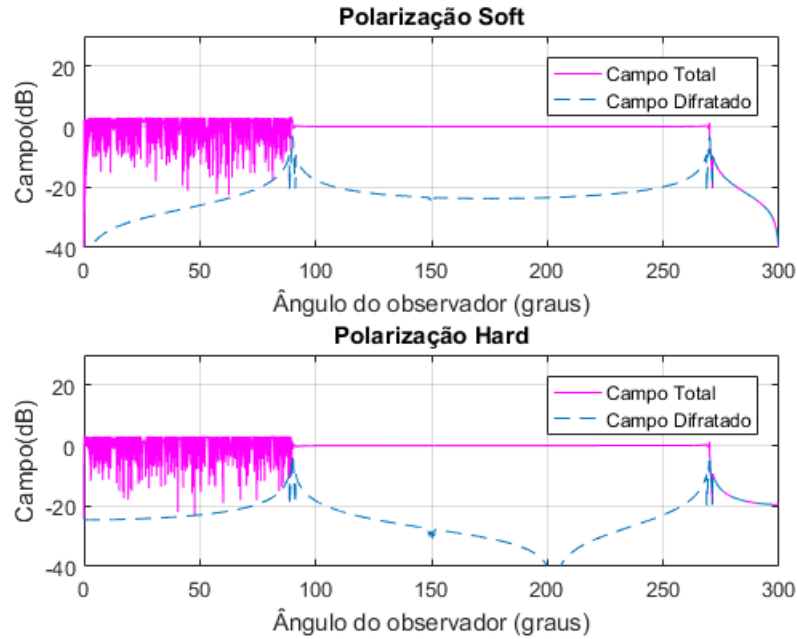


Figura 21 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\phi_i = 90^\circ$).

4.2.1.4 Resultados obtidos com variações da frequência da onda incidente

O terceiro teste foi feito variando o parâmetro responsável pela frequência da onda incidente, as outras variáveis envolvidas no espalhamento eletromagnético permaneceram com os mesmos valores durante os teste: abertura angular da cunha ($\alpha = 60^\circ$), ângulo de incidência ($\phi_i = 60^\circ$) e distância do observador ($s = 100 \text{ m}$).

Os valores escolhidos para o teste foram: 3, 10, 28, 38 e 60 GHz. Os últimos três valores foram escolhidos devido a aplicabilidade dos mesmos nos sistemas de comunicação sem fio do futuro, como por exemplo o 5G. Os gráficos são apresentados como na subseção anterior, contendo os campos total e difratado para cada caso.

Como citado anteriormente, ao final dos resultados obtidos através das variações dos parâmetros, uma subseção é dedicada a mostrá-los graficamente em um mesmo espaço bidimensional tornando a análise da influência de cada variável mais clara, porém somente os campos difratados, facilitando a observação da UTD.

- $\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 3 \text{ GHz}$; $s = 100 \text{ m}$.

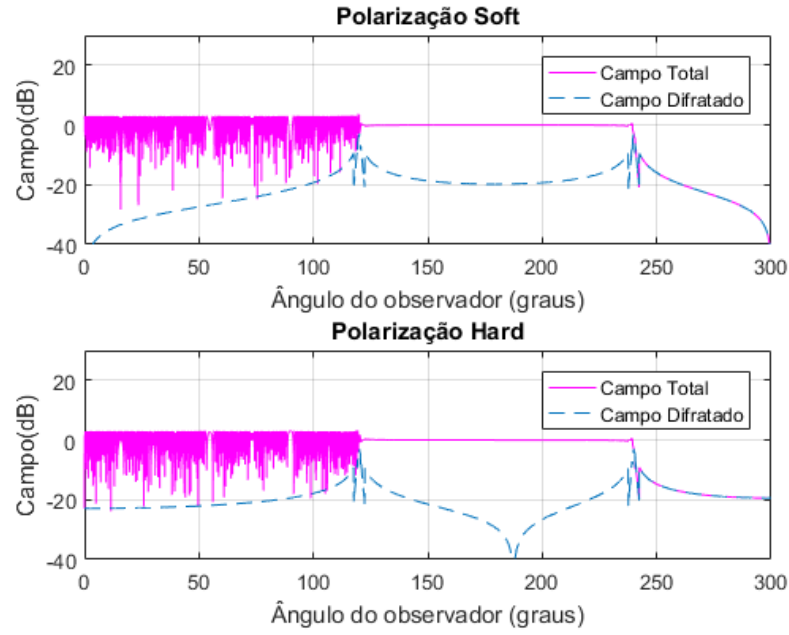


Figura 22 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($f = 3 \text{ GHz}$).

- $\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $s = 100 \text{ m}$.

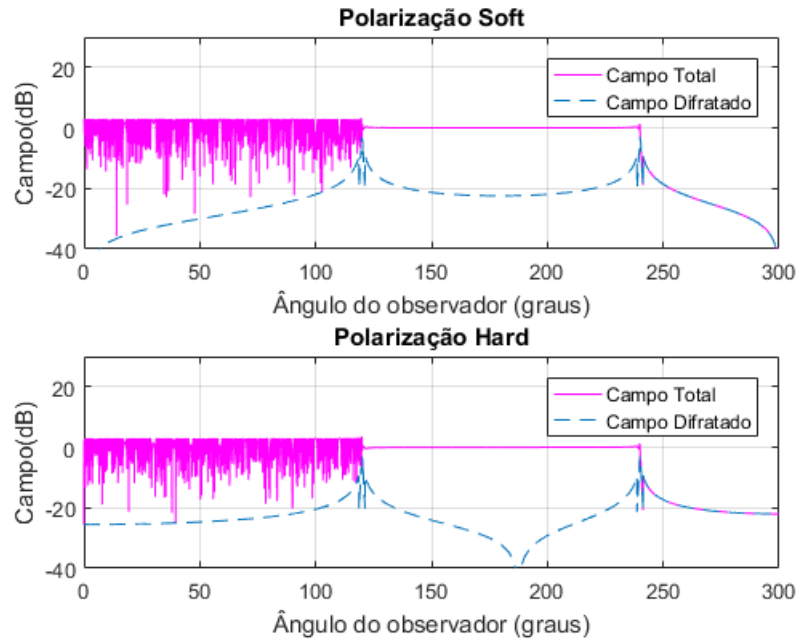


Figura 23 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($f = 10 \text{ GHz}$).

- $\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 28 \text{ GHz}$; $s = 100 \text{ m}$.

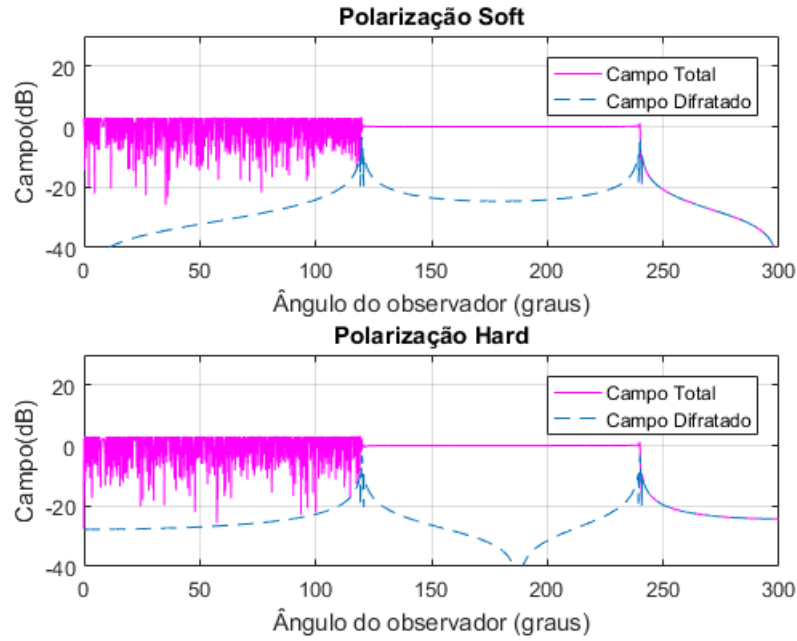


Figura 24 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($f = 28 \text{ GHz}$).

- $\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 38 \text{ GHz}$; $s = 100 \text{ m}$.

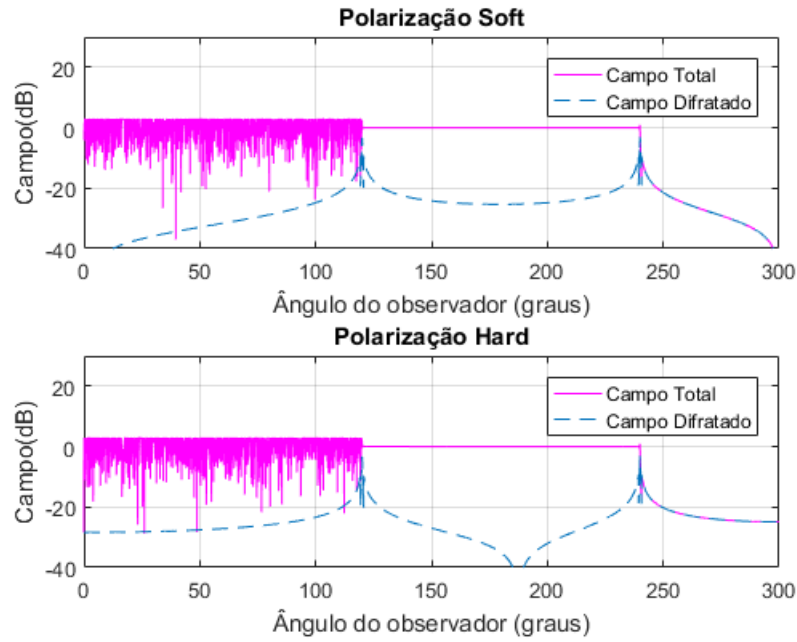


Figura 25 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($f = 38 \text{ GHz}$).

- $\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 60 \text{ GHz}$; $s = 100 \text{ m}$.

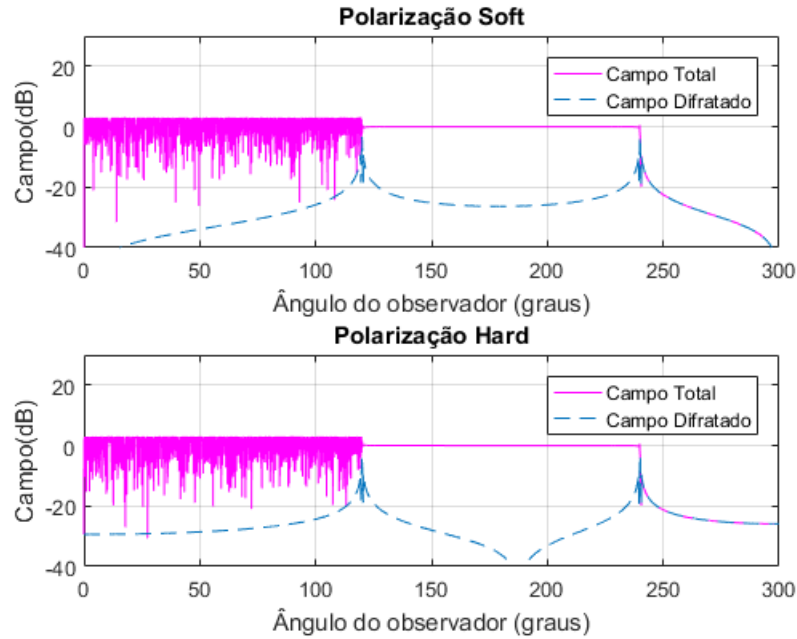


Figura 26 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($f = 60 \text{ GHz}$).

4.2.1.5 Resultados obtidos com variações da distância do observador

O ultimo teste foi feito variando o parâmetro referente à distância do observador, as outras variáveis envolvidas no espalhamento eletromagnético permaneceram com os mesmos valores: abertura angular da cunha ($\alpha = 60^\circ$), ângulo de incidência ($\phi_i = 60^\circ$) e frequência da onda ($f = 10 \text{ GHz}$).

O observador foi colocado a 1 e 100 metros da aresta da superfície canônica e os gráficos são apresentados como nas outras subseções, contendo os campos total e difratado para cada caso. Esse teste foi um importante indicador que o método entrega melhores resultados para campos distantes do ponto onde a difração ocorre, como já esperado.

- $\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $s = 1 \text{ m}$.

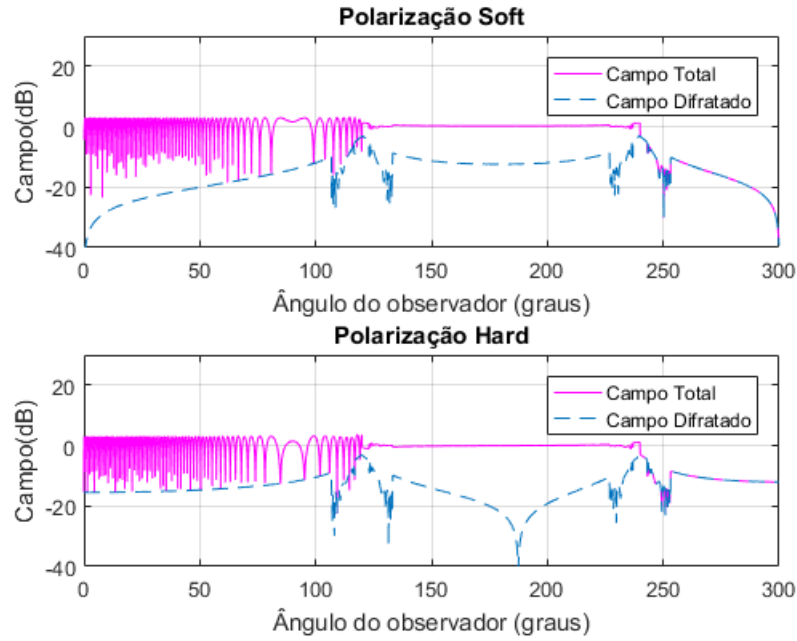


Figura 27 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($s = 1 \text{ m}$).

- $\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $s = 100 \text{ m}$.

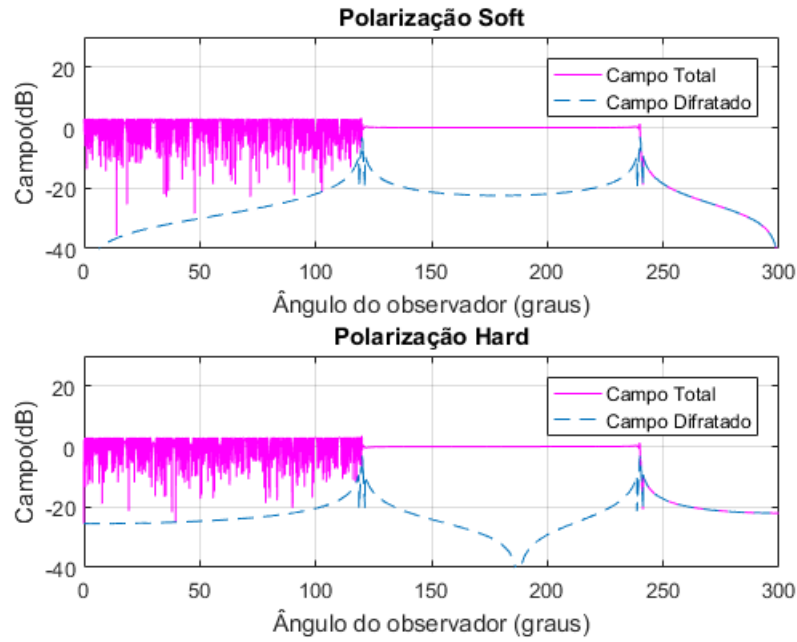


Figura 28 – Campo total e difratado durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($s = 100 \text{ m}$).

4.2.1.6 Análise dos Resultados

Para uma melhor visualização dos resultados obtidos através da UTD, para o caso do campo eletromagnético espalhado por uma onda plana incidente em cunha condutora elétrica perfeita, essa seção apresenta os gráficos para casos distintos (parâmetros diferentes) juntos no mesmo espaço bidimensional. As variações foram efetuadas sobre o ângulo de incidência, da frequência da onda e da distância referente a posição do observador.

Inicialmente foram gerados os gráficos referentes aos diferentes ângulos de incidência, sendo escolhidos 15° , 45° e 90° . A sequência utilizada foi apresentar os campos difratados para ambas polarizações, primeiro *soft* depois *hard*. Para as variações referentes às diferentes frequências, foram escolhidas 3, 10, 28, 38 e 60 GHz. Para as relacionadas à distância adotada para o observador foram colocadas 1, 10 e 100 metros.

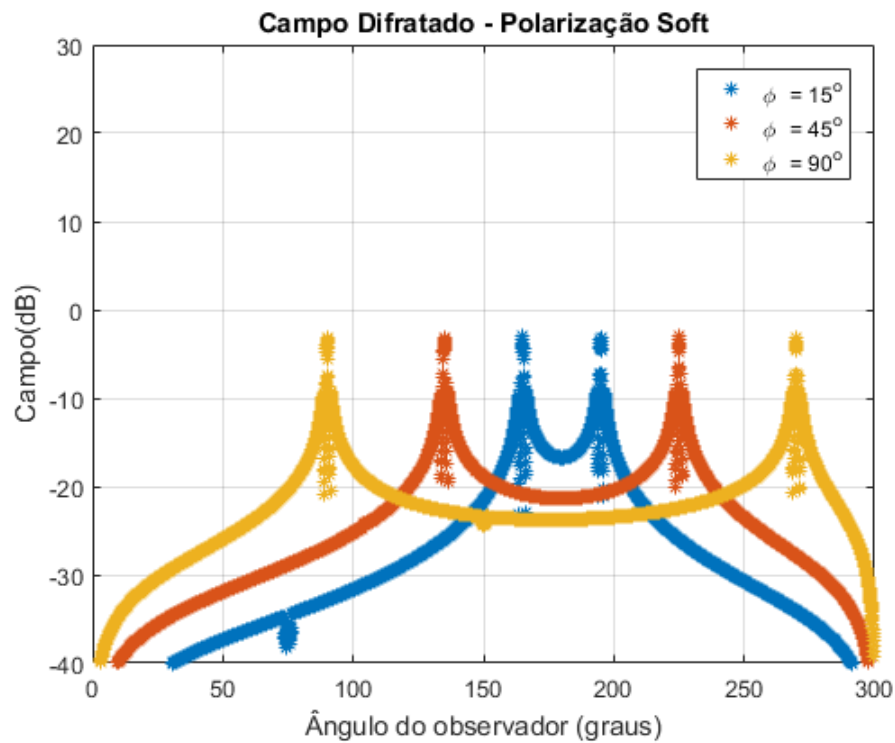


Figura 29 – Campos difratados com polarização *soft* durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\phi_i = 15^\circ, 45^\circ, 90^\circ$).

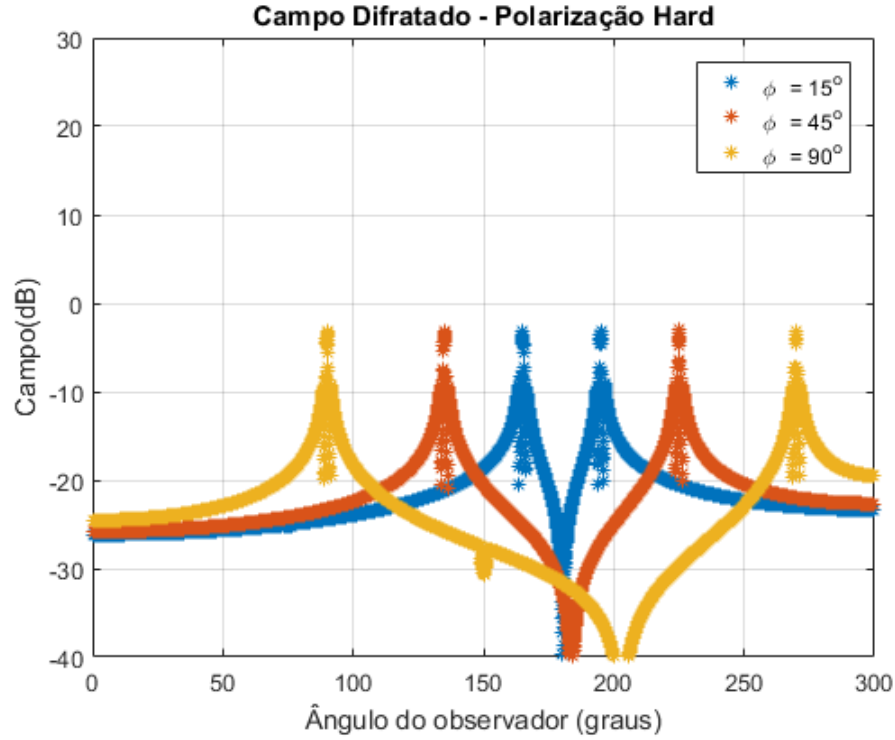


Figura 30 – Campos difratados com polarização *hard* durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($\phi_i = 15^\circ, 45^\circ, 90^\circ$).

As **Figuras 29 e 30** apresentam os gráficos referentes aos campos difratados durante o espalhamento eletromagnético sob uma cunha condutora elétrica perfeita, de abertura angular igual á 60° . A frequência da onda plana incidente foi posta com valor de 10 GHz e a distância adotada pelo observador de 100 metros. Nesses gráficos essa onda sofreu uma variação no ângulo de incidência, evidenciando como o campo difratado da mesma se comporta em cada caso escolhido, em polarizações *soft* e *hard*.

Em ambos os gráficos, os picos encontrados referem-se às regiões e fronteiras comentadas na secção (3.2), a FSR (fronteira de sombra dos raios refletidos) e a FSI (fronteira de sombra dos raios incidentes), a **Figura 10** representa esses parâmetros.

Tanto as regiões quanto suas fronteiras têm seus valores definidos por (MCNAMARA, 1990):

$$\phi_{FSR} = \pi - \phi_i, \quad (4.1)$$

$$\phi_{FSI} = \pi + \phi_i. \quad (4.2)$$

Sendo assim, pode-se notar para ambas polarizações que os picos encontram-se exatamente onde as equações (4.1) e (4.2) apontam ser as fronteiras para cada ϕ_i . Para o caso onde a onda incide com uma angulação de 15° , os valores de ϕ_{FSR} e ϕ_{FSI} são

respectivamente 165° e 195° . Para uma incidência de 45° , ϕ_{FSR} e ϕ_{FSI} serão 135° e 225° . E finalmente para $\phi_i = 90^\circ$, ϕ_{FSR} e ϕ_{FSI} assumem valores iguais à 90° e 270° .

Outra observação, acerca dos gráficos gerados, é que o campo difratado tem um crescimento mais rápido nas extremidades angulares em que o observador se coloca, ou seja, de 0° e 300° aos picos que representam as fronteiras de sombra, o gráfico referente a onda incidente de 90° alcança a as fronteiras mais rapidamente. Por consequência conclui-se e nota-se nas **Figuras 29 e 30** que quanto maior o ângulo de incidência maior será o vão central localizado entre as duas fronteiras.

As magnitudes das ondas presentes na **Figura 29**, ou seja, para polarização *soft*, também se distinguem relacionadas aos ângulos de incidência das mesmas. Essa figura mostra que a amplitude da onda que incide com $\phi_i = 15^\circ$, é maior que as outras que possuem valores superiores para o mesmo parâmetro. Já para polarização *hard*, **Figura 30**, essa diferença de amplitude pode ser observada nas extremidades dos gráficos analisados, porém com comportamento contrário, uma vez que a maior amplitude inicial e final encontrada está localizada em $\phi_i = 90^\circ$.

Por fim, nota-se que as amplitudes dos campos para todos os casos de ambas figuras (polarizações) obtiveram variações idênticas de -40 dB à 0 dB, mesmo que distintos em formato.

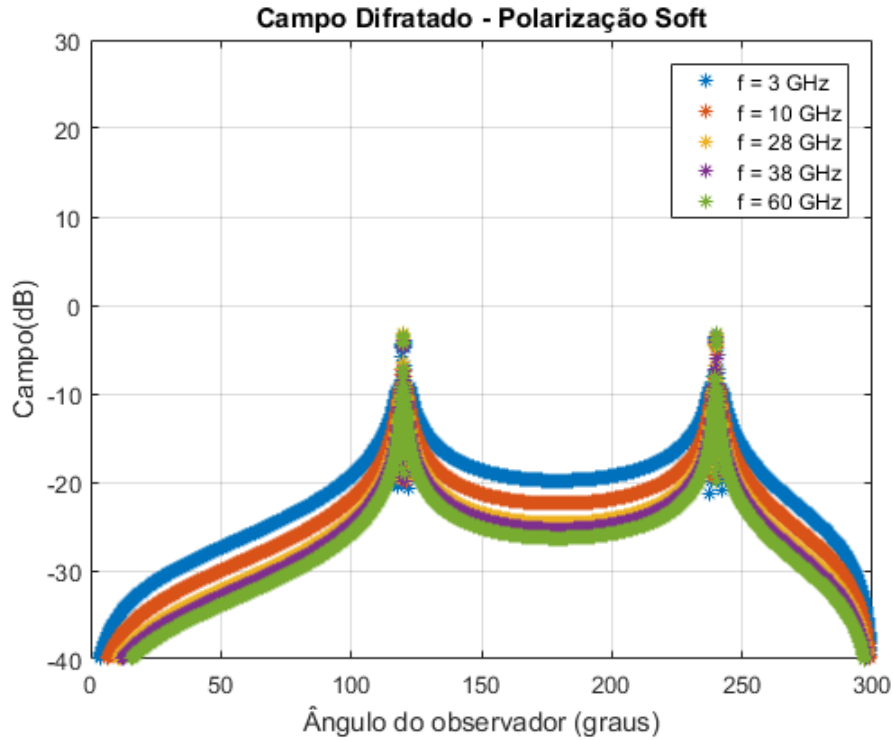


Figura 31 – Campos difratados com polarização *soft* durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($f = 3, 10, 28, 38$ e 60 GHz).

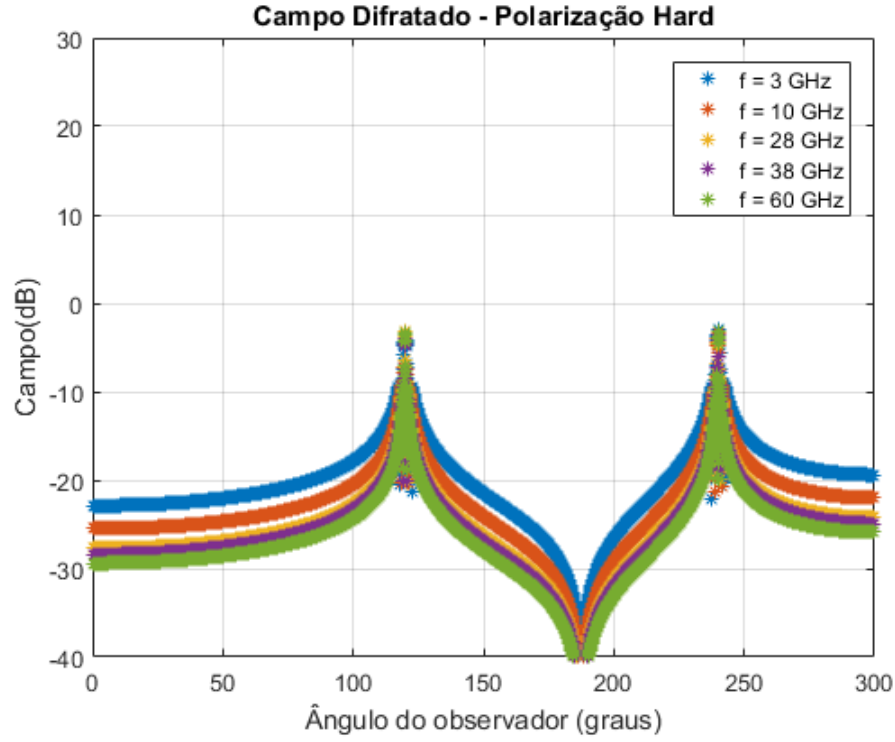


Figura 32 – Campos difratados com polarização *hard* durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($f = 3, 10, 28, 38$ e 60 GHz).

As **Figuras 31 e 32**, representam o caso onde a variação de parâmetro testada foi na frequência da onda plana incidente, sendo os valores da abertura angular da cunha condutora elétrica perfeita e da distância do observador adotadas iguais aos usados na análise das figuras 29 e 30, 60° e 100 metros respectivamente.

Inicialmente pode-se observar que as equações (4.1) e (4.2) mantêm-se válidas, ϕ_{FSR} e ϕ_{FSI} têm os mesmos valores para ambos casos testados. Isso está correto, pois todos casos estão com o ângulo de incidência aplicado igual a 60° . Outra igualdade observada em relação a análise anterior está na variação total que a magnitude dos campos difratados apresenta, indo também de -40 dB à 0 dB.

Nota-se que mesmo possuindo valores iguais de amplitude de campo nos ângulos referentes às fronteiras de sombra, esses irão distinguir-se nas regiões que essas fronteiras limitam. No caso estudado a onda plana incidente com frequência igual a 60 GHz mostrou ter um campo menor que a que incide com o mesmo parâmetro de valor 3 GHz, concluindo que as frequências maiores possuem de fato, para ambas polarizações, amplitudes menores nas regiões separadas pelas fronteiras de sombra.

As frequências $28, 38$ e 60 GHz, foram escolhidas por serem frequências que serão usadas na próxima geração de sistemas de telefonia móvel, chamados 5G.

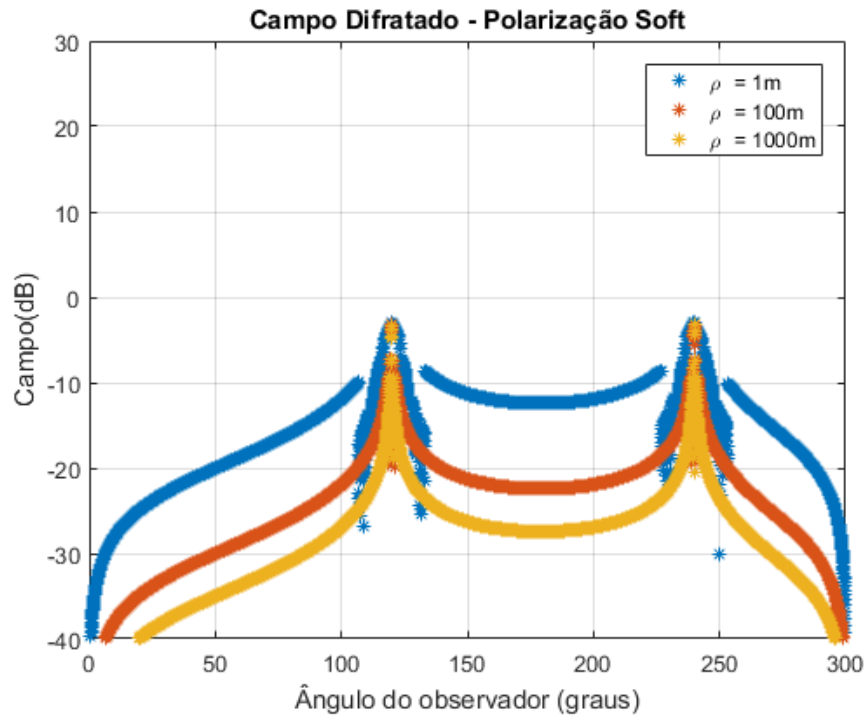


Figura 33 – Campos difratados com polarização *soft* durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($s = 1, 100, 1000\text{ m}$).

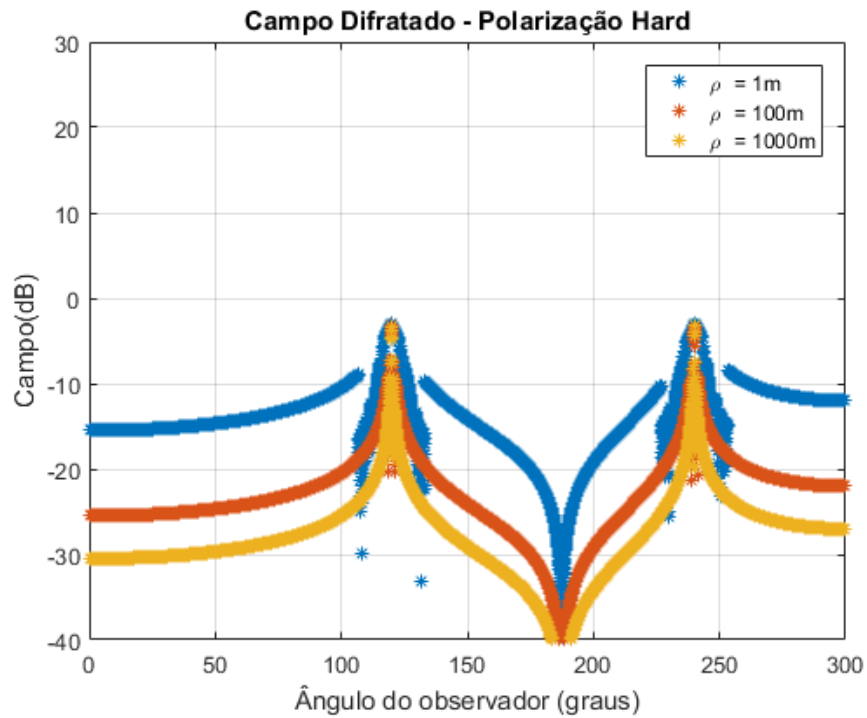


Figura 34 – Campos difratados com polarização *hard* durante o espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas ($s = 1, 100, 1000\text{ m}$).

Assim como a análise anterior validou os ângulos referentes às fronteiras de sombra através das equações (4.1) e (4.2), esse caso seguirá a mesma conclusão, onde ϕ_{FSR} e ϕ_{FSI} serão iguais para ambos casos testados.

Nessa apresentação gráfica a variável que sofreu variações foi a que representa a distância do observador, mantendo então as outras fixas. A abertura angular da cunha condutora elétrica perfeita e o ângulo incidência foram ambos escolhidos igual a 60° , e a frequência da onda igual a 10 GHz.

Para esse caso pode-se observar que a característica principal do campo difratado lido através da UTD, promovendo variações na distância do observador como dito anteriormente, localiza-se na magnitude do mesmo. O campo, à medida que essa distância cresce, assume valores cada vez menores em para sua amplitude. Essa afirmação é plausível e válida, uma vez que quanto mais distante estiver o observador mais enfraquecido estará o campo quando esse for analisado, de acordo com as leis fundamentais do eletromagnetismo.

4.2.2 Solução Analítica

A avaliação dos resultados obtidos através do método de análise já apresentado, a UTD, se deu através de compará-los com resultados já oferecidos pela literatura. Esses resultados puderam ser comparados de duas maneiras diferentes, uma através de autores que também utilizaram a UTD para analisar campos eletromagnéticos espalhados, e outra utilizando soluções analíticas já conhecidas para os problemas propostos, também atuantes sobre os campos espalhados.

A solução analítica que esse trabalho utilizou como base para a criação dos códigos foi fornecida por (HARRINGTON, 1961), porém seus equacionamentos não estão apresentados por completo nessa seção, sendo então amostrados apenas em suas formas finais.

Para o caso da cunha condutora elétrica perfeita o espalhamento da onda eletromagnética, a solução analítica para a polarização *soft* (campo elétrico) e para a polarização *hard* (campo magnético) são dadas por (HARRINGTON, 1961):

$$E = \frac{2\pi E_0}{\pi - \alpha} \sum_v i^v J_v(k\rho) \sin v(\phi_i - \alpha) \sin v(\phi - \alpha), \quad (4.3)$$

$$H = \frac{\pi H_0}{\pi - \alpha} \sum_v \epsilon_v i^v J_v(k\rho) \cos v(\phi_i - \alpha) \cos v(\phi - \alpha). \quad (4.4)$$

sendo α relacionado à abertura angular da cunha, ρ à distância do observador, ϕ_i e ϕ aos ângulos de incidência e de observação, e E_0 e H_0 às magnitudes dos campos incidentes, utilizados na implementação do problema com valor 1. Para a abertura angular da cunha, o valor de α é tomado como metade da real abertura da cunha nos procedimentos matemáticos, mas nos gráficos α indicará de fato essa abertura. Conhecido como número de Neuman, ϵ_v assume valor 1 quando $v = 0$ e 2 quando $v > 0$ (HARRINGTON, 1961).

O parâmetro J_v é chamado de função de Bessel e encontra-se de forma mais detalhada em (A.4). O índice de dessa função, é dado por (HARRINGTON, 1961):

$$v = \frac{m\pi}{2(\pi - \alpha)}, \quad (4.5)$$

para $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ para polarização *soft* e $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ para polarização *hard* (HARRINGTON, 1961).

Assim como feito na secção anterior, os resultados a seguir irão representar também uma onda plana incidindo sobre uma cunha condutora elétrica perfeita. O que irá diferenciar os resultados gráficos obtidos através do uso da solução analítica dos obtidos com a UTD serão os campos difratados, não exibidos nesta secção. As equações (4.3), (4.4) e (4.5) forneceram os modelamentos necessários para a criação do código de ambas polarizações, juntamente com a função de Bessel (J_v) já citada acima.

As **Figuras 35 e 36** representam o campo eletromagnético total observado a uma distância de um metro, com uma onda plana de 10 GHz, com ângulo de incidência de 60° sob uma cunha condutora elétrica perfeita de abertura angular de também 60° , através de sua solução analítica, para polarizações *soft* e *hard*.

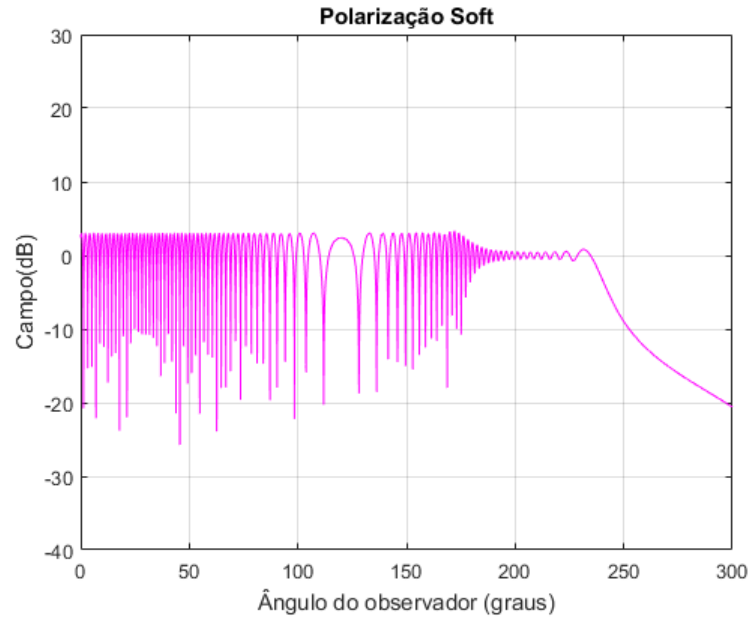


Figura 35 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da solução analítica para polarização *soft* ($\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 1 \text{ m}$).

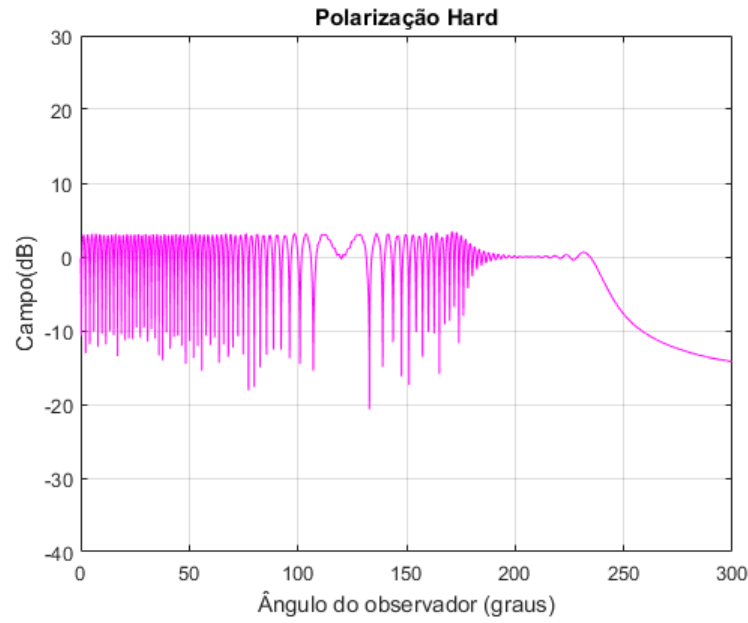


Figura 36 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da solução analítica para polarização *hard* ($\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 1 \text{ m}$).

As **Figuras 37 e 38** apresentam uma solução para um caso semelhante ao anterior, ou seja, tendo mesmos valores para os parâmetros utilizados. Uma única diferença está presente na variável referente à distância do observador, que para esse caso foi escolhida como 10 metros.

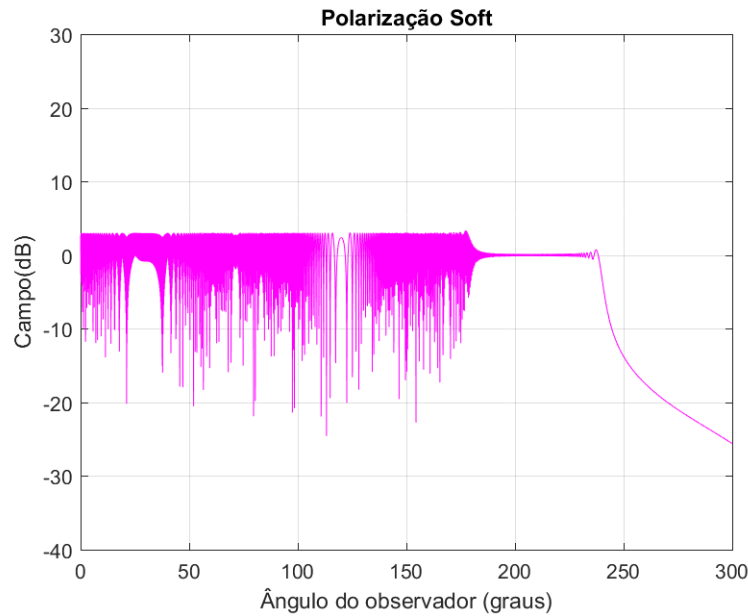


Figura 37 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da solução analítica para polarização *soft* ($\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 10 \text{ m}$).

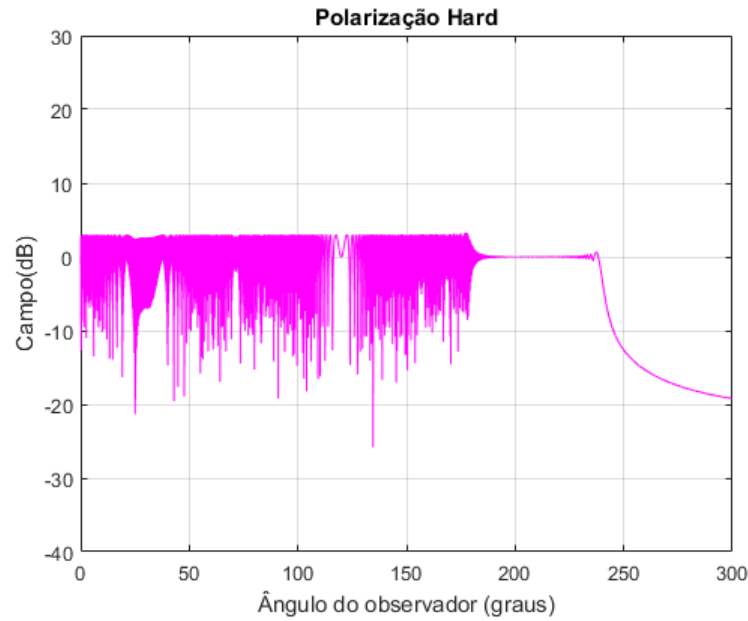


Figura 38 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da solução analítica para polarização *hard* ($\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 10 \text{ m}$).

Como mencionado no capítulo 3, as metodologias que foram apresentadas no mesmo não entregam resultados satisfatórios para distâncias pequenas adotadas para o observador. Isso também acontece quando a solução analítica é usada para o rastreamento do campo eletromagnético espalhado, onde não é entregue uma solução exata para o problema estudado. Esse fato ocorre pois ambos os métodos de solução tornam-se mais precisos para campos distantes. Ou seja, quando a relação entre a medida referente à distância do observador e o comprimento de onda escolhido para a onda é plausível com a teoria ($\rho \gg \lambda$).

Durante a aquisição dos gráficos referente a solução analítica foi perceptível a influência do número de termos (m) escolhidos para as somatórias encontradas nas equações (4.3) e (4.4). As **Figuras 39 e 40** apresentam três gráficos tendo como diferença o número de termos utilizados, nesse caso $m = 100, 1.000, 10.000$. Essas figuras informam que, quanto maior for a distância escolhida para o observador, maior terá que ser o valor de termos utilizados nas somatórias para que o resultado seja compatível com o esperado. Sendo assim, o código teve que ser mudado a medida que os testes envolviam essa variação desse parâmetro, tendo que ser utilizado $m = 10.000$ ao invés de $m = 1.000$ com a mudança de $\rho = 1 \text{ m}$ para $\rho = 10 \text{ m}$. Os valores das outras variáveis nesse teste seguiram os mesmos usados que geraram as **Figuras 37 e 38**.

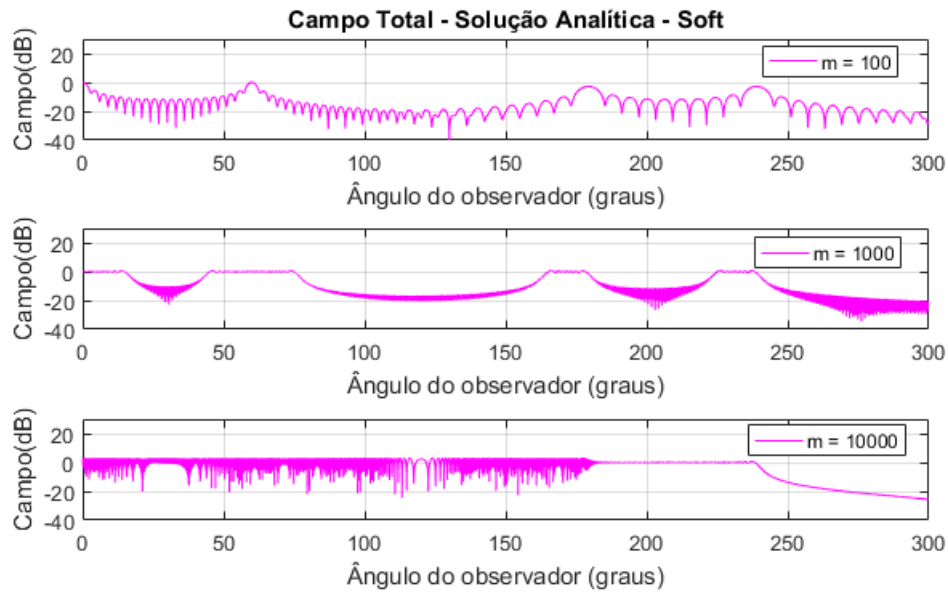


Figura 39 – Campo total espalhado por uma cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da solução analítica para polarização *soft* com 100, 1.000 e 10.000 termos do somatório da solução analítica ($\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 10 \text{ m}$).

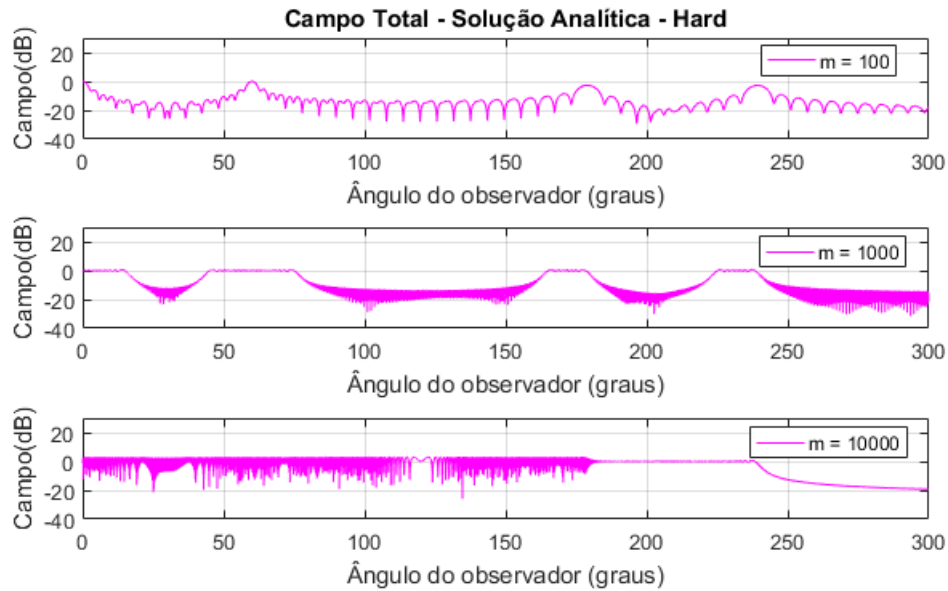


Figura 40 – Campo total espalhado por uma cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da solução analítica para polarização *hard* com 100, 1.000 e 10.000 termos do somatório da solução analítica ($\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 10 \text{ m}$).

4.2.3 Comparação das Soluções

Após compreender, ilustrar graficamente e analisar as respostas obtidas, esta secção apresentará os gráficos gerados por ambas metodologias de análise de campos espalhados que este trabalho abordou. Para uma melhor visualização da proximidade da resposta através da UTD com a resposta entregue pela solução analítica, os gráficos serão feitos sob o mesmo plano bidimensional, tornando mais clara a validação do código e da resposta entregue por ele para o sistema escolhido, no caso uma cunha condutora elétrica perfeita.

Através da UTD, pôde-se amostrar os campos totais e os campos difratados ao longo da circunferência, ao qual o observador variava sua posição de acordo com a implementação computacional feita para o problema. Porém a solução analítica utilizada gerou análises gráficas somente do campo eletromagnético total espalhado, não apresentando o campo difratado durante o fenômeno.

Sendo assim, os gráficos comparativos presentes nessa secção tem como foco avaliar e validar os campos totais observados durante o espalhamento eletromagnético através da UTD comparando-os com os observados através da solução analítica. Esta validação foi diagnosticada pelo do erro quadrático médio, que por definição é a média da diferença entre o valor do estimador e do parâmetro ao quadrado, ponderados pelo número de termos. A apresentação gráfica seguiu a mesma estrutura construída nos gráficos anteriores, ou seja, evidenciando o valor das variáveis independentes utilizadas nas formulações matemáticas.

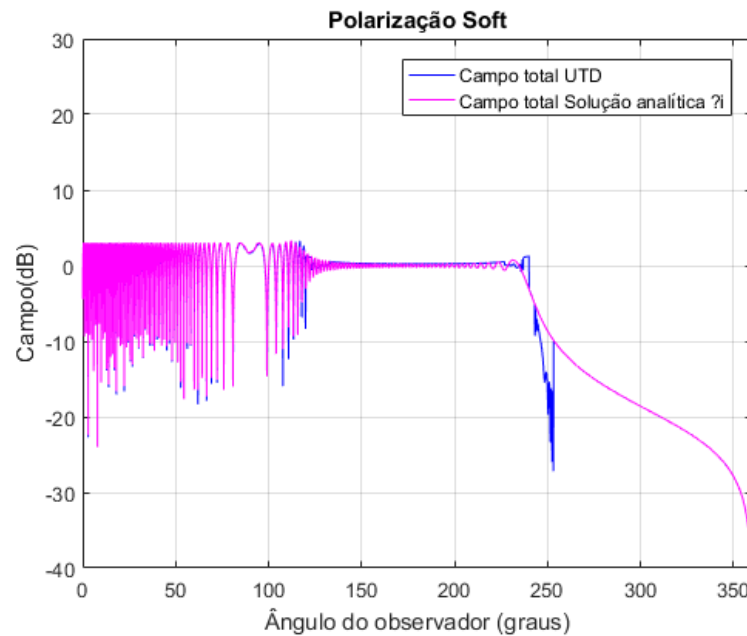


Figura 41 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da UTD e da solução analítica para polarização *soft* ($\alpha = 0^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 1 \text{ m}$).

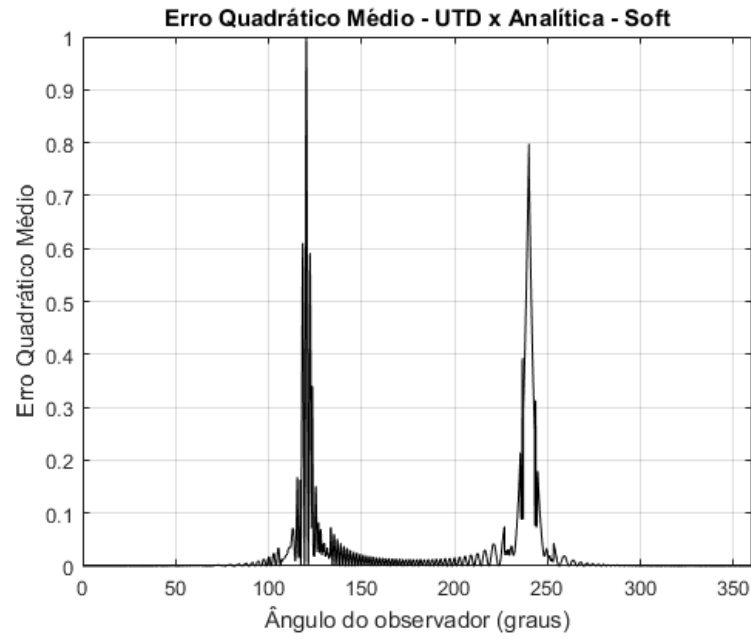


Figura 42 – Erro quadrático médio dos campos encontrados através da UTD e da solução analítica para o caso da cunha condutora elétrica perfeita com polarização *soft* ($\alpha = 0^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 1 \text{ m}$).

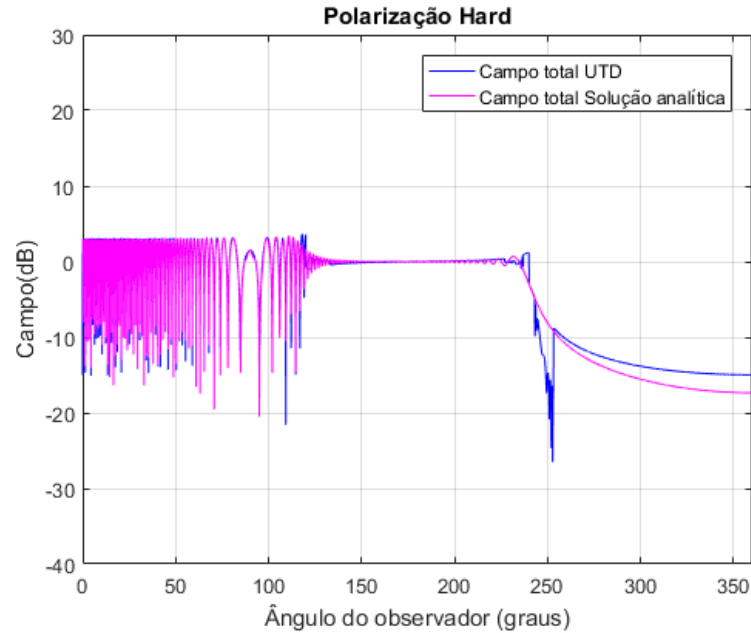


Figura 43 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da UTD e da solução analítica para polarização *hard* ($\alpha = 0^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 1 \text{ m}$).

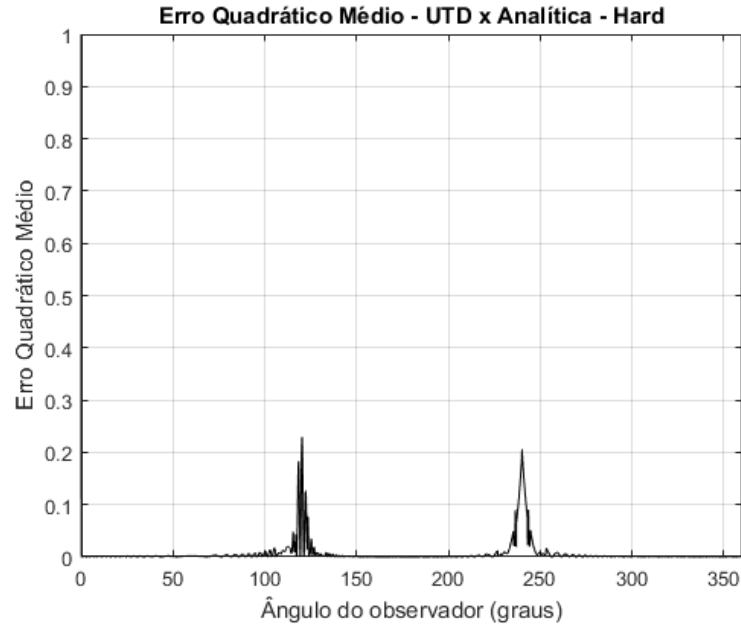


Figura 44 – Erro quadrático médio dos campos encontrados através da UTD e da solução analítica para o caso da cunha condutora elétrica perfeita com polarização *hard* ($\alpha = 0^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 1 \text{ m}$).

O primeiro caso que foi analisado, para fins de comparação entre as duas soluções de rastreamento de campos eletromagnéticos espalhados, apresenta-se nas **Figuras 41, 42, 43 e 44**. As duas primeiras, 41 e 42, são gráficos referente ao estudo do fenômeno com polarização *soft* e as duas ultimas, 43 e 44, com polarização *hard*. Para ambos os casos foram mostrados inicialmente, **Figuras 41 e 43**, os gráficos dos campos totais entregues pelas duas soluções que este trabalho usou, através do método de análise UTD e a da solução analítica. As **Figuras 42 e 44** referem-se ao erro quadrático médio encontrado entre as duas metodologias, fornecendo um ótimo indicador para validação dos códigos que foram implementados e testados computacionalmente.

Foi escolhida para a primeira comparação uma cunha com abertura angular zero, ou seja, metade de um plano condutor elétrico perfeito. O ângulo de incidência da onda plana foi de 60° , a frequência da mesma de 10 GHz e a distância adotada para o observador de 1 metro.

Esse primeiro teste, através das **Figuras 41 e 43**, mostrou que as duas ondas referentes ao campo eletromagnético total apresentaram comportamentos com alto grau de similaridade durante toda variação angular do observador. Esta afirmativa é comprovada nas **Figuras 42 e 44**, onde os erros quadráticos médios entre as duas soluções em ambas polarizações, *soft* e *hard*, possuem valores pontuais e localizados nos ângulos onde encontram-se as fronteiras de sombra. Vale lembrar que as equações (4.1) e (4.2) mantêm-se válidas, ou seja, ϕ_{FSR} e ϕ_{FSI} ainda dependem estritamente do ângulo de incidência (ϕ), para esse teste esses parâmetros são dados por 120° e 240° respectivamente.

Erros encontrados nas demais localidades (regiões de sombra) foram nulos, mos-

trando eficácia do programa desenvolvido para teste de campos eletromagnéticos espalhados através da UTD. Nesse teste o erro quadrático médio encontrado com a polarização *soft* foi superior ao encontrado pela polarização *hard*.

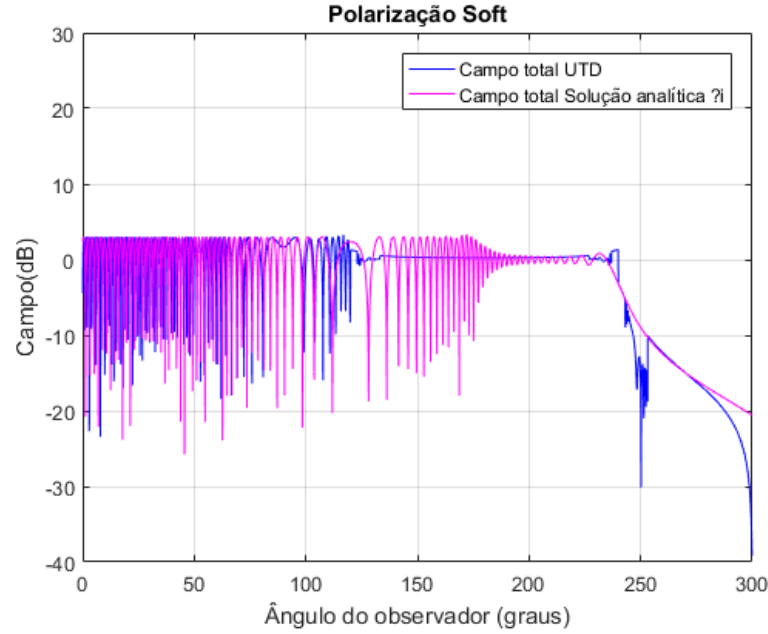


Figura 45 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da UTD e da solução analítica para polarização *soft* ($\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 1 \text{ m.}$)

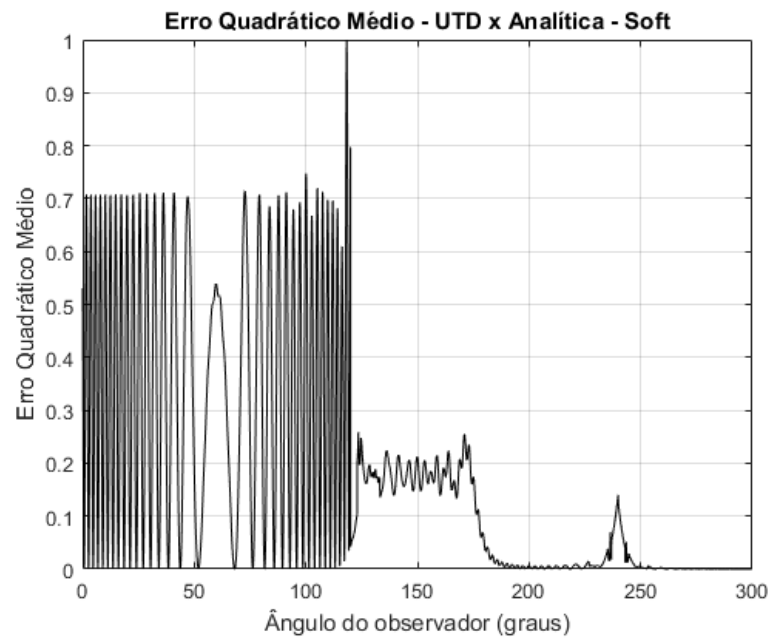


Figura 46 – Erro quadrático médio dos campos encontrados através da UTD e da solução analítica para o caso da cunha condutora elétrica perfeita com polarização *soft* ($\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 1 \text{ m.}$)

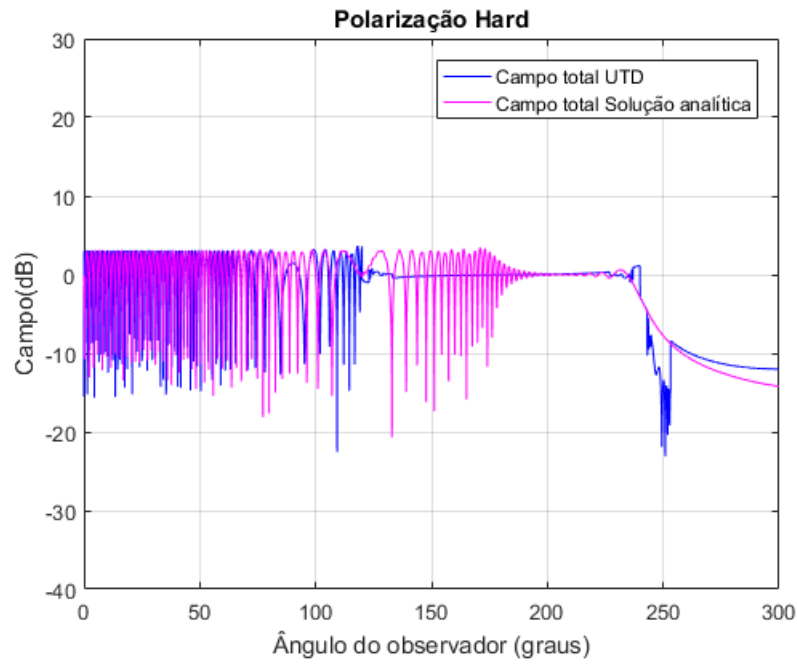


Figura 47 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da UTD e da solução analítica para polarização *hard* ($\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 1 \text{ m.}$)

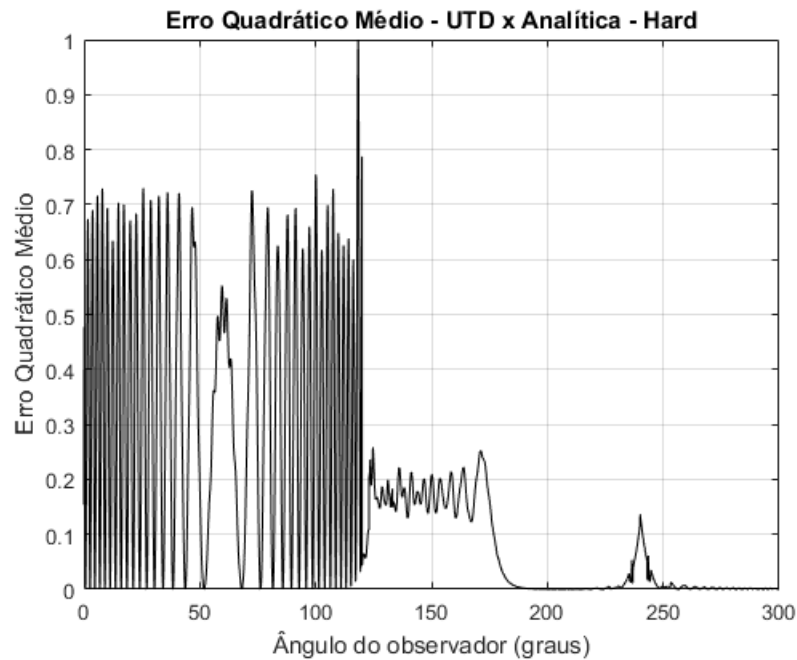


Figura 48 – Erro quadrático médio dos campos encontrados através da UTD e da solução analítica para o caso da cunha condutora elétrica perfeita com polarização *hard* ($\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 1 \text{ m.}$)

O segundo caso aplicado aos códigos implementados sofreu apenas uma variação em relação ao caso que foi comentado anteriormente, onde a abertura angular da cunha condutora elétrica perfeita agora vale 60° .

As **Figuras 45 e 47** mostram os campos totais entregues pela UTD e pela solução analítica, onde os mesmos encontram-se mais destoantes que o caso anterior. Nota-se por consequência que esse teste apresentou um erro quadrático médio maior, evidenciado nas **Figuras 46 e 48**.

Através das regiões apresentadas na **Figura 10** pode-se dizer que os métodos apresentaram uma maior proximidade nas regiões I e III, não havendo muita concordância na região II, limitada por FSR e FSI. Ao acompanhar os gráficos em dupla, ou seja, observar o gráfico dos campos juntamente com o do erro quadrático médio, nota-se onde estão presentes as fronteiras de sombra, 120° e 240° . Concluindo assim que solução analítica não foi eficaz durante a transição pela FSR da região I para a região II.

Esse fato pode ser explicado através da distância do observador, que como foi comentado ao final da secção (4.2.2) tem que ter um valor alto em relação ao comprimento de onda da onda incidente ($\rho \gg \lambda$) para que ambos os métodos de análise consigam entregar soluções aceitáveis.

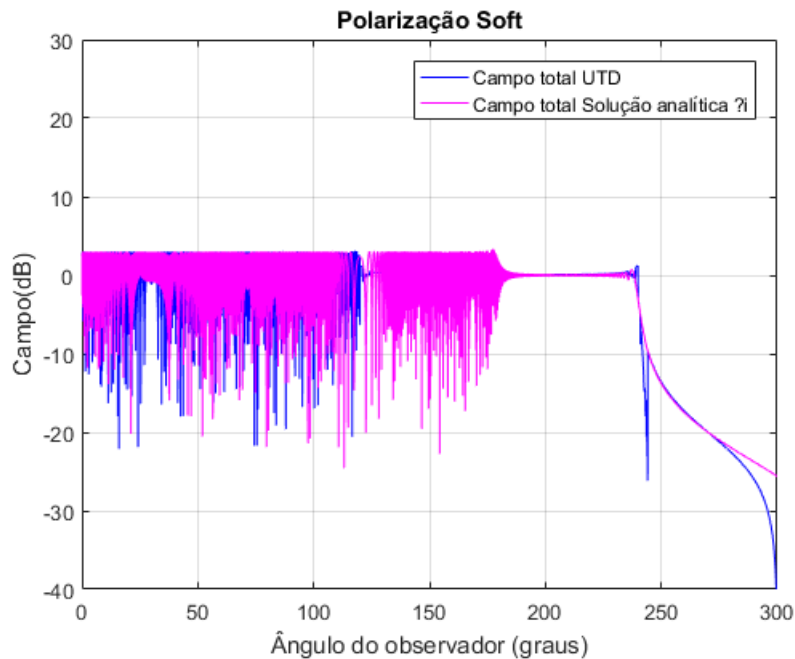


Figura 49 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da UTD e da solução analítica para polarização *soft* ($\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 10 \text{ m.}$)

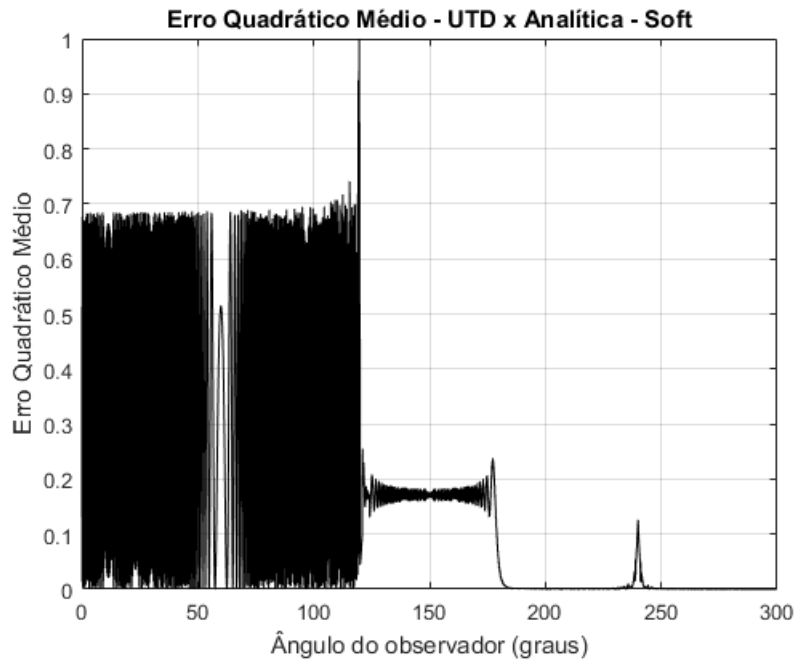


Figura 50 – Erro quadrático médio dos campos encontrados através da UTD e da solução analítica para o caso da cunha condutora elétrica perfeita com polarização *soft* ($\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 10 \text{ m.}$)

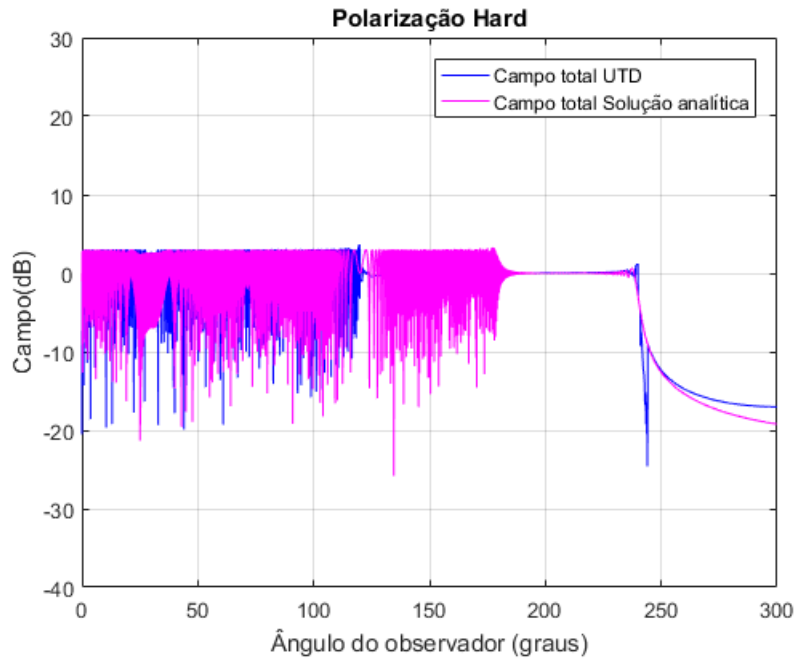


Figura 51 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da UTD e da solução analítica para polarização *hard* ($\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 10 \text{ m.}$)

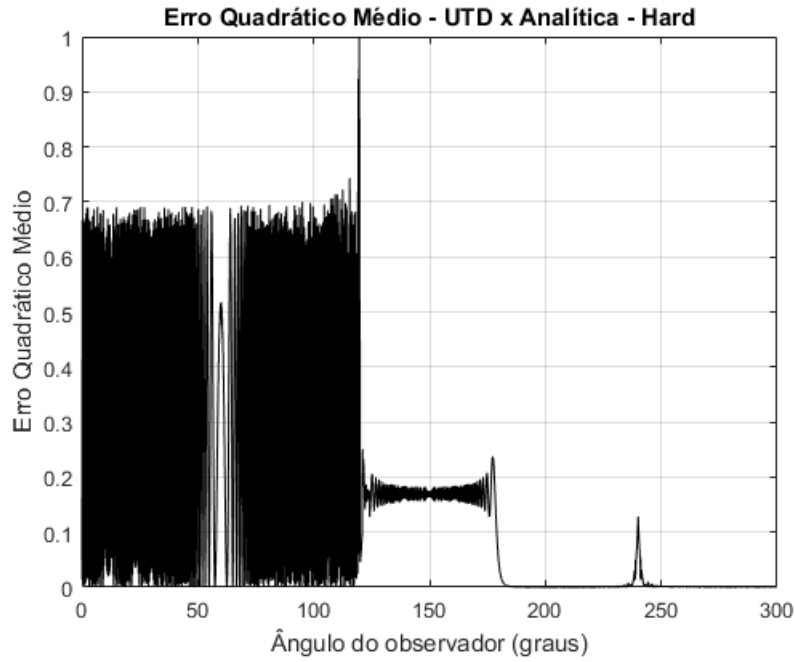


Figura 52 – Erro quadrático médio dos campos encontrados através da UTD e da solução analítica para o caso da cunha condutora elétrica perfeita com polarização *hard* ($\alpha = 60^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 10 \text{ m.}$)

O teste representado pelas **Figuras 49, 50, 51 e 52**, apresenta resultados para o caso onde a cunha condutora elétrica perfeita possui 60° , assim como anteriormente. Esse mesmo valor também foi atribuído ao ângulo de incidência onda eletromagnética, tendo a mesma 10 GHz de frequência. A distância adotada para o observador do fenômeno foi de 10 metros, sendo que para entregar um resultado satisfatório com esse valor para ρ , esse teste utilizou 10.000 termos no código referente ao somatório presente na solução analítica. A escolha desse valor foi analisada e comentada ao final da secção anterior (4.2.2).

As **Figuras 49 e 51**, estão apresentando as soluções dos campos totais entregues por ambas metodologias, UTD e solução analítica. Nota-se, observando apenas esses gráficos, que nas regiões de sombra I e III a compatibilidade entre as duas técnicas é maior que na região II, onde a solução analítica continuou apresentando uma oscilação.

Os gráficos presentes nas **Figuras 50 e 52** referem-se aos erros quadráticos médios encontrados para cada polarização adotada no fenômeno, *soft* e *hard*. Em ambos os casos o erro encontrado para a região I apresenta um valor alto de 70% em toda a região, uma explicação para isso é o fato dos métodos assintóticos (métodos aproximados) como a UTD terem dificuldade de convergência quando o campo espalhado oscila muito. Nas regiões onde o campo eletromagnético rastreado oscila suavemente, os métodos assintóticos apresentam resultados mais coerentes, como nas regiões de sombra II e III. Dessa forma pode-se ver que nessas duas regiões os erros são respectivamente de 20% e 0%.

Vale salientar que as fronteiras de sombra FSR e FSI permanecem possuindo os mesmos valores angulares que no teste feito anteriormente, onde as mesmas valiam 120° e

240°, já que o mesmo ângulo de incidência foi usado para esse caso.

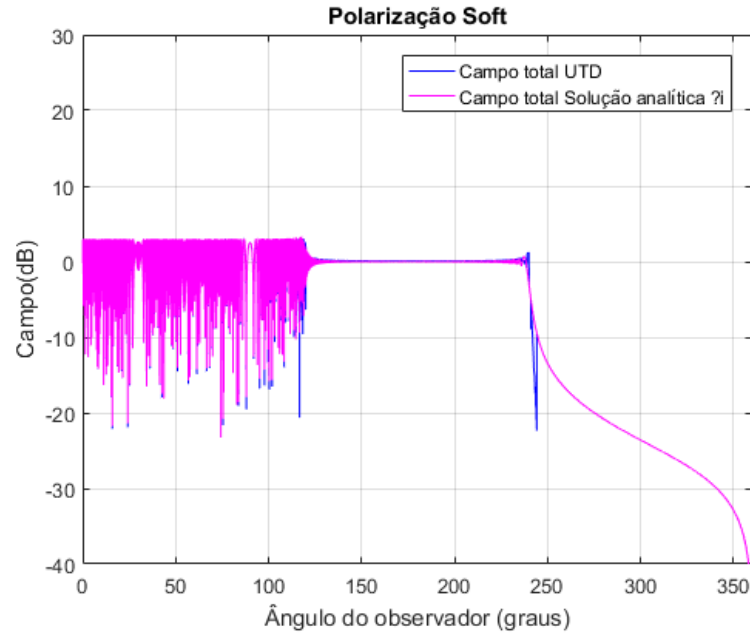


Figura 53 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da UTD e da solução analítica para polarização *soft* ($\alpha = 0^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 10 \text{ m.}$)

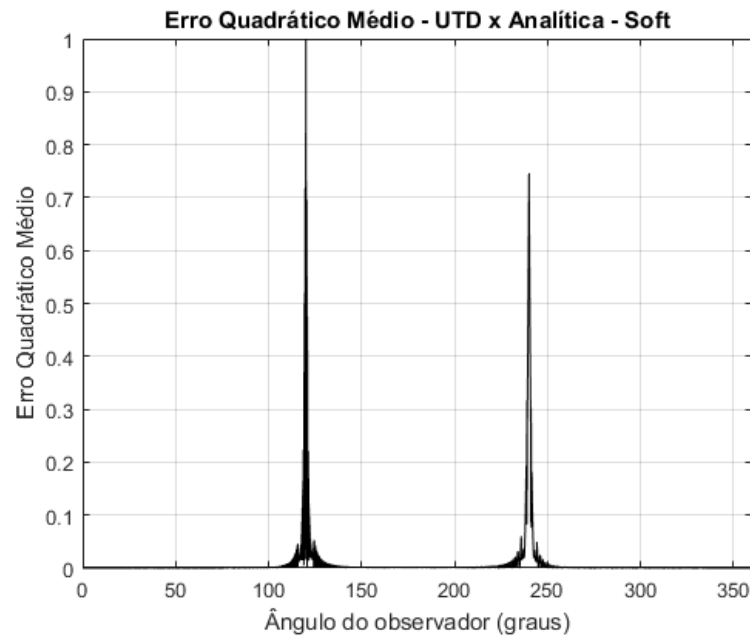


Figura 54 – Erro quadrático médio dos campos encontrados através da UTD e da solução analítica para o caso da cunha condutora elétrica perfeita com polarização *soft* ($\alpha = 0^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 10 \text{ m.}$)

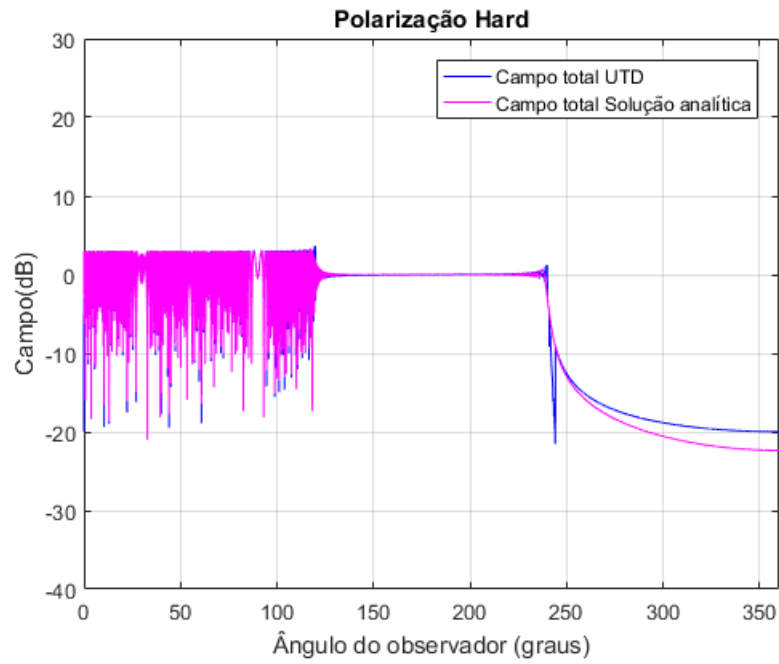


Figura 55 – Campo total no espalhamento eletromagnético sob um cunha condutora elétrica perfeita de faces planas através da UTD e da solução analítica para polarização *hard* ($\alpha = 0^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 10 \text{ m.}$)

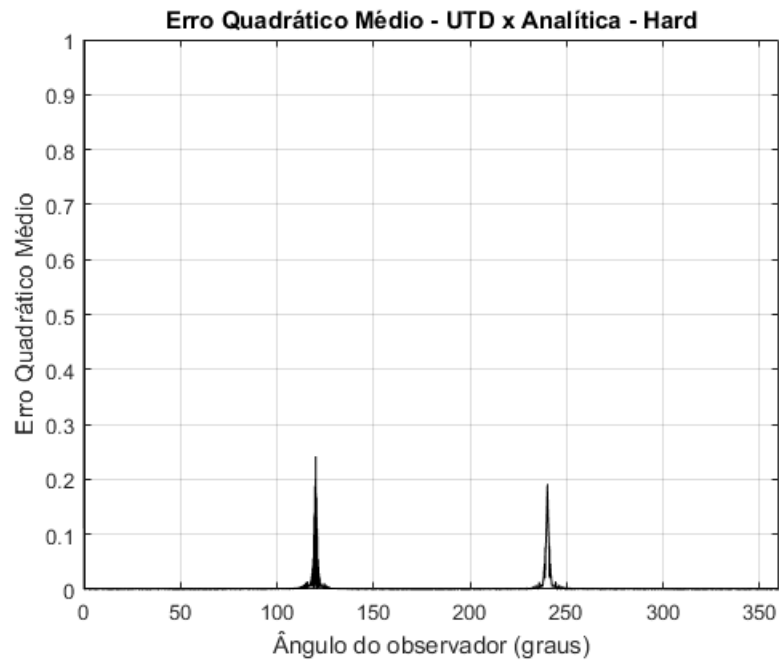


Figura 56 – Erro quadrático médio dos campos encontrados através da UTD e da solução analítica para o caso da cunha condutora elétrica perfeita com polarização *hard* ($\alpha = 0^\circ$; $\phi_i = 60^\circ$; $f = 10 \text{ GHz}$; $\rho = 10 \text{ m.}$)

O teste referente às **Figuras 53, 54, 55 e 56** usou uma abertura angular para a cunha condutora de 0° , 60° como ângulo de incidência da onda plana, uma frequência de 10 GHz e um observador posicionado à 10 metros do ponto da superfície cônica onde a difração ocorre.

Observando inicialmente as **Figuras 53 e 55**, nota-se uma ótima aproximação das duas metodologias, UTD e solução analítica, possuindo apenas uma pequena distinção ao final da região III para polarização *hard* de alguns poucos decibéis. A validação dessa afirmação é encontrada através do erro quadrático médio, exposto nas **Figuras 54 e 56** para as polarizações *soft* e *hard*.

Essas figuras apresentaram erros muito baixos e especificamente nas localizações das fronteiras de sombra FSR e FSI. Seus valores, modelados pelas equações (4.1) e (4.2), são de 120° e 240° respectivamente. Com a polarização *soft* os resultados foram menos próximos nas fronteiras quando comparados com a polarização *hard*, mesmo assim observa-se que para ambas o erro foi nulo durante todas as regiões (I, II e III).

4.3 Conclusões Parciais

O capítulo 4 foi responsável por apresentar os resultados obtidos através da aplicação do método de análise de campos eletromagnéticos espalhados que esse trabalho abordou, a UTD. Essa técnica, detalhada no capítulo 3, apresentou resultados suficientes para validar a eficiência dos códigos implementados computacionalmente.

Essa validação se deu por gráficos comparativos, inicialmente em relação à resultados já apresentados com a UTD para casos semelhantes por referências que esse trabalho utilizou e em um segundo momento, ao qual o presente capítulo foca-se, em relação à soluções analíticas também já conhecidas para os mesmos casos.

A seção (4.2.1) apresentou os resultados para diversos testes através da UTD, onde partindo de uma superfície cônica inicial os parâmetros (ou variáveis) foram sendo modificadas e observadas. Ao final dessa seção estão alguns gráficos já apresentados na mesma, porém plotados em um mesmo espaço bidimensional, auxiliando a análise do leitor.

Nesse capítulo também estão presentes as fórmulas matemáticas usadas, como já citado, para validações dos casos estudados. A solução analítica para o espalhamento eletromagnético sob uma cunha condutora elétrica perfeita está apresentada na seção (4.2.2), onde as equações (4.3) e (4.4) entregam os campos elétrico (polarização *soft*) e magnético (polarização *hard*) quando esse fenômeno ocorre.

Além dos equacionamentos necessários, foram explicitados problemas e entraves encontrados durante a implementação e execução dos códigos referentes a essa parte dos testes, como por exemplo o número de termos utilizados computacionalmente para as somatórias das equações (4.3) e (4.4) da solução analítica.

A secção (4.2.3) se dedicou a fazer a comparação entre as metodologias de análise de campo utilizadas. Nela estão presentes as respostas de ambos os métodos sob um mesmo espaço bidimensional, sendo evidenciado nos textos que os acompanham os detalhes presentes nas ilustrações, como regiões de sombra e suas fronteiras. Por fim o erro quadrático médio referente a cada teste concluiu a apresentação gráfica, pontuando e validando os mesmos.

Uma diferença entre os gráficos de cada método está no fato da solução analítica não estar apresentando os campos difratados durante o espalhamento eletromagnético como a UTD. Esse trabalho utilizou apenas os campos totais para fins de comparação de resultados, os campos difratados foram apresentados durante a UTD para uma melhor compreensão do comportamento da técnica durante o fenômeno.

5 Conclusões e Trabalhos Futuros

Esse trabalho baseou-se no estudo dos campos eletromagnéticos quando esses sofrem um efeito chamado espalhamento eletromagnético, ocorrido sob uma cunha condutora elétrica perfeita. O fenômeno foi entendido, implementado e observado promovendo variações na superfície inicialmente proposta para fins de estudo. A análise foi possibilitada pela técnica assintótica UTD, baseada em traçados de raios, que posteriormente foi validada através da solução analítica para os mesmos casos, ou seja, mesmos parâmetros (variáveis independentes). Os códigos de ambos os métodos foram desenvolvidos e compilados através do software Matlab.

O capítulo 2, referente à revisão bibliográfica, apresentou os conceitos que embasam todo o estudo das ondas eletromagnéticas. Nele estão contidas as equações de Maxwell, condições de fronteiras sob pontos de vista elétrico e magnético, parâmetros usados na representação dos campos quando no domínio da frequência e, como consequência desses estudos, a equação da onda eletromagnética.

O espalhamento eletromagnético pôde ser analisado com mais precisão a medida que métodos numéricos como a UTD começaram a ser desenvolvidos e modificados. Melhorias em seus coeficientes assim como na amplitude de suas aplicações foram intensificadas pelo aumento de abordagens a respeito de transmissão e recepção de sinais (ondas eletromagnéticas). Esse trabalho utilizou os coeficientes apresentados pioneiramente por Kouyoumjian e Pathak em (KOUYOUMJIAN; PATHAK, 1974), uma vez que as superfícies analisadas foram escolhidas como condutores elétricos perfeitos (sem perdas). Ou seja, para esse caso a UTD clássica foi suficiente para entregar bons resultados. Porém, tornando o caso mais específico, com adição de perdas e difrações sucessivas, os coeficientes sofrem alterações, como apresentado em (LUEBBERS, 1989), (SCHETTINO; MOREIRA; REGO, 2010) e (GUEVARA; NAVARRO, 2011). O capítulo 3 além apresentar e detalhar as formulações usadas nas implementações computacionais, mostrou como, desde o surgimento da GO, passando pela GTD em 1962 com Joseph B. Keller, a UTD foi motivada a ser desenvolvida.

O objetivo central dos testes apresentados no capítulo 4, assim como do presente trabalho, foi de comparar os resultados obtidos através da UTD com os obtidos através da solução analítica para casos semelhantes. Inicialmente foram analisados os campos entregues separadamente através de cada metodologia para que, por fim, pudessem ser comparados em um mesmo espaço bidimensional que, juntamente com os respectivos erros quadráticos médios, foram ferramentas suficientes para validação dos testes. A abertura angular da cunha condutora, o ângulo de incidência, a frequência da onda incidente e a distância adotada para o observador do fenômeno foram os parâmetros que sofreram modificações afim de mostrar a influência particular de cada variável durante o processo.

Uma vez que a solução analítica só admite campos incidentes de ondas planas, ou

seja, uma única direção de incidência (único ângulo de incidência) para toda a frente de onda, a aplicação das metodologias de análise citadas anteriormente foram usadas apenas para ondas com esse tipo de estrutura.

Outra particularidade dos testes, por consequência dos próprios métodos, é que foram feitos apenas para campos distantes, pois ambas soluções, UTD e solução analítica, somente valem para esse tipo de campo, para campos próximos as soluções entregues não são exatas. Sendo assim, à medida que a distância do observador (ρ) diminui, os resultados tendem a discordar, pois ambos tendem a ficar errados, porém a medida que essa distância aumenta a solução de cada método tende a convergir uma para a outra. Vale lembrar que em teoria, a região de campo distante é aquela onde o produto $k.\rho$ tende para infinito, ou em outras palavras, quando $\rho \gg \lambda$.

Um problema encontrado durante a implementação do código foi o fato da solução analítica não estar entregando resultados confiáveis a medida que ρ aumentava, contradizendo a teoria estudada e citada acima. Esse fato foi contornado modificando o número de termos utilizados referentes os somatórios das equações (4.3) e (4.4), onde os gráficos entregaram resultados muito mais próximos do esperado a medida que assumiram valores maiores. Foram utilizados 10.000 termos para essa variável, escolhido devido a convergência dos resultados para valores maiores que esse. Após essa modificação pôde-se constatar que os gráficos em que os campos analisados pela solução analítica, ditos distantes ($\rho = 10m$), começaram a ficar cada vez mais próximos dos encontrados através da UTD, como esperado.

É importante salientar que a solução analítica utilizada refere-se unicamente ao campo total rastreado após o espalhamento eletromagnético da onda plana sob a cunha, ao contrário da UTD que como visto entrega tanto com campo total quanto o difratado.

Sendo assim, com base no que foi apresentado, pode-se dizer que o método assintótico UTD, utilizado na análise de campos eletromagnéticos espalhados, apresentou boa precisão, exatidão e efetividade nos testes propostos. Mesmo sendo um método assintótico, ou seja, aproximado, essa técnica apresentou erros baixos quando comparados com a solução analítica exata. Durante os testes, as respostas obtidas para os campos com polarização *soft* apresentaram erros maiores dos que para polarização *hard*.

5.1 Trabalhos Futuros

Em relação a dar prosseguimento ao trabalho estudado, desenvolvido e apresentado, estão citadas abaixo algumas propostas para trabalhos futuros:

- Implementar a GO e a UTD aplicadas para superfícies curvas, como por exemplo, parábolas, hipérboles e elipses. Esses resultados obtidos permitem o cálculo de campos espalhados por antenas refletoras clássicas, como a antena parabólica.

- Implementar a GO e a UTD para superfícies com perdas como, por exemplo, superfícies rugosas, ao invés de superfícies totalmente lisas, e superfícies cujos materiais não sejam condutores elétricos perfeitos. Isso possibilita determinar o campo espalhado por um prédio em um ambiente urbano.

Referências

- ALVES, D. et al. Aprendizagem de eletromagnetismo via programação e computação simbólica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 24, n. 2, p. 201, 2002. 69
- BALANIS, C. Antenna theory: Analysis and design 3rd edition john wiley sons. *Inc., Publication*, 2005. 17
- BALANIS, C. A. *Advanced engineering electromagnetics*. [S.l.]: John Wiley Sons, 2012. 5, 72, 75
- BARROS, R. d.; MELONI, L. G. P. O processo de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral por meio de metáforas e recursos multimídia. *XXXIV COBENGE, Passo Fundo, Anais*, 2006. 69
- BULIRSCH, R. Numerical calculation of the sine, cosine and fresnel integrals. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 9, n. 5, p. 380–385, 1967. 73
- BUTKOV, E. *Física matemática*. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 1988. 70, 71
- CHAMBERLIN, K.; LUEBBERS, R. An evaluation of longley-rice and gtd propagation models. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, IEEE, v. 30, n. 6, p. 1093–1098, 1982. 20
- GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica, 3 Edição*. [S.l.]: Editora Pearson Education, 2011. 5, 9, 10, 12, 13, 14
- GUERRA, M. Teoremas de green e stokes. 69
- GUEVARA, D.; NAVARRO, A. Estimacion de parametros de canal en entornos 3d [tesis]. *Medellin, Colombia: Universidad Pontificia Bolivariana*, 2011. 23, 62
- HARRINGTON, R. F. Time-harmonic electromagnetic fields. McGraw-Hill, 1961. 45, 46, 72
- HAYT, W. H.; BUCK, J. A. *Eletromagnetismo*. [S.l.]: Bookman Editora, 2013. 5
- HOLM, P. D. Utd-diffraction coefficients for higher order wedge diffracted fields. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, IEEE, v. 44, n. 6, p. 879–888, 1996. 22
- KOUYOUMJIAN, R. G. Asymptotic high-frequency methods. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 53, n. 8, p. 864–876, 1965. 8, 16
- KOUYOUMJIAN, R. G.; PATHAK, P. H. A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 62, n. 11, p. 1448–1461, 1974. 23, 25, 26, 62
- LOPEZ, T.; CAMILO, D. Métodos assintóticos para caracterização do canal de radio em ambientes externos. 2015. 8, 1, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

- LUEBBERS, R. J. A heuristic utd slope diffraction coefficient for rough lossy wedges. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, IEEE, v. 37, n. 2, p. 206–211, 1989. 23, 62
- MCNAMARA, D. The uniform geometrical theory of diffraction. *Artech House, London*, 1990. 2, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 41, 75
- MICHAELI, A. A new asymptotic high-frequency analysis of electromagnetic scattering by a pair of parallel wedges: Closed form results. *Radio science*, Wiley Online Library, v. 20, n. 6, p. 1537–1548, 1985. 23
- MICHAELI, A. A uniform gtd solution for the far-field scattering by polygonal cylinders and strips. *IEEE transactions on antennas and propagation*, IEEE, v. 35, n. 8, p. 983–986, 1987. 23
- MILLIGAN, T. A. *Modern antenna design*. [S.l.]: John Wiley Sons, 2005. 17
- NASCIMENTO, R. G. O teorema da divergência e aplicações. 2012. 68
- OZGUN, O. New software tool (go+ utd) for visualization of wave propagation [testing ourselves]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, IEEE, v. 58, n. 3, p. 91–103, 2016. 16
- RAPPAPORT, T. *Wireless communications: principles and practice*. [S.l.]: Prentice Hall PTR New Jersey, 2001. v. 2. 20
- RIBEIRO, J. A. J. *Propagação das ondas eletromagnéticas: princípios e aplicações*. [S.l.]: Érica, 2004. 4, 5, 13, 14
- RIGHETTO, A.; FERRAUDO, A. S. Cálculo diferencial e integral. In: IBEC. [S.l.], 1981. 68
- SADIKU, M. N. *Elements of electromagnetics*. [S.l.]: Oxford university press, 2014. 8, 6, 7, 9, 10, 11, 12
- SANTOS, M. D. O teorema de stokes. 2010. 70
- SCHETTINO, D. N. Técnicas assintóticas para a predição de cobertura radio elétrica. 2002. 8, 1, 2, 16, 18, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28
- SCHETTINO, D. N.; MOREIRA, F. J.; REGO, C. Heuristic utd coefficients for electromagnetic scattering by lossy conducting wedges. *Microwave and Optical Technology Letters*, Wiley Online Library, v. 52, n. 12, p. 2657–2662, 2010. 23, 62
- SCHNEIDER, M.; LUEBBERS, R. A general, uniform double wedge diffraction coefficient. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, IEEE, v. 39, n. 1, p. 8–14, 1991. 23
- SEBOLD, E. Métodos de elementos finitos de nédélec para as equações de maxwell harmônicas no tempo. 2011. 8, 12
- STEWART, J. Cálculo, vol. 2, 7a edição. *Pioneira Thomson Learning*, 2006. 11, 68, 69
- TIBERIO, R.; KOUYOUMJIAN, R. An analysis of diffraction at edges illuminated by transition region fields. *radio Science*, American Geophysical Union (AGU), v. 17, n. 02, p. 323–336, 1982. 23

TIBERIO, R.; KOUYOUJIAN, R. Calculation of the high-frequency diffraction by two nearby edges illuminated at grazing incidence. *IEEE transactions on antennas and propagation*, IEEE, v. 32, n. 11, p. 1186–1196, 1984. 23

TIBERIO, R. et al. High-frequency electromagnetic scattering of plane waves from double wedges. *IEEE transactions on antennas and propagation*, IEEE, v. 37, n. 9, p. 1172–1180, 1989. 23

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. *Física para cientistas e engenheiros. Vol. 2: eletricidade e magnetismo, óptica*. [S.l.]: Grupo Gen LTC, 2000. 8, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15

VOTTO, L. F. M.; AMBROSIO, L. A. Projeto de algoritmo para cálculo de campos eletromagnéticos na teoria generalizada de lorenz-mie. 70

WATSON, G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions*. [S.l.]: Cambridge university press, 1995. 71

A Anexos

A.1 Teorema do Divergente

O teorema do Divergente ou conhecido como Teorema de Gauss estabelece uma relação entre uma integral de superfície e uma integral de volume sobre a região que essa superfície limita. Supondo um campo vetorial $\vec{F}$ qualquer presente na região $R \subset \mathbb{R}^3$ com ∂R orientado para fora da região R . Podemos dizer que matematicamente esse teorema diz, que a integral do divergente de um campo vetorial $\vec{F}$ sobre uma região é igual a integral de $\vec{F}$ sobre a fronteira dessa mesma região, ou seja (STEWART, 2006):

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{F} \cdot dV. \quad (\text{A.1})$$

O operador que proporciona esse teorema é o divergente, uma função de três variáveis dada por (NASCIMENTO, 2012):

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad (\text{A.2})$$

sendo F_x, F_y, F_z as componentes escalares presentes nas direções x, y, z do campo $\vec{F}$. Quando o campo $\vec{F}$ representa um campo elétrico, a divergência estará associada à existência de densidades de carga.

Uma forma de representar o divergente é através do operador chamado *del* ($\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$) (RIGHETTO; FERRAUDO, 1981), essa nova forma simbólica de representação é escrita como um produto escalar desse operador com a função do campo vetorial (STEWART, 2006).

$$\text{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}. \quad (\text{A.3})$$

Sendo assim, a forma matemática do teorema do divergente pode ser reescrita da forma:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \cdot dV. \quad (\text{A.4})$$

A.2 Teorema de Stokes

O teorema de Stokes representa uma relação entre uma integral de superfície com uma integral em torno da curva dada pela fronteira dessa superfície. Esse teorema é visto

como uma generalização do Teorema de Green (GUERRA,), que relaciona uma integral dupla sobre uma região plana com uma integral de linha em torno da curva limite dessa região.

A **Figura 57** mostra uma superfície qualquer S com sua fronteira delimitada por uma curva C com orientação, tomada por convenção, positiva. Terá essa orientação se a superfície estiver sempre a esquerda quando percorremos a curva com a cabeça na direção e sentido do vetor normal $\vec{n}$ (STEWART, 2006).

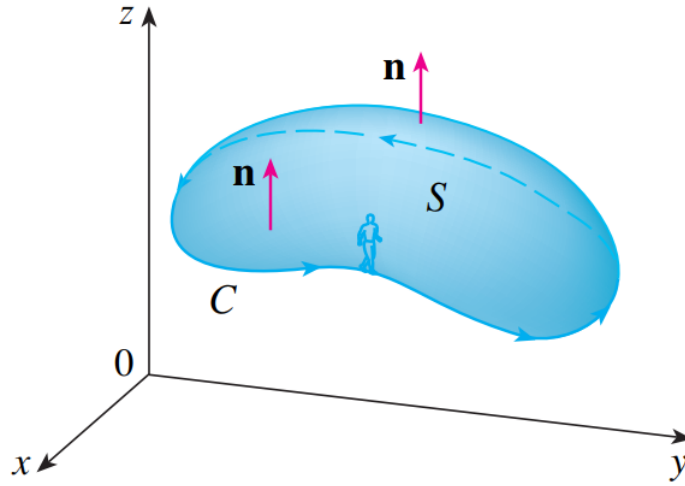


Figura 57 – Superfície orientada com fronteira formada por uma curva C fechada, simples com orientação positiva (STEWART, 2006).

O Teorema de Stokes permite relacionar a integral de linha de um campo $\vec{F}$ qualquer ao longo de C com o fluxo do rotacional de $\vec{F}$ ao longo de S (BARROS; MELONI, 2006). Matematicamente:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}, \quad (\text{A.5})$$

Assim como no Teorema do Divergente, o operador gradiente oferece uma representação simbólica para o rotacional, nesse caso é escrita como um produto vetorial desse operador com a função do campo vetorial, ou seja:

$$\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}. \quad (\text{A.6})$$

considerando o produto vetorial de ∇ pelo campo vetorial $\vec{F}$, a operação do rotacional fica (ALVES et al., 2002):

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}. \quad (\text{A.7})$$

uma vez que:

$$(\nabla \times \vec{F}) = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Sendo assim o teorema pode ser reescrito sendo (SANTOS, 2010):

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}. \quad (\text{A.9})$$

A.3 Divergente do Rotacional

Através dos operadores divergente e rotacional é possível obter um resultado particular muito usado em soluções de problemas práticos.

$$\text{div}(\text{rot}\vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z \partial y}. \quad (\text{A.12})$$

Utilizando o Teorema de Clairaut, que diz que:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}, \quad (\text{A.13})$$

na equação (6.11) conclui-se que, o divergente do rotacional de qualquer campo é nulo (VOTTO; AMBROSIO,):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0. \quad (\text{A.14})$$

A.4 Função de Bessel

A análise sobre a função de Bessel se dará *a priori* pela função dita, função geratriz das funções de Bessel, que matematicamente é dada por (BUTKOV, 1988):

$$g(x, t) = e^{(\frac{x}{2})(t - \frac{1}{t})}. \quad (\text{A.15})$$

Para achar a expressão geral da função de Bessel de primeiro tipo ($J_m(x)$), expande-se a função em uma série de Laurent, ou seja (BUTKOV, 1988):

$$g(x, t) = e^{(\frac{x}{2})(t - \frac{1}{t})} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} J_v(x) t^v. \quad (\text{A.16})$$

onde v é a ordem da função.

Comparando equações geradas pelo fato de $e^x = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{v!}$, chega-se ao resultado da expressão geral das funções de Bessel (WATSON, 1995):

$$J_v(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(n+s)!s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2s}. \quad (\text{A.17})$$

A **Figura 58** foi gerada através do software Matlab, foi utilizada a função **besselj**, já oferecida pelo software. Aqui estão representadas as funções de Bessel para os valores de $v = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

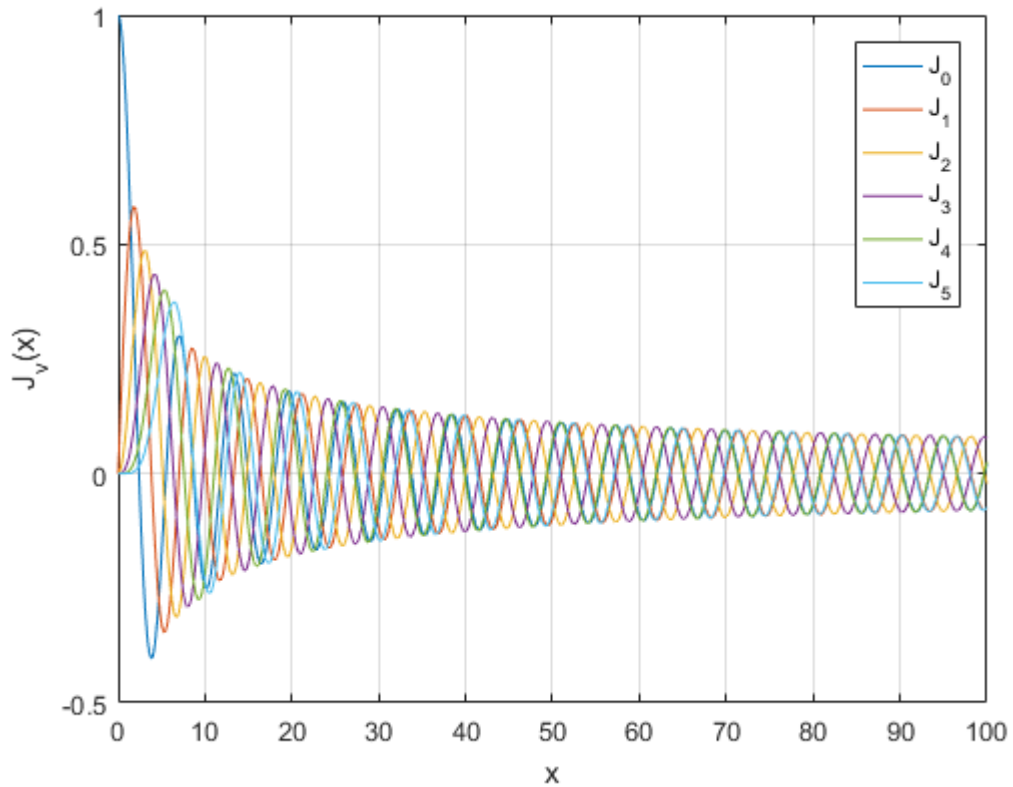


Figura 58 – Funções de Bessel de primeiro tipo.

Segue abaixo o código para dar uma maior agilidade ao leitor.


```

syms z

figure('Name','Bessel','NumberTitle','off');
fplot (besselj (0: 4, z));
xlim([0 100]);
ylim([-0.5 1]);
grid on;
legend ( 'J_0' , 'J_1' , 'J_2' , 'J_3' , 'J_4' , 'J_5' );
xlabel('x');
ylabel('J_{v}(x)');

```

Um outra opção é utilizar uma interpolação dos valores fornecidos por (BALANIS, 2012) para J_0 e J_1 e com seus respectivos valores de x .

Este trabalho usou os valores de v , ou seja, ordens referentes ao formulamento oferecido por (HARRINGTON, 1961) para a solução analítica para o problema da cunha condutora, analisado no capítulo 4. As ordens foram definidas por ($v = \frac{m\pi}{2(\pi-\alpha)}$), sendo usado $m = 1, 2, 3, 4, 5$ para polarização *soft* e $m = 0, 1, 2, 3, 4$ para polarização *hard*. Assim, seguindo essa equação para os valores das ordens as funções de Bessel mostradas na **Figura 60**, as novas funções serão dadas por:

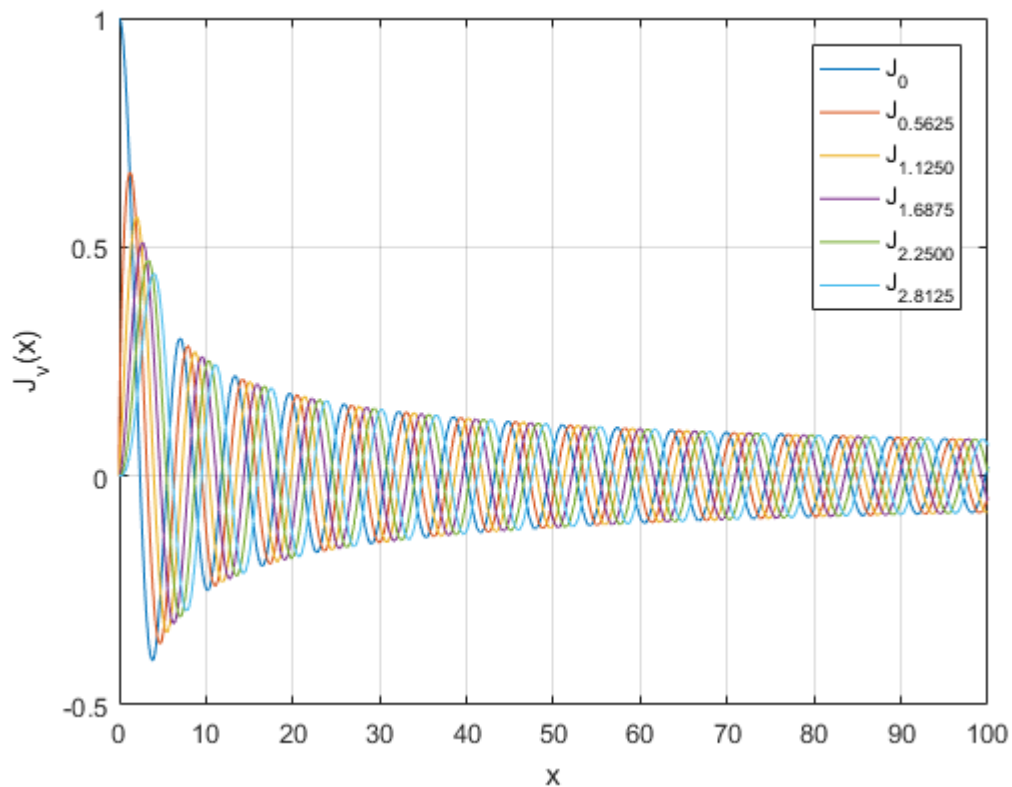


Figura 59 – Funções de Bessel usadas na solução analítica do problema da cunha.

Segue abaixo o código para dar uma maior agilidade ao leitor.

```
syms x
vet_v = zeros (1,6);
angulo_cunha = 40*pi/180;
alpha = (angulo_cunha)/2 ;
phi_inc = 55*pi/180 ;

for m = 1:6
v = ((m-1)*pi)/(2*(pi-alpha));
vet_v(1,m) = v;
end

i = 0;
figure('Name','Bessel Cunha Analítica','NumberTitle','off');

for i = 1:6
plot (besselj (vet_v(1,i), x));
xlim([0 100]);
ylim([-0.5 1]);
grid on;
hold on;
end

legend ( 'J_0' , 'J_{0.5625}' , 'J_{1.1250}' , 'J_{1.6875}' , 'J_{2.2500}' , 'J_{2.8125}');
xlabel('x');
ylabel('J_{v}(x)');
```

A.5 Integrais de Fresnel

Assim como para função de Bessel, a análise das Integrais de Fresnel parte inicialmente por duas funções bases, são elas o seno de Fresnel e o cosseno de Fresnel. Representadas simbolicamente por $C(x)$ e $S(x)$ respectivamente, são dadas matematicamente por (BULIRSCH, 1967):

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du, \quad (\text{A.18})$$

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du. \quad (\text{A.19})$$

A **Figura 60** foi gerada através do Matlab, foram utilizadas as funções *fresnelc* e *fresnels*, já oferecidas pelo software.

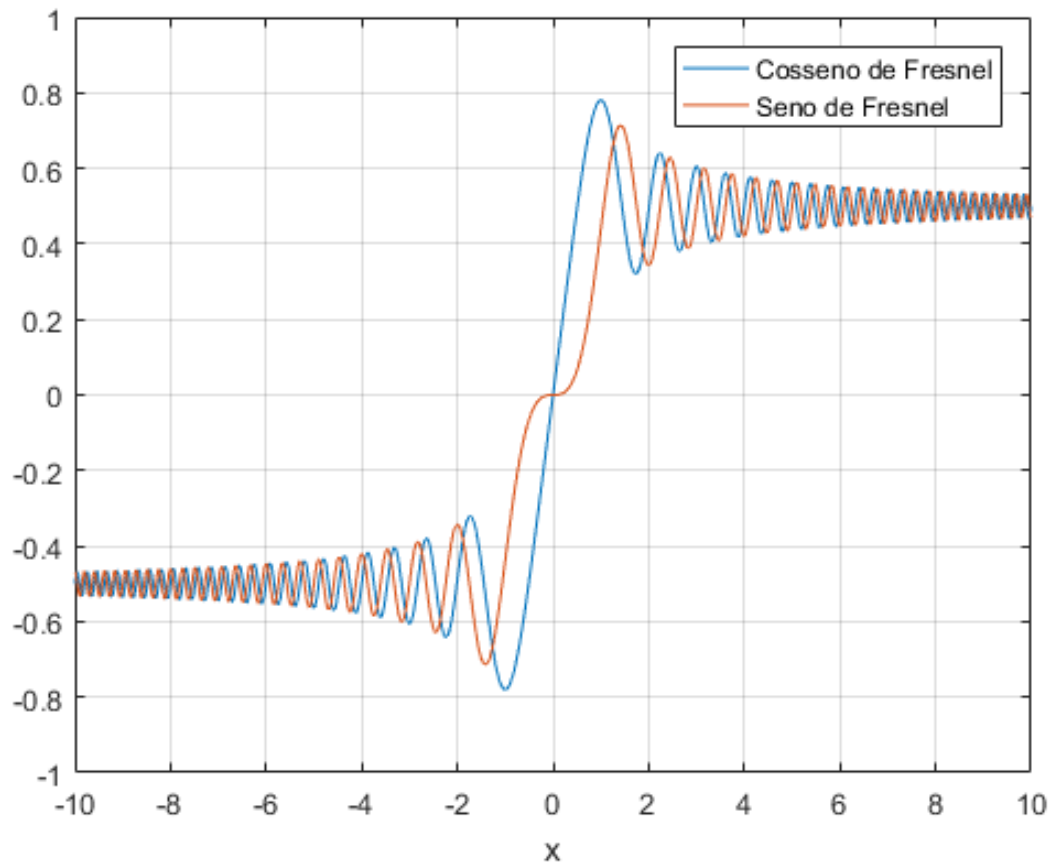


Figura 60 – Seno e Cosseno de Fresnel.

Segue abaixo o código para dar uma maior agilidade ao leitor.

```
syms x;
C = fresnelc (x);
S = fresnels (x);
figure('Name','Seno e Cosseno de Fresnel','NumberTitle','off');
fplot (C, [- 10,10]);
hold on;
fplot (S, [- 10,10]);
ylim ([-1 1]);
grid on;
xlabel('x');
legend ('Cosseno de Fresnel','Seno de Fresnel');
```

Este trabalho utilizou as integrais de Frensel no método de análise de espalhamento eletromagnético UTD, explicado no capítulo 3. A função que o método utilizava, chamada

função de transição, incorporava a integral de fresnel em sua solução de forma ligeiramente diferente, dada por (MCNAMARA, 1990):

$$F(x) = 2j\sqrt{x}e^{jx} \int_{\sqrt{x}}^{\infty} e^{-ju^2} du. \quad (\text{A.20})$$

Além de apresentar as integrais, (MCNAMARA, 1990) oferece uma tabela com valores referentes à $C(x)$, $S(x)$ e suas variações referentes à aplicação na UTD. Porém, a tabela possui uma resolução pequena, não oferecendo uma aproximação necessária para o caso estudado.

Para uma abordagem com um erro menor esse trabalho utilizou valores tabelados anexados em (BALANIS, 2012). Foi feito então uma interpolação linear dos dados através da função ***interp1*** já oferecida pelo Matlab, sendo os valores procurados de x ($0.3 < x < 5.5$) definidos pelo método.