



Universidade Federal de Ouro Preto  
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas  
Departamento de Engenharia Elétrica



## **Trabalho de Conclusão de Curso**

# **Análise e Controle de Sistemas Incertos Digitais Aplicados a uma Bancada Didática**

**Natália Augusto Keles**

João Monlevade, MG  
2018

**Natália Augusto Keles**

**Análise e Controle de Sistemas Incertos Digitais  
Aplicados a uma Bancada Didática**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientador: Prof. Dr. Márcio F. Braga

Coorientador: Prof. Dr. Víctor C. S. Campos

**Universidade Federal de Ouro Preto  
João Monlevade  
2018**



---

**AUTORIZAÇÃO DO COLEGIADO PARA LANÇAMENTO DA NOTA ATV600 NO  
HISTÓRICO ESCOLAR EM SUBSTITUIÇÃO À ATA DE DEFESA**

**Autorização**

O colegiado do curso de engenharia elétrica autoriza ao orientador Márcio Feliciano Braga o lançamento da nota do Trabalho de Conclusão de Curso - ATV 600 do(a) aluna Natália Augusto Keles em virtude do aproveitamento do artigo publicado em evento científico ou periódico, conforme previsto no § 3º do Art 5º da resolução COEE nº 007/2013.

Nota atribuída pelo orientador Márcio Feliciano Braga: **9,5**.

João Monlevade, 16 de janeiro de 2018.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga

Presidente do Colegiado de Engenharia Elétrica

K291a Keles, Natália Augusto.  
Análise e controle de sistemas incertos digitais aplicados a uma bancada didática [manuscrito] / Natália Augusto Keles. - 2018.

63f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Feliciano Braga.  
Coorientador: Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Departamento de Engenharia Elétrica.

1. Engenharia Elétrica. 2. Controladores elétricos. 3. Sistemas de controle digital. 4. Modelagem. I. Braga, Márcio Feliciano. II. Campos, Víctor Costa da Silva. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU: 681.5

Catálogo: [ficha@sisbin.ufop.br](mailto:ficha@sisbin.ufop.br)



---

**ANEXO X - TERMO DE RESPONSABILIDADE**

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado "*Análise e controle de sistemas incertos digitais aplicados a uma bancada didática*" é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem a devida citação ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 17 de fevereiro de 2018.

*Natália Augusto Keles*

---

Natália Augusto Keles

*Dedico este trabalho aos meus pais e meus irmãos que sempre me apoiaram nas minhas decisões.*

# AGRADECIMENTOS

Mais uma etapa da minha vida que se conclui, e agradeço acima de tudo a Deus por ter me dado força, discernimento e muita fé para que pudesse superar todas as dificuldades que apareceram. Agradeço à minha mãe Aparecida Augusto Keles por ter me ensinado desde sempre a importância da educação e ter me apoiado nessa minha escolha, ao meu pai Raymundo Imaculado Keles por todo incentivo dado durante o curso, aos meus irmãos Helton, Camila e Caio pelo ombro amigo nas horas que precisei, por ouvir minhas reclamações, mas acima de tudo sempre estarem comigo quando mais precisei. Agradeço também aos demais familiares por entenderem as vezes que precisei me ausentar. Agradeço também a todos os professores por cada ensinamento dado que contribuíram de forma única para minha formação. E em especial e com muito carinho agradeço aos meus orientadores Márcio Braga e Víctor Campos, por terem me apresentado de forma única a área de Sistemas de Controle, área que aprendi a gostar e que me trouxe experiências e conquistas únicas. E finalmente, agradeço aos meus amigos. Os amigos de infância que entenderam as vezes que não pude estar tão perto quanto queria, por causa das minhas obrigações acadêmicas, mas o carinho e a amizade continuaram inabaláveis. E os meus companheiros de guerra, que viraram noites estudando, sofremos juntos e, além disso, comemoramos cada vitória junto também. E de maneira especial agradeço a Letícia Sathler, minha irmã, que esta comigo desde o primeiro período fazendo seja estudando muito e fazendo trabalhos juntas (e como fizemos trabalhos juntas) ou saindo juntas para esfriar a cabeça; a Marina Alvarenga que apareceu na minha vida, no finalzinho do curso, mas que agregou tanto que não tenho palavras pra agradecer. E aos meus companheiros de vida Átila, Marina Reis, Belmir, Paulo Estevão, Gaspar, Cássia, Pri, Helvécio, Ana Flávia, que estiveram bem próximos de mim nessa fase final. Sem vocês eu não teria conseguido alcançar mais esse objetivo.

*"Quem nunca errou nunca experimentou nada novo."*

*– Albert Einstein*

# RESUMO

Este trabalho visa a aplicação de técnicas de controle robusto via LMIs aplicados em um módulo didático que foi desenvolvido nos laboratórios da UFOP para ser utilizado em disciplinas que envolvam modelagem e controle de sistemas dinâmicos. A planta desenvolvida apresenta parâmetros incertos, exigindo que os controladores projetados sejam capazes de garantir a estabilidade, mesmo com as incertezas presentes. São abordados três métodos para a síntese de controladores digitais: (1) Compensador Estático por Realimentação de Estados ( $Kx$ ), (2) Compensador  $\mathcal{H}_\infty$  (3) Compensador  $\mathcal{H}_2$ . Com intuito de aliar teoria e prática são apresentados resultados simulados em *software* Matlab e os resultados obtidos com experimentos práticos.

**Palavras-chave:** Módulo didático, controle robusto, LMIs, síntese de controladores discretos, parâmetros incertos.

# ABSTRACT

This essay aims to apply LMI robust control technics to a didatic module, beeing developed in UFOP laboratory to be used in subjects that involve modeling and controlling of systems. The developed system presents uncertain parameters, requering capable controllers to guarantee the stability, even with the uncertainties present. Three methods are described for digital controllers synthesis: (1) State Feedback Static Compensator ( $Kx$ ), (2) Compensator  $\mathcal{H}_\infty$  (3) Compensator  $\mathcal{H}_2$ . In order to combine theory and practice, simulated and real results acquired in practical experiments.

**Keywords:** Didatic module, robust control, LMIs, synthesis of discrete controllers, uncertain parameters

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|  |    |
|--|----|
| Figura 1 – Diagrama de blocos do Sistema em Espaço de Estados . . . . .  | 5  |
| Figura 2 – Sistema contínuo com controlador digital . . . . .  | 6  |
| Figura 3 – Sistema estável para o caso contínuo . . . . .  | 7  |
| Figura 4 – Sistema instável para o caso contínuo . . . . .   | 7  |
| Figura 5 – Sistema marginalmente estável para o caso contínuo . . . . .  | 7  |
| Figura 6 – Respostas para sistemas em tempo discreto dependendo da posição dos polos (retirado de Phillips e Nagle 2007.). . . . . | 8  |
| Figura 7 – (a) Sistema estável, (b) sistema assintoticamente estável, (c) sistema instável. . . . .                                | 10 |
| Figura 8 – Norma $\mathcal{H}_\infty$ para sistema SISO . . . . .  | 13 |
| Figura 9 – Norma $\mathcal{H}_\infty$ para sistema MIMO . . . . .  | 13 |
| Figura 10 – Modelo genérico usado para síntese de controladores $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .                                     | 26 |
| Figura 11 – Reposta do sistema - Controlador Estabilizante Método Foward de Euler  | 37 |
| Figura 12 – Reposta do sistema - Discretização por método de expansão de Taylor  | 38 |
| Figura 13 – Reposta do sistema - controlador $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .  | 38 |
| Figura 14 – Reposta do sistema - configuração instável . . . . .   | 39 |
| Figura 15 – Resposta do sistema - configuração estável . . . . .   | 40 |
| Figura 16 – Reposta do sistema - configuração instável . . . . .   | 40 |
| Figura 17 – Resposta do sistema com o controlador estabilizante (método de discretização Forward de Euler) inserido. . . . .       | 41 |
| Figura 18 – Resposta do sistema com o controlador (método de expansão de Taylor) inserido. . . . .                                 | 41 |
| Figura 19 – Resposta do sistema com o controlador $\mathcal{H}_\infty$ inserido. . . . .   | 42 |
| Figura 20 – Resposta do sistema com o controlador $\mathcal{H}_2$ inserido. . . . .  | 42 |
| Figura 21 – Planta Principal . . . . .   | 46 |
| Figura 22 – Planta Auxiliar . . . . .  | 47 |
| Figura 23 – Lugar das raízes para $R_3 < R_2$ . . . . .  | 49 |
| Figura 24 – Lugar das raízes para $R_3 < R_2$ . . . . .  | 50 |
| Figura 25 – Circuito somador . . . . .   | 51 |

# SUMÁRIO

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>1</b>   | <b>INTRODUÇÃO</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1.1</b> | <b>Controle Robusto</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1.2</b> | <b>Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)</b>  | <b>2</b>  |
| <b>1.3</b> | <b>Objetivos Gerais</b>  | <b>2</b>  |
| 1.3.1      | Objetivos Específicos  | 2         |
| <b>1.4</b> | <b>Estrutura do texto</b>  | <b>3</b>  |
| <b>2</b>   | <b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>   | <b>4</b>  |
| <b>2.1</b> | <b>Espaço de Estados</b>   | <b>4</b>  |
| <b>2.2</b> | <b>Planta contínua x Controlador Digital</b>   | <b>5</b>  |
| <b>2.3</b> | <b>Estabilidade</b>  | <b>6</b>  |
| 2.3.1      | Estabilidade Externa   | 6         |
| 2.3.2      | Estabilidade Interna   | 8         |
| 2.3.2.1    | Função Candidata de Lyapunov ( $V(x)$ )  | 9         |
| 2.3.3      | Estabilidade Quadrática  | 10        |
| <b>2.4</b> | <b>Sistemas Incertos</b>   | <b>11</b> |
| <b>2.5</b> | <b>Desempenhos Nominal - (Normas <math>\mathcal{H}_2</math> e <math>\mathcal{H}_\infty</math>)</b> | <b>12</b> |
| 2.5.1      | Norma $\mathcal{H}_\infty$   | 12        |
| 2.5.1.1    | $\mathcal{H}_\infty$ - Contínuo  | 14        |
| 2.5.1.2    | $\mathcal{H}_\infty$ - discreto  | 15        |
| 2.5.2      | Norma $\mathcal{H}_2$  | 16        |
| 2.5.2.1    | $\mathcal{H}_2$ - Contínuo   | 16        |
| 2.5.2.2    | $\mathcal{H}_2$ - Discreto   | 19        |
| <b>3</b>   | <b>METODOLOGIA</b>   | <b>22</b> |
| <b>3.1</b> | <b>Discretização de Sistemas em Espaço de Estados</b>  | <b>22</b> |
| 3.1.1      | Discretização - Método Forward Euler   | 22        |
| <b>4</b>   | <b>CONTROLADORES</b>   | <b>24</b> |
| <b>4.1</b> | <b>Compensador Estático Proporcional (<math>Kx</math>)</b>   | <b>24</b> |
| 4.1.1      | $Kx$ - Contínuo  | 24        |
| 4.1.2      | $Kx$ - Discreto  | 25        |
| <b>4.2</b> | <b>Compensadores usando as Normas <math>\mathcal{H}_\infty</math> e <math>\mathcal{H}_2</math></b> | <b>26</b> |
| 4.2.1      | Norma $\mathcal{H}_\infty$   | 27        |
| 4.2.1.1    | $\mathcal{H}_\infty$ - Contínuo  | 27        |
| 4.2.1.2    | $\mathcal{H}_\infty$ - Discreto  | 27        |

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| 4.2.2      | Norma $\mathcal{H}_2$ . . . . .  | 28        |
| 4.2.2.1    | $\mathcal{H}_2$ - Contínuo . . . . .   | 28        |
| 4.2.2.2    | $\mathcal{H}_2$ - Discreto . . . . .   | 29        |
| <b>5</b>   | <b>RESULTADOS . . . . .</b>  | <b>32</b> |
| <b>5.1</b> | <b>Discretização do sistema . . . . .</b>  | <b>32</b> |
| 5.1.1      | Matrizes Discretas - Método Forward Euler . . . . .                              | 32        |
| 5.1.2      | Matrizes Discretas - Expansão da série de Taylor . . . . .                       | 34        |
| <b>5.2</b> | <b>Controladores . . . . .</b>   | <b>35</b> |
| <b>5.3</b> | <b>Respostas do sistema simulado . . . . .</b>                                   | <b>36</b> |
| 5.3.1      | Controlador Estabilizante $Kx$ - Discretização Euler Forward . . . . .           | 36        |
| 5.3.2      | Controlador Estabilizante $Kx$ - Discretização pelo Método de Taylor . . . . .   | 37        |
| 5.3.3      | Controlador $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .                                       | 38        |
| 5.3.4      | Controlador $\mathcal{H}_2$ . . . . .  | 39        |
| <b>5.4</b> | <b>Respostas do sistema real . . . . .</b>                                       | <b>39</b> |
| 5.4.1      | Sistema Estável . . . . .  | 40        |
| 5.4.2      | Sistema Instável . . . . .   | 40        |
| 5.4.3      | Controladores Estabilizantes . . . . .   | 41        |
| 5.4.3.1    | Controlador Estabilizante - Discretização Método Forward de Euler . . . . .      | 41        |
| 5.4.3.2    | Controlador Estabilizante - Discretização Método de expansão de Taylor . . . . . | 41        |
| 5.4.4      | Análise e comentários . . . . .  | 43        |
| <b>6</b>   | <b>CONCLUSÃO . . . . .</b>   | <b>44</b> |
| <b>6.1</b> | <b>Melhorias Propostas . . . . .</b>   | <b>44</b> |
| <b>6.2</b> | <b>Trabalhos Futuros . . . . .</b>   | <b>45</b> |
|            | <b>ANEXO A – MÓDULO DIDÁTICO . . . . .</b>                                       | <b>46</b> |
| <b>A.1</b> | <b>Modelagem do módulo didático . . . . .</b>                                    | <b>46</b> |
| A.1.1      | Funcionamento do circuito . . . . .  | 49        |
|            | <b>ANEXO B – PERIFÉRICOS . . . . .</b>   | <b>51</b> |
| <b>B.1</b> | <b>Circuito de entrada . . . . .</b>   | <b>51</b> |
| <b>B.2</b> | <b>Circuito de saída . . . . .</b>   | <b>52</b> |
|            | <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>   | <b>53</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

A gama de setores que a engenharia elétrica aborda é imensa, dentro das indústrias, dos hospitais, atendendo áreas domiciliares, etc. É perceptível a influência dos engenheiros eletricitistas de maneira direta ou indireta em nosso cotidiano. Ao analisar todo esse contexto, percebe-se que os ramos que se associam com a área de controle estão crescendo em escala exponencial. Por isso, é essencial que durante a graduação, disciplinas relacionadas com controle sejam abordadas e estimuladas. Destaca-se que o controle digital está se tornando cada vez mais comum, tanto pelo avanço tecnológico que tornou o microprocessador um dispositivo acessível, compacto e eficiente, como pela flexibilidade trazida pelo mesmo FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998..

Em disciplinas de controle, sabe-se que as práticas são aliadas, principalmente, aos *softwares*. Tanto pela facilidade do uso, como pelo baixo custo. Mostrando que esse recurso é eficiente para consolidação de conceitos, a modelagem e síntese de controladores são totalmente válidas, porém são feitas num domínio ideal BALLETT; PARRO; ROMANO, 2014.. Ao utilizar uma bancada didática, os empecilhos que surgem para o controle do sistema são maiores, pois existem os ruídos induzidos e conduzidos inerentes aos circuitos reais, que devem ser considerados, além do estudante precisar ter a destreza e conhecimento necessário para a montagem física da planta, bem como conseguir contornar defeitos que possam aparecer devido aos dispositivos defeituosos. O presente trabalho visa conciliar a facilidade trazida pelos softwares com a montagem real, sendo que um protótipo de uma bancada didática foi montada e todas as análises feitas sobre ela são fundamentadas em conceitos do controle robusto, com modelagem e síntese de controladores digitais via Desigualdades Matriciais Lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), visando o controle de um sistema real, considerando e superando todas as perturbações que possam existir.

## 1.1 CONTROLE ROBUSTO

A modelagem de um sistema pode ser uma tarefa bastante onerosa. Por muitas vezes, o processo de identificação da planta fica comprometido devido às informações disponíveis serem insuficientes e/ou imprecisas, tornando o modelo final relativamente distante da realidade. O controle robusto é a área do controle responsável por garantir o desempenho do sistema superando essa diferença entre modelo e o sistema real. A robustez é uma característica muito apreciada em controladores, pois esses são capazes de superar a inexatidão de parâmetros e manter a resposta do sistema como a esperada ANTHONY; GOVINDARAJAN, 2008. OLIVEIRA, 1999.. Pode-se dizer que um sistema é robusto

quando ele apresenta baixa sensibilidade e a estabilidade e o desempenho do projeto são mantidas mesmo com a variação de parâmetros. DORF et al., 2005.

## 1.2 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES (LMIS)

As LMIs são artifícios matemáticos que estão sendo difundidas em larga escala na área de controle, principalmente no que se relaciona com o controle robusto. Uma vez que essa área trabalha no domínio do tempo e tem sua modelagem em espaço de estados, ou seja, modelagem que utiliza como base matrizes.

Portanto transformar problemas de controle em LMIs se torna fácil. Além disso, em alguns casos, a transformação em LMIs possibilita solucionar problemas para os quais procedimentos clássicos não se aplicam ou não conseguem encontrar uma solução válida, por ser um método menos conservador SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2007..

Existem relatos de mais de 100 anos atrás relacionando LMIs com análises dinâmicas. Em 1890, Lyapunov publicou seu trabalho, conhecido atualmente como a Teoria de Estabilidade de Lyapunov, que é baseado nas LMIs QU, 1998.. Adicionalmente, as LMIs são vastamente aplicáveis para síntese de controladores que utilizam técnicas que são comuns na literatura tais como, alocação de polos, norma  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $\mathcal{H}_2$ , entre outros.

## 1.3 OBJETIVOS GERAIS

O presente trabalho tem como objetivo a elaboração e confecção de um módulo didático de baixo custo, para ser utilizado como material prático de apoio para as disciplinas que envolvam modelagem e controle de sistemas. Também serão implementados controladores utilizando técnicas do controle robusto, buscando validar a funcionalidade do módulo.

### 1.3.1 Objetivos Específicos

- Confecção de um módulo didático de baixo custo
- Modelagem do sistema;
- Síntese dos controladores;
- Discretização dos controladores;
- Análise dos resultados;

## 1.4 ESTRUTURA DO TEXTO

Este trabalho foi elaborado a fim de atingir os objetivos especificados na seção 1.3. O documento foi particionado em 6 capítulos que mostram desde o estudo feito a cerca do tema até os resultados e aprendizados adquiridos durante a elaboração do mesmo.

No capítulo 2 é exposto a revisão bibliográfica, no qual encontra-se a base teórica necessária para o entedimento e execução deste trabalho; apresentando conceitos fundamentais, para que se aplique a teoria e sejam obtidos resultados condizentes. Nesse capítulo são encontrados as definições de espaço de estados, estabilidade, sistemas incertos e critérios de desempenho baseado em normas.

Como neste trabalho é dado o enfoque no controle digital, o capítulo 3 demonstra o método de discretização usado para que seja possível a síntese de controladores discretos.

O capítulo 4 mostra toda a modelagem matemática e ferramentas necessárias para definir as LMIs, partindo do conceito de estabilidade segundo Lyapunov até chegar nas LMIs, para que assim seja possível encontrar os controladores propostos com a ajuda do *MATLAB* e dos pacote *Sedumi* e *Yalmip*.

Em 5 são demonstrados, primeiramente, o modelo politópico discreto da planta obtidos a partir das discretizações. E, posteriormente, os valores encontrados para cada controlador e as respostas de forma gráfica do sistema simulado e real, quando os controladores estão inseridos juntamente com a planta.

E por fim, no capítulo 6 é feita a conclusão. Sendo levantados os pontos relevantes ao trabalho citando aprendizados e melhorias que possam ser uteis, bem como sugestões de trabalhos futuros para outros alunos que achem viável fazer um trabalho utilizando a planta desenvolvida.

# 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

## 2.1 ESPAÇO DE ESTADOS

A abordagem utilizada para esse trabalho é feita em espaço de estados, também conhecida por abordagem moderna ou no domínio do tempo. Como afirmado por Nise e Silva 2002., esse tipo de modelagem traz diversas vantagens tais como:

- abordagem utilizada com técnicas avançadas de controle;
- constitui num processo unificado de modelagem, análise e projeto de vários tipos de sistemas;
- possibilita a modelagem de sistemas variantes no tempo;
- aplicável em sistemas não lineares;
- aplicável em sistemas do tipo MIMO (múltiplas entradas/ múltiplas saídas);
- e possui diversos *softwares* e métodos computacionais que solucionam mais facilmente problemas modelados em espaço de estados.

Para essa modelagem, alguns conceitos devem estar bem definidos como:

- **Estado:** É o menor conjunto de variáveis que devem ser analisadas, pois o seu comportamento resulta na descrição do desempenho do sistema por inteiro para qualquer instante de tempo  $t$ ;
- **Vetor de Estado:** Se são utilizadas  $n$  variáveis de estado para modelagem completa do sistema, então todas as variáveis podem ser agrupadas em um único vetor;
- **Espaço de Estado:** O espaço  $n$ -dimensional composto pelos estados, ou pelo vetor de estados.

Quando é feita a modelagem no domínio do tempo, são levantadas equações diferenciais sobre o sistema analisado. Quanto mais variáveis a serem analisadas (variáveis de estado) existirem, maiores são as equações diferenciais e maiores são as matrizes criadas para a modelagem em espaço de estados. De maneira geral, essa abordagem para o caso contínuo tem o formato:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2.2}$$

Sendo  $A$  é a matriz dinâmica do sistema,  $B$  é a matriz de entrada,  $C$  é a matriz de saída e  $D$  é a matriz de transição direta.

A modelagem em espaço de estados em tempo discreto é análoga a representação em tempo contínuo:

$$x[k + 1] = Ax[k] + Bu[k] \quad (2.3)$$

$$y[k] = Cx[k] + Du[k] \quad (2.4)$$

em que  $k$  é um número inteiro que representa a amostragem dos sistemas em tempo discreto.

Na Figura 1 é possível observar no diagrama de blocos a representação do espaço de estados do sistema (2.3)-(2.4).

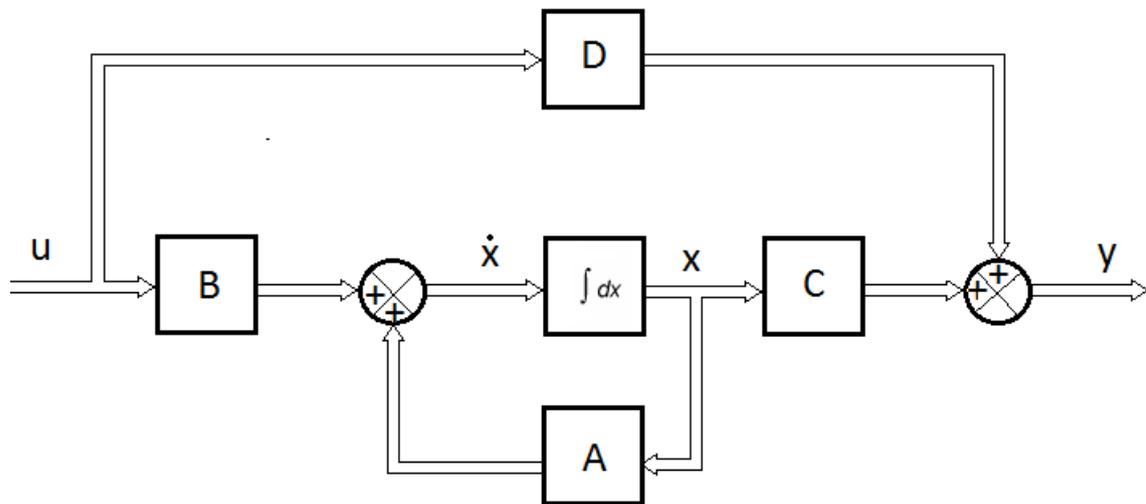


Figura 1 – Diagrama de blocos do Sistema em Espaço de Estados

## 2.2 PLANTA CONTÍNUA X CONTROLADOR DIGITAL

Quando se opta por usar microcontroladores para a síntese de controladores é de grande importância entender como o computador é inserido no sistema analógico.

Para que o microcontrolador consiga processar o sinal proveniente da planta contínua é necessário discretizá-lo. Discretizar consiste em captar o sinal analógico do sistema e amostrá-lo com um período de tempo  $T$ , esse valor de  $T$  é crítico para o bom funcionamento do sistema como um todo.

Um sistema subamostrado pode causar perda da informação levando o sistema à instabilidade, uma vez que poucas amostras não reproduzem o sinal com fidelidade.

Por outro lado, um sistema super amostrado reproduz quase que fielmente o sinal em tempo contínuo, mas para processá-lo seria necessário um microcontrolador com um alto poder de processamento o que pode inviabilizar o projeto.

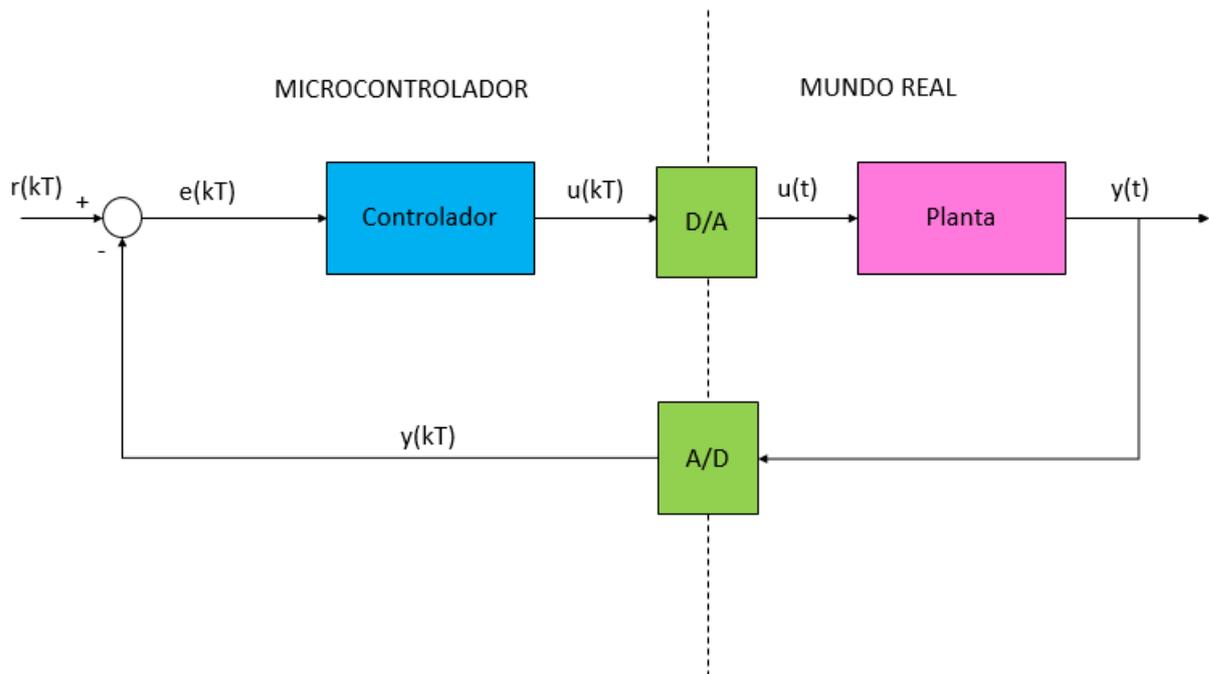


Figura 2 – Sistema contínuo com controlador digital

A discretização é feita por um conversor analógico digital (A/D), após processado e tendo os controladores computados para retornar esse sinal para a planta contínua é necessário um conversor digital analógico que transforma o sinal discreto em contínuo.

## 2.3 ESTABILIDADE

A estabilidade é um pré-requisito básico, em qualquer sistema de controle com realimentação. Sem essa característica, as informações sobre o transitório e sobre o erro em regime permanente não tem valia NISE; SILVA, 2002.. Normalmente, verifica-se que muitos sistemas em malha aberta são instáveis, mas quando se trata de sistemas em malha fechada, salvo algumas exceções, a grande parte dos sistemas existentes são estáveis OGATA et al., 2003..

### 2.3.1 Estabilidade Externa

A definição de estabilidade externa, ou mais conhecida como BIBO estabilidade, diz que: se a saída do sistema for limitada para qualquer entrada limitada, o sistema é dito estável. Ou ainda, se para um sistema com alguma entrada limitada, a saída for ilimitada, o sistema é dito instável OGATA et al., 2003..

Fazendo uma análise com relação ao posicionamento dos polos para o caso contínuo, um sistema é BIBO estável quando todos os seus polos estão posicionados do lado esquerdo do plano  $s$ , ou ainda, pode-se afirmar que todos os autovalores da matriz do sistema descrito na representação em espaço de estados tem parte real negativa, portanto tem-se a resposta

no tempo convergindo para um valor finito. Na Figura 3, o sistema é estável (todos os polos estão do lado esquerdo do plano  $s$  e a resposta no tempo converge para um valor finito). Na Figura 4, o sistema é instável, pois a resposta tende a um valor infinito (análise no tempo), ou seja, pelo menos um dos polos está no lado direito do plano  $s$  (ou pelo menos um autovalor da matriz é maior que zero). E, finalmente, na Figura 5, ilustra-se o caso em que o sistema é marginalmente estável, quando polos não repetidos estão sobre o eixo imaginário. NISE; SILVA, 2002.

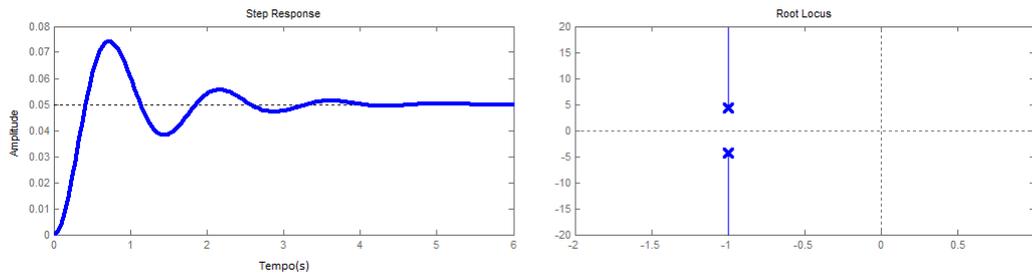


Figura 3 – Sistema estável para o caso contínuo

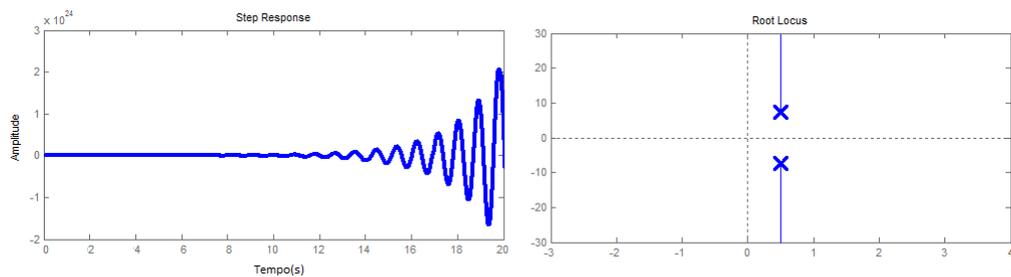


Figura 4 – Sistema instável para o caso contínuo

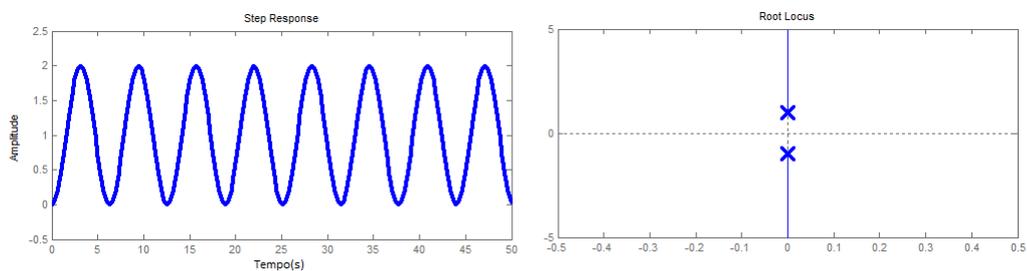


Figura 5 – Sistema marginalmente estável para o caso contínuo

A BIBO estabilidade para sistemas em tempo discreto possui abordagem um pouco diferente, para esse caso um sistema é dito estável quando todos os autovalores da matriz estão incluídos no interior do círculo unitário. Na Figura 6, verificam-se as respostas para sistemas em tempo discreto, dependendo do posicionamento dos polos com relação ao círculo unitário.

Observe que todos os polos que estão dentro do círculo unitário referem-se a sistemas estáveis, quando externos denotam sistemas instáveis e quando estão sobre o círculo unitário são marginalmente estáveis. Note que para o caso discreto, a margem de estabilidade possui comportamentos diferentes, quando um polo é constante e igual a 1, o valor da saída em regime terá amplitude constante e igual a 1, e para outros valores (que não se localizam sobre o eixo real) o saída oscilará em torno de um valor constante PHILLIPS; NAGLE, 2007..

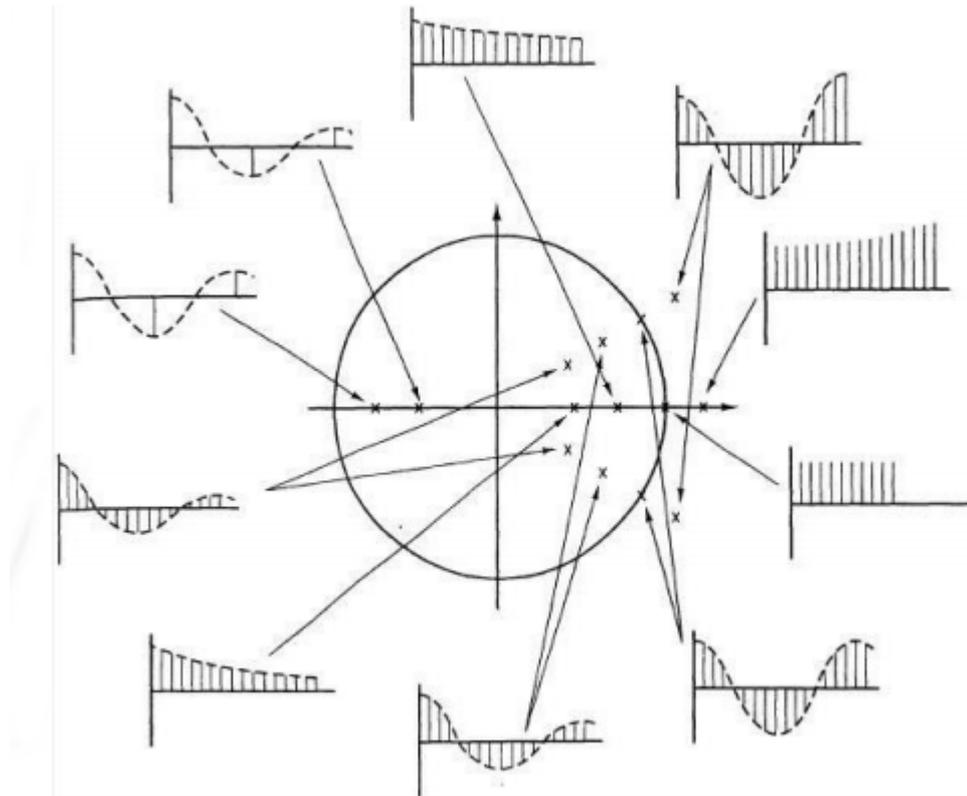


Figura 6 – Respostas para sistemas em tempo discreto dependendo da posição dos polos (retirado de Phillips e Nagle 2007.).

### 2.3.2 Estabilidade Interna

A estabilidade interna ou estabilidade de estados visa analisar a estabilidade do sistema dinâmico de acordo com a evolução do comportamento dos estados para vários instantes de tempo, para isso a entrada é considerada nula. OGATA et al., 2003.

A definição clássica dada para o teorema de Lyapunov em Slotine, Li et al. 1991. é que esse método é uma complementação de um conceito físico, que afirma que, se a energia total de um sistema é liberada (sendo um sistema linear ou não), em algum momento, irá se estabelecer um ponto de equilíbrio denotando que o sistema é estável.

Dadas as definições de estabilidade, podemos ratificar as estabilidades interna do sistema segundo o teorema de Lyapunov:

**Teorema 1 (Ogata et al. 2003.)** *Suponha que todos os pontos de uma determinada função estão contidos em uma dada região  $R(v)$ , de forma que:*

$$\|x_0 - x_e\| < v, \quad v > 0, \quad (2.5)$$

em que

$x_0$  - valor inicial

$x_e$  - estado de equilíbrio

$v$  - função que define a região

*Então pode-se dizer que a estabilidade segundo Lyapunov de um certo ponto de equilíbrio  $x_e$  existe se, para cada  $R(\epsilon)$  existir um  $R(v)$ , de forma que todo percurso que começa em  $R(v)$  estiver contido em  $R(\epsilon)$  para todo  $t > 0$ .*

Ou ainda, podemos dizer que um sistema é estável segundo Lyapunov, se para um  $x(0)$  limitado por uma região existir um  $x(t)$  que também é limitado por essa região para todo  $t$  DULLERUD; PAGANINI, 2013..

### 2.3.2.1 Função Candidata de Lyapunov ( $V(x)$ )

Baseado no conceito físico, encontrar uma função de energia para um dado sistema, não é uma tarefa simples, portanto Lyapunov definiu o conceito de função de Lyapunov ( $V(x)$ ). Essa função emula as características de uma função de energia, sendo amplamente utilizada para determinação de estabilidade de sistemas lineares ou não lineares OGATA, 1995..

A função de Lyapunov tem algumas características particulares:

- $V(x)$  deve ser definida positiva;
- $\dot{V}(x)$  deve ser definida negativa (ou semidefinida negativa).

A função de Lyapunov deve ter primeira derivada temporal definida negativa, isso implica que  $V(x)$  decresce com o passar do tempo. Além disso, para um dado sistema não existe apenas uma função de Lyapunov que o satisfaça OGATA, 1995..

Segundo Lyapunov, pode-se definir alguns tipos de estabilidade (caso contínuo):

$$V(x) = 0, \quad \text{sse } x = 0 \quad (2.6)$$

$$V(x) > 0, \forall x \neq 0 \quad (2.7)$$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} v(x) = \infty \quad (2.8)$$

Se  $V(x)$  satisfizer (2.6) e (2.7) e  $\dot{V}(x) < 0$  o sistema é localmente estável. Para o caso em que as equações (2.6) e (2.7) são válidas em todo o espaço de estado e a equação (2.8)

for atendida, o sistema é globalmente estável. Ou ainda se  $\dot{V}(x) < 0$  para todo  $x$ , com  $x$  diferente de zero, a estabilidade é assintótica OGATA, 1995..

De forma similar, a estabilidade para sistemas em tempo discreto pode ser expressa da mesma forma do que no caso contínuo mostradas em (2.6) e (2.7), diferenciando-se apenas pela terceira equação, que para o presente caso trata-se da primeira diferença dada por:

$$V[x_{k+1}] - V[x_k] \leq 0 \quad (2.9)$$

Sendo assim, para o caso discreto, se (2.6) e (2.7) forem satisfeitas, o sistema é localmente estável, se (2.9) também for satisfeita, a estabilidade é global. E se  $V[x_{k+1}] - V[x_k] \leq 0$  o sistema é assintoticamente estável.

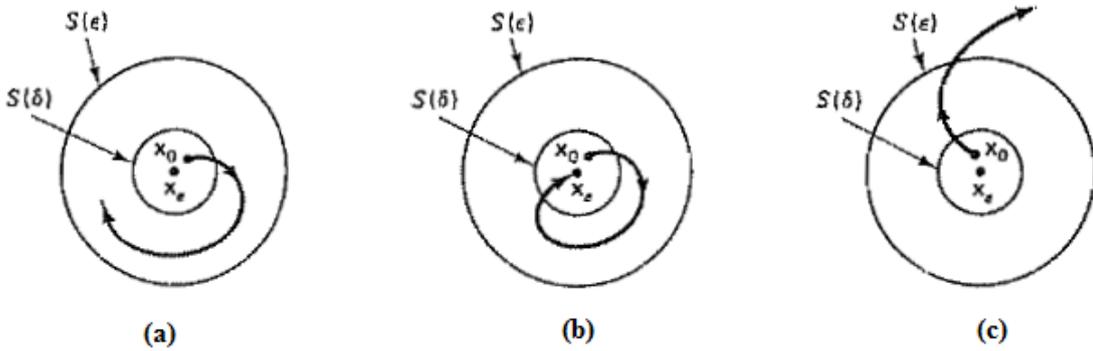


Figura 7 – (a) Sistema estável, (b) sistema assintoticamente estável, (c) sistema instável.

### 2.3.3 Estabilidade Quadrática

Escolhendo como candidata à função de Lyapunov uma função quadrática do tipo:

$$V(x) = x'Px, \quad \text{com } P = P' \quad (2.10)$$

Tem-se:

$$V(x) = x'Px > 0, \quad \forall x \iff P > 0 \quad (2.11)$$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x}, \quad (2.12)$$

$$x'(A'P + PA)x < 0 \iff (A'P + PA) < 0 \quad (2.13)$$

As LMIs que devem ser resolvidas para verificar a estabilidade do sistema são

$$P > 0 \quad (2.14)$$

$$(A'P + PA) < 0 \quad (2.15)$$

Se a matriz dinâmica do sistema ( $A$ ) for estável, implica encontrar uma matriz  $P$  que torne as LMIs das equações (2.14) e (2.15) factíveis.

A forma original da equação de Lyapunov (caso contínuo) é descrita como

$$A'P + PA + Q = 0, \quad (2.16)$$

em que

$A$  - Matriz da dinâmica do sistema

$Q$  - Qualquer matriz definida positiva simétrica

$P$  - Matriz de parâmetros de Lyapunov (variável desconhecida)

Se a equação de Lyapunov for resolvida e uma matriz  $P > 0$  for encontrada, então o sistema é estável. Caso contrário, nada pode-se afirmar sobre o sistema.

De maneira equivalente, tem-se a função de Lyapunov para o caso discreto, a função quadrática permanece a mesma como mostrado em (2.11), porém a definição da derivada primeira se modifica, que para esse caso passa a ser a primeira diferença.

$$\begin{aligned} V(x(k+1) - V(k)) = \\ x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) = \\ x(k)(A'PA - P)x(k) < 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Portanto as desigualdades para o caso discreto são

$$P > 0 \quad (2.18)$$

$$(A'PA - P) < 0 \quad (2.19)$$

Se a matriz dinâmica do sistema ( $A$ ) for estável, ou seja, todos os polos estão contidos no interior do círculo unitário, a solução se torna factível ao encontrar uma matriz  $P$  para as desigualdades (2.18) e (2.19).

A forma original da equação de Lyapunov (caso discreto) é descrita como

$$A'PA - P + Q = 0 \quad (2.20)$$

em que  $A$  e  $Q$  são conhecidas, e a solução é uma matriz  $P$ , que é simétrica e definida positiva.

## 2.4 SISTEMAS INCERTOS

Diversos sistemas possuem parâmetros constantes, porém incertos dentro de uma faixa de valores. Para garantir que o sistema seja estável para todos os valores possíveis, todas as combinações de parâmetros devem ser analisados. Para isso, existem artifícios

matemáticos que permitem analisar um número finito de possibilidades que representam o comportamento do sistema para todos os valores DORF et al., 2005..

O modelo com incertezas politópicas é definido por (2.21)

$$\dot{x} = \left( \hat{A} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \tilde{A}_i \right) x + \left( \hat{B} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \tilde{B}_i \right) u \quad (2.21)$$

Dessa forma, o sistema é representado como uma parte fixa ( $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ ) e uma parte incerta ( $\sum_{i=1}^r \alpha_i \tilde{B}_i$  e  $\sum_{i=1}^r \alpha_i \tilde{A}_i$ ). Para incluir todas as possibilidades do sistema com incertezas politópicas utiliza-se o fecho convexo.

Fecho convexo de  $S$  é a interseção de todas as regiões convexas que contém os pontos de  $S$ . Portanto, o fecho convexo é usado para definir uma região, no qual qualquer ponto dentro da região limitada pode ser uma solução. Dessa maneira, não é necessário analisar todas as opções possíveis, mas sim trabalhar com os vértices que delimitam um determinada região.

Matematicamente, o modelo incerto dado por:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i x + B_i u), \quad (2.22)$$

em que  $\alpha$  é um parâmetro invariante no tempo pertencente ao simplex unitário

$$\Lambda \triangleq \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, r \right\}. \quad (2.23)$$

Sendo  $\Lambda$  o politopo tratado e  $\alpha$  a incerteza, a (2.23) mostra que o politopo pode ser formado por qualquer conjunto de parâmetros desde que esses obedeçam a restrição de serem positivos e a somatória deles seja 1.

## 2.5 DESEMPENHOS NOMINAL - (NORMAS $\mathcal{H}_2$ E $\mathcal{H}_\infty$ )

Os sistemas reais estão sujeitos à perturbações. Para que a representação do modelo seja o mais fiel possível as perturbações são incluídas e identificados na modelagem como  $w$ . Para quantificar os reflexos desses distúrbios na saída utiliza-se as normas. Portanto, o quociente entre a saída e a entrada de perturbação  $w$  quantifica o ganho relativo que a entrada tem na saída.

### 2.5.1 Norma $\mathcal{H}_\infty$

De acordo com Skogestad e Postlethwaite 2007., por muitas vezes faz-se necessário reduzir o pico da resposta em frequência do sistema em malha fechada. Para tal tarefa utiliza-se a técnica de minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função transferência do sistema. Esse artifício visa encontrar o maior valor singular no espectro da frequência. Esse resultado tem grande utilidade na síntese de controladores. A norma  $\mathcal{H}_\infty$  é definida como:

$$\|G(s)\|_{\infty} = \max \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}. \quad (2.24)$$

em que  $\|y(t)\|_2, \|u(t)\|_2$  é a norma  $L_2$  de um vetor de sinal que pode ser calculada como:

$$\|y(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} y^T(\tau)y(\tau)d\tau}. \quad (2.25)$$

Para sistemas do tipo SISO, a norma corresponde ao valor de pico do gráfico de magnitude do diagrama de Bode do sistema, como mostrado da Figura 8

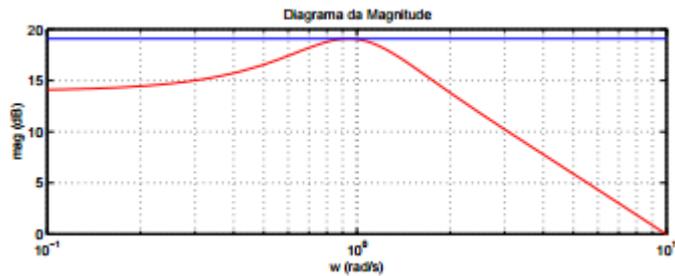


Figura 8 – Norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  para sistema SISO

Para sistemas do tipo MIMO, a norma corresponde ao máximo valor atingido pelo gráfico de magnitude de Bode, como ilustrado na figura 9

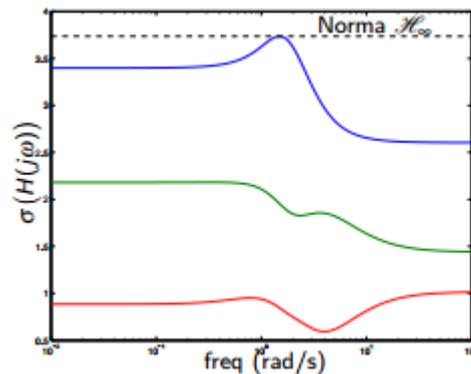


Figura 9 – Norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  para sistema MIMO

Na prática, não se faz necessário encontrar o controlador ótimo para resolver o problema  $\mathcal{H}_{\infty}$ , isso demandaria um custo computacional elevado. Para tanto, uma solução sub-ótima, provê resultados de grande valia SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2007.. Encontrar o menor valor de  $\gamma$  ( $\gamma_{min}$ ) que seja possível obter um controlador  $K$  que estabilize o sistema. Ou seja

$$\|KG(s)\|_{\infty} < \gamma. \quad (2.26)$$

### 2.5.1.1 $\mathcal{H}_\infty$ - Contínuo

Considere o sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) \quad (2.27)$$

$$z(t) = Cx(t) + D_w w(t) \quad (2.28)$$

Em (2.29) é demonstrado que o sinal de energia  $w$  pertence ao  $L_2$

$$\int_0^\infty w(\tau)'w(\tau) d\tau < +\infty \quad \longleftrightarrow \quad w(t) \in L_2 \quad (2.29)$$

E o teorema de Parseval destaca que a energia (norma  $L_2$ ) no tempo está relacionada com a energia (norma  $L_2$ ) no domínio da frequência do sinal, ou seja, o Teorema de Parseval é o que garante que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é o pico do Bode.

Portanto, norma  $\mathcal{H}_\infty$  é definida ao encontrar o menor limitante superior ( $\gamma$ ), obtendo-se a seguinte desigualdade:

$$\|G(s)\|_\infty \leq \gamma, \quad (2.30)$$

em que  $G(s)$  é a função de transferência do sistema. As seguintes manipulações são necessárias para que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  seja transformada em uma LMI e para tal função os cálculos foram adaptadas a partir de Oliveira, Geromel e Bernussou 2002..

$$\|z(t)\|_2 \leq \gamma \|w(t)\|_2, \quad w(t) \in L_2 \quad (2.31)$$

$$\|z(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w(t)\|_2^2, \quad w(t) \in L_2 \quad (2.32)$$

multiplicando ambos os lados por  $\frac{1}{\gamma}$

$$\frac{1}{\gamma} \|z(t)\|_2^2 \leq \gamma \|w(t)\|_2^2 \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^\infty z(\tau)^T z(\tau) d\tau \leq \gamma \int_0^\infty w(\tau)^T w(\tau) d\tau \quad (2.34)$$

acrescentando  $\dot{V}(x)$  (função de Lyapunov) em ambos os lados desigualdade tem-se

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \left( z(\tau)^T z(\tau) - \gamma w(\tau)^T w(\tau) + \dot{V}(\tau) \right) d\tau \leq \int_0^\infty \dot{V}(\tau) d\tau \quad (2.35)$$

A integral do lado direito de (2.35) tende para zero, pois considera-se o sistema relaxado (condições iniciais nulas) e que ele é assintoticamente estável. Portanto, pode-se reescrever a equação (2.35) como <sup>1</sup>:

<sup>1</sup> Por simplicidade, a dependência com o tempo das variáveis foi omitida.

$$\dot{V} + \frac{1}{\gamma} z^T z - \gamma w^T w < 0 \quad (2.36)$$

Usando as (2.27) e (2.29) obtém-se

$$\begin{aligned} x^T(A^T P + PA)x + w^T B_w P x + x^T P B_w w \\ + [x^T \quad w^T] \begin{bmatrix} C^T \\ D_w^T \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma} I [C \quad D_w] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} - \gamma w^T w < 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Aplicando o complemento de Schur em (2.37) tem-se

$$[x^T \quad w^T] \left( \begin{bmatrix} A^T P + PA & P B_w \\ * & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T \\ D_w^T \end{bmatrix} \frac{1}{\gamma} I [C \quad D_w] \right) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0 \quad (2.38)$$

Portanto deseja-se minimizar  $\gamma$  sujeito as LMIs descritas abaixo:

$$P > 0 \quad (2.39)$$

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & P B_w & C^T \\ * & -\gamma I & D_w^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

### 2.5.1.2 $\mathcal{H}_\infty$ - discreto

Para o caso discreto, considere o seguinte sistema:

$$x[k+1] = Ax[k+1] + B_w w[k+1] \quad (2.41)$$

$$z[k] = Cx[k] + D_w w[k] \quad (2.42)$$

sendo  $w[k]$  uma entrada exógena e  $z[k]$  a saída, e a função transferência do sistema expressa por  $H(z)$ . A Norma  $\mathcal{H}_\infty$  para o caso discreto pode ser considerada como:

$$\|H(z)\|_\infty = \max \sigma_{\max}(H(\exp(j\omega))) \quad (2.43)$$

Considerando  $w[k]$  um sinal de energia, em (2.44) é verificado que esse sinal pertence ao  $l_2$

$$\sum_{k=0}^{\infty} w[k]^T w[k] < +\infty \quad \longleftrightarrow \quad w[k] \in l_2 \quad (2.44)$$

de maneira similar ao caso contínuo a norma pode ser caracterizada como

$$\|H(z)\|_\infty < \gamma \quad \longleftrightarrow \quad z[k]^T z[k] < \gamma^2 w[k]^T w[k], \quad w[k] \in l_2 \quad (2.45)$$

Sabe-se que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é calculada apenas em sistemas estáveis e ela pode ser modelada por meio da função de Lyapunov para o caso discreto em conjunto com (2.36), implicando em

$$x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k + z_k^T z_k - \gamma^2 w[k]^T w[k] < 0 \quad (2.46)$$

Usando (2.41) e (2.42) e colocando na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} x[k]^T & w[k]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P A - P + C^T C & A^T P B + C^T D \\ B^T P A + D^T C & B^T P B + D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ w[k] \end{bmatrix} < 0 \quad (2.47)$$

$$\begin{bmatrix} P & A^T P & 0 & C^T \\ * & P & P B & 0 \\ * & * & I & D^T \\ * & * & * & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.48)$$

Para que (2.48) seja, de fato, uma LMI, aplica-se a seguinte mudança de variável  $\gamma^2 = \mu$ . Portanto, para o caso discreto deseja-se minimizar  $\mu$  sujeito a LMI:

$$P > 0 \quad (2.49)$$

$$\begin{bmatrix} P & A^T P & 0 & C^T \\ * & P & P B & 0 \\ * & * & I & D^T \\ * & * & * & \mu I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.50)$$

As manipulações matriciais para tornar o problema de minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  para o caso discreto em uma LMI foram adaptadas a partir de Peres e Oliveira 2017.,

## 2.5.2 Norma $\mathcal{H}_2$

### 2.5.2.1 $\mathcal{H}_2$ - Contínuo

Para a definição da Norma  $\mathcal{H}_2$  considere o sistema invariante no tempo

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) \quad (2.51)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

em que  $w(k) \in \mathbb{R}^m$  representando uma entrada exógena e  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  a saída que é monitorada. Para que a norma  $\mathcal{H}_2$  seja finita, o termo de transmissão direta não existe, ou seja,  $D = 0$ .

A matriz de transferência que relaciona  $w(t)$  e  $y(t)$  é dada por

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & \dots & H_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{p1}(s) & \dots & H_{pm}(s) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

E a norma  $\mathcal{H}_2$  é definida como

$$\|H(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m H_{ij}(j\omega) * H_{ij}(j\omega) d\omega \quad (2.53)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(H(j\omega) * H(j\omega)) d\omega \quad (2.54)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \sigma_i(H(j\omega))^2 d\omega \quad (2.55)$$

Sendo  $H(s)$  estável e causal pode-se afirmar que

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) \quad \begin{cases} Ce^{At}B, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.56)$$

A norma  $\mathcal{H}_2$  de  $H(s)$  pode ser descrita por

$$\|H(s)\|_2^2 = \int_0^{+\infty} h(t)^* h(t) dt = \int_0^{+\infty} h(t) h(t)^* dt, \quad (2.57)$$

ou seja,

$$\|H(s)\|_2^2 = \mathbf{Tr}(B^* e^{A^*t} C^* C e^{At} B) dt = \int_0^{+\infty} \mathbf{Tr}(C e^{At} B B^* C e^{A^*t} C^*) dt. \quad (2.58)$$

Com isso são definidos os gramianos de controlabilidade ( $L_c$ ) e observabilidade ( $L_o$ )

$$L_c = \int_0^{+\infty} e^{At} B B^* e^{A^*t} dt$$

$$L_o = \int_0^{+\infty} e^{At} C C^* e^{A^*t} dt$$

sendo

$$A' L_o + L_o A + C^* C = 0$$

portanto a Norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser redefinida como

$$A L_c + L_c A^* + B B^* = 0$$

$$\|H(s)\|_2^2 = \mathbf{Tr}(B^* L_o B) = \mathbf{Tr}(C L_c C^*) \quad (2.59)$$

e computada como um problema convexo de otimização

$$\min \mathbf{Tr}(B' P B) = \mathbf{Tr}(B' B P) \quad (2.60)$$

sujeito à

$$A' P + P A + C' C \leq 0, \quad P = P' > 0$$

ou computada como

$$\min \quad \mathbf{Tr}(CWC') = \mathbf{Tr}(C'CW) \quad (2.61)$$

sujeito à

$$AW + WA' + BB' \leq 0, \quad W = W' > 0$$

Quando a solução é ótima tem-se

$$\|H(s)\|_2^2 = \mathbf{Tr}(B'PB) = \mathbf{Tr}(CWC')$$

Com o Lema de Finsler pode-se fazer o cálculo da Norma  $\mathcal{H}_2$  pela forma matricial sendo

$\exists W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W = W' > 0$  tal que

$$X \leq CWC'$$

se e somente se  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W = W' > 0$ ,  $H \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de maneira que

$$\begin{bmatrix} CH' + HC' - X & CJ - H \\ J'C' - H' & W - J - J' \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.62)$$

pois

$$\begin{bmatrix} I \\ C' \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} CH' + HC' - X & CJ - H \\ J'C' - H' & W - J - J' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ C' \end{bmatrix} = -X + CWC' \quad (2.63)$$

ou considerando

$\exists X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W = W' > 0$  tais que

$$AW + WA' + BB' \leq 0 \iff \begin{bmatrix} AW + WA' & B \\ B' & -I \end{bmatrix}$$

se e somente se  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W = W' > 0$ ,  $H \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de maneira que

$$\begin{bmatrix} AFCH'' + FA' & W + AG - F & B \\ W + G'A' - F' & -G - G' & 0 \\ B' & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.64)$$

pois

$$U \begin{bmatrix} CH' + HC' - X & CJ - H \\ J'C' - H' & W - J - J' \end{bmatrix} U' = \begin{bmatrix} AW + WA' & B \\ B' & -I \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

com

$$U = \begin{bmatrix} I & A & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

### 2.5.2.2 $\mathcal{H}_2$ - Discreto

De maneira similar para a definição da Norma  $\mathcal{H}_2$  do caso discreto, sistema invariante no tempo é considerado

$$x[k+1] = Ax[k] + Bw[k] \quad (2.66)$$

$$y[k] = Cx[k] \quad (2.67)$$

em que  $w[k] \in \mathbb{R}^m$  representando uma entrada exógena e  $y[k] \in \mathbb{R}^p$  a saída que é monitorada. Para que a norma  $\mathcal{H}_2$  seja finita, o termo de transmissão direta pode existir, ou seja, quando ele for considerado deve-se incluir  $Tr(D'D) = Tr(DD')$

A matriz de transferência que relaciona  $w[k]$  e  $y[k]$  é dada por

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B \quad (2.68)$$

E a norma  $\mathcal{H}_2$  é definida como

$$\|H(z)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m H_{ij}(j\omega)^* H_{ij}(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathbf{Tr}(H(j\omega) * H(j\omega)) d\omega = \quad (2.69)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \sigma_i(H(j\omega))^2 d\omega \quad (2.70)$$

em espaço de estados é dito que

$$w[k] = \delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

implicando em

$$y_\delta[k] = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ CA^{k-1}B, & k > 0 \end{cases} \quad (2.72)$$

A norma  $\mathcal{H}_2$  de  $H(z)$  pode ser descrita por

$$\|H(z)\|_2^2 = \int_0^{+\infty} y_\delta[k]^* y_\delta[k] = \int_0^{+\infty} y_\delta[k] y_\delta[k]^*, \quad (2.73)$$

A caracterização da norma  $\mathcal{H}_2$  em espaço de estados é dado por

$$\|H(z)\|_2^2 = \mathbf{Tr} \left( B^* \sum_{k=0}^{+\infty} A^{k-1*} C^* C A^{k-1} B \right) = \mathbf{Tr} \left( C \sum_{k=0}^{+\infty} A^k B B^* A^{k*} C^* \right) \quad (2.74)$$

Com isso são definidos os gramianos de controlabilidade ( $L_c$ ) e observabilidade ( $L_o$ ) discretos.

$$L_o = \sum_{k=0}^{+\infty} A^{k*} C^* C A^k B$$

$$L_c = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k B B^* A^{k*} C^*$$

e portanto

$$\|H(z)\|_2^2 = \mathbf{Tr}(B^* L_o B) = \mathbf{Tr}(C L_c C^*) \quad (2.75)$$

e computada como um problema convexo de otimização

$$\min \mathbf{Tr}(B' P B) = \mathbf{Tr}(B' B P) \quad (2.76)$$

sujeito à

$$A' P A - P + C' C \leq 0, \quad P = P' > 0$$

ou computada como

$$\min \mathbf{Tr}(C W C') = \mathbf{Tr}(C' C W) \quad (2.77)$$

sujeito à

$$A W A' - W + B B' \leq 0, \quad W = W' > 0$$

Quando a solução é ótima tem-se

$$\|H(z)\|_2^2 = \mathbf{Tr}(B' P B) = \mathbf{Tr}(C W C')$$

Com o Lema de Finsler pode-se fazer o cálculo da Norma  $\mathcal{H}_2$  pela forma matricial sendo

$\exists W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W = W' > 0$  tal que

$$X \leq C W C'$$

se e somente se  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W = W' > 0$ ,  $H \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de maneira que

$$\begin{bmatrix} C H' + H C' - X & C J - H \\ J' C' - H' & W - J - J' \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.78)$$

pois

$$\begin{bmatrix} I \\ C' \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} C H' + H C' - X & C J - H \\ J' C' - H' & W - J - J' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ C' \end{bmatrix} = -X + C W C' \quad (2.79)$$

ou considerando

$\exists X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W = W' > 0$  tais que  $AWA' - W + BB' \leq 0$

$$\begin{bmatrix} W & AW & B \\ WA' & W & 0 \\ B' & 0 & I \end{bmatrix} \leq 0$$

se e somente se  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W = W' > 0$ ,  $H \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de maneira que

$$\begin{bmatrix} W - AF' - FA' & F - AG & B \\ * & -W + G + G' & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.80)$$

pois

$$U \begin{bmatrix} W - AF' - FA' & F - AG & B \\ * & -W + G + G' & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} U' = \begin{bmatrix} W - AWA' & B \\ B' & I \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

com

$$U = \begin{bmatrix} I & A & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

# 3 METODOLOGIA

O módulo didático, cuja montagem e modelagem são apresentadas no Anexo A, utilizado para fazer os ensaios e a síntese de controladores, presentes nesse trabalho, foi feito durante o Programa Pró-Ativa da Universidade Federal de Ouro Preto.

## 3.1 DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS EM ESPAÇO DE ESTADOS

A necessidade da discretização do sistema é perceptível, pois o controlador será projetado em tempo discreto, devido ao uso de um microcontrolador. O sinal que o microcontrolador precisa mensurar é proveniente da planta ( $y(t)$ ), ou seja, um sinal contínuo e o sinal de controle proveniente do microcontrolador que deve ser realimentado na planta também é um sinal contínuo ( $u(t)$ ) denotando a necessidade do uso de conversores A/D e D/A para a comunicação efetiva entre os meios ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997..

### 3.1.1 Discretização - Método Forward Euler

Um sistema contínuo tem sua representação em espaço de estados definida como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3.2)$$

Inicialmente, o sistema é considerado LIT (Linear Invariante no Tempo) e pondera-se que a solução do sistema é homogênea ( $u(t) = 0$ ) e as condições iniciais são não nulas ( $x(0) \neq 0$ ), ou seja, o sistema é dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (3.3)$$

Portanto, a solução do sistema pode ser expressa por:

$$x(t) = e^{At}x(0), \quad t \geq 0 \quad (3.4)$$

Com isso a matriz de transição desse sistema é expresso por:

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \quad (3.5)$$

Agora, para o mesmo sistema considera-se que ele possui solução não homogênea ( $u \neq 0$ ) e condições iniciais não nulas ( $x(0) \neq 0$ )

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.6)$$

que tem solução dada por:

$$x(t) = e^{A(t-\tau)t}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (3.7)$$

Escolhe-se um período de amostragem de modo que  $T > 0, \forall t \leq kT, k \in \mathbb{N}$  encontrando como solução

$$x(kT) = e^{AkT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (3.8)$$

Trabalhando com  $x((k+1)T)$  tem-se

$$x((k+1)T) = e^{A(k+1)T}x(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (3.9)$$

$$x((k+1)T) = e^{At}e^{kT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (3.10)$$

$$x((k+1)T) = e^{AT} \left( e^{Akt}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (3.11)$$

$$x((k+1)T) = e^{At}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (3.12)$$

Sendo  $u(t) = u(kT), \forall kT \leq t < (k+1)T$ ,

$$x((k+1)T) = e^{At}x(kT) + u(kT) \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bd\tau \quad (3.13)$$

ou de forma simplificada

$$x((k+1)T) = A_Dx(kT) + B_Du(kT) \quad (3.14)$$

Portanto, a representação do sistema LIT em tempo discreto é dada por:

$$x[k+1] = A_Dx[k] + B_D[k] \quad (3.15)$$

$$y[k] = C_Dx[k] + D_D[k] \quad (3.16)$$

em que

$$A_D = e^{AT}$$

$$B_D = \int_0^T e^{A\tau}d\tau B$$

$$C_D = C$$

$$D_D = D$$

# 4 CONTROLADORES

Nesse capítulo são descritos e modelados alguns tipos de controladores para serem aplicados na planta didática. A modelagem contínua para cada controlador sempre é apresentada devido à simplicidade e à facilidade de sistemas contínuos serem mais abordados durante a graduação. Em seguida, é apresentada a modelagem para o caso discreto que ocorre de forma similar e que é o principal enfoque desse trabalho.

## 4.1 COMPENSADOR ESTÁTICO PROPORCIONAL ( $Kx$ )

### 4.1.1 $Kx$ - Contínuo

Dado o sistema genérico para o caso contínuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.1)$$

em que  $x$  é o vetor de estados e o  $u$  é a entrada de controle do sistema e a lei de controle é expressa por

$$u = Kx \quad (4.2)$$

na qual  $K$  é um vetor de ganhos que estabiliza o sistema. Em malha fechada, ou seja, aplicando a lei de controle (4.2) em (4.1) tem-se

$$\dot{x} = (A + BK)x. \quad (4.3)$$

Aplicando (4.3) em (2.13), obtém-se

$$\dot{V}(x) = x^T[(A^T + K^T B^T)P + P(A + BK)]x < 0. \quad (4.4)$$

Expandindo-se (4.4), obtém-se

$$A^T P + K^T B^T P + PA + PBK < 0. \quad (4.5)$$

Observe que (4.5) não é linear, para resolver esse problemas é feito uma transformação de congruência, pré e pós multiplica-se (4.5) por  $P^{-1}$ . Assim,

$$AP^{-1} + P^{-1}A^T + BK^{-1}P^{-1} + P^{-1}K^T B^T < 0 \quad (4.6)$$

definindo  $X = KP^{-1}$  e  $Y = P^{-1}$  a equação (4.6) pode ser reescrita como

$$AY + YA^T + BX + X^T B^T < 0. \quad (4.7)$$

Portanto as LMIs que resolvem esse problema são:

$$Y > 0$$

$$AY + YA^T + BX + X^T B^T < 0$$

Note que  $Y > 0$  por causa da característica da matriz  $P$  que é simétrica e definida positiva, então  $P > 0 \iff P^{-1} > 0$ . Para o caso politópico as LMIs geradas são similares, porém são considerados as incertezas presentes no sistema. A definição do sistema passa a ser:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i x + B_i u) \quad (4.8)$$

A lei de controle continua definida como em 4.2 e o sistema em malha fechada é dado por

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i + B_i K) x \quad (4.9)$$

Por simplicidade, escreve-se  $A(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i$  e  $B(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i$ . As deduções são parecidas, portanto as LMI's para o caso politópico são

$$Y > 0 \quad (4.10)$$

$$A(\alpha)Y + YA(\alpha)^T + B(\alpha)X + X^T B(\alpha)^T < 0 \quad (4.11)$$

#### 4.1.2 $Kx$ - Discreto

Tendo o sistema genérico para o caso discreto

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \quad (4.12)$$

e a lei de controle

$$u[k] = Kx[k]. \quad (4.13)$$

em malha fechada o sistema é definido por

$$x[k+1] = (A + BK)x[k]. \quad (4.14)$$

Apesar da equação do sistema e a lei de controle do caso contínuo e do caso discreto serem análogas, as LMIs para encontrar esse compensador estabilizante são bem distintas devido à segunda definição do teorema de Lyapunov serem diferentes para o caso contínuo e discreto. Usando a equações 2.17 e 4.14 tem-se:

$$x[k]^T [(A + BK)^T P (A + BK) - P^{-1}] x[k] < 0, \quad (4.15)$$

aplicando complemento de Schur, obtém-se

$$\begin{bmatrix} -P & A^T + K^T B^T \\ * & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.16)$$

Utilizando uma multiplicação de congruência usando com  $\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ , chega-se a

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & P^{-1} A^T + P^{-1} K^T B^T \\ * & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.17)$$

Em seguida, definindo  $X = KP^{-1}$  e  $Y = P^{-1}$  a condição final é definida como:

$$\begin{bmatrix} -Y & YA^T + XB^T \\ * & -Y \end{bmatrix} < 0. \quad (4.18)$$

Para simplificar a escrita a mesma definição e substituições para o caso politópico contínuo será utilizada para o caso discreto, portanto a LMI é

$$\begin{bmatrix} -Y & YA^T(\alpha) + XB^T(\alpha) \\ * & -Y \end{bmatrix} < 0 \quad (4.19)$$

Em ambos os casos as LMIs são resolvidas computacionalmente usando o *software* MATLAB. As LMIs finais descritas anteriormente resolvem de maneira indireta o problema proposto encontrando  $X$  e  $Y$ , porém é necessário de fato descobrir o valor de  $K$ , então  $X$  e  $Y$  devem ser tratados de maneira que expressem o valor do ganho para o controlador desejado. Assim,  $K$  é obtido como

$$K = XY^{-1} \quad (4.20)$$

## 4.2 COMPENSADORES USANDO AS NORMAS $\mathcal{H}_\infty$ E $\mathcal{H}_2$

Em Skogestad e Postlethwaite 2007. é feita a síntese de controladores pela norma  $\mathcal{H}_\infty$  de maneira genérica, para que a metodologia ensinada possa ser aplicada a qualquer sistema. O modelo geral é mostrado na Figura 10. Os sinais mostrados são:  $u$  as variáveis controladas,

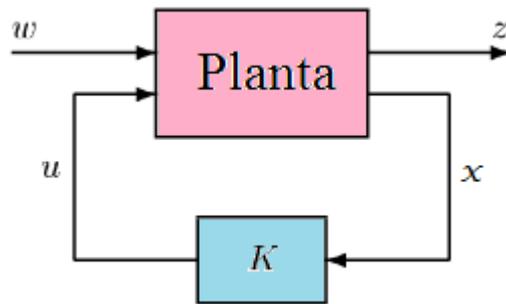


Figura 10 – Modelo genérico usado para síntese de controladores  $\mathcal{H}_\infty$

$x$  as variáveis medidas,  $w$  entrada de sinais exógenos e  $z$  é a saída de desempenho. As entradas referentes a  $w$  são as que se deseja minimizar para atender a algum critério de desempenho.

## 4.2.1 Norma $\mathcal{H}_\infty$

### 4.2.1.1 $\mathcal{H}_\infty$ - Contínuo

Considerando o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_w w \quad (4.21)$$

$$z = C_z x + D_z u + D_w w \quad (4.22)$$

Considerando a lei de controle  $u = Kx$  para o sistema, em malha fechada tem-se

$$\dot{x} = (Ax + BK)x + B_w w \quad (4.23)$$

$$z = (C_z x + D_z K)x + D_w w \quad (4.24)$$

Substituindo na LMI da equação 2.40 referente a minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  para o caso contínuo encontra-se

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + K^T B^T P + PB^T P + PBK & PB_w & C^T + K^T D_z^T \\ * & -\gamma I & D_w^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.25)$$

Note que o 4.25 não é uma LMI. Para resolver esse problema deve ser feita uma transformação de congruência usando a matriz

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

e fazendo substituições para linearização sendo  $X = P^{-1}$  e  $Y = KP^{-1}$  a LMI se torna

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + BY + Y^T B^T & B_w X & X C_z^T Y^T D_z^T \\ * & -\gamma I & D_w^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.26)$$

Portanto as LMIs que devem ser solucionadas para que obtenha a lei de controle  $u = Kx$  são  $X > 0$  e referente 4.26.

### 4.2.1.2 $\mathcal{H}_\infty$ - Discreto

Tomando como base o sistema:

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + B_w w \quad (4.27)$$

$$z[k] = C_z x[k] + D_z u[k] + D_w w \quad (4.28)$$

Considerando a lei de controle  $u_k = Kx_k$  para o sistema, em malha fechada tem-se

$$x[k+1] = (Ax + BK)x[k] + B_w w \quad (4.29)$$

$$z[k] = (C_z x + D_z K)x[k] + D_w w \quad (4.30)$$

Usando as equações (4.29) e (4.30) e a LMI 2.48 que visa minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  para o caso discreto, encontra-se

$$\begin{bmatrix} P & (A+BK)^T P & 0 & (C_z + D_z K)^T \\ * & P & P B_w & 0 \\ * & * & \gamma^2 I & D_w^T \\ * & * & * & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.31)$$

A equação 4.31 não representa uma LMI portanto é necessário fazer uma multiplicação de

congruência utilizando a matriz  $\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$  e substituições necessárias tais como:

$X = P^{-1}$  e  $Y = K P^{-1}$ , obtém-se a LMI final para o caso discreto

$$\begin{bmatrix} X & XA + Y^T B^T & 0 & X C_z^T + Y^T D_z^T \\ * & X & B_w X & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & D_w^T \\ * & * & * & I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.32)$$

Portanto para obter a lei de controle  $u = Kx$  para o caso discreto é necessário resolver 4.32.

## 4.2.2 Norma $\mathcal{H}_2$

### 4.2.2.1 $\mathcal{H}_2$ - Contínuo

Sendo o sistema abordado da forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) \quad (4.33)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

No capítulo 3 observou-se que a norma  $\mathcal{H}_2$  foi definida como o problema de otimização descrito como

$$\min \quad \mathbf{Tr}(B'PB) = \mathbf{Tr}(B'BP), \quad P = P' > 0 \quad (4.34)$$

sujeito a

$$A'P + PA + C'C \leq 0$$

Sendo a lei de controle definida como  $u(t) = Kx(t)$ , a restrição do problema de otimização se modifica e passa a possuir a seguinte forma:

$$(A+BK)'P + P(A+BK) + (C+DK)'(C+DK) \leq 0$$

A restrição pode ser reescrita aplicando o complemento de Schur como

$$\begin{bmatrix} (A+BK)'P + P(A+BK) & (C+DK)' \\ (C+DK)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.35)$$

Fazendo a multiplicação de congruência para obter a linearidade temos

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A+BK)'P + P(A+BK) & (C+DK)' \\ (C+DK)' & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} AW + WA' + BZ + Z'B & WC + Z'D \\ * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.36)$$

sendo  $W = P^{-1}$  e  $Z = KP^{-1}$ . O cômputo pode ser feito também por meio do problema de otimização abaixo

$$\min \quad \text{Tr}(X), \quad P = P' > 0 \quad (4.37)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} X & B'_w P \\ * & P \end{bmatrix} > 0 \quad (4.38)$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & B'_w P \\ * & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} X & B'_w \\ 0 & W \end{bmatrix} > 0 \quad (4.39)$$

sendo  $W = P^{-1}$ .

Portanto, diz-se que é possível estabilizar sistema dado por (2.51) por realimentação de estados se uma solução para o problema de otimização convexo existir

$$\min \quad \text{Tr}(X)$$

$$X = X', Z, W = W' > 0$$

$$\begin{bmatrix} X & B'_w \\ * & W \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} AW + BZ + WA' + Z'B' & WC' + Z'D' \\ * & -I \end{bmatrix} < 0$$

sendo  $\|H(s)\|_2 = \rho$ ,  $\rho^2 = \text{Tr}(X)$  e  $K = ZW^{-1}$ .

#### 4.2.2.2 $\mathcal{H}_2$ - Discreto

Sendo o sistema abordado da forma

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + B_w w[k] \quad (4.40)$$

$$y[k] = Cx[k]$$

Observou-se que a norma  $\mathcal{H}_2$  foi definida como o problema de otimização descrito abaixo:

$$\min \quad \text{Tr}(B'PB) = \text{Tr}(B'BP), \quad P = P' > 0 \quad (4.41)$$

sujeito à

$$A'PA - P + C'C \leq 0$$

Sendo definida a lei de controle definida como  $u(t) = Kx[k]$  a restrição do problema de otimização se modifica e passa a possuir a seguinte forma

$$(A + BK)'P(A + BK) - P + (C + DK)'(C + DK) \leq 0$$

A restrição pode ser reescrito, por meio do complemento de Schur, como

$$\begin{bmatrix} P & (A + BK)'P & (C + DK)' \\ * & P & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.42)$$

Fazendo uma transformação de congruência para obter a linearidade, tem-se

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & (A + BK)'P & (C + DK)' \\ * & P & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0,$$

resulta em

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1}A' + P^{-1}K'B' & P^{-1}C' + P^{-1}K'D' \\ * & P^{-1} & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.43)$$

Finalmente, fazendo  $W = P^{-1}$  e  $Z = KP^{-1}$  tem-se

$$\begin{bmatrix} W & WA' + Z'B' & WC' + Z'D' \\ * & W & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.44)$$

Assim, o problema de otimização convexo para a síntese de controladores da norma  $\mathcal{H}_2$  é expresso por

$$\min \quad \mathbf{Tr}(X)$$

$$X = X', Z, W = W' > 0$$

$$\begin{bmatrix} X & B'_w \\ * & W \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} W & WA' + Z'B' & WC' + Z'D' \\ * & W & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.45)$$

sendo  $\|H(s)\|_2 = \rho$ ,  $\rho^2 = \text{Tr}(X)$  e  $K = ZW^{-1}$ .

Portanto, diz-se que é possível estabilizar sistema discreto por realimentação de estados se uma solução para o problema de otimização convexo descrito anteriormente existir.

# 5 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentadas as matrizes politópicas discretizadas e os ganhos para cada controlador digital projetado. Além disso, são apresentadas as respostas do sistema, quando o controlador está inserido.

## 5.1 DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA

Para todos os tipos de controladores apresentados foi utilizado a discretização *Forward Euler* e apenas para efeito comparativo uma técnica de discretização mais elaborada (usando expansão por série de Taylor) foi utilizada para ser aplicada no controlador estabilizante. Para os controladores que usam normas, esse método não será utilizado devido a elevar muito a complexidade da discretização por ter que discretizar as matrizes  $C$  e  $D$  do sistema.

Sabe-se que a taxa de amostragem influencia diretamente no funcionamento do controlador, portanto o período de amostragem escolhido é mais dependente das limitações do *ARDUINO* do que o sistema realmente requer, portanto o valor utilizado foi de  $T = 0,001s$ .

### 5.1.1 Matrizes Discretas - Método Forward Euler

As matrizes politópicas  $A_D$  e  $B_D$  encontradas para o módulo didático são:

$$A_D(1) = \begin{bmatrix} 1.000 & 0 & 0 \\ 0.8333 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0.8340 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

$$A_D(2) = \begin{bmatrix} 1.000 & 0 & 0 \\ 0.8333 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 7.7778 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

$$A_D(3) = \begin{bmatrix} 1.833 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0.8340 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

$$A_D(4) = \begin{bmatrix} 1.833 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 7.7778 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

$$A_D(5) = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0 & 0 \\ 1.6666 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0.8340 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

$$A_D(6) = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0 & 0 \\ 1.6666 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0.8340 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

$$A_D(7) = \begin{bmatrix} 1.000 & 0 & 0 \\ 0.8333 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0.8340 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

$$A_D(8) = \begin{bmatrix} 1.000 & 0 & 0 \\ 0.8333 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 7.7778 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

$$B_D(1) = \begin{bmatrix} -0.4167 \\ 0.4167 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_D(2) = \begin{bmatrix} -0.4167 \\ 0.4167 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_D(3) = \begin{bmatrix} -0.8333 \\ 0.8333 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_D(4) = \begin{bmatrix} -0.8333 \\ 0.8333 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_D(5) = 1e^{-04} \begin{bmatrix} -0.4167 \\ 0.4167 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_D(6) = 1e^{-04} \begin{bmatrix} -0.4167 \\ 0.4167 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_D(7) = \begin{bmatrix} -0.4166 \\ 0.4166 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_D(7) = \begin{bmatrix} -0.4166 \\ 0.4166 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 5.1.2 Matrizes Discretas - Expansão da série de Taylor

Para a discretização por expansão da série de Taylor tem-se as seguintes matrizes politópicas  $A_D$  e  $B_D$

$$A_D(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 833.333 & -833.333 & 0 \\ 0 & 834.0278 & -833.333 \end{bmatrix}$$

$$A_D(2) = 1e^3 * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.833 & -0.833 & 0 \\ 0 & 7.7778 & -0.833 \end{bmatrix}$$

$$A_D(3) = \begin{bmatrix} 833.25 & 0 & 0 \\ 0.0833 & -833.333 & 0 \\ 0 & 834.0278 & -833.333 \end{bmatrix}$$

$$A_D(4) = 1e^3 \begin{bmatrix} 0.8333 & 0 & 0 \\ 0.0001 & -0.833 & 0 \\ 0 & 7.7778 & -0.833 \end{bmatrix}$$

$$A_D(5) = 1e^3 \begin{bmatrix} 0.8333 & 0 & 0 \\ 1.6666 & -0.833 & 0 \\ 0 & 0.8340 & -0.833 \end{bmatrix}$$

$$A_D(6) = 1e^3 \begin{bmatrix} 0.8333 & 0 & 0 \\ 1.6666 & -0.833 & 0 \\ 0 & 7.7778 & -0.833 \end{bmatrix}$$

$$A_D(7) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 833.333 & -833.333 & 0 \\ 0 & 834.0278 & -833.333 \end{bmatrix}$$

$$A_D(8) = 1e^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.833 & -0.833 & 0 \\ 0 & 7.7778 & -0.833 \end{bmatrix}$$

$$B_D(1) = \begin{bmatrix} -416.667 \\ 416.667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_D(2) = \begin{bmatrix} -416.667 \\ 416.667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_D(3) = \begin{bmatrix} -833.2917 \\ 833.2917 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_D(4) = \begin{bmatrix} -833.2917 \\ 833.2917 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_D(5) = \begin{bmatrix} -0.0417 \\ 0.0417 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_D(6) = \begin{bmatrix} -0.0417 \\ 0.0417 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_D(7) = \begin{bmatrix} -416.6667 \\ 416.6667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_D(8) = \begin{bmatrix} -416.6667 \\ 416.6667 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 5.2 CONTROLADORES

Com as LMIs encontradas, os métodos de discretização escolhidos e as rotinas implementadas no Matlab, foi possível encontrar os ganhos que estabilizam o sistema para cada controlador proposto. Como a planta possui três estados, cada controlador é composto por três ganhos, que atuam em cada estado para estabilizar o sistema.

Destaca-se que os controladores são projetados utilizando o critério de estabilidade quadrática, como a matriz  $P$  é constante, então os controladores projetados também são válidos para sistemas variáveis no tempo.

Para o controlador estabilizante utilizando a discretização Forward de Euler tem-se o controlador

$$K_D = [1.4787 \quad 0.0120 \quad 0.0000]$$

O controlador obtido quando utilizou-se a discretização por expansão de Taylor de terceira ordem foi

$$K_{D_{Taylor}} = [2.4697 \quad 0.1289 \quad 0.0226].$$

Quando utilizou-se a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , obteve-se o controlador

$$K_{D_{\mathcal{H}_\infty}} = [2.1645 \quad -0.0175 \quad -9.8293e^{-6}]$$

com a Norma  $\mathcal{H}_\infty = 25.7530$  e para o controlador utilizando a norma  $\mathcal{H}_2$ , obteve-se

$$K_{D_{\mathcal{H}_2}} = [1.9999 \quad 7.0574e^{-6} \quad 3.2664e^{-6}]$$

com a norma definida  $\mathcal{H}_2 = 22.7000$ .

Em uma análise preliminar, verifica-se a proximidade dos valores dos ganhos encontrados para diferentes métodos utilizados, essa característica é devido à escolha do período de amostragem elevado.

## 5.3 RESPOSTAS DO SISTEMA SIMULADO

Com a discretização obtida nos métodos supracitados e os controladores devidamente projetados, utilizou-se o *simulink*, ferramenta do *software* MATLAB para fazer a simulação dos resultados. Destaca-se que o comportamento da planta é muito rápido portanto o tempo de simulação é muito curto para que possa ser verificado o comportamento do sistema com os controladores inseridos. O tempo de simulação adotado é de  $3ms$  para todos os casos, exceto para a discretização pelo método de expansão de Taylor, no qual o sistema só ficou factível quando utilizou-se o tempo de amostragem de  $1e^{-4}$  e o tempo de simulação de  $50ms$ .

### 5.3.1 Controlador Estabilizante $Kx$ - Discretização Euler Foward

Na Figura 11, observa-se a eficácia do controlador, em que o sistema já se encontrava em regime permanente em  $1ms$ . A Tabela 2 mostra as informações relevantes de cada estado.

Tabela 1 – Resumo da resposta do Controlador Estabilizante Método Foward de Euler

|       | Máximo Sobressinal (V) | Tempo de assentamento (ms) |
|-------|------------------------|----------------------------|
| $x_1$ | 1                      | 0.5                        |
| $x_2$ | 2.8                    | 0.7                        |
| $x_3$ | 8.8                    | 1                          |



Figura 11 – Reposta do sistema - Controlador Estabilizante Método Foward de Euler

### 5.3.2 Controlador Estabilizante $Kx$ - Discretização pelo Método de Taylor

Observa-se que com o controlador estabilizante empregando o método de expansão de Taylor, o sistema apresenta um sobressinal bem menor em  $x_3$  não atingindo  $2V$ , porém o tempo de assentamento é o maior apresentado sendo de  $12ms$ .

Tabela 2 – Resumo da resposta do Controlador Estabilizante Método Expansão de Taylor

|       | Máximo Sobressinal (V) | Tempo de assentamento (ms) |
|-------|------------------------|----------------------------|
| $x_1$ | 1                      | 5                          |
| $x_2$ | 1.45                   | 10                         |
| $x_3$ | 1.8                    | 12                         |

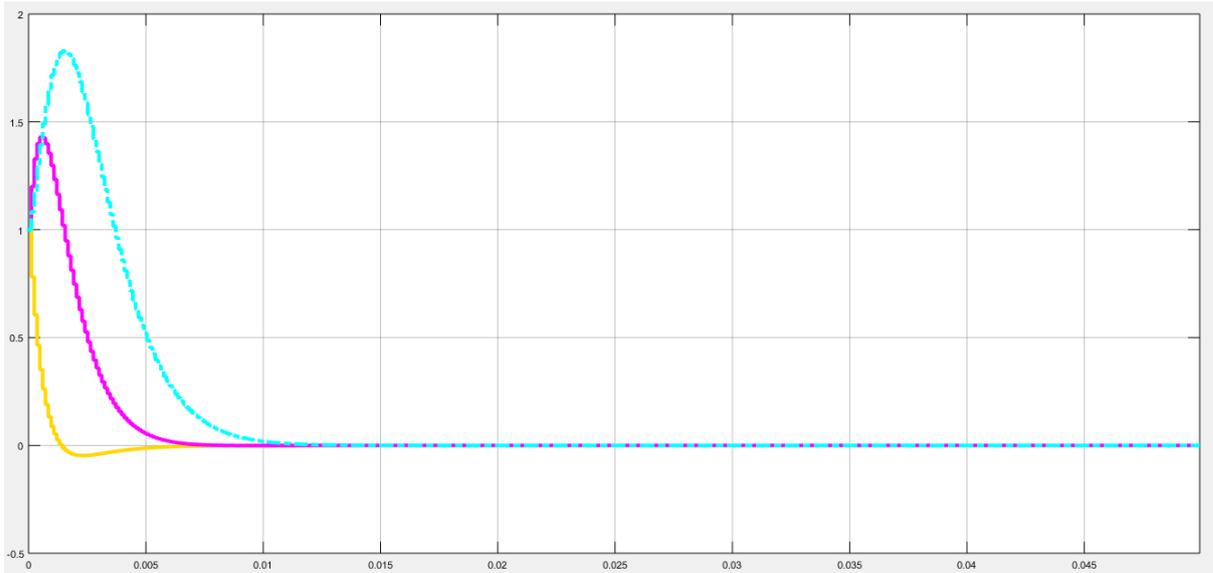


Figura 12 – Reposta do sistema - Discretização por método de expansão de Taylor

### 5.3.3 Controlador $\mathcal{H}_\infty$

Na Figura 13, verifica-se a resposta do sistema com o controlador inserido, para esse caso  $x_3$  teve um máximo sobressinal de 11V com tempo de assentamento de 0.75ms. A Tabela 4 mostra o resumo das informações de todos os estados.

Tabela 3 – Resumo da resposta do controlador  $\mathcal{H}_\infty$

|       | Máximo Sobressinal (V) | Tempo de assentamento (ms) |
|-------|------------------------|----------------------------|
| $x_1$ | 1                      | 0.3                        |
| $x_2$ | 2.1                    | 0.5                        |
| $x_3$ | 11                     | 0.75                       |

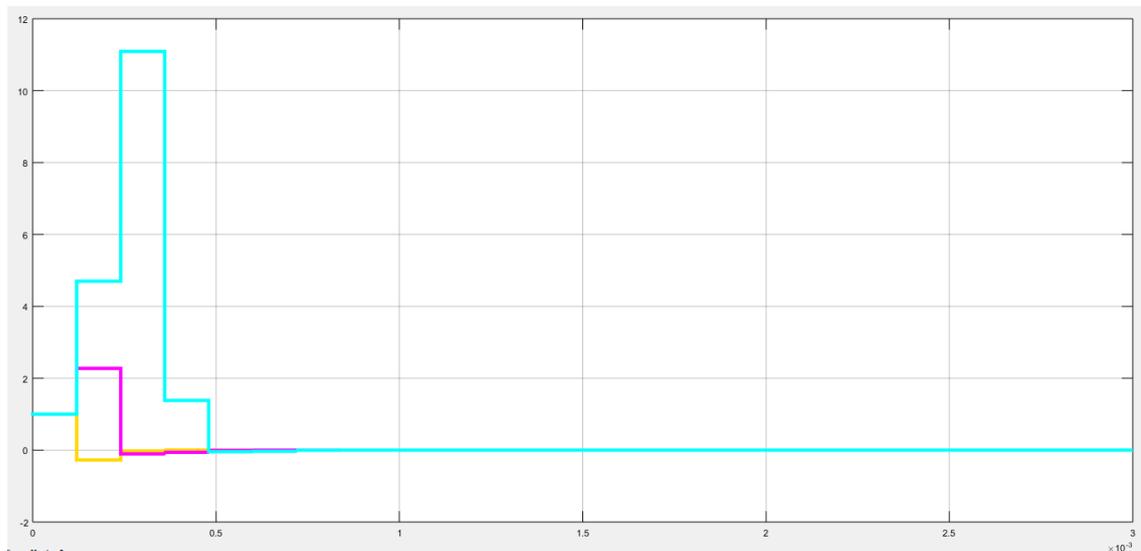


Figura 13 – Reposta do sistema - controlador  $\mathcal{H}_\infty$

### 5.3.4 Controlador $\mathcal{H}_2$

Para o controlador  $\mathcal{H}_2$ , o  $x_3$  obteve o máximo sobressinal de  $8V$  e para atingir regime permanente demorou o tempo de  $1.5ms$

Tabela 4 – Resumo da resposta do controlador -  $\mathcal{H}_2$

|       | Máximo Sobressinal (V) | Tempo de assentamento (ms) |
|-------|------------------------|----------------------------|
| $x_1$ | 1                      | 0.75                       |
| $x_2$ | 1.5                    | 1                          |
| $x_3$ | 8                      | 1.5                        |

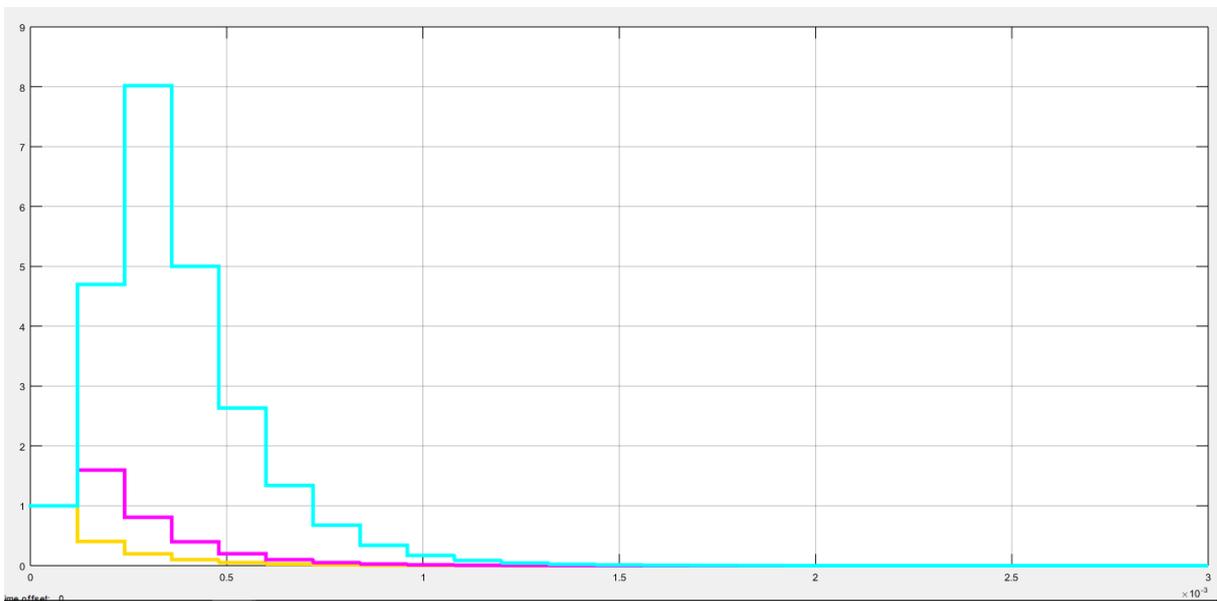


Figura 14 – Resposta do sistema - configuração instável

## 5.4 RESPOSTAS DO SISTEMA REAL

Como mencionado o microcontrolador usado (*ARDUINO UNO*) não possui saídas analógicas, apenas em formato de PWM, portanto adequaram-se os tempos do microcontrolador em  $+V_{cc}$  ou  $-V_{cc}$  para que o valor médio da saída seja condizente com o que o controlador necessita para estabilizar o sistema.

Destaca-se que, existe a possibilidade de transformar a saída PWM em um sinal analógico contínuo usando filtros, porém essa técnica não pode ser utilizada nesse projeto devido à necessidade da inserção de capacitores, o que alteraria a dinâmica do sistema em. Portanto, as respostas apresentadas nessa seção sempre estarão acompanhadas por um sinal PWM que é responsável por excitar o sistema a fim de controlá-lo.

### 5.4.1 Sistema Estável

Sabe-se que o sistema pode ser estável ou instável dependendo dos valores atribuídos a  $R_2$  e  $R_3$ , como explicado no anexo A. Na Figura 15, mostra quando o sistema é estável, ou seja,  $R_2 < R_3$ .

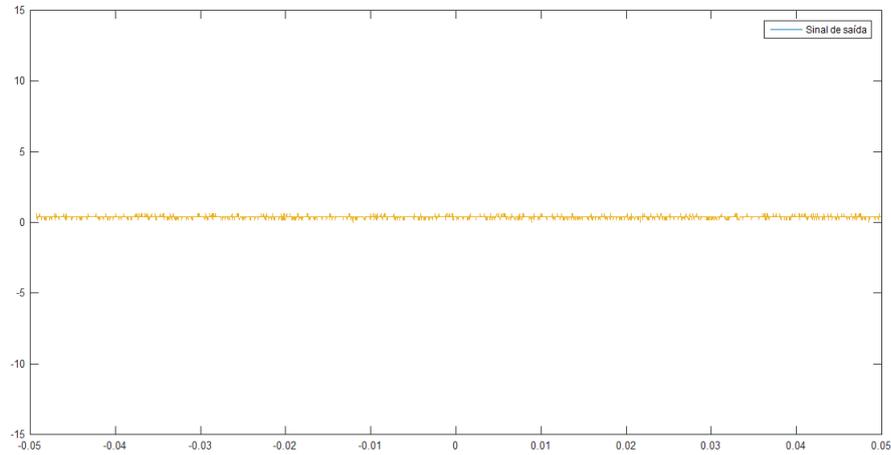


Figura 15 – Resposta do sistema - configuração estável

### 5.4.2 Sistema Instável

Na Figura 16 é representado a saída do sistema quando ele possui característica instável, isto é,  $R_3 < R_2$ , como se trata de um circuito real, formado por amplificadores operacionais, a instabilidade é verificada quando a saída do sistema está saturada nos valores de alimentação dos circuitos integrados.

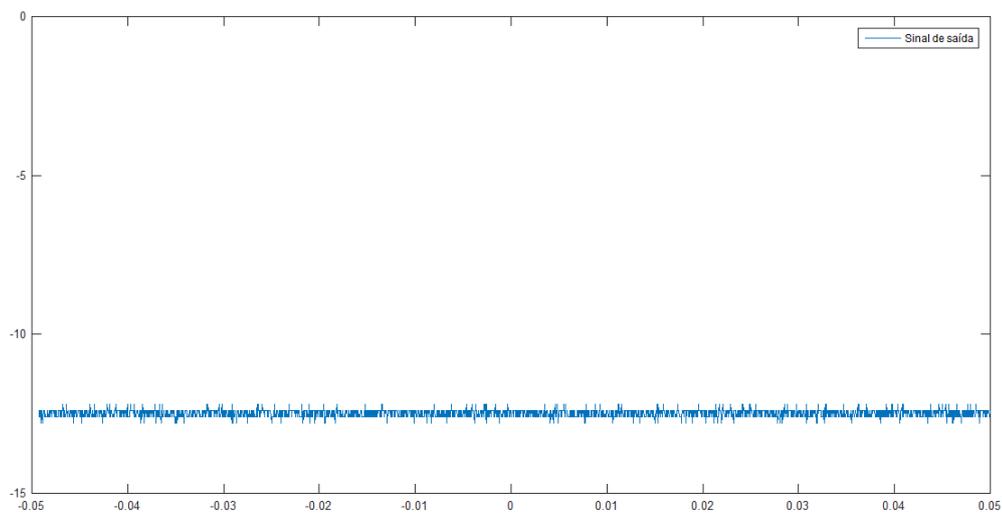


Figura 16 – Resposta do sistema - configuração instável

### 5.4.3 Controladores Estabilizantes

Controladores estabilizantes não atendem à critérios de desempenho. Sua finalidade é apenas que o sistema seja estável em regime permanente.

#### 5.4.3.1 Controlador Estabilizante - Discretização Método Forward de Euler

A Figura 17 mostra a resposta quando o controlador estabilizante é ligado à planta. A saída é oscilatória em torno do valor médio de  $-3.1185V$

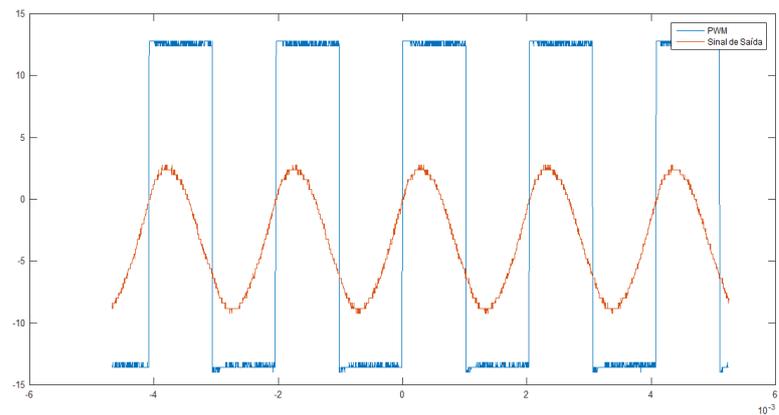


Figura 17 – Resposta do sistema com o controlador estabilizante (método de discretização Forward de Euler) inserido.

#### 5.4.3.2 Controlador Estabilizante - Discretização Método de expansão de Taylor

A Figura 18 mostra a resposta do sistema, quando controlador estabilizante esta inserido no sistema, ela tem comportamento oscilatório e valor médio de  $-3.5428$ .

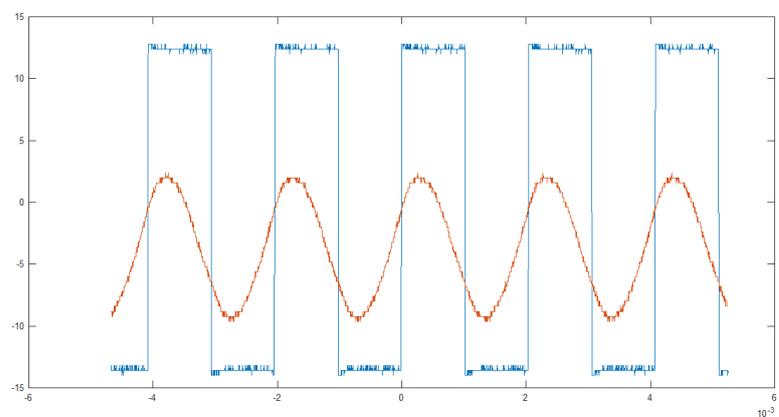


Figura 18 – Resposta do sistema com o controlador (método de expansão de Taylor) inserido.

Para o controlador usando a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , a saída é demonstrada na Figura 19 em que a saída é oscilatória e possui valor médio de  $-2,5410$ .

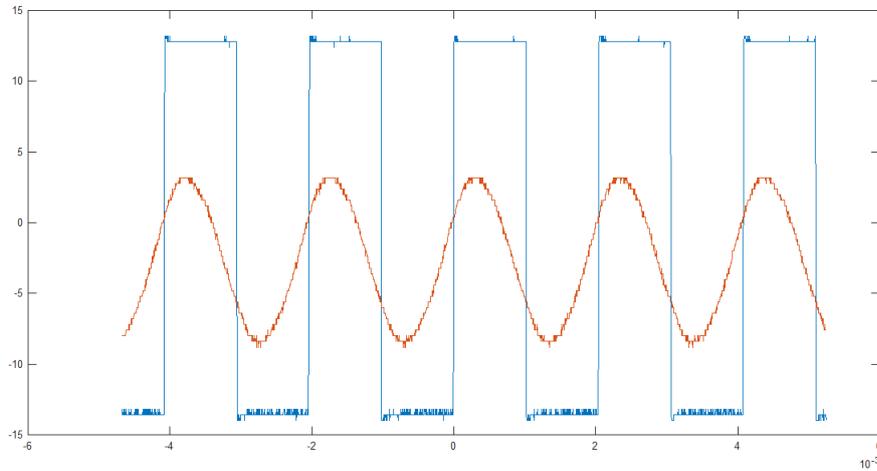


Figura 19 – Resposta do sistema com o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  inserido.

Para o controlador usando a norma  $\mathcal{H}_2$ , quando é ligado ao sistema, tem como resposta a saída apresentada na Figura 20, em que a saída é oscilatório de valor médio de  $-3.4116$ .

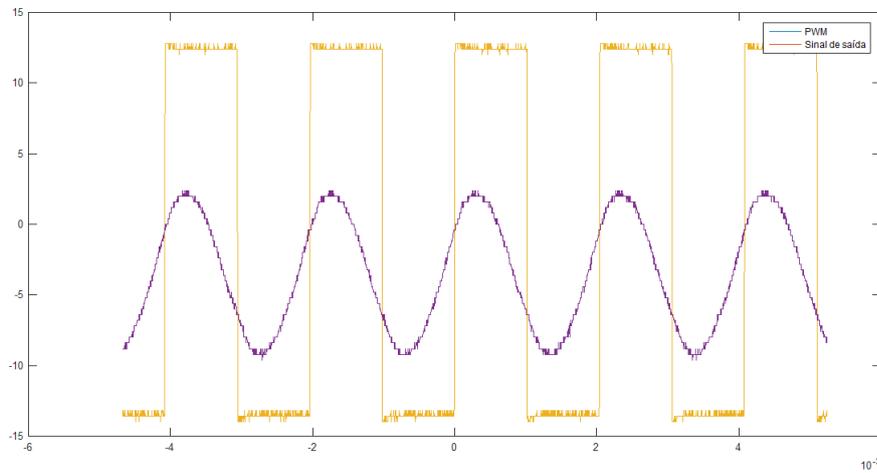


Figura 20 – Resposta do sistema com o controlador  $\mathcal{H}_2$  inserido.

#### 5.4.4 Análise e comentários

Num plano ideal, a validade dos controladores foi verificada, visto que em todos os casos tratados, os controladores foram capazes de estabilizar o sistema. Comparando aos sistemas que utilizaram discretização Foward Euler, verificou-se que controlador  $\mathcal{H}_2$  trás o menor sobressinal entre todos os controladores analisados, em contrapartida esse sistema também possui o maior tempo de assentamento. O sistema com menor tempo de assentamento foi o que utilizou o controlador  $\mathcal{H}_\infty$ , que por sua vez ele possui o maior valor de sobressinal, destaca-se que esse controlador é o que possui maior robustez contra ruídos ao sistema.

Para o controlador estabilizante, foram utilizadas duas técnicas de discretização. Quando utilizou a discretização por método de expansão de Taylor, notou-se um máximo sobressinal reduzido, porém um tempo de assentamento bastante longo, sendo um método ideal para sistemas que não suportam variações bruscas.

Nos testes práticos, durante o experimento, observou-se que todos os controladores citados no trabalho fizeram o controle parcial do sistema. O sistema saiu da instabilidade, mas não atingiu totalmente a estabilidade. Para cada controlador, o sistema oscilou em torno de um valor médio diferente. Devido ao sistema ser muito rápido, como pode ser verificado no anexo A. A taxa de amostragem que o microcontrolador exprime a planta é muito baixa devido às limitações do *ARDUINO UNO*. Além disso, a maneira que o sinal sai do microcontrolador para realimentar o sistema não é a ideal. Para o presente trabalho, utilizou-se a saída em pwm, tipo de saída disponível no microcontrolador escolhido, o ideal seria usar algum microcontrolador com saída D/A, ou fazer a montagem de um conversor D/A externo ao controlador, dessa maneira o controlador iria atuar de maneira efetiva no sistema.

# 6 CONCLUSÃO

O presente trabalho permitiu o desenvolvimento e aplicação de técnicas avançadas de controle em um módulo didático. Essas metodologias são baseadas nas teorias de controle robusto utilizando o artifício das LMIs, que são técnicas usadas para a síntese de controladores menos conservadores do que as já existentes. Os controladores encontrados e as técnicas de discretização utilizadas são válidas como foi mostrado em ambiente de simulação, para todos os casos, todos os controladores estabilizaram o sistema. Além disso, foi possível fazer uma análise preliminar para a escolha do controlador adequado para uma dada aplicação.

O uso de uma planta real permitiu a exemplificação e fixação do conceito de incerteza politópica, além de nos fazer refletir sobre as respostas do sistema e a coerência das informações. Trabalhar com o módulo utilizando controladores digitais trouxe diversos questionamentos que ao se fazer a montagem em um *software* de simulação por muitas vezes são deixadas de lado, tais como: (1) A dinâmica do sistema é rápido ou lenta? (2) O microcontrolador escolhido é adequado para o processamento do sinal proveniente da planta? (3) É necessário um circuito de aquisição de sinal? Entre outras.

Portanto, o controle parcial obtido nos testes práticos mostram que apesar dos teoremas serem confirmados e validados durante a simulação, é necessária uma abstração maior para aplicá-los no plano real, principalmente por se tratar de um sistema discreto, pois sabe-se que uma discretização inadequada interfere totalmente no comportamento do sistema. Dessa maneira, enfatiza-se a importância de aliar teoria e prática para melhor compreensão das teorias abordadas.

## 6.1 MELHORIAS PROPOSTAS

- Sugere-se a refabricação do módulo alterando valores de resistências e capacitâncias para deixar a dinâmica da planta mais lenta.
- Fazer a montagem de um conversor D/A ou utilizar um microcontrolador que já disponibilize essa saída;
- Montagem em placa única a planta e o circuito de aquisição e de realimentação do sinal.

## 6.2 TRABALHOS FUTUROS

Com uma planta de dinâmica mais lenta, será possível fazer a síntese de outros controladores além dos apresentados nesse trabalho. Além disso, abordagens visando melhorar os critérios de desempenhos poderão ser propostas.

# ANEXO A – MÓDULO DIDÁTICO

O módulo didático foi idealizado pelos professores Víctor Costa e Márcio Braga com intuito de ser utilizado no presente trabalho fazendo abordagem de controle robusto via LMIs para o caso discreto e para o trabalho de conclusão de curso da Aluna Marina Alvarenga fazendo abordagem de controle robusto via LMIs para o caso contínuo, portanto a montagem física contou com a participação de todos os envolvidos no trabalho. Além disso, tornou-se um projeto vinculado a UFOP (Pró-ativa) e posteriormente se tornou um artigo que foi apresentado no SBAI 2017. Além disso, o módulo e o seu projeto continuam disponíveis na UFOP para que possa ser utilizado em outros trabalhos da área de controle.

## A.1 MODELAGEM DO MÓDULO DIDÁTICO

Em KELES et al. 2017. mostra é demonstrado como o módulo é constituído em dois estágios: a planta principal que contém dois parâmetros incertos e um estado medido e a planta auxiliar que é composta por dois filtros passa-baixas que possui a terceira incerteza e outros dois estados a serem medidos. As Figuras 21 e 22 apresentam os desenhos esquemáticos da planta principal e da planta auxiliar, respectivamente. Ainda

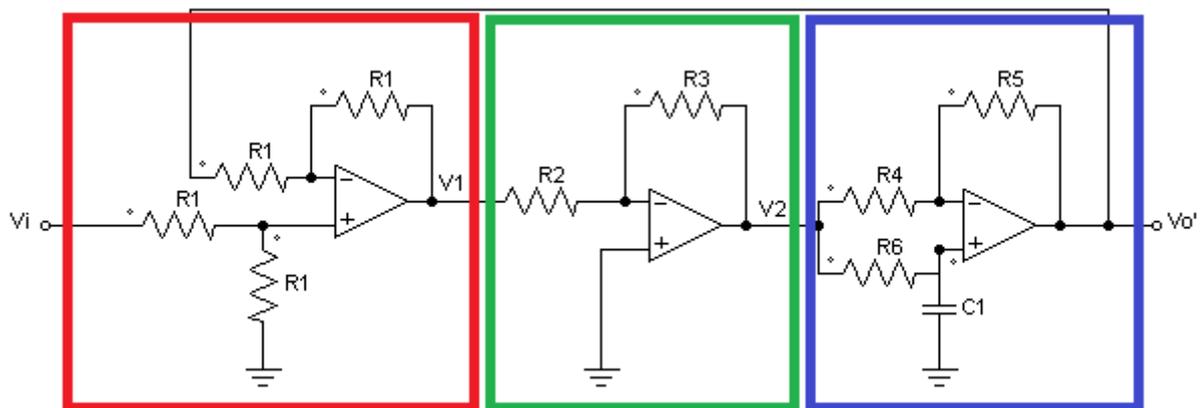


Figura 21 – Planta Principal

em KELES et al. 2017., é mostrado que a planta principal possui três estágios que podem ser analisados separadamente, para facilitar a modelagem final. No primeiro estágio tem um circuito subtrator que é responsável por fazer a realimentação negativa do sistema. Para simplificação do projeto, bem como dos resultados, adotou-se todos os resistores com o mesmo valor. Utilizando a Lei de Kirchhoff das correntes, a saída  $V_1$  desse estágio pode ser expressa como

$$V_1 = V_i - V_o' \quad (\text{A.1})$$

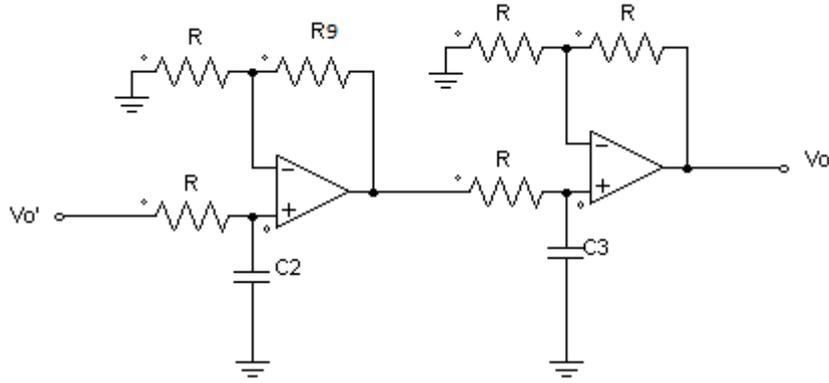


Figura 22 – Planta Auxiliar

O segundo estágio é composto por um circuito amplificador inversor,  $R_2$  e  $R_3$ , que são potenciômetros, eles são os parâmetros incertos da planta. E a saída do segundo estágio pode ser calculada conforme (A.2):

$$V_2 = -V_1 \frac{R_3}{R_2} \quad (\text{A.2})$$

Como o segundo estágio está conectado em cascata com o primeiro, (A.1) pode ser substituída em (A.2)

$$V_2 = \frac{R_3}{R_2}(V_i - V_o') \quad (\text{A.3})$$

O último estágio da planta principal é o filtro passa-tudo, nele que contém o estado observável (tensão  $V_{C1}$ ), além de dar característica de fase não mínima ao circuito, isto é, o sistema possui um zero no semiplano direito  $s$ , o que dificulta mais ainda o controle. E a modelagem desse ramo se deu em espaço de estados. Definindo:

$$\begin{aligned} x_1 &= V_c, \\ u &= V_i = V_2, \\ y &= V_o', \end{aligned}$$

$$y = \left(1 + \frac{R_5}{R_4}\right) x_1 - \frac{R_5}{R_4} u \quad (\text{A.4})$$

$$\dot{x} = \frac{-1}{R_4 C} x_1 + \frac{1}{R_6 C} u \quad (\text{A.5})$$

Substituindo (A.5) em (A.4) e realizando simplificações e manipulações matemáticas chega-se a equação (A.8). De maneira similar, a planta auxiliar foi modelada via espaço de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_7 C_2} & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_3} \left(1 + \frac{R_9}{R_8}\right) & \frac{-1}{R_7 C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{-1}{R_7 C_2} \end{bmatrix} u \quad (\text{A.6})$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \frac{R_{13}}{R_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \quad (\text{A.7})$$

$$u = \frac{-R_3}{R_2 + R_3} V_1 + \frac{2R_3}{R_2 + R_3} x_1 \quad (\text{A.8})$$

Substituindo  $u$  em (A.7) e (A.8) equações do filtro passa-tudo, encontram-se as equações em espaço de estados do primeiro módulo, apresentadas nas equações (A.9) e (A.10).

$$\dot{x} = \left( \frac{R_3 - R_2}{R_6 C (R_2 + R_3)} \right) x_1 + \left( \frac{R_3}{R_6 C (R_2 + R_3)} \right) u, \quad (\text{A.9})$$

$$y = \left( \frac{2R_2}{R_2 + R_3} \right) x_1 + \left( \frac{R_2}{R_2 + R_3} \right) u, \quad (\text{A.10})$$

em que  $y$  define a saída do módulo principal. De maneira similar, a modelagem dos filtros também se deu em espaço de estados, destacando que os valores de todos os resistores são iguais, exceto  $R_9$ , que é um potenciômetro que agrega mais uma incerteza ao sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_7 C_2} & 0 \\ \frac{1}{R_{11} C_3} \left( 1 + \frac{R_9}{R_8} \right) & \frac{-1}{R_7 C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_7 C_2} \end{bmatrix} u_2 \quad (\text{A.11})$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \frac{R_{13}}{R_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u_2 \quad (\text{A.12})$$

A planta principal é acoplada em cascata com o do módulo dos filtros, dessa maneira é possível fazer manipulações para obter um espaço de estado total dos dois sistemas trabalhando em conjunto. Agora, tem-se apenas uma matriz de estado composta três variáveis de estado, demonstrando assim, o benefício desse tipo de modelagem, o modelo em espaço de estados do sistema é apresentado em (A.13) e (A.14).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_3 - R_2}{R_6 C_1 (R_2 + R_3)} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_7 C_2} \left( \frac{2R_2}{R_2 + R_3} \right) & \frac{-1}{R_7 C_2} & 0 \\ \frac{1}{R_{11} C_3} \left( 1 + \frac{R_9}{R_8} \right) & 0 & \frac{-1}{R_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_3}{R_6 C_1 (R_2 + R_3)} \\ \frac{1}{R_7 C_1} \frac{R_2}{(R_2 + R_3)} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (\text{A.13})$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \frac{R_3}{R_{12}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \quad (\text{A.14})$$

Quando se trata de estados, essas variáveis tem sentido físico. No sistema, os estados  $x_1, x_2, x_3$  são representações das tensões nos capacitores  $V_{C1}, V_{C2}, V_{C3}$ , respectivamente. A tensão de entrada  $u(t)$  é aquela aplicada na entrada da planta principal, e a saída total considerada é obtida pela saída do planta auxiliar.

Com a modelagem em espaço de estados é possível obter o modelo em função de transferência, o que permite analisar mais facilmente o comportamento do sistema, que é dada por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \frac{RC_1 s + 1}{RC_1 s + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}} \quad (\text{A.15})$$

Sabe-se que na montagem da planta, todos os resistores (exceto os potenciômetros -  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_9$ ) possuem o mesmo valor e genericamente foi denominado como  $R$  em (A.15). Portanto, é verificado que a velocidade do sistema é estritamente dependente de  $R$  e  $C$ .

### A.1.1 Funcionamento do circuito

Com a modelagem feita, e identificados os parâmetros incertos do sistema ( $R_2$  e  $R_3$ ), as análises foram feitas via *software* MATLAB, para demonstração e validação do comportamento da planta de acordo com a variação dos valores de cada potenciômetro. A primeira relação definida foi:  $R_3 < R_2$ . A representação do lugar das raízes para essa relação é observada na Figura 23, mostrando que existe um polo do lado esquerdo do plano  $s$ , denotando estabilidade e um zero do lado direito, mostrando que o sistema é de fase não mínima. A segunda relação definida foi:  $R_3 > R_2$ . Para esse caso a Figura 24,

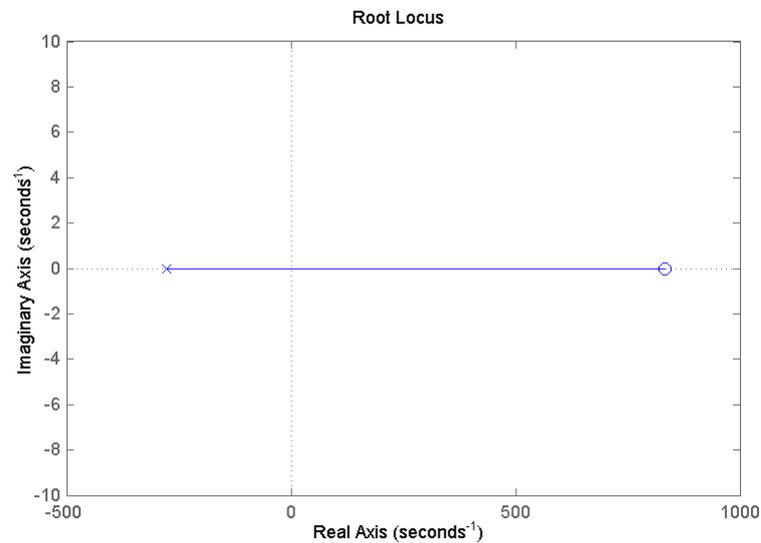


Figura 23 – Lugar das raízes para  $R_3 < R_2$

mostra que o polo e o zero estão do lado direito do plano  $s$ . Sendo portanto, um sistema instável e de fase mínima.

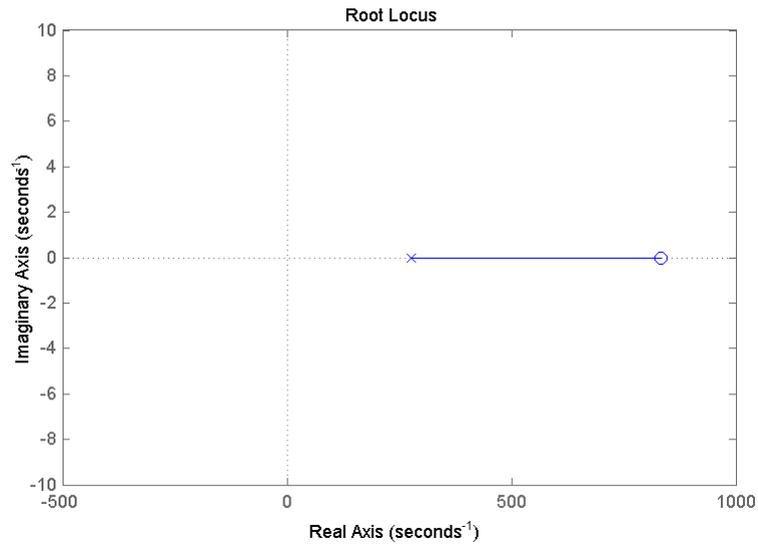


Figura 24 – Lugar das raízes para  $R_3 < R_2$

A terceira relação é hipotética, quando  $R_3 = R_2$ . Se fosse possível essa relação, o sistema estaria operando na margem de estabilidade, porém como se trata de um sistema real, é impossível obter valores de  $R_2$  e  $R_3$  iguais devido as características físicas reais dos componentes que não são exatas.

# ANEXO B – PERIFÉRICOS

Para utilizar um microcontrolador para fazer o controle digital deve-se atentar para as limitações do controlador. Para este trabalho foi escolhido o *Arduino UNO*, portanto circuitos periféricos foram criados para que os dados coletados estejam dentro dos limites aceitos pelo *ARDUINO* e a resposta do controlador seja convertida para valores que o circuito principal reconheça

## B.1 CIRCUITO DE ENTRADA

Ao realizar testes na planta foi possível perceber que os estados coletados podem assumir valores mínimos de  $-13.2V$  e máximos de  $+13.2$ , sendo que o *range* aceito pela entrada analógica do *ARDUINO* varia apenas entre 0 e  $5V$ . Portanto, projetou-se um sistema para adequar as grandezas medidas ao *ARDUINO*.

Para isso, optou-se por fazer um somador inversor com característica abaixadora, pois além de abaixar, a referência do  $0V$  é verificada em teóricos  $2.5V$ , portanto pode-se dizer que a equivalência do sistema lido é de  $-13,2V$  (real) para  $0V$  (leitura do *ARDUINO*),  $0$  (real) para  $2.5V$  (leitura do arduino) e por fim  $+13,2V$  (real) para  $5V$  (leitura do *ARDUINO*).

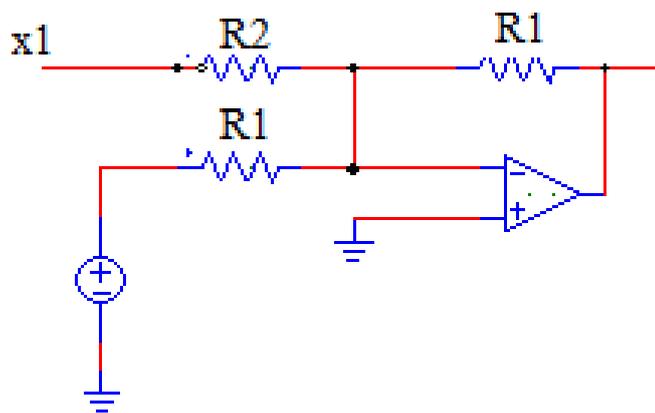


Figura 25 – Circuito somador

A saída é expressa por

$$V_0 = -\frac{R_1}{R_1}V_{cc} - \frac{R_1}{R_2}x_1. \quad (\text{B.1})$$

Observe que a constante associada ao  $V_{cc}$  é unitária e é esse ramo que possibilita o *offset* no sistema e a constante associada com  $x_1$  possui  $R_2$  seis vezes maior que  $R_1$  para que o sinal do estado lido seja atenuado.

Foi montado um circuito da Figura 25 para cada estado lido.

## B.2 CIRCUITO DE SAÍDA

O circuito de saída é similar ao de entrada, porém com característica elevadora e para retirar a offset do *ARDUINO* foi necessário colocar um offset de  $-15V$  ao sistema. Para esse caso, os valores dos ganhos podem ser variados, desde que sature o amplificador operacional, um ganho de pelo menos 15, além disso é necessário inserir valores de resistores relativamente altos para que não haja carregamento no sistema.

# REFERÊNCIAS

- ANTHONY, R. N.; GOVINDARAJAN, V. *Sistemas de controle gerencial*. [S.l.]: AMGH Editora, 2008.
- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. *Computer-controlled systems: theory and design*. [S.l.]: Prentice Hall, 1997.
- BALLET, R.; PARRO, V. C.; ROMANO, R. A. Uma plataforma didática para simulação e controle embarcado de veículos quadrirrotores. 2014.
- DORF, R. C. B. et al. *Sistemas de control moderno*. [S.l.]: Pearson Educación,, 2005.
- DULLERUD, G. E.; PAGANINI, F. *A course in robust control theory: a convex approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 36.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. *Digital control of dynamic systems*. [S.l.]: Addison-wesley Menlo Park, 1998. v. 3.
- KELES, N. A. et al. Módulos didáticos para o ensino e análise e controle de sistemas dinâmicos. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. [S.l.: s.n.], 2017.
- NISE, N. S.; SILVA, F. R. da. *Engenharia de sistemas de controle*. [S.l.]: LTC, 2002. v. 3.
- OGATA, K. *Discrete-time control systems*. [S.l.]: Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1995. v. 2.
- OGATA, K. et al. Engenharia de controle moderno; tradução paulo álvaro maya; revisão técnica fabrizio leonardi.[et al]. *São Paulo: Prentice Hall*, v. 12, p. 15–17, 2003.
- OLIVEIRA, M. C. D.; GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J. Extended h<sub>2</sub> and h norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 75, n. 9, p. 666–679, 2002.
- OLIVEIRA, M. C. de. Controle de sistemas lineares baseado nas desigualdades matriciais lineares. Biblioteca Digital da Unicamp, 1999.
- PERES, P. L. D.; OLIVEIRA, R. C. L. F. Análise e controle de sistemas lineares por desigualdades matriciais lineares (lmis). Notas de Aula. 2017.
- PHILLIPS, C. L.; NAGLE, H. T. *Digital control system analysis and design*. [S.l.]: Prentice Hall Press, 2007.
- QU, Z. *Robust control of nonlinear uncertain systems*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control: analysis and design*. [S.l.]: Wiley New York, 2007. v. 2.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. et al. *Applied nonlinear control*. [S.l.]: prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. v. 199.