



Universidade Federal de Ouro Preto
Escola de Minas
CECAU - Colegiado do Curso de
Engenharia de Controle e Automação



Ary Silva Trindade Neto

Séries de Fourier antes do computador digital

Monografia de Graduação

Ouro Preto, 2024

Ary Silva Trindade Neto

Séries de Fourier antes do computador digital

Trabalho apresentado ao Colegiado do Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para a obtenção do Grau de Engenheiro de Controle e Automação.

Universidade Federal de Ouro Preto

Orientador: Prof. Dr. Danny Augusto Vieira Tonidandel

Ouro Preto

2024



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CONTROLE E
AUTOMACAO



FOLHA DE APROVAÇÃO

Ary Silva Trindade Neto

Séries de Fourier antes do computador digital

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação

Aprovado em 22 de março de 2024.

Membros da banca

[Doutor] - Danny Augusto Vieira Tonidandel - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)

[Doutora] - Adrielle de Carvalho Santana - (Universidade Federal de Ouro Preto)

[Mestre] - João Carlos Vilela de Castro - (Universidade Federal de Ouro Preto)

Danny Augusto Vieira Tonidandel, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito na Biblioteca Digital de Trabalhos de Conclusão de Curso da UFOP em 22/03/2024.



Documento assinado eletronicamente por **Danny Augusto Vieira Tonidandel, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 25/03/2024, às 09:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0688159** e o código CRC **FA2D9114**.

Referência: Caso responda este documento, indicar expressamente o Processo nº 23109.003745/2024-01

SEI nº 0688159

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163
Telefone: 3135591533 - www.ufop.br

Agradecimentos

Expresso a minha profunda gratidão a todos que me apoiaram durante esta jornada.

“If I have seen further it is by standing on the shoulders of Giants” (Isaac Newton)

Resumo

A série de Fourier é uma importante série trigonométrica e possui aplicação em diversas áreas da engenharia e física. Com ela é possível representar qualquer função periódica como uma soma de funções senoidais. Com o avanço da tecnologia, a computação digital tornou mais simples a tarefa de calcular as séries de Fourier e suas aplicações se ampliaram em função deste progresso. Contudo, o contexto era totalmente diferente no século XIX, em que uma engenhosa forma de computar as séries foi desenvolvida pelo cientista William Thomson (1824-1907), um preditor de marés, aparato mecânico desenvolvido como solução de um grande problema de engenharia da época. Objetiva-se, portanto, apresentar alguns aspectos históricos relativos à história da engenharia e computação, que representaram um marco para a grande área da análise de Fourier.

Palavras-chaves: série de Fourier, preditor de marés, história da computação, análise harmônica, marés.

Abstract

The Fourier series is an important trigonometric series and has application in several areas of engineering and physics. With it is possible to represent any periodic function as a sum of sinusoidal functions. With the advancement of technology, digital computing made the task of calculating Fourier series simpler and its applications expanded as a result of this progress. However, the context was totally different in the 19th century, in which an ingenious way of computing series was developed by scientist William Thomson (1824-1907), a tide predictor, mechanical device developed as a solution of a major engineering problem of the time. The aim, therefore, is to present some historical aspects relating to the history of engineering and computing, which represented a milestone for the broad area of Fourier analysis.

Key-words: Fourier series, tide predictor, history of computing, harmonic analysis, tides.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Sistema Terra-Lua	15
Figura 2 – Órbita Lunar	16
Figura 3 – Contribuição do Sol para o fenômeno das marés	17
Figura 4 – Curva simples de uma maré	17
Figura 5 – Tipos de Marés	18
Figura 6 – Constituintes de uma Maré	19
Figura 7 – Marégrafo	25
Figura 8 – Integrador de esferas e discos	26
Figura 9 – Analisador Harmônico de Marés	27
Figura 10 – Relação entre as manivelas e constituintes	28
Figura 11 – Preditor de Marés	29
Figura 12 – Barra Homogênea	33
Figura 13 – Seno de x	36
Figura 14 – William Thomson	47
Figura 15 – Treatise on Natural Philosophy	50
Figura 16 – Mathematical and Physical Papers	50
Figura 17 – Jean Baptiste Joseph Fourier	51
Figura 18 – Description de l'Égypte	55
Figura 19 – Livro “Théorie analytique de la chaleur”	56

Lista de tabelas

Tabela 1 – Constituintes Harmônicas	19
Tabela 2 – Tipos de Marés. Fonte: Boon (2004).	20

Lista de abreviaturas e siglas

PM	PREAMAR – Momento em que o nível da água atinge o seu limite superior;
BM	BAIXA-MAR – Menor altura que a água pode atingir em uma oscilação;
NM	NÍVEL MÉDIO – Valor médio em torno do qual a maré oscila;
FG	Força Gravitacional;
FC	Força Centrífuga;
FR	Força Resultante;
G	Constante Gravitacional.

Lista de símbolos

Σ	Somatório
∞	Infinito
∂	Derivada Parcial
sin	Seno
cos	Cosseno
\int	Integral Indefinida
\int_a^b	Integral Definida no Intervalo $[a, b]$
π	Pi
$>$	Maior que
$<$	Menor que
ω	Frequência
ϕ	Ângulo de Fase
e	Número de Euler

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Objetivo Geral	13
1.2	Metodologia e estrutura	13
2	O FENÔMENO DAS MARÉS E O ANALISADOR MECÂNICO DE WILLIAM THOMSON	14
2.1	O fenômeno das marés	14
2.2	Thomson e Fourier	21
2.3	O analisador mecânico	23
3	SÉRIES DE FOURIER	30
3.1	Sequências e séries	30
3.2	A Teoria Analítica do Calor	31
3.3	A Série de Fourier	37
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	41
	Referências	42
	APÊNDICES	46
	APÊNDICE A – WILLIAN THOMSON: VIDA E OBRA	47
	APÊNDICE B – JOSEPH FOURIER: VIDA E OBRA	51

1 Introdução

Nas áreas das Ciências Exatas e Engenharias, muitas das funções matemáticas são representadas como séries. Talvez, uma das mais importantes e com uma maior gama de aplicações seja a célebre série de Fourier, proposta por Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) em 1822,¹ sendo a sua principal contribuição para a matemática. A série de Fourier implica que qualquer função,² contínua ou não, pode ser representada como a soma infinita de funções senoidais. A série de Fourier possui um número vasto de utilidades: além do uso na resolução de equações diferenciais, ela possui emprego em áreas como circuitos elétricos, tratamento de sinais, sistemas de controle, mecânica quântica e uma infinidade de outras aplicações.

Atualmente existem diversas ferramentas computacionais e dispositivos com *hardware* avançado capazes de processar algoritmos e realizar tarefas e cálculos complexos envolvendo análise de sinais com as séries e a transformada de Fourier. Muito deste poder computacional se dá pela integração de bilhões de transistores em poucos centímetros. A invenção do transistor, nos anos 1960, provocou uma verdadeira revolução na eletrônica, e que possibilitou o surgimento do computador digital. Com isso, a tarefa de calcular uma série de Fourier para qualquer tipo de aplicação é, atualmente, tarefa simples e rotineira. Até mesmo as aplicações da série ampliaram-se em função de tal avanço tecnológico. No entanto, um fato intrigante é: como essa computação era realizada antes da era eletrônica? Isto é, **como as séries de Fourier eram calculadas antes da computação digital?**

O presente trabalho busca, portanto, responder à questão levantada, abordando tópicos históricos e conceitos matemáticos envolvendo a origem e a ciência por trás das séries de Fourier. Um passo além do cálculo manual, à lápis, viria após as primeiras tentativas de aplicar a análise de Fourier por meio de dispositivos mecânicos: um século antes da invenção do computador digital, uma espécie de computador mecânico havia sido desenvolvido para previsão do fenômeno de marés – o preditor de marés, desenvolvido por William Thomson (1824-1907), em meados do século XIX, seria o início de uma nova era para a engenharia. Na medida do possível, aspectos históricos que contemplam a vida dos cientistas envolvidos também serão incluídos no trabalho, visando contribuir com

¹ [Fourier \(1822\)](#).

² De fato “qualquer função” é uma previsão muito otimista. Em realidade, para que possa ser representada por uma série de Fourier, uma função $f(t)$ deve obedecer aos critérios de Dirichlet: se uma função for periódica, então suas somas parciais convergirão para $f(t)$ para todo t se, além de ser absolutamente integrável (ou seja, tendo uma integral finita ao longo de um período), a função também tiver, necessariamente 1. Um número finito de descontinuidades num período, e 2. Um número finito de pontos extremos (máximos e mínimos) ao longo de um período. Tais critérios definem condições suficientes, mas não necessárias, para a convergência de uma série Fourier. Para mais detalhes, ver [Tonidandel \(2021, nota 77, p. 120\)](#). Para uma demonstração dos critérios de Dirichlet, ver [Churchill \(1963\)](#).

pesquisas relacionadas ao assunto e instigar a mente dos que têm interesse na área. Não se objetiva, no entanto, realizar um estudo exaustivo, mas ressaltar aspectos importantes para a história da computação e da engenharia, relacionada à grande área da análise de Fourier.

1.1 Objetivo Geral

Realizar um estudo sobre séries de Fourier, evidenciando a sua importância histórica para a engenharia e ciência contemporâneas, buscando evidenciar como foram feitas as primeiras tentativas de aplicar a análise de Fourier por meio de dispositivos mecânicos, antes da invenção do computador digital.

1.2 Metodologia e estrutura

Como a pesquisa objetiva realizar um estudo sobre a análise de Fourier destacando uma das primeiras aplicações práticas para as Séries de Fourier, que podem ser observadas no equipamento idealizado por William Thomson, bem como alguns dos fenômenos que o levaram a desenvolvê-lo, a abordagem mais indicada é a pesquisa, em arquivos históricos, por artigos, patentes e livros publicados pelo autor, bem como trabalhos de pesquisa em história da ciência e engenharia relacionada ao assunto, buscando correlacionar a vida dos cientistas envolvidos com as suas respectivas descobertas no campo da ciência, dividindo o trabalho em dois pilares fundamentais: um estudo preliminar sobre o fenômeno das marés e o analisador mecânico de William Thomson e, em seguida, um estudo sobre os fundamentos conceituais das séries de Fourier.

2 O fenômeno das marés e o analisador mecânico de William Thomson

A série de Fourier foi apresentada em 1807, quando Jean Baptiste Joseph Fourier busca soluções para o problema físico da propagação de calor em meios sólidos, expandindo seus estudos em seu “*Téorie Analytique de la chaleur*”, de (1822). A partir da grande descoberta de Fourier – a de que qualquer função periódica poderia ser expressa por meio de uma soma infinita de senos e cossenos – um novo horizonte de possibilidades se abriu, uma vez que as agora chamadas séries de Fourier não se limitam apenas no campo da matemática, mas possuem especial importância em todo campo da engenharia. No estudo de fenômenos oscilatórios, por exemplo, é notável a aplicação da análise de Fourier, pois ela atua especialmente na decomposição de funções periódicas. As marés, fenômeno ocasionado pela rotação terrestre e efeitos gravitacionais exercidos pela lua e o sol, é um exemplo de fenômeno oscilatório, em que o nível das águas no oceano é alterado constantemente.

Em um contexto geral, as marés são fenômenos ocasionados pela combinação das forças gravitacionais exercidas pelo Sol e Lua sobre a Terra. Além da força gravitacional do Sol e da Lua, as marés também são diretamente influenciadas pelos movimentos da Terra e por sua posição em relação aos outros corpos do sistema solar, sobretudo os planetas mais próximos e de maior influência. A consequência desta influência é, por conseguinte, a alteração periódica do nível do mar em determinadas regiões do planeta. Quando ocasionadas pelas forças gravitacionais oriundas da interação Sol–Lua–Terra, elas são denominadas marés astronômicas.¹

2.1 O fenômeno das marés

A Lua exerce papel fundamental na variação do nível do mar. A partir de uma breve análise com base na lei da gravitação universal estabelecida por Newton, expressa na equação 2.1,² torna-se possível verificar a magnitude da força gravitacional que a Lua exerce sobre os oceanos:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.1)$$

A equação de Newton enuncia que a força de atração mútua entre dois corpos varia proporcionalmente ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separam, em que G é a constante gravitacional, m_1 e m_2 são as massas

¹ Garrison (2009).

² Boon (2004, p.22-24).

dos corpos e r a distância entre eles.³ Se o mesmo cálculo for realizado considerando o sistema Terra-Sol, verifica-se que, apesar da distância de 149.600.000 km,⁴ a atração gravitacional da Terra pelo Sol ainda é muito maior que a atração da Terra exercida pela Lua. Portanto, a magnitude da atração gravitacional isolada não é a responsável pelo efeito das marés, mas sim a diferença entre as forças gravitacionais presentes no planeta.⁵ Essas forças recebem o nome de *forças gravitacionais diferenciais*.

A Terra não colide com a Lua da mesma forma que ambos os corpos não se afastam, pois a força gravitacional (FG) e a força centrífuga (FC) estão em equilíbrio. Essa harmonia faz com que sua força resultante (FR) provoque bulbos de maré na superfície da Terra mais próxima da Lua e na superfície mais distante.⁶ Como pode ser visto na Figura 1, os bulbos são as regiões em que o nível do mar é maior, isto é, formando a maré alta. Já a região entre os bulbos recebe o nome de maré baixa. A força centrífuga é igual (mesmo

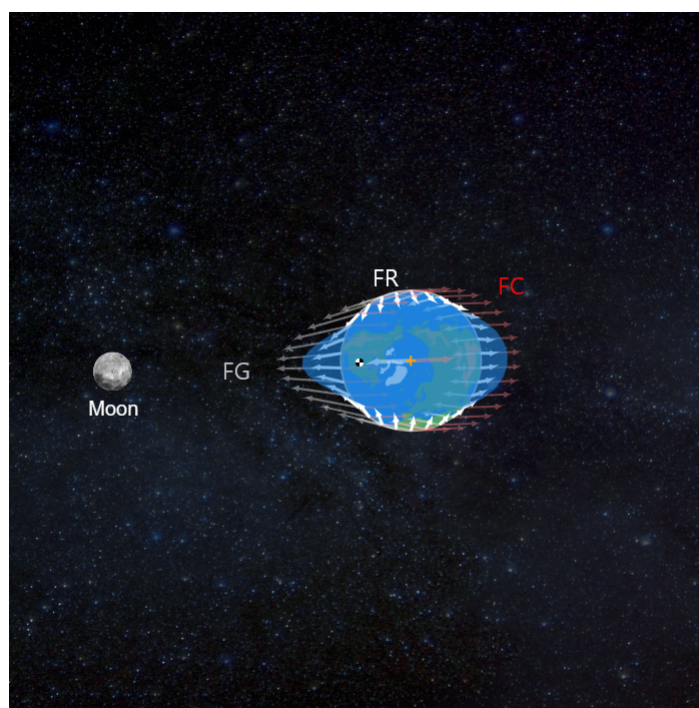


Figura 1 – Sistema Terra-Lua. A força resultante (FR) entre as forças gravitacional (FG) e centrífuga (FC) provoca bulbos de maré na superfície da Terra, formando as regiões de maré alta ou baixa.

módulo e sentido) em qualquer ponto da Terra, já a força gravitacional exercida pela Lua não. A partir disso, é possível concluir que as partículas de água mais próximas da Lua sofrerão uma influência gravitacional maior.⁷ Além disso, o bulbo inercial, gerado pela

³ Boon.

⁴ ADAPTAÇÕES... (2023).

⁵ Sato (2023).

⁶ Garrison (2009).

⁷ Miguens (s.d.).

força centrífuga, tem amplitude menor que o bulbo gravitacional.⁸ Outra consideração importante é ponto excêntrico na figura, que representa o baricentro, ou seja, o centro de massa no qual o sistema Terra-Lua orbitam.

Outro fator que contribui com a amplitude máxima das marés é o fato da órbita da Lua em torno da Terra não ser circular. O caminho que a Lua percorre em torno da Terra é elíptico, e isso faz com que a força gravitacional sobre as marés se eleve quando a Lua se encontra mais próxima do planeta (*Perigeu*). O oposto, de igual forma, ocorre quando a Lua se afasta (*Apogeu*). Na figura 2 é possível observar o percurso realizado pela Lua.

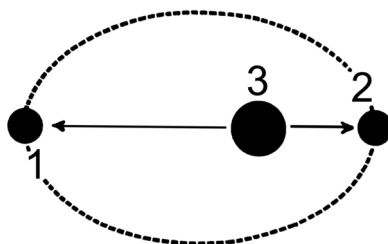


Figura 2 – Órbita Lunar: (1) Apogeu; (2) Perigeu; (3) Terra.

A contribuição do Sol pode ser inferior em relação à contribuição da Lua, mas ainda assim é importante inseri-la no estudo das marés. Como a Terra também realiza uma órbita elíptica em torno do Sol, da mesma forma que a Lua, haverá momentos em que o planeta se aproximará da estrela (*Periélio*) e períodos em que a Terra estará mais distante do Sol (*Afélio*). Além da contribuição solar em relação à posição do planeta Terra, as posições da lua conforme o sistema Terra-Lua-Sol (Figura 3) também afetam a magnitude das marés.

Quando o ângulo entre a Lua e Terra corresponde a 180° em relação ao Sol, ocasionando o alinhamento entre os três astros, o sol amplifica a maré alta e reduz a maré baixa. Nessa ocasião, as marés são denominadas *marés sizíguas* ou *marés vivas*. No período em que a Lua e Terra formam o ângulo de 90° ou 270° em relação ao Sol, a força gravitacional do sol se opõe à força da lua, resultando em um efeito destrutivo em que marés altas são reduzidas e as marés baixas são ligeiramente mais elevadas. Para a situação em que ocorre o ângulo reto, as marés são denominadas *marés de quadratura* ou *marés mortas*.⁹

A Figura 4 ilustra a nomenclatura de acordo com o nível da maré: no momento que o nível da água atinge o seu limite superior, utiliza-se o termo PREAMAR (PM). Já a expressão BAIXA-MAR (BM) é utilizada para a menor altura que a água pode atingir em uma oscilação. Por fim, o NÍVEL MÉDIO (NM) identifica o valor médio em torno do qual a maré oscila.

⁸ Garrison (2009).

⁹ Garrison.

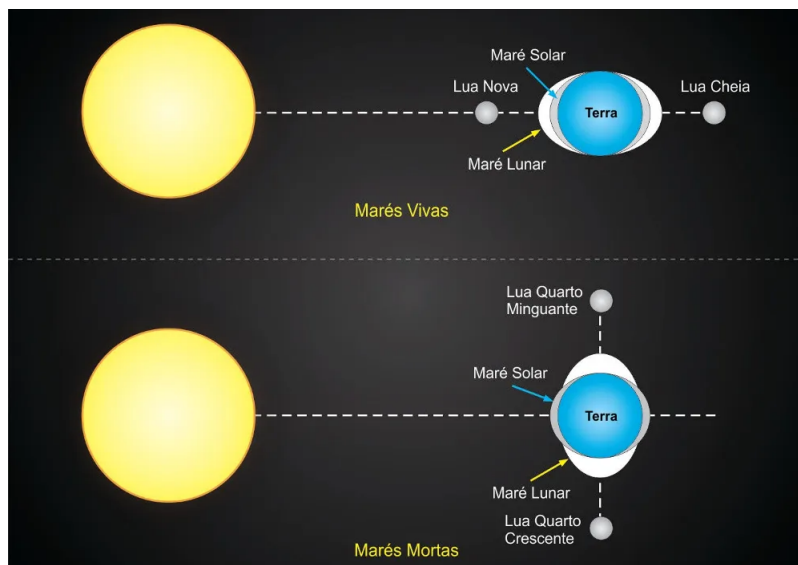


Figura 3 – O caminho que a Lua percorre faz com que as marés se elevem no *perigeu* (quando a Lua se encontra mais próxima) e diminuam no *apogeu* (quando a Lua está mais distante). No entanto, a contribuição do Sol não deve ser descartada.

O ciclo lunar, período no qual a lua completa sua órbita em torno da Terra, se estende a aproximadamente 29,530588 dias, enquanto um dia lunar tem cerca de 24 horas e 50 minutos. Em certos locais é comum que ocorra a variação da maré durante o dia lunar duas vezes, contrapondo a teoria de Newton. Isso se dá devido à interferência dos continentes no movimento das marés, efeito este considerado por Pierre-Simon (o Marquês de) Laplace (1749–1827), em sua teoria dinâmica das marés.¹⁰ Ainda sim, vale ressaltar que as marés não ocorrem todos os dias na mesma hora e no mesmo local.¹¹

¹⁰ Garrison (2009).

¹¹ Miguens (s.d.).

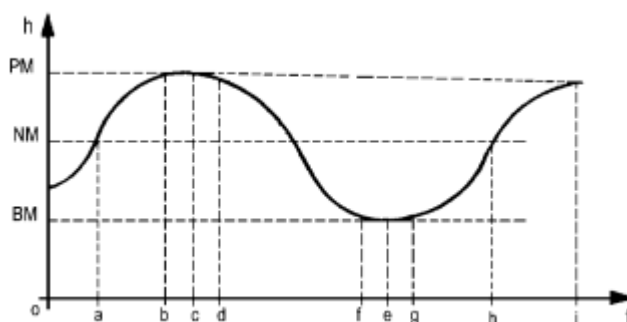


Figura 4 – Curva simples de uma maré. Uma das maneiras de classificar o tipo de marés se estende ao número de ocorrências de PM e BM durante o dia lunar: na ocorrência de duas PM e duas BM no período de um dia lunar, as marés são denominadas semidiurna. Já a maré diurna surge na ocorrência de apenas uma PM e uma BM. Enfim, o padrão semidiurna mista ocorre, na maioria das vezes, quando se tem duas PM ou duas BM consecutivas. Fonte: Miguens (s.d.).

Pelo seu caráter periódico, é possível descrever a maré como uma onda senoidal (ou cossenoidal), como na figura 4. Essa representação é bastante eficaz para determinar certos comportamentos de uma maré, como sua amplitude e intensidade da correnteza em determinadas regiões, possibilitando até mesmo a sua predição ao longo do ano.¹² Aliás, a maré é um fenômeno derivado da junção de outros eventos, como a força gravitacional somada a posição dos corpos no espaço. De acordo com o princípio da superposição,¹³ ondas superpostas se somam algebricamente para produzir uma onda resultante ou onda total.¹⁴

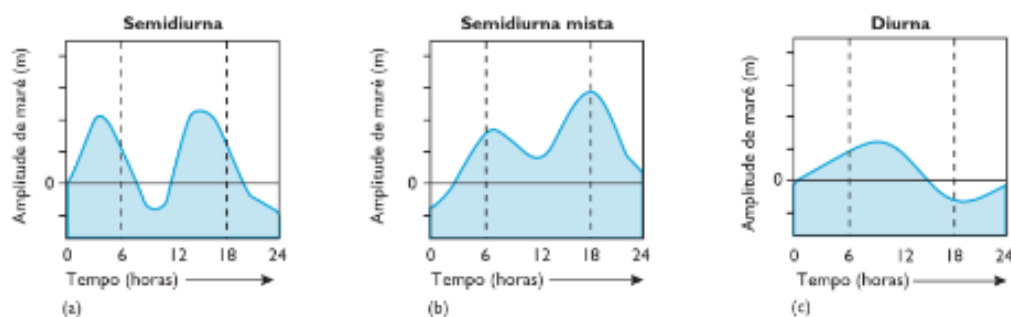


Figura 5 – Tipos de Marés. Fonte: Castro e Huber, 2012.

Em um acorde tocado no violão, o som reproduzido é resultado de um conjunto de ondas superpostas com suas respectivas frequências e amplitudes. As marés possuem caráter similar. Suas constituintes individuais quando somadas resultam em uma onda total (Figura 5). A decomposição das marés em frações de ondas é motivo de um extenso e profundo estudo sobre o comportamento dos oceanos. Existem pelo menos 140 componentes de onda (harmônicos) em uma maré e cerca de 7 constituintes são essenciais para sua predição. Em vista disso, é possível prever a altura da maré com uma precisão de três centímetros com anos de antecedência.¹⁵

Como pode ser visto na Figura 6, a curva final é a soma das constituintes diurna e semidiurna. Ao decompor uma onda, torna-se factível analisar parâmetros cruciais como fase, amplitude e período da onda. Na Tabela 1 é possível checar algumas das principais constituintes harmônicas de uma maré e suas respectivas características.¹⁶ Algumas das componentes harmônicas fundamentais são identificadas pelas letras J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S e T. Esse tipo de nomenclatura foi concebido pelo astrônomo George Darwin (1845-1912) e também por William Thomson (posteriormente Lorde Kelvin), e ainda é o mesmo padrão utilizado atualmente.¹⁷

¹² Parker (2007).

¹³ Princípio também estabelecido por Fourier. Ver em Fourier (1822).

¹⁴ Resnick, Walker e Halliday (2012).

¹⁵ Garrison (2009).

¹⁶ Chelton e Enfield (1986).

¹⁷ Cartwright (2000).

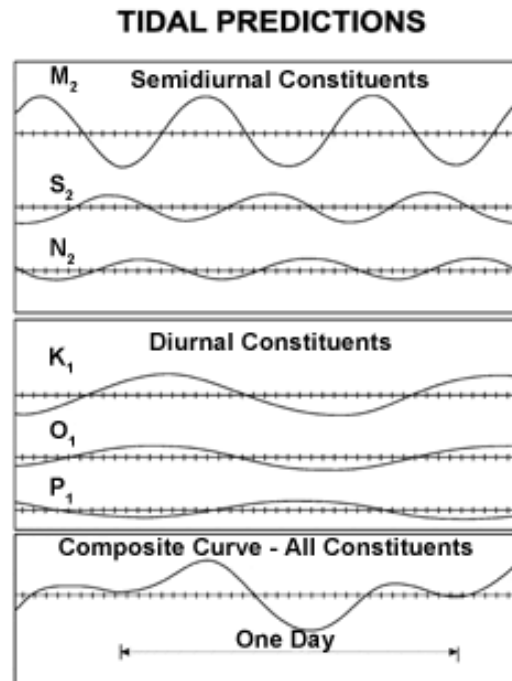


Figura 6 – Constituintes de uma Maré. Fonte: Wikimedia commons.

Tabela 1 – Constituintes Harmônicas. Fonte: [Chelton e Enfield \(1986\)](#).

Símbolo	Período (Horas)	Amplitude Relativa (M_2)
M_2	12,42	1,000
K_1	23,93	0,584
S_2	12,00	0,466
O_1	25,82	0,415
P_1	24,07	0,194
N_2	12,66	0,192
M_f	327,86	0,172
K_2	11,97	0,127
M_m	661,30	0,091
S_{sb}	2191,43	0,080
Q_1	26,87	0,079

Em locais onde as constituintes diurnas não são predominantes, a componente semidiurna M_2 tem amplitude maior em relação a outras.¹⁸ Com isso, a amplitude das constituintes restantes são avaliadas de acordo com a M_2 , conforme explicitado na Tabela 1. Posto que a maré é classificada de acordo com a sua amplitude, a maneira mais precisa de classificação exige que a forma de onda total seja decomposta. Consequentemente, a magnitude das principais constituintes harmônicas diurnas e semidiurnas podem ser avaliadas e dispostas da seguinte maneira:

$$F = \frac{K_1 + O_1}{M_2 + S_2}. \quad (2.2)$$

De posse do valor de F da equação (2.2), a classificação segue o seguinte critério (Tabela 2):

Tabela 2 – Tipos de Marés. Fonte: [Boon \(2004\)](#).

Tipo de Onda	Valor de F
Semidiurna	$F < 0,25$
Semidiurna Mista	$0,25 < F < 1,5$
Diurna Mista	$1,5 < F < 3,0$
Diurna	$F > 3,0$

A técnica de decompor ondas faz parte da análise harmônica de marés e é fundamental para a predição das marés. O método foi desenvolvido inicialmente por William Thomson, em 1867, com base na análise de Fourier e na teoria dinâmica das marés proposta por Laplace. Embora Thomson tenha recebido os créditos pelo feito, é importante ressaltar que Laplace foi o primeiro a sugerir a ideia da análise harmônica. Além disso, antes de Thomson, o matemático francês obteve êxito ao separar a maré em três tipos: marés diurnas, semidiurnas e de longo período. Mesmo assim, foi Kelvin quem desenvolveu a primeira aplicação prática para o método da análise harmônica das marés.¹⁹

A relação de Thomson [Kelvin] com o trabalho do Fourier vai além da oceanografia. Thomson enxergou na obra de Fourier um potencial que poderia ser explorado em diversos fenômenos físicos, que o influenciariam por toda sua carreira. Pelo seu ponto de vista, assim como na modelagem matemática que relacionava marés com ondas senoidais, a difusão de calor em corpos poderia ser equiparada, por analogia, ao “fluxo de eletricidade” ou corrente elétrica, ao longo de um condutor.²⁰

¹⁸ [Boon \(2004\)](#).

¹⁹ [Parker \(2007\)](#).

²⁰ A noção de que partículas subatômicas poderiam compor o fenômeno de propagação elétrica ainda não haviam sido cogitadas à época de Thomson. Para mais detalhes sobre as primeiras tentativas de se utilizar uma analogia de fluxo de calor para explicar fenômenos elétricos, ver [Tonidandel, Boaventura e Araújo \(2018\)](#).

2.2 Thomson e Fourier

William Thomson nasceu em 26 de junho de 1824, em Belfast, capital da Irlanda do Norte. Seu pai, James Thomson, era professor de Matemática na Royal Academical Institution de Belfast. No ano de 1832, James recebe uma proposta para exercer o cargo de professor de matemática na Universidade de Glasglow, levando a família Thomson a se mudar de Belfast. Frequentando as aulas do pai na universidade desde os 8 anos de idade, o pequeno William demonstrava grande interesse pela física. Talvez por influência de seu pai, em certo momento, teve o contato com obras literárias dos matemáticos da Escola Analítica francesa, como Lagrange e Laplace. Mas o grande divisor de águas para William seria a obra *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier,²¹ que serviria de inspiração durante toda a sua carreira. O próprio William Thomson contaria, anos mais tarde, ter devorado o livro em uma só noite!²² Segundo Nahin (2006, p.140):

“(...) Thomson era um admirador precoce do trabalho de Fourier - seu primeiro artigo publicado, escrito quando ele tinha apenas quinze anos, tratava de séries de Fourier. Mais tarde em sua carreira, Thomson utilizou a equação do calor em uma tentativa de calcular a idade da Terra por meio da ciência racional, em vez de de estudos bíblicos. Nesse artigo, ele chamou a teoria de Fourier de “um poema matemático”.”

Em um de seus trabalhos, o físico William Thomson exerceu papel fundamental naquela que é considerada por muitos estudiosos como a maior obra de engenharia do Século XIX.²³ O feito em evidência era lançar um cabo submarino de telegrafia no fundo do oceano Atlântico, entre a Irlanda e o Canadá, com o intuito de estreitar as comunicações entre os Estados Unidos e o Império Britânico. A descoberta da indução elétrica por Michael Faraday em 1831²⁴ havia impulsionado a criação dos primeiros sistemas de comunicação por meios elétricos do mundo, começando com o telégrafo de Gauss-Weber de 1833, que conectava o Instituto de Física da Universidade de Göttingen, onde Wilhelm Eduard Weber (1804-1891) foi diretor, ao Observatório Astronômico da mesma universidade, então dirigido por Carl Friedrich Gauss (1777-1785). O sistema se estendia por pouco mais de 2 km, tendo sido construído e instalado por Weber, como pode ser visto em carta escrita por Gauss em 1833,²⁵ conforme cita Tonidandel (2021, p. 125-126).

Pela primeira vez um dispositivo baseado em impulsos elétricos para enviar mensagens codificadas habilitaria um novo meio de comunicação na Europa. Ainda sim, para possibilitar a comunicação com o resto do mundo, seria necessário um esforço imenso para conectar o continente europeu a outros países. Em um contexto geral, era preciso

²¹ Fourier (1822).

²² Para mais detalhes para a vida e obra de William Thomson, consultar o apêndice A.

²³ Tonidandel, Boaventura e Araújo (2018).

²⁴ Faraday (2011).

²⁵ A carta está disponível em Gauss (1833).

atravessar um cabo condutor a milhares quilômetros de oceano (cerca de 3000 km) com a tecnologia disponível na época. Vale ressaltar que cabos submarinos já haviam sido lançados, incluindo o cabo que conectava a França à Inglaterra através do canal da Mancha, realizado em 1851, uma distância muito curta se comparada ao cabo transatlântico.²⁶

Os cabos submarinos eram compostos de um condutor isolado por uma resina de guta-percha (uma seiva vegetal com propriedades superiores aos isolantes modernos). Em cabos muito longos, como previsto por Michael Faraday (1791-1867) em alguns de seus experimentos,²⁷ era possível notar que o material isolante absorvia parte da energia elétrica após um certo período de tempo – efeito que também ocorre em um capacitor – fazendo com que o sinal transmitido sofresse atraso. O circuito então formado pelo trio condutor, dielétrico e oceano tinha um comportamento similar a um grande capacitor, tendo em vista que a composição básica de um capacitor é definida por dois materiais condutores separados por um isolante (ou dielétrico).²⁸

No ano de 1854, William publica um artigo relatando este problema, evidenciando que parte do sinal enviado através de longos cabos o percorriam quase que instantaneamente,²⁹ e o restante era perdido em função da capacitância e resistência do cabo. De forma análoga à análise de Fourier para a propagação de calor em corpos sólidos de uma dimensão, Thomson considerou o mesmo efeito no sinal que percorria o condutor do cabo telegráfico. Chegou ainda à conclusão de que capacitância e a resistência eram diretamente proporcionais ao comprimento do cabo e, por isso, o atraso aumentava pelo quadrado do comprimento do cabo.³⁰ Uma das possíveis formas para contornar esse problema seria aumentar o diâmetro e a pureza do fio de cobre, assim reduzindo resistência e capacitância. Em função do seu estudo, em 1856 dava-se início à produção do cabo transatlântico de acordo com as características levantadas no artigo.

Thomson foi nomeado a diretor no ambicioso projeto que faria a conexão entre os dois continentes, além de participar diretamente na empreitada que estaria por vir. Os dois navios escolhidos para atravessar o Atlântico eram o *Agamemnon* e *Niagara*. A bordo do navio *Agamemnon*, ele pôde testemunhar a intensidade da natureza em alto mar, como também a imprevisibilidade no ritmo marítimo, que logo se tornaria fonte de motivação para mais um de seus inventos.

Após uma tentativa desastrosa em 1857 que prorrogou a conclusão do projeto para o ano seguinte, o cabo submarino foi completamente lançado e no dia 5 de Agosto

²⁶ Tonidandel.

²⁷ Faraday (2011).

²⁸ Crowther (1936).

²⁹ Thomson (1854).

³⁰ Uma constatação errônea, diga-se de passagem, já que Thomson desconsiderou um parâmetro importantíssimo, que era justamente a autoindutância do cabo. Tal efeito seria considerado posteriormente e seria o ponto de partida para a transmissão de sinais sem distorções, abrindo caminho para a invenção do telefone.

de 1858 o primeiro sinal era enviado da Europa até a América do Norte.³¹ Durante este hiato, Thomson fez avanços no estudo da eletricidade e patenteou o seu famoso galvanômetro de espelho, que permitiu a detecção das baixas correntes que circulavam o cabo telegráfico.³² Entretanto, o projeto se daria por completo apenas em 1866, após diversos imprevistos em quatro expedições marítimas, até o êxito. O envolvimento de Thomson nesse desafio alavancou ainda mais sua carreira. Ele conquistou renome devido às patentes e contribuições realizadas durante as operações marítimas, além de um generoso retorno financeiro.

Em 1870 William Thomson – agora sagrado Lorde Kelvin pelo império britânico por seus feitos com a telegrafia – faz a aquisição de um iate de 126 toneladas nomeado *Lalla Rookh*. A partir dessa aquisição, Kelvin volta seus esforços para problemas relacionados à navegação.³³ É lícito conjecturar, inclusive, que o interesse de Thomson pelo fenômeno das marés tenha sido de, certa maneira, estimulado por suas expedições no Atlântico. Dado seu caráter oscilatório, as marés consistiam em um fenômeno ideal, segundo suas próprias convicções, para a aplicação das séries de Fourier. A determinação de Kelvin em estudar o comportamento dos oceanos, aliado à obra de Fourier, resultaria no preditor de marés, um dos primeiros computadores analógicos do século XIX, que tinha a capacidade de prever a subida e descida das marés para qualquer porto ao longo do ano.

2.3 O analisador mecânico

A predição de marés pode ser realizada a partir da soma de um certo número de constituintes que compõe a maré.³⁴ Em vista disso, a análise harmônica consiste em expressar matematicamente a subida e descida da maré – em qualquer local do planeta – como a soma de termos harmônicos oriundos de condições astronômicas.³⁵

De maneira geral, o simples movimento harmônico de uma constituinte de maré pode ser expresso através da função trigonométrica:

$$y = A \cos(\omega_1 t + \phi_1), \quad (2.3)$$

em que A representa a amplitude da constituinte e o termo entre parênteses define a fase. A velocidade angular (ω_1) é específica da constituinte em determinado período do ano e, conseqüentemente, cada componente harmônica irá conter sua própria frequência. A letra grega ϕ é o atraso de fase (ou época) e é obtido através da diferença entre as fases da constituinte ao longo do tempo.³⁶ A constante t é dada em horas, portanto, é essencial

³¹ Crowther (1936).

³² Baguinski (2023).

³³ Crowther (1936).

³⁴ Parker (2007).

³⁵ Schureman (2018).

³⁶ Parker (2007).

utilizar um fator de conversão para graus.³⁷ Neste caso, como $\omega = 360^\circ/T$, tem-se que

$$\omega_1 (t_0 - t) = \frac{360^\circ}{T} (t_0 - t),$$

em que T é o período e $(t_0 - t)$, ambos em horas.

Para a predição da maré utilizando apenas uma constituinte harmônica, basta substituir os valores da componente na expressão:

$$y = y_0 + A \cos(\omega_1 t + \phi_1), \quad (2.4)$$

em que y_0 equivale a altura média do nível da água acima do ponto de referência.³⁸ Por fim, ao encontrar o valor de y , a altura da maré pode ser determinada.

Todavia, a maré é composta por diversas constituintes e pelo menos sete delas são necessárias para uma predição precisa. Diante disso, como o conjunto de constituintes é m , o cálculo é realizado por meio da seguinte série temporal:

$$y(t) = y_0 + \sum_{n=1}^m A_n \cos(\omega_n t + \phi_n) + \sum_{n=1}^m B_n \sin(\omega_n t + \phi_n). \quad (2.5)$$

Se $n = 1$ equivale a constituinte M_2 , sua amplitude, frequência e fase serão representados por A_1 e B_1 , ω_1 e ϕ_1 .³⁹ O somatório deve incluir todas as componentes necessárias para a predição da maré.

Vale lembrar que a metodologia utilizada anteriormente é apenas uma breve ilustração da análise harmônica de marés. Além disso, a abordagem passou por diversas mudanças desde o século XIX. A predição nos dias atuais conta, não só com a computação moderna, mas também sistemas de tempo real e algoritmos que necessitam de um amplo poder computacional.⁴⁰ Além do mais, a análise harmônica não é o único princípio utilizado na predição das marés. Existem também os métodos não harmônicos, contudo, estes se mostram limitados em relação aos métodos harmônicos.⁴¹

Entretanto, o contexto era completamente diferente na era Vitoriana. Antes da invenção do preditor, o trabalho de decompor as marés em constituintes harmônicas era realizado manualmente por Kelvin. A variação da altura do nível do mar era registrada em um papel de forma contínua através do marégrafo (Figura 7). Este dispositivo era composto por um flutuador, suspenso por um fio de platina, que varia a sua posição verticalmente de acordo com a altura da água. Então, o movimento é transmitido para uma polia que move uma caneta perpendicularmente ao longo do papel, com pressão suficiente para registrar o comportamento da maré. O rolo de papel é posto em um cilindro em

³⁷ Boon (2004).

³⁸ Parker (2007).

³⁹ Boon (2004).

⁴⁰ Parker (2007).

⁴¹ Parker.

movimento que realiza uma volta completa em 24 horas.⁴² Por fim, as curvas registradas pelo marégrafo poderiam ser estudadas.

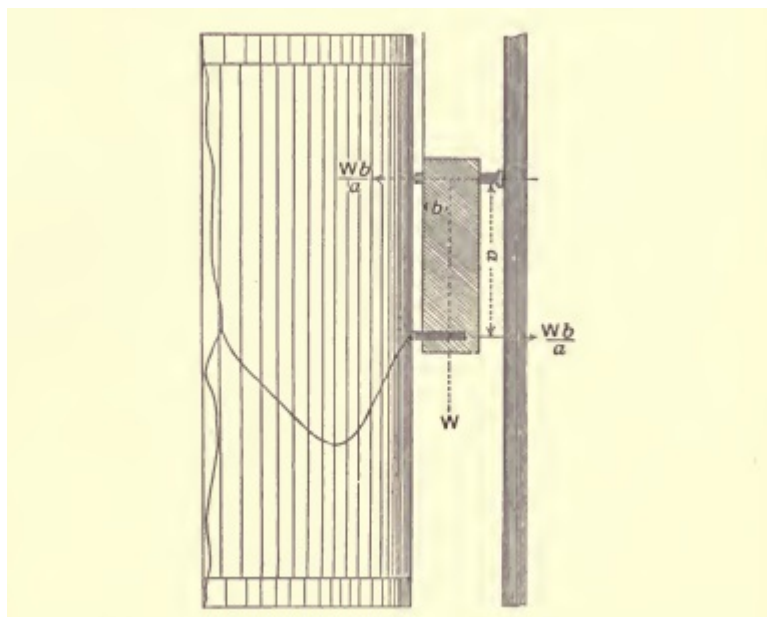


Figura 7 – Marégrafo. Fonte: Mathematical And Physical Papers, 1911.

A estratégia adotada para prever a subida e descida do nível do mar era baseada na análise de Fourier.⁴³ A curva descrita pelo marégrafo era dividida em intervalos de tempo t e, então, o nível de água para cada intervalo era multiplicado pelo cosseno da frequência de interesse. Em seguida, Thomson integrava a curva resultante no intervalo determinado e dividia pelo tempo total registrado, resultando em um coeficiente específico da constituinte harmônica.

Note-se que, nesses primeiros passos, Thomson basicamente calcula os coeficientes da Série de Fourier para a onda registrada no marégrafo em um intervalo t e frequência de acordo com a constituinte própria para a predição. Consequentemente, o processo se repetia utilizando a função seno para a mesma frequência. Por fim, os valores eram somados de acordo com cada constituinte essencial para a predição do nível do mar. Simplificando a análise, a fundamentação utilizada para a predição é resumida na equação 2.5.

O processo de calcular manualmente as constituintes harmônicas não era algo tão complexo, porém, a tarefa se tornava cada vez mais trabalhosa em função do número de constituintes envolvidas na predição. Com isso, Thomson desenvolve um equipamento capaz de computar a variação da altura no mar com base na equação 2.5. O objetivo deste aparato era automatizar todas as operações presentes no método harmônico de predição. Em suas palavras: “... O objetivo desta máquina é substituir a lata por cérebro no grande

⁴² Thomson (1882).

⁴³ Ver em Korner (1989, p.28-30).

trabalho de calcular as constituintes elementares de toda a subida e descida da maré”.⁴⁴

O preditor de marés tinha em sua composição três mecanismos fundamentais: o marégrafo, o analisador harmônico e o preditor de marés.

O marégrafo já havia sido inventando e o registro das marés era comum no século XIX. No entanto, o modelo utilizado por Kelvin contava apenas com algumas modificações afim de catalogar as ondas com maior precisão.⁴⁵ A curva resultante da predição era registrada automaticamente pelo dispositivo no marégrafo ao final de cada análise.⁴⁶

Um dos passos inovadores neste estudo foi a introdução do analisador harmônico. Este componente fazia parte da aplicação prática do Integrador de esferas e discos (Figura 8), desenvolvido por James Thomson (1822—1892), que era engenheiro e irmão de Kelvin. O Integrador foi idealizado para calcular a integral de um produto entre duas funções na forma $\int \phi(x)\psi(x)dx$ e analisar qualquer curva periódica dada.⁴⁷ Seu papel no instrumento de Kelvin era solucionar as integrais necessárias para a análise harmônica.⁴⁸

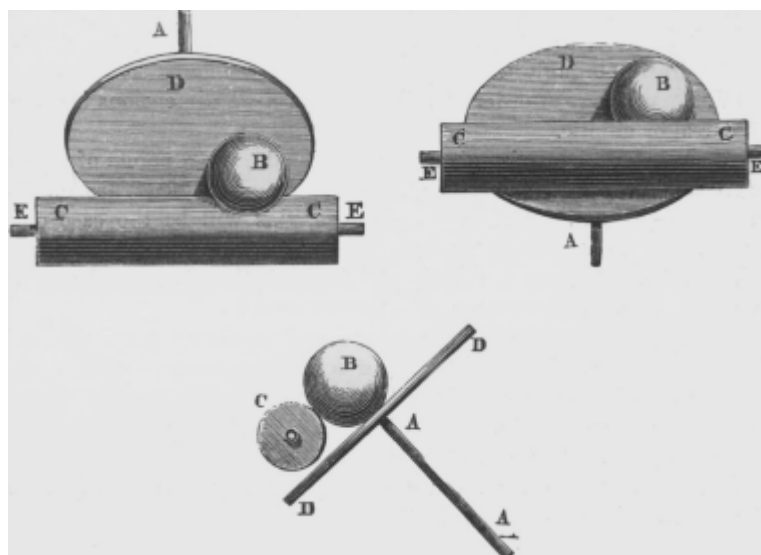


Figura 8 – Integrador de esferas e discos, apresentado por Thomson à Royal Society of London, em 1878. Uma esfera se movimenta ao longo de uma das faces do cilindro, sob um disco em rotação. Uma caneta na extremidade da esfera em movimento registra o valor da função, movimento que é transmitido a um segundo cilindro, que realiza e registra o valor da integração. Fonte: Thomson (1878).

O princípio de funcionamento do integrador consiste em uma esfera que se move ao longo de uma das faces do cilindro, sob um disco em rotação.⁴⁹ Conforme a Figura 8, a

⁴⁴ Thomson (1882).

⁴⁵ Ver em Thomson (p.271-280).

⁴⁶ Schureman (2018).

⁴⁷ Thomson (1878).

⁴⁸ Thomson, 1882.

⁴⁹ Ver em Thomson e Tait (2009, p.493-496).

esfera é representada pela letra B, o cilindro pela letra C e o disco pela letra D. Enquanto isso, A e E simbolizam os eixos que transmitem movimento no sistema. A esfera é fixada por uma haste que possui uma caneta em sua extremidade. A curva a ser integrada é disposta em um tambor de papel que realiza movimento circular contínuo. Então a caneta é posta perpendicularmente à curva, a fim de contorná-la na medida que o tambor de papel rotaciona. Conforme a caneta é guiada pela curva, a haste transmite o movimento unidimensional para a esfera.

O elemento esférico é responsável por transmitir movimento para o cilindro. Desta forma, a velocidade de rotação da esfera depende da posição na qual ela se encontra sobre o disco. Quanto mais longe do centro do disco, maior a velocidade de rotação da esfera e, conseqüentemente, maior será a velocidade propagada ao cilindro. Outro ponto importante é que a esfera tem o seu sentido de giro afetado pela posição em relação às extremidades do disco.

O eixo do cilindro que recebe movimento é conectado a uma cremalheira. Um segundo tambor de papel é inserido no mecanismo, na extremidade oposta ao primeiro tambor. Por último, uma haste com um marcador é acoplado à cremalheira. De acordo com sua posição, a curva de saída é plotada no segundo tambor, que gira com a mesma velocidade do primeiro, pois ambos estão interligados. Essa segunda curva é resultado da integral da função de entrada.

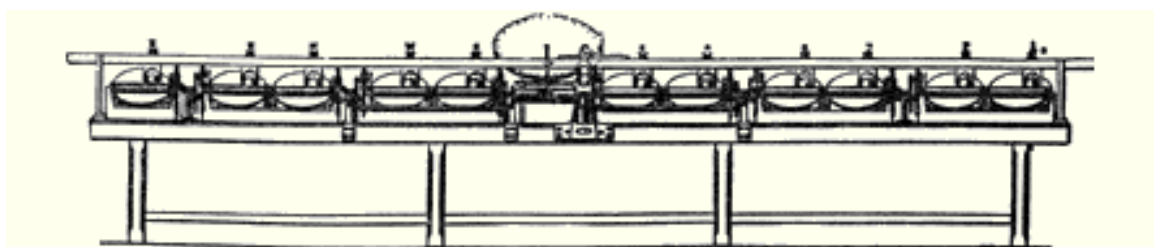


Figura 9 – Analisador Harmônico de Marés. Fonte: Thomson (1882).

O analisador harmônico de marés foi projetado para calcular simultaneamente cerca de onze coeficientes necessários para a predição, fazendo o uso de onze discos compostos por esferas, cilindros e manivelas, assim como no integrador desenvolvido pelo irmão de Kelvin. Porém, no analisador, estes elementos eram conectados em linha.⁵⁰

Como pode ser visto na Figura 9, o analisador é composto por doze círculos, dos quais os onze menores representam os discos empregados por calcular as constituintes. Dessa maneira, cada par de disco de um a dez é responsável pelas constituintes M, S, K_1, O, P , respectivamente. O décimo primeiro disco, na extrema direita, é responsável pelo coeficiente A_0 , equivalente a altura média do nível da água. Este disco nada mais é que o integrador de esferas e discos (Figura 8), que calcula a área da curva registrada pela máquina. O

⁵⁰ Thomson, 1878.

círculo maior, ao centro, é responsável por contar dias, meses e anos na duração de quatro anos, considerando o período do ano bissexto.⁵¹

Cranks	Object	Distinguishing Letter	Speed
1 and 2	To find the mean lunar semi-diurnal tide .	M	$2(\gamma - \sigma)$
3 „ 4	„ mean solar „ „ .	S	$2(\gamma - \eta)$
5 „ 6	„ luni-solar declinational diurnal tide	K_1	γ
7 „ 8	„ slower lunar „ „ .	O	$(\gamma - 2\sigma)$
9 „ 10	„ slower solar „ „ .	P	$(\gamma - 2\eta)$
11	„ mean water-level	A_0	—

Figura 10 – Relação entre as manivelas e constituintes. Fonte: Thomson (1882).

Como parte do analisador harmônico, os discos giram hora em sentido horário, hora em sentido anti-horário, com velocidade e oscilação relativas à frequência da constituinte de interesse. Com isso, torna-se possível realizar a integral da curva de entrada multiplicada pela senoide da constituinte. Por fim, basta dividir o resultado obtido anteriormente pelo tempo total para se obter o coeficiente.

Por último, e não menos importante, o elemento final que compõe o aparato de Thomson é o preditor de marés (Figura 11). Este dispositivo, por sua vez, tem o papel de realizar a soma de todas as contribuições trigonométricas obtidas por meio da análise harmônica. Para cada constituinte, a máquina possui uma polia articulada capaz de realizar movimento sinusoidal com período correspondente à constituinte de maré.⁵² Os diâmetros de cada polia são configurados de acordo com a amplitude da componente relativa à polia.

As polias que compõem o sistema são interligadas por uma corda ou corrente, com um peso pendurado em uma pontas, enquanto a outra pode ser fixada. Para operar a máquina é preciso de um estímulo inicial, haja vista que o sistema é puramente mecânico. Portanto, basta girar a manivela principal para dar início à análise. Então, o peso ligado à corda se move para cima e para baixo, repetindo o movimento harmônico que simula o nível da água afetada pela ação da maré. O movimento é propagado pelo sistema de polias por meio da corda, que se move de acordo com o sentido de rotação da polia e produz a soma de todas as componentes. O peso pendurado executa o movimento de acordo com a soma de todas as constituintes, então, a curva resultante é traçada no marógrafo.⁵³

⁵¹ Thomson, 1882.

⁵² Woodworth (2020).

⁵³ Thomson (1882).

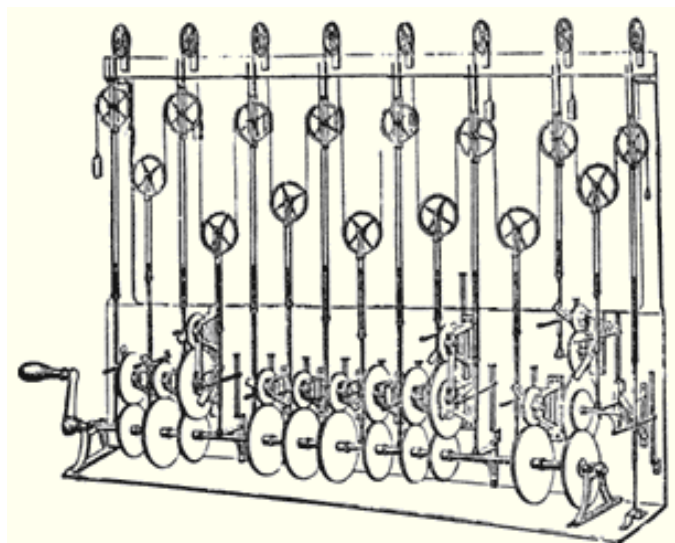


Figura 11 – Preditor de Marés. Fonte: [Mathematical and Physical Papers \(1882\)](#).

O movimento oscilatório realizado pela maré, representado pelo pêndulo no analisador, é entendido pela física como Movimento Harmônico Simples. Este é um fenômeno físico amplamente observado na natureza, como na teoria do calor, som e luz. Além disso, possui implicações teóricas significativas no estudo da cinemática. Segundo o próprio Thomson:⁵⁴

“(...) a consideração do Movimento Harmônico nos leva naturalmente ao Teorema de Fourier, um dos resultados analíticos mais importantes em termos de utilidade na ciência física.” (...)⁵⁵

Dessa forma, é de interesse buscar um entendimento da teoria que influenciaria Thomson por toda sua carreira, e que estaria na base de seu analisador de marés, as Séries de Fourier.

⁵⁴ Thomson e Tait (2009).

⁵⁵ Thomson e Tait (p.50).

3 Séries de Fourier

A série trigonométrica de Fourier foi apresentada em 1807 por Jean Baptiste Joseph Fourier ao tentar solucionar um problema físico envolvendo a propagação de calor em meios sólidos. A partir desta descoberta, um novo horizonte de possibilidades se abriu, uma vez que as séries de Fourier não se limitam apenas no campo da matemática, abrangendo áreas como a física e, em um contexto mais atual, a computação e a Inteligência Artificial.

3.1 Sequências e séries

O estudo de padrões numéricos, sequências e séries vem sendo exercido desde antes da invenção da escrita. No papiro de Rhind, datado de cerca de três milênios e meio originalmente e reescrito por volta de 1650 a.C por Ahmés, são documentadas as diversas proezas dos povos egípcios em relação ao estudo dos números. Neste artefato arqueológico, é registrado cerca de 85 problemas matemáticos, incluindo um problema que envolve a utilização de uma sequência numérica, este problema em questão abrange o que conhecemos hoje em dia como progressão geométrica.¹

Uma sequência numérica

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots,$$

por exemplo é uma função f , definida no conjunto dos números naturais, ou inteiros positivos: $f: n \mapsto f(n) = a_n$, em que n é o índice e a_n o termo geral.²

Outro momento importante na história que envolve o estudo de sequências remonta à Grécia antiga, quando o filósofo Zenão de Eleia (viveu por volta de 450 a.C) propôs diversos paradoxos que buscavam defender ideias da escola eleática, a unidade e permanência do ser, contrapondo as ideias pitagóricas que se baseavam na ideia de multiplicidade, e mudança. Para os pitagóricos, os números descreviam o comportamento do universo. Dentre os paradoxos de Zenão, dos quatros que se destacaram, havia a metáfora de Aquiles e a tartaruga. Nesta proposta, Aquiles aposta corrida contra uma tartaruga, que parte a frente do seu oponente. O problema trata de uma sequencia de subdivisões progressiva e infinita. Para Zenão, Aquiles nunca alcançaria a tartaruga, pois ele precisava percorrer infinitos pontos até alcançar a tartaruga, contudo, o filósofo ignorou fatores como o espaço e tempo.³

¹ Carl B. Boyer (2012).

² Stewart (2013).

³ ZENO'S... (2023).

No âmbito histórico, ainda é possível encontrar diversos modelos que fazem o uso de sequências, tais como o método de extração da raiz quadrada utilizado na Mesopotâmia por volta de 1800 a.C, a famosa sequência de Fibonacci, dentre outras.⁴ Ao somar os termos de uma sequência infinita (a_n) , obtém-se uma série infinita (ou apenas série),⁵ denotada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (3.1)$$

O estudo das séries foi crucial para o desenvolvimento da matemática e principalmente na elaboração do cálculo diferencial e integral, ocasião em que Isaac Newton (1643 - 1727) teve a ideia de representar funções como soma de séries infinitas. Para o cálculo de áreas, Newton costumava integrar uma função expressando-a inicialmente como uma série e em seguida, integrava cada termo desta série. Contudo, metodologias similares à integração, derivação e séries infinitas já eram difundidas antigamente.⁶ Newton teve um papel importante ao consolidar tais estudos em sua obra intitulada *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1686) (*Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, ou simplesmente *Principia*),⁷ ao se embasar em estudos anteriores. Como o mesmo já havia dito: “... Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes”.

3.2 A Teoria Analítica do Calor

O estudo das séries trigonométricas começaram bem antes do nascimento do matemático Fourier.⁸ Com a invenção do cálculo diferencial e integral por Newton (1642–1727) e Leibniz (1646–1716), inúmeros cientistas se apoiaram nessa nova metodologia e, por meio dela, procuraram maneiras de solucionar problemas do mundo real. Das questões mais difundidas na época, havia o problema das “cordas vibrantes”, que consistia em fixar uma corda homogênea e perfeitamente elástica nas extremidades, submetê-la a uma força $f(x)$ e observar as oscilações transversais ao longo da corda.

Os primeiros contribuidores para a teoria das cordas vibrantes incluíam o matemático inglês Brook Taylor (1685-1731), os matemáticos suíços Daniel Bernoulli (1700–1782) e Leonhard Euler (1707–1783) e Jean d’Alembert (1717–1783) na França.⁹

⁴ Stewart.

⁵ Carl B. Boyer (2012) informa que a ideia de séries infinitas estava presente desde a antiguidade. Na Grécia antiga, Arquimedes (287 a.C.–212 a.C) faz o uso de uma série geométrica de razão $1/4$ com o intuito de calcular a área da parábola. Arquimedes, por meio do método da exaustão, que consiste em subdividir a parábola em triângulos de área calculável, obteve a série infinita $T/4^n$. O valor infinito não era bem visto naquela época, além disso, um somatório com n tendendo ao infinito não é uma tarefa simples. Sendo assim, Arquimedes soma uma certa parcela da série observando o padrão resultante. Por fim, define que a área da parábola corresponde a $4/3$ da área de um triângulo T .

⁶ Carl B. Boyer.

⁷ Newton (1686).

⁸ Nahin (2006).

⁹ Churchill (1990).

Os matemáticos Bernoulli, d'Alembert e Euler obtiveram resultados significativos para problema, alcançando a famigerada *wave equation* ou “equação de onda”, representada por:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (3.2)$$

O problema é descrito como uma Equação Diferencial Parcial (EDP), em que as condições de contorno estabelecidas são:

$$\begin{cases} y(0, t) = 0, & \text{para todo } t > 0 \\ y(l, t) = 0, & \text{para todo } t > 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0} = 0 \\ y(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (3.3)$$

De forma mais concisa, quando todas as condições são aplicadas à equação da onda, exceto pela última, obtém-se a expressão:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \cos \left(\frac{n\pi c}{l} t \right). \quad (3.4)$$

Prosseguindo com a última condição, em que $t = 0$, tem-se:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{l} x \right). \quad (3.5)$$

Caso os coeficientes c_n fossem conhecidos, seria possível escrever uma função como soma infinita de componentes seno e (ou) cosseno. Essa ideia foi desprezada naquele momento, porém, anos depois ela seria novamente abordada por Fourier enquanto trabalhava com propagação de calor em corpos sólidos.

Das maneiras possíveis para que ocorra a propagação de calor, condução, convecção e irradiação, Fourier estudou e analisou o fenômeno de condução, considerando o calor em analogia a um fluido que se difundia através do sólido. Por meio do seu estudo, pôde avaliar a distribuição de calor em modelos geométricos distintos, considerando sólidos de uma a três dimensões, com base na equação fundamental de propagação de calor no interior de sólidos. Esse modelo matemático (Equação 3.6), representa a lei de variação da temperatura $u(x, t)$ em um corpo em função do tempo.¹⁰ O coeficiente K determina a difusibilidade térmica do material.

$$K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.6)$$

¹⁰ Figueiredo (2011).

Com o intuito de simplificar a análise, entre os vários métodos disponíveis para abordar o problema da difusão de calor, o presente estudo seguirá um critério mais direto para a obtenção da Série de Fourier.

Considere uma barra de comprimento L , homogênea, isolada nas faces laterais permitindo a troca de calor somente nas extremidades, de modo que possibilite a propagação de calor apenas no sentido longitudinal da barra, conforme ilustrado pela Figura 12. O propósito é determinar a temperatura em qualquer ponto da barra em um instante de tempo t .

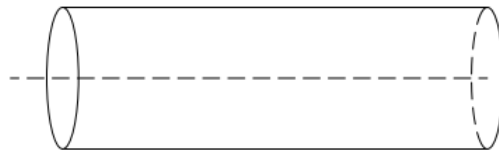


Figura 12 – Barra Homogênea.

Como o calor, neste caso, flui através da barra em sentido longitudinal, torna-se possível omitir os termos $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Logo, a equação do calor é reduzida a uma dimensão espacial:

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.7)$$

Assumindo que as temperaturas nas extremidades são sempre iguais a zero e que a temperatura inicial no instante $t = 0$ é uma função arbitrária $f(x)$, estabelecemos as seguintes condições para o problema:

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (3.8)$$

Da equação 3.7, utiliza-se o método de Fourier para a separação de variáveis a fim de encontrar soluções para o problemas na forma

$$u(x, t) = F(x)G(t). \quad (3.9)$$

Substituindo a equação 3.9 na equação do calor, obtém-se:

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}. \quad (3.10)$$

Neste momento é possível notar uma das várias sutilezas que foram consideradas durante o desenvolvimento da solução da equação do calor. Contando que cada membro da equação “separada” seja função de apenas uma variável, os dois lados serão iguais para todo x e t se cada um for igual a uma mesma constante m .¹¹ Desta forma,

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = m, \quad (3.11)$$

e então,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = m \implies F''(x) - mF(x) = 0, \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = m \implies G'(t) - KmG(t) = 0 \quad (3.13)$$

Portanto, após o método de separação, a equação é reduzida a duas equações diferenciais ordinárias. Isto é, partindo-se de (3.12) é possível notar que se trata de uma EDO de segunda ordem linear homogênea de coeficientes constantes.

Ainda assim é preciso assegurar que a nova função $u(x, t)$ atenda às condições iniciais e de fronteira. A partir de uma breve análise, é possível notar que

$$u(0, t) = u(L, t) = 0. \quad (3.14)$$

Então,

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0 \implies F(0) = 0, \quad (3.15)$$

$$u(L, t) = F(L)G(t) = 0 \implies F(L) = 0. \quad (3.16)$$

E, portanto,

$$F(0) = F(L) = 0 \quad (3.17)$$

Contudo, da equação (3.9), se $G(t) = 0$ quando $F(0) \neq 0$, implica que para todo $t > 0$, $u(x, t) = 0$, ou seja, a temperatura seria igual a zero para todos os pontos da barra em qualquer instante. Logicamente esse resultado não é interessante para a análise da

¹¹ Tonidandel e Araújo (2017).

propagação do calor. Além do mais, a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ não seria satisfeita, a não ser que $f(x) = 0$.

Após essa sucinta análise, passa-se a resolver as EDO's geradas na separação das variáveis, dando início as soluções de $F(x)$ que satisfazem (3.12) e (3.17). Sua solução pode ser obtida com a equação característica,

$$r^2 = m \implies r = \pm\sqrt{m}. \quad (3.18)$$

Dado o problema de autovalor, é importante analisar os possíveis valores de m que a equação diferencial possui solução. Portanto, para $m > 0$, a equação tem solução geral:

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{m}x} + c_2 e^{-\sqrt{m}x}. \quad (3.19)$$

Testando os valores de contorno, nota-se que, para satisfazer (3.17), o par de constantes (c_1, c_2) deve ser igual a zero. Isso faria com que $F \equiv 0$, ou seja, F seria uma solução trivial. Além disso, seguindo a análise, se $m = 0$, a solução geral de (3.12) seria:

$$F(x) = c_1 x + c_2$$

Novamente, para satisfazer (3.17), o par de constantes (c_1, c_2) deve ser igual a zero. O que levaria $F \equiv 0$.

Por fim, se $m < 0$

$$r^2 = -m \implies r = \pm\sqrt{-m}. \quad (3.20)$$

Então, assumindo que $m = -\lambda^2$,

$$r = \pm\sqrt{-\lambda^2} \implies r = \pm\lambda i. \quad (3.21)$$

Dessa forma, a solução geral equivale a:

$$F(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x). \quad (3.22)$$

Para satisfazer (3.17), torna-se necessário que

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ \sin(\lambda L) = 0 \\ c_2 \neq 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Neste momento é possível notar mais uma das perspicácias no desenvolvimento da solução. Como é possível observar, a partir da Figura 13, a função $\sin(x)$ é nula para múltiplos inteiros de π . Se $x = \lambda L$, então $\sin(\lambda L)$ obedece à mesma regra.

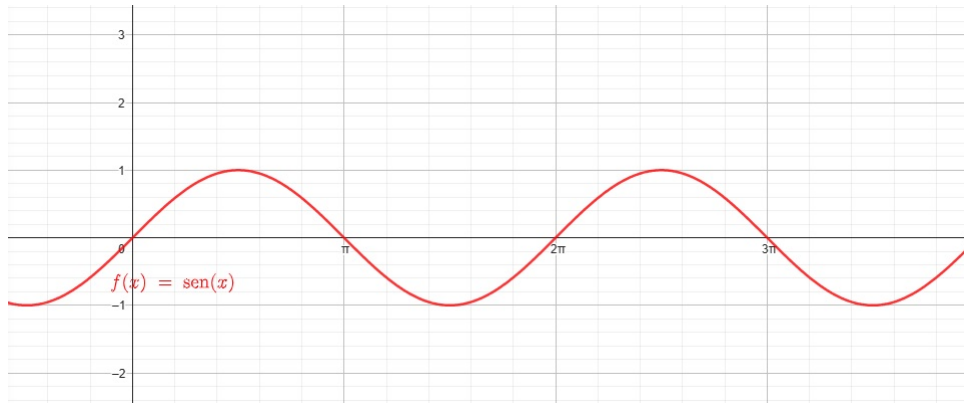


Figura 13 – Gráfico da Função Seno.

Portanto, $\lambda L = n\pi$, com $n = 1, 2, 3 \dots$. Então

$$\lambda L^2 = (n\pi)^2 \implies \lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \implies \lambda_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (3.24)$$

Vale lembrar ainda que

$$-m = \lambda^2 \implies m_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

Além disso, λ_n representam os autovalores da solução para (3.12). Isso mostra que existe uma família de soluções para cada n que satisfazem (3.11) e (3.17), dadas por

$$F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.25)$$

Para a equação (3.13) admite-se a solução geral:

$$G(t) = ce^{mkt}. \quad (3.26)$$

substituindo m na solução geral, conclui-se que

$$G_n(t) = ce^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}. \quad (3.27)$$

Então, reunindo as soluções encontradas, expressando $F_n(x)$ e $G_n(t)$ em função de $u(x, t)$, concluímos que a solução geral é:

$$u_n(x, t) = ce^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.28)$$

Até o momento, as condições de contorno e a solução encontrada satisfazem a equação do calor. Mas para a conclusão, é necessário considerar a condição inicial do problema [$u(x, 0) = f(x)$, $0 \leq x \leq L$]. Neste caso,

$$u_n(x, 0) = c \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.29)$$

Ou seja, $u(x, t)$ só seria solução se a função $f(x)$, a princípio arbitrária, fosse uma função trigonométrica!

$$f(x) = c \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Para cada valor de n há uma solução individual que satisfaz a equação do calor. Intuitivamente, a solução final poderia ser escrita como a soma de soluções individuais válidas. Essa afirmação pode ser verificada fixando valores de n para a equação do calor. Com isso é possível concluir que a verdadeira solução é uma superposição de soluções individuais que satisfazem a equação do calor:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.30)$$

Levando em conta a distribuição de temperatura inicial $u(x, 0) = f(x)$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Este resultado mostra que, caso os coeficientes c_n fossem conhecidos, seria possível expressar uma função arbitrária como uma soma infinita de outras funções seno e (ou) cosseno.

3.3 A Série de Fourier

Considere uma função $f(x)$ qualquer. Se essa função pode ser expressa como série de Fourier, então

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (3.31)$$

A Série de Fourier funciona utilizando propriedades importantes das funções seno e cosseno. A primeira propriedade é a periodicidade: Uma função $f(x)$ é chamada de periódica com período $T > 0$ se o domínio de $f(x)$ contém $x + T$ sempre que contiver x e se¹²

$$f(x + T) = f(x), \quad (3.32)$$

para todo x .

Ambas as funções, seno e cosseno, ocorrem em um período 2π . A partir de uma rápida análise¹³, é possível verificar que as funções $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ possuem período de $2L$ e período fundamental $\frac{2L}{n}$ para cada valor de n .

¹² William E. Boyce (2006).

¹³ William E. Boyce.

Outra propriedade é a ortogonalidade: O produto interno de duas funções f_1 e f_2 em um intervalo $[a, b]$ é:

$$\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx. \quad (3.33)$$

Se

$$\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0,$$

então f_1 e f_2 são ortogonais no intervalo $[a, b]$.

Um conjunto de funções forma um conjunto ortogonal se cada par de funções diferentes que pertencem ao conjunto é ortogonal. Desta forma, as funções $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, para $n = 1, 2, 3, \dots$, forma um conjunto ortogonal no intervalo $-L \leq x \leq L$. Logo, conclui-se que:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n, \\ L, & \text{para } m = n. \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n, \\ L, & \text{para } m = n. \end{cases} \quad (3.35)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \text{ para todo } m, n. \quad (3.36)$$

As relações de ortogonalidade podem ser obtidas por integração.¹⁴

Nessa etapa é possível verificar mais um detalhe de grande importância no método, pois não só auxiliam no cálculo dos coeficientes da série, mas também no comportamento da função f que será escrita como Série de Fourier¹⁵. Sabe-se que uma função ímpar é aquela cuja $f(-x) = -f(x)$. No gráfico, a função $f(x)$ ímpar é simétrica com relação à origem, como ocorre em $\sin(x)$. Por outro lado, uma função $f(x)$ é par se $f(-x) = f(x)$, portanto, os valores da função nos pontos x e $-x$ são iguais, como em $\cos(x)$.

Ainda sobre as funções pares e ímpares, existem as seguintes proposições¹⁶:

- 1) A soma de duas funções pares é uma função par; A soma de duas funções ímpares é ímpar.
- 2) O produto de duas funções pares é uma função par.
- 3) O produto de duas funções ímpares é uma função par

¹⁴ William E. Boyce.

¹⁵ Se a f candidata a Série de Fourier é ímpar, teremos uma série de senos (ímpar). Caso o contrário, se a f for par, a série terá apenas elementos cosseno (par). Figueiredo (2011).

¹⁶ Figueiredo.

- 4) O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.
 5) Se f é contínua em um intervalo $[-L, L]$ e ímpar, então

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 0. \quad (3.37)$$

- 6) Se f é contínua em um intervalo $[-L, L]$ e par, então

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx. \quad (3.38)$$

Para que uma função f possa ser representada como (3.31), ela deve atender a certos critérios. Nota-se que a afirmação de que qualquer função pode ser expressa como uma série trigonométrica não é totalmente válida, pois o método se aplica a uma ampla classe de funções, porém não são todas.

Em vista disso, será abordada uma tentativa de escrever uma função periódica de período $2L$ como uma soma infinita de senos e cossenos. Note que para solucionar o problema do calor ainda é preciso definir os coeficientes da série. Então, a seguir, é preciso determiná-los. Então, da Equação (3.31) pode-se começar pelo termo a_0 .

No próximo passo é realizada a integração de cada parcela da Equação (3.31) no intervalo $[-L, L]$. Para isso, dependemos que a $f(x)$ convirja uniformemente. Consequentemente, assim como as funções trigonométricas, a $f(x)$ é contínua, portanto, pode ser integrada. Ainda, é necessário considerar a periodicidade de f .¹⁷

$$\int_{-L}^L f(x) = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \int_{-L}^L b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.39)$$

As funções seno e cosseno, possuem período $2L$. Então, a integral no intervalo $[-L, L]$ resulta em:

$$\int_{-L}^L a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \int_{-L}^L b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$$

para qualquer valor de n . Assim,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)dx.$$

Para os próximos coeficientes, pode-se utilizar as relações de ortogonalidade (3.34), (3.35), (3.36) aliados ao método de integração e resultado obtido para a_0 .

Afim de encontrar a_n multiplica-se os dois lados da igualdade em (3.31) por $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e aplicam-se as relações de ortogonalidade. De forma similar, agora multiplicando por $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, encontra-se o termo b_n .

¹⁷ Uma abordagem mais detalhada destes conceitos pode ser conferida em [Figueiredo](#) (p.14).

Estreitando o raciocínio, que pode ser verificado em¹⁸, conclui-se que os coeficientes da série de Fourier são obtidos da seguinte maneira:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx; \quad (3.40)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx; \quad (3.41)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.42)$$

A introdução do fator $\frac{1}{2}$ antes de a_0 na Série de Fourier é uma simplificação para o cálculo do termo em meio período. Com os fundamentos explorados até agora, torna-se possível expressar uma determinada função $f(x)$ como uma soma de senos e cossenos. Este método para calcular os coeficientes é também conhecido como “Fórmulas de Euler-Fourier”,¹⁹ pois, antes mesmo do nascimento do Fourier, a mesma abordagem utilizada para calcular os coeficientes da série trigonométrica havia sido feita pelo matemático suíço Leonhard Paul Euler (1707-1783).²⁰

As conclusões de Fourier em seu estudo geraram um grande alvoroço entre os matemáticos da época. O fato de que o conceito de função ainda não havia sido bem esclarecido pode ter colaborado com o descaso por parte da comunidade científica em vista do trabalho realizado na teoria analítica do calor.²¹ Todavia, outro detalhe importante são os critérios de convergência da Série de Fourier. Isto é, para que a expressão 3.31 faça algum sentido a $f(x)$ precisa convergir.

Uma possibilidade de checar a convergência da série é se a função atende os critérios de Dirichlet, que são condições suficientes, mas não necessárias para a convergência de uma série de Fourier.²² Se a $f(x)$ é uma função periódica de período $2L$, além de ser absolutamente integrável no intervalo $[-L, L]$:

1. $f(x)$ tem um número finito de descontinuidades no intervalo $[-L, L]$;
2. $f(x)$ tem um número finito de extremos no intervalo $[-L, L]$.

¹⁸ Figueiredo.

¹⁹ Boon (2004).

²⁰ Nahin (2006, p. 165).

²¹ Ver em Tonidandel e Araújo (2017).

²² Tonidandel e Araújo (p.44).

4 Considerações Finais

No estudo de fenômenos físicos que descrevem a natureza, utilizam-se modelos matemáticos como um meio de representar estes acontecimentos e que em sua maioria envolvem uma taxa de variação de determinada grandeza física. Com isso, surgem as derivadas, que possibilitam o cálculo da taxa de variação instantânea de uma grandeza em função de outra. Estas situações que são descritas por modelos matemáticos que envolvem derivadas são chamadas de Equações Diferenciais Ordinárias, para uma variável independente ou Equações Diferenciais Parciais para duas ou mais variáveis independentes.

A metodologia de Fourier, assim como diversos outros problemas físicos, surgiu a partir de modelos baseados em equações diferenciais. Através da análise da taxa de variação de calor em corpos, Fourier alcançou o seu impressionante método que consiste em escrever uma função como uma série trigonométrica. Com isso, sua teoria levantou inúmeras possibilidades. Além da sua vasta aplicação na matemática, o estudo poderia ser facilmente agregado à fenômenos físicos oscilatórios. Ampliando ainda mais as oportunidades, o efeito da difusão do calor pode ser incorporado em outros comportamentos presentes na natureza. Não é por acaso que Fourier, em sua análise do problema de propagação de calor em corpos, interpreta o comportamento do calor em um meio de maneira semelhante à dispersão de um fluido em um corpo.

Lorde Kelvin, admirador de Fourier, buscou aplicar a análise de Fourier em diversos problemas presentes na natureza. Desde calcular a idade da Terra até a analogia utilizada para interpretar o fluxo de elétrons que percorria o cabo telegráfico. Aliás, o estudo das marés por meio da análise harmônica de marés, assim como o computador analógico que previa a altura do nível do mar em um ano, só foi possível graças a relação de Thomson com a obra de Fourier. Além do mais, a teoria do matemático Francês ainda seria o motivo de inspiração para outros cientistas, assim como foi para Kelvin.

Referências

- ADAPTAÇÕES de medidas: o que é o ano-luz? Disponível em: <https://www.ufmg.br/espacodoconhecimento/adaptacoes-de-medidas-o-que-e-o-ano-luz/#:~:text=0%20Sol%20est%C3%A1%20a%20149.600,3%20minutos%2Dluz%20de%20n%C3%B3s..> Acesso em: 21 nov. 2023. Citado 1 vez na página 15.
- ÁVILA, Geraldo. *Introdução à Análise Matemática*. Blucher, 1999. v. 1. Citado 1 vez na página 51.
- BAGUINSKI, Francisco. *Galvanometro de espelho*. UFRGS - AMLEF. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/amlef/2020/12/11/galvanometro-de-espelho/>. Acesso em: 12 nov. 2023. Citado 1 vez na página 23.
- BOON, J. *Secrets of the Tide: Tide and Tidal Current Analysis and Predictions, Storm Surges and Sea Level Trends*. Woodhead Publishing, 2004. Citado 6 vezes nas páginas 14, 15, 20, 24, 40.
- CARL B. BOYER, Uta C. Merzbach. *História da Matemática*. Blucher, 2012. v. 1. Citado 4 vezes nas páginas 30, 31, 51.
- CARTWRIGHT, D. E. *Tides: A Scientific History*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. Citado 1 vez na página 18.
- CHELTON; ENFIELD, David. Ocean signals in tide gauge records. *Journal of Geophysical Research*, v. 91, p. 9081–9098, ago. 1986. DOI: [10.1029/JB091iB09p09081](https://doi.org/10.1029/JB091iB09p09081). Citado 1 vez nas páginas 18, 19.
- CHURCHILL, Ruel V. *Fourier Series and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, 1990. Citado 1 vez na página 31.
- CHURCHILL, Ruel V. *Fourier series and boundary value problems*. 2. ed.: McGraw-hill Book Company Inc., 1963. Citado 1 vez na página 12.
- CROWTHER, J. G. *Men of science: Humphry Davy, Michael Faraday, James Prescott Joule, William Thomson, James Clerk Maxwell*. W. W. Norton & company, jan. 1936. v. 1. Citado 7 vezes nas páginas 22, 23, 48, 49.
- FARADAY, Michael. Pesquisas experimentais em eletricidade. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 28, n. 1, p. 152–204, 2011. Trad. de A. K. T. Assis e L. F. Haruna. DOI: [10.5007/2175-7941.2011v28n1p152](https://doi.org/10.5007/2175-7941.2011v28n1p152). Citado 2 vezes nas páginas 21, 22.
- FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Editora Edgar Blucher, 2011. N/A. Citado 5 vezes nas páginas 32, 38–40.
- FOURIER, Jean-Baptiste Joseph. *Téorie Analytique de la chaleur*. Paris: Chez Firmin Didot, père et fils, 1822. Citado 3 vezes nas páginas 12, 14, 18, 21.

- FOURIER, Jean-Baptiste Joseph. *The analytical theory of heat*. Edição: Alexander Freeman. New York: Dover Publications, Inc, 1878. Citado 1 vez na página 55.
- FUINI, Pedro. *Napoleão Bonaparte é coroado Imperador*. FACULDADE DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Disponível em: <https://www.fflch.usp.br/41855>. Citado 1 vez na página 54.
- GARRISON, T. *Fundamentos de oceanografia*. 4. ed.: Cengage Learning, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 14–18.
- GAUSS, Johann Carl Friedrich. (Carta de) Gauss (para) Olbers, 20 de Nov. 1833. In: POPULAR Science Monthly. Göttingen: wikisource-US, jan. 1833. v. 34. Disponível em: https://en.wikisource.org/wiki/Popular_Science_Monthly/Volume_34/January_1889/Gauss_and_the_Electric_Telegraph. Citado 1 vez na página 21.
- GUINNESS, Grattan. *Joseph Fourier, 1768-1830: A Survey of His Life and Work*. MIT Press, 1972. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 52, 53.
- HERIVEL, John. *Joseph Fourier : The Man And The Physicist*. Clarendon Press, 1975. v. 1. Citado 5 vezes nas páginas 52–54.
- KORNER, T.W. *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, 1989. ISBN 978-0521389914. Citado 1 vez na página 25.
- LLOYD, J. T. Lord Kelvin demonstrated. *The Physics Teacher*, v. 18, n. 1, p. 16–24, jan. 1980. ISSN 0031-921X. DOI: [10.1119/1.2340402](https://doi.org/10.1119/1.2340402). Disponível em: <https://doi.org/10.1119/1.2340402>. Citado 1 vez na página 49.
- MACFARLANE, A. *Lectures On Ten British Physicists Of The Nineteenth Century*. New York : John Wiley; London, Chapman & Hall, 1919. P. 42. Citado 1 vez na página 49.
- MIGUENS, A. P. *Navegação: A Ciência e a Arte*. v. 1. Disponível em: <https://www.marinha.mil.br/dhn/?q=pt-br/npublicacoes>. Citado 2 vezes nas páginas 15, 17.
- NAHIN, P. J. *Dr. Euler's Fabulous Formula: cures many mathematical ills*. 1. ed.: Princeton University Press, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 21, 31, 40.
- NEWTON, Isaac. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. 1. ed. Londini: Societatis Regiae, 1686. Londini: Societatis Regiae. Digitalizado por Sociedade Real de Londres. Disponível em: <https://archive.org/details/1686-newton-principia-1ed>. Citado 2 vezes na página 31.
- PARKER, B. *Tidal Analysis and Prediction*. NOAA, NOS Center for Operational Oceanographic Products e Services Silver Spring, MD, 2007. Disponível em: <https://repository.oceanbestpractices.org/handle/11329/632>. Citado 7 vezes nas páginas 18, 20, 23, 24.
- PRESTINI, Elena. *The Evolution of Applied Harmonic Analysis: Models of the Real World*. Springer, 2016. v. 1. Citado 4 vezes nas páginas 52–54.

- RESNICK, R.; WALKER, J.; HALLIDAY, D. *Fundamentos de Física - Gravitação, Ondas e Termodinâmica*. LTC, 2012. Citado 1 vez na página 18.
- SATO, O. *Ondas e Marés*. USP. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7548738/mod_resource/content/11/notes.pdf. Acesso em: 4 dez. 2023. Citado 1 vez na página 15.
- SCHUREMAN, P. *Manual of Harmonic Analysis and Prediction of Tides*. Forgotten Books, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 23, 26.
- ZENO'S Paradoxes. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Fev. 2023. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/Archives/Win2004/entries/paradox-zeno/>. Acesso em: 10 fev. 2023. Citado 1 vez na página 30.
- STEWART, James. *Cálculo*. 7. ed.: Cengage, 2013. 2 v. 664 p. ISBN 8522112592. Citado 2 vezes nas páginas 30, 31.
- THOMPSON, Silvanus Phillips. *The life of William Thomson, baron Kelvin of Largs*. London: Macmillan, 1910. v. 2. Digitized by The University of California Libraries. Citado 8 vezes nas páginas 48, 49.
- THOMSON, W. Harmonic Analyzer. *Proceedings of the Royal Society of London*, The Royal Society, v. 27, p. 371–373, 1878. ISSN 03701662. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/113690>. Acesso em: 21 dez. 2023. Citado 2 vezes nas páginas 26, 27.
- THOMSON, W. *Mathematical and Physical Papers*. London: Cambridge University press, 1882. Citado 7 vezes nas páginas 25–29, 49, 50.
- THOMSON, W. On the Theory of the Electric Telegraph. *Proceedings of the Royal Society of London*, v. 7, p. 382–399, 1854. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/111814?seq=2>. Acesso em: 12 nov. 2023. Citado 1 vez na página 22.
- THOMSON, W.; TAIT, P.G. *Treatise on Natural Philosophy*. Cambridge University Press, 2009. ISBN 9780511703935. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09780511703935>. Citado 3 vezes nas páginas 26, 29, 50.
- TONIDANDEL, D. A. V. *The Ground Zero of Electrical Engineering: the Flow Analogy for Electricity and Magnetism, from Antiquity to Telegraphy*. 2021. PhD in Electrical Engineering – Graduate Program in Electrical Engineering, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Belo Horizonte. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1843/38345>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 21, 22.
- TONIDANDEL, D. A. V.; ARAÚJO, A. E. A. *Invertendo Domínios: o Conceito de Transformada*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2017. ISBN 978-85-399-0888-2. Citado 5 vezes nas páginas 34, 40, 55, 57.

TONIDANDEL, D. A. V.; BOAVENTURA, W. C.; ARAÚJO, A. E. A. A primeira teoria matemática da propagação elétrica: uma leitura estendida do artigo “Sobre a teoria do telégrafo elétrico”, de William Thomson. *Revista Brasileira de História da Ciência*, v. 11, n. 2, p. 267–287, dez. 2018. ISSN 2176-3275. Citado 2 vezes nas páginas 20, 21.

ÉCOLE militaire (France). Wikipédia. Mar. 2023. Disponível em: [https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89cole_militaire_\(France\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89cole_militaire_(France)). Acesso em: 10 mai. 2023. Citado 1 vez na página 51.

WILLIAM E. BOYCE, Richard C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2006. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38.

WOODWORTH, P. L. Tide prediction machines at the Liverpool Tidal Institute. *History of Geo- and Space Sciences*, v. 11, n. 1, p. 15–29, 2020. DOI: 10.5194/hgss-11-15-2020. Disponível em: <https://hgss.copernicus.org/articles/11/15/2020/>. Citado 1 vez na página 28.

Apêndices

APÊNDICE A – Willian Thomson: vida e obra

William Thomson (Figura 14) nasceu em 26 de junho de 1824, em Belfast, capital da Irlanda do Norte. Seu pai, James Thomson, era professor de Matemática na Royal Academical Institution de Belfast. Em 1830, com apenas seis anos de idade, o jovem Willian perde sua mãe, Margaret Thomson.

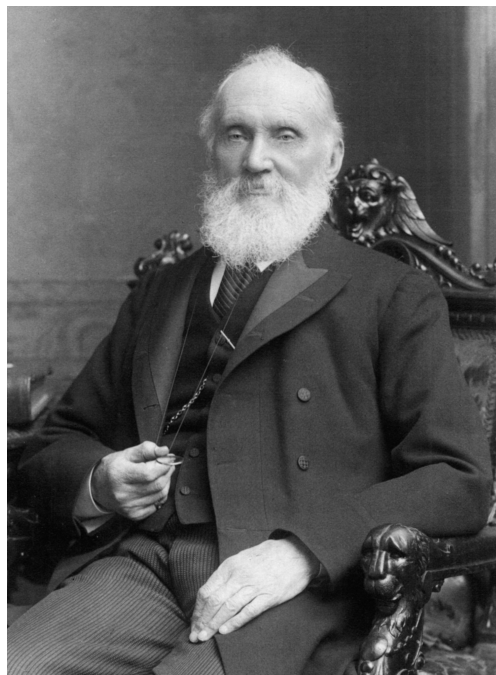


Figura 14 – William Thomson. Fonte: Wikimedia Commons

Assim como seus irmãos, William nunca ingressou em uma escola formal, teve seu pai como mentor até os onze anos de idade. No ano de 1832, seu pai recebe uma proposta para exercer o cargo de professor de matemática em Glasgow, levando a família Thomson a se mudar de Belfast.

Apesar de nunca ter frequentado a escola, em 1834 com apenas onze anos, William Thomson é matriculado na Universidade e permanece estudando durante seis anos. Enquanto aluno demonstrou um grande interesse pela física. Em certo momento teve o contato com obras literárias de grandes matemáticos Franceses, como Lagrange e Laplace. Mas o grande divisor de águas, para William, seria a obra *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier, que o serviu de inspiração durante toda a sua carreira.

Em 1841, Thomson deixa a universidade de Glasgow e ingressa na Peterhouse em Cambridge, recebendo o seu primeiro diploma em 1845. Após a conclusão de seus estudos

na Inglaterra, segue viagem rumo a Paris para trabalhar no laboratório de Regnault no Collège de' France, onde permaneceu por quatro meses.¹ Quando retorna para Cambridge, assume o cargo de professor de matemática. Nessa altura, Thomson já tinha um certo renome por conta de sua aptidão em física e matemática. Em 1846, aos 22 anos de idade, ele assume a cadeira de Filosofia Natural em Glasgow, permanecendo no cargo por 53 anos.

No ano seguinte, durante uma reunião realizada pela British Association, Thomson se encontra com James Prescott Joule (1818 - 1889). Joule estava envolvido em pesquisas sobre as relações entre calor, eletricidade e trabalho mecânico.² Apesar dos seus esforços, os artigos apresentados anteriormente para a British Association, até então, não haviam despertado qualquer interesse.³ Mas naquele ano, a audiência presente na assembléia contava com Thomson, que levantaria críticas construtivas ao trabalho de Joule. Aquele evento fez com que Thomson, anos mais tarde, voltasse sua atenção para a relação entre o calor e trabalho, o que levou ambos os cientistas a trabalharem em conjunto. Essa união possibilitou avanços significativos na área da termodinâmica.

“(...) Nos anos de 1851 a 1854, Thomson formulou com precisão científica, em uma longa comunicação à Royal Society de Edimburgo, as duas grandes leis da termodinâmica - (1) a lei de equivalência descoberta por Joule e (2) a lei de transformação, que ele atribuiu generosamente a Carnot e Clausius.”(...)”⁴

As suas pesquisas não se restringiam apenas no campo da termodinâmica. Não é á toa que, em menos da metade de sua vida, já possuía mais de 50 artigos originais publicados⁵. Em um deles, apresentado em 1853, Thomson exhibe uma análise sobre o movimento da eletricidade em condutores eletrificados conectados à terra. O resultado obtido apontava dois novos tipos de descarga elétrica: contínua e oscilatória. O seu envolvimento com esse novo ramo da ciência chamou a atenção do físico e matemático James Clerk Maxwell (1831-1879), que viria a ser influenciado por Thomson inclusive em sua descoberta sobre a existência das ondas eletromagnéticas.⁶

Outra área de destaque em que Thomson se envolveu foi na oceanografia. Seu interesse pelas marés, enfatizado durante as expedições marítimas (Seção 2.2), e relacionadas à análise matemática abordada pelo método de Fourier, resultaram em patentes profundamentes significativas para a navegação na época.

¹ Thompson (1910).

² Thompson.

³ Crowther (1936, p.221).

⁴ Além, é claro, de ser responsável pela famigerada Escala Kelvin, também conhecida como Escala Absoluta. Thompson (1910).

⁵ Thompson.

⁶ Uma breve análise deste artigo pode ser verificada em Crowther (1936, p.232-234).

Thomson era rigoroso em relação as medidas. Além do seu galvanômetro de espelhos, ele inventou inúmeros outros instrumentos destinados a medições elétricas. Sua influência em medições e unidades de medidas levou-o a explorar a ideia da formação de um comitê voltado a estabelecer padrões para unidades elétricas durante uma das reuniões da British Association no ano de 1861.⁷ Não é à toa que, durante o congresso de Paris, realizado no ano de 1881, Kelvin foi um dos primeiros a aclamar pela adoção de um sistema internacional de unidades.⁸

O seu método científico é reconhecido até hoje. Kelvin é pioneiro na utilização de práticas durante as aulas de física.⁹ Enquanto ainda exercia suas funções durante a segunda expedição marítima, deu início ao primeiro volume do livro *Treatise on Natural Philosophy* (Figura 15), juntamente ao físico matemático escocês Peter Guthrie Tait (1831-1901), publicado em 1867. Este livro foi amplamente reconhecido por introduzir um novo modelo literário de ensino de Filosofia Natural, no qual iria influenciar os livros didáticos que viriam a ser publicados posteriormente.¹⁰ O livro teve tamanha relevância para a época que foi até mesmo denominado como “Principia do Século XIX”,¹¹ sendo comparado à obra de Newton, por sua dimensão e interdisciplinaridade entre a matemática e física. Maxwell, de maneira poética, descreve ambos os físicos como “magos do norte”,¹² elogiando suas habilidades em desvendar conceitos complexos de dinâmica, transpondo em uma linguagem didática e compreensível.

Até a chegada do século XX, Thomson já possuía cerca de 56 patentes, compreendidas em tecnologias substanciais para a época. Além de suas invenções, Thomson detinha condecorações honrosas que eram (e ainda são) concedidas a poucos membros da sociedade britânica. Devido às suas contribuições, o título de nobreza foi atribuído a ele diretamente pela Rainha Vitória (1819–1901) no ano de 1892.¹³ No entanto, é pelo seu título de Primeiro Barão Kelvin de Largs que William Thomson é facilmente reconhecido.

Lorde Kelvin, cuja vida se estendeu até os oitenta e três anos, deixou um legado inestimável para a ciência quando faleceu em 17 de dezembro de 1907.¹⁴ Suas contribuições estão documentadas em seis volumes de seus livros, intitulados *Mathematical and Physical Papers* (Figura 16), publicados entre 1882 e 1911. Essa obra multivolume concentra uma variedade de artigos de Kelvin, originalmente publicados em periódicos, e cobrem uma ampla gama de tópicos, incluindo termodinâmica, eletromagnetismo, elasticidade, radioatividade e navegação, entre outros.¹⁵

⁷ Crowther.

⁸ Thompson (1910).

⁹ Lloyd (1980).

¹⁰ Thompson (1910).

¹¹ MacFarlane (1919, p.42).

¹² Crowther (1936, p.249-250).

¹³ Thompson (1910).

¹⁴ Thompson.

¹⁵ Thomson (1882).

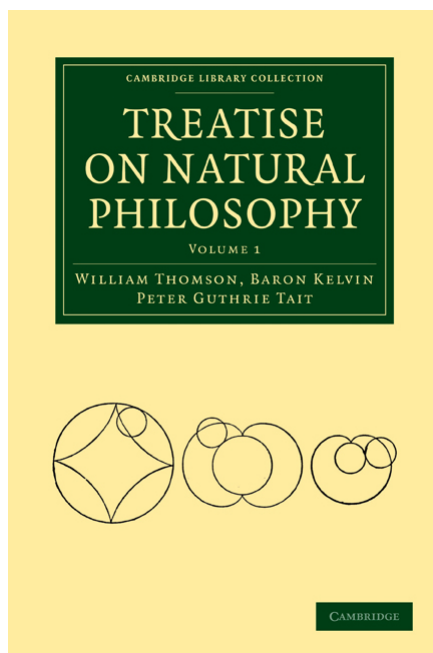


Figura 15 – Capa do *Treatise on Natural Philosophy* de Kelvin. Fonte: Thomson e Tait (2009).

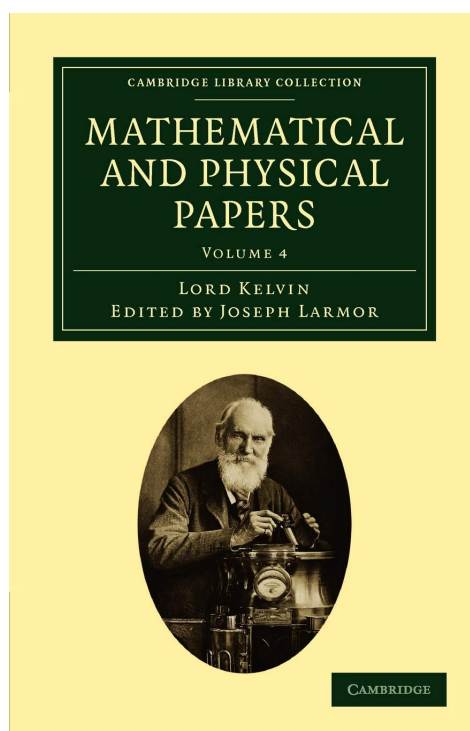


Figura 16 – Capa da coletânea *Mathematical and Physical Papers* de William Thomson. Fonte Thomson (1882).

APÊNDICE B – Joseph Fourier: vida e obra

Jean Baptiste Joseph Fourier (Figura 17) nasceu em 21 de março de 1768, na cidade de Auxerre. Fourier, ao nascer, recebe o mesmo nome de seu pai, Joseph Fourier, que atuava como alfaiate em Auxerre. A infância de Fourier não foi nada simples, aos nove anos de idade, em 1777, sua mãe veio a óbito e no ano seguinte o seu pai. Em decorrer de suas perdas, Fourier se torna órfão e é encaminhado para a escola École Royale Militaire de Auxerre anos depois. Desde jovem, Fourier já demonstrava uma promissora capacidade intelectual.



Figura 17 – Jean Baptiste Joseph Fourier. Fonte: Wikimedia Commons

Dentre as onze École Royale Militaire, fundadas em 1751 pelo rei Luís XV¹, a instituição em Auxerre era regida pela ordem beneditina², e tinha ênfase no ensino da ciências e matemática, área em que Fourier demonstrou uma grande aptidão e interesse desde poucos anos de estudo na instituição de ensino. Em função de suas habilidades, Fourier foi premiado não só nas áreas das ciências e matemática, mas também em retórica e canto, disciplinas que eram lecionadas em sua antiga escola.³

Após a conclusão dos seus estudos, na École Royale Militaire, Fourier pretendia seguir a carreira militar, atuando na Artilharia ou Engenharia. Contudo, ambas as áreas eram restritas e destinadas apenas para membros da nobreza francesa. Por não possuir o

¹ ÉCOLE... (2023).

² Carl B. Boyer (2012).

³ Ávila (1999).

título de nobre, Fourier optou por outra alternativa, ingressando na ordem de São Bento em 1787, na Abadia de Saint-Benoît-sur-Loire, basilica de muita importância para a igreja Católica e que abriga o corpo e relíquias de São Bento⁴. O jovem Fourier permaneceu por cerca de dois anos preparando os seus votos e durante este período lecionava matemática para os outros noviços da ordem.

Durante a fase que antecede a Revolução Francesa (1787 a 1789), Fourier permaneceu indiferente às notícias políticas e obteve resultados na teoria das equações numéricas e em 1789 enviou um artigo para a Academie des Sciences em Paris relatando seus resultados.⁵ Segundo Grattan⁶, esse artigo foi avaliado por dois renomados matemáticos franceses, Adrien Marie Legendre (1752–1833) e Gaspard Monge (1746—1818). Monge, em particular, teve um impacto significativo na carreira de Fourier.

- 1.1 A Revolução trouxe consigo diversas mudanças no cenário político-social francês ao final do século XVIII, uma delas foi a Constituição Civil do Clero, aprovada em 1790, que confiscava os bens da igreja, proibira os votos religiosos e suprimiu as ordens religiosas.

No entanto, Fourier se mostrava indeciso quanto a sua escolha em tomar votos religiosos, e, eventualmente, optou por não fazê-lo. Não se sabe ao certo se a Constituição Civil do Clero desempenhou um papel nessa decisão. Conseqüentemente, ele retorna a Auxerre para assumir um cargo de ensino em sua antiga escola, a École Royale Militaire, como assistente do seu antigo professor de matemática, Bonard. Devido ao seu exímio trabalho exercido na escola, Fourier obteve uma grande reputação em sua cidade natal.

Fourier, de fato, foi se juntar à causa revolucionária somente em fevereiro de 1793, devido a um discurso realizado em Auxerre, em uma assembleia local, à vista de um decreto para o recrutamento de 300.000 homens⁷. Em março daquele mesmo ano, foi convidado a integrar o comitê de vigilância local, no qual renunciou tempos depois.

A população de Auxerre, em geral, era a favor dos ideais republicanos. Fourier, não tão distante, acreditava nos princípios da revolução. Graças ao seu posicionamento e dedicação, foi enviado ao departamento de Loiret, para coletar cavalos o esforço de guerra. Durante este período, Fourier se envolveu em uma disputa local, quando passava por Orléans, o que o fez retornar a Auxerre, onde permaneceu ensinando na sua antiga escola e membro do partido revolucionário local. Em 1794, ele se tornou o principal representante do Terror na cidade, após ser nomeado presidente do Comitê Revolucionário em Auxerre. Durante este mesmo ano, Fourier foi preso. Não se sabe ao certo o que levou à causa. Contudo, por conta de sua boa reputação foi solto posteriormente.

⁴ Herivel (1975).

⁵ Prestini (2016).

⁶ Guinness (1972).

⁷ Herivel (1975).

- 1.2 A fase conhecida como terror, com duração de dois anos (1792-1794), foi o período durante a revolução Francesa no qual foi marcado por perseguições religiosas e políticas, guerras civis e execuções na guilhotina. Este evento foi liderado por Maximilien de Robespierre (1758-1794), líder jacobino e principal nome da Revolução.

Em contrapartida, naquele mesmo ano, ocorreu um evento que marcaria de vez o futuro do Fourier. Devido à carência de professores ligados ao ensino primário, a convenção nacional, que regia a França durante a revolução, optou por criar uma instituição de ensino capacitada a fim de remediar essa deficiência no sistema educacional. Isso foi formalizado pelo decreto de 30 de outubro de 1794, que deu origem à *École Normale*, aberta em janeiro de 1795. Naquela época, a escola contava com cientistas excepcionais em suas respectivas áreas. Além do jovem Fourier, a escola abrigava mentes como: Joseph Louis Lagrange (1736–1813), Gaspard Monge (1746–1816) e Pierre Simon Laplace (1749–1827) destinados ao ensino de matemática e para lecionar química, havia Claude Louis Berthollet (1748–1822)⁸. De acordo com Grattan-Guinness⁹, a escola foi fechada em maio de 1795.

Fourier é preso pela segunda vez em junho de 1795. A justificativa foi o seu envolvimento com o Terror em 1794, no qual foi acusado pelos seus adversários de sua cidade natal. Após ser solto, em agosto do mesmo ano e por motivos desconhecidos, Fourier retoma o cargo de professor na *École Centrale*, que logo seria rebatizada de *École Polytechnique* por decreto de 1º de setembro de 1795¹⁰.

A escola tinha como diretor Gaspard Monge, que lecionava o curso de geometria descritiva. Além de Monge, a instituição contava com mentes brilhantes como a de Lagrange. Fourier desempenhou um papel importante na escola ao, inicialmente, trabalhar como assistente de Monge, auxiliando nas aulas de geometria descritiva e posteriormente suceder Lagrange nas disciplinas de análise e mecânica em 1797.

Não há indícios que Fourier tenha publicado alguma pesquisa matemática significativa enquanto esteve na *École Polytechnique*. É bem provável que ele tenha voltado a sua atenção para deveres administrativos do que seus interesses matemáticos, desde o início da Revolução até o momento. Pela ótica de Herivel¹¹, é possível que Fourier tenha retomado suas pesquisas quando herdou o cargo de Lagrange, como professor de análise e mecânica.

Contudo, a sua breve calma seria interrompida ao ser convocado em 27 de março de 1798, pelo Ministro do Interior, para compor a comissão científica e literária em uma expedição militar que estava por vir. O destino era o Egito.

A expedição tinha sob comando o famigerado líder militar francês Napoleão Bonaparte (1769–1821), e contava com 30.000 soldados e marinheiros, distribuídos em 180

⁸ Prestini (2016).

⁹ Guinness (1972).

¹⁰ Prestini (2016).

¹¹ Herivel (1975).

navios¹². Além de Fourier, eleito como membro sênior da comissão, Bonaparte ainda tinha ao seu dispor Monge e o químico francês Claude Berthollet (1748–1822), dentre outros nomes importantes.

De acordo com Herivel¹³, em 1º de julho de 1798, a cidade de Alexandria foi avistada e no dia seguinte é tomada pelos soldados Franceses. Fourier e outros membros da expedição se estabeleceram na cidade vizinha, Roseta, onde pôde assumir o seu primeiro cargo administrativo no Egito. Enquanto isso, Napoleão e seus homens seguiam avançando no Egito.

O exército Francês encontrou diversos obstáculos enquanto avançavam no Egito, sendo a presença das tropas britânicas o mais significativo deles. As forças inglesas foram determinantes para a retirada dos Franceses do Egito em 1801. No entanto, Napoleão já havia retornado a Paris, juntamente com Monge e Berthollet, em agosto de 1799.

Apesar dos conflitos, a expedição foi uma experiência valiosa para Fourier. Durante este curto período, prestou serviços como matemático na academia científica de nome Institut d'Égypte, ou Instituto Científico Egípcio, fundada por Napoleão em 1798 durante a campanha. Essa instituição foi encarregada por realizar coleta e publicação de dados históricos sobre o antigo Egito e divulgação da ciência no país.

Ao término da campanha, em 1801, Fourier volta para a França e retoma o seu cargo na École Polytechnique. No ano seguinte é nomeado como prefeito do departamento de Isère, na capital Grenoble.

Como prefeito, Fourier desempenhou seu papel com capricho. Enquanto comandava o departamento de Isère, suas funções administrativas foram diversas, algumas das quais envolviam supervisionar e aplicar leis, executar as instruções que partiam de Paris, assim como manter a capital informada sobre os acontecimentos locais, planejar melhorias voltadas à infraestrutura da região e principalmente manter a ordem. Fourier possuía um bom relacionamento com os membros da nobreza e era popular entre a classe média e rica, graças à sua dedicação enquanto prefeito, além do seu carisma pessoal.

A mando do agora Imperador Napoleão, alto coroado em 1804¹⁴, Fourier foi inúmeras vezes requisitado. Além de suas muitas ocupações administrativas, ele foi designado a auxiliar na obra intitulada *Description de l'Égypte* (Figura 18), uma série de publicações destinadas a reunir as informações que foram coletadas durante a expedição ao Egito. Nesta tarefa, Fourier foi o responsável pela edição da introdução geral da obra. Devido a este trabalho, Fourier é condecorado com o título de barão e uma pensão anual.¹⁵

Mesmo com tantas ocupações, Fourier encontrou tempo para se dedicar a um

¹² Herivel.

¹³ Herivel.

¹⁴ Fuini (s.d.).

¹⁵ Prestini (2016).

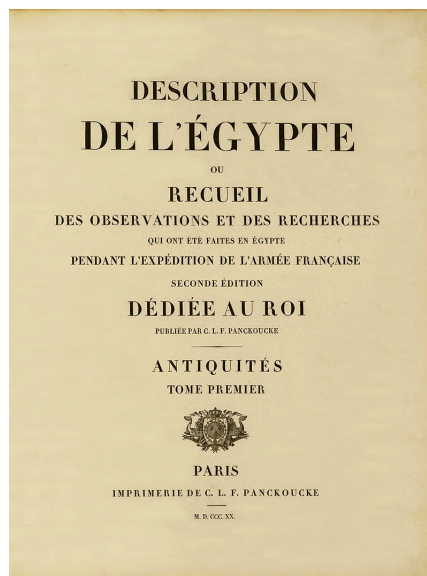


Figura 18 – Capa da publicação de 1820 do conjunto de obras *Description de l'Égypte*.

estudo distinto dos que já havia desenvolvido anteriormente. Estes esforços resultaram em sua obra prima, o livro *Théorie analytique de la chaleur* (Figura 19), publicado finalmente em 1822. Não se sabe ao certo a razão do seu interesse no estudo da propagação do calor em corpos, mas é certo que ele não se adaptou às mudanças de climas do Egito à Grenoble. Devido a essa mudança abrupta, Fourier contraiu dores reumáticas que se tornavam cada vez mais graves. É bem provável que o seu novo gosto tenha surgido devido aos problemas relacionados às condições extremas do clima, haja visto que Fourier provou na pele o calor escaldante presenciado na África Setentrional, e o frio dos Alpes Franceses. Para ele, as diferentes temperaturas na terra são uma das mais belas aplicações da teoria do calor.¹⁶

Por outro lado, naquele período, o mundo experimentava uma intensa revolução industrial. A produção em larga escala dependia de máquinas e equipamentos que poderiam ser facilmente comprometidas com a influência do calor. Então, era bem plausível que os cientistas contemporâneos estivessem desenvolvendo pesquisas sobre o fenômeno de propagação do calor.

Seus estudos sobre a propagação de calor tiveram início em 1802. Boa parte das informações reunidas foram submetidas em um artigo e apresentado para a academia de Ciências de Paris, em 21 de dezembro de 1807. O objetivo era encontrar o comportamento da propagação do calor em corpos sólidos.¹⁷ Este estudo continha toda a essência da sua obra principal, que ainda seria publicada em 1822.

A comissão responsável por avaliar o artigo era composta por Lagrange, Laplace, Monge e Sylvestre François Lacroix (1765–1843). O artigo não foi bem visto pela banca, principalmente por Laplace, que já havia desenvolvido estudos sobre o assunto em questão.

¹⁶ [Fourier \(1878\)](#).

¹⁷ [Tonidandel e Araújo \(2017\)](#).

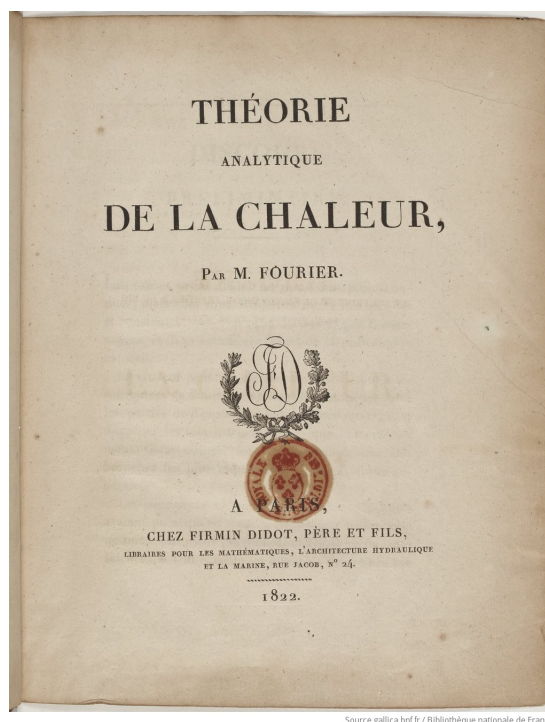


Figura 19 – Capa do livro “Théorie analytique de la chaleur”, publicado em 1822.

Além da teoria em si, a fundamentação matemática baseada nas séries trigonométricas e o método de derivação utilizado na equação do calor também fora criticado. Apesar de todas as controvérsias, a continuidade de seus estudos resumiram em uma nova publicação, em 1811, na qual foi nomeado à premiação pela academia no mesmo ano.

Em 1814, após campanhas militares desastrosas, a França é atacada. Essa derrota, somada a outras, ocasiona a queda e exílio do antigo líder, Bonaparte, e a ascensão do rei Luís XVIII (1755–1824), que governaria a França até a sua morte.

No ano seguinte, Napoleão retorna do seu exílio, dando início ao período dos cem dias. Em certo momento, Fourier tem o seu cargo de prefeito de Grenoble suspenso por Bonaparte. Apesar disso, ele acaba sendo nomeado novamente a prefeito, agora a frente da região conhecida como Ródano-Alpes. Porém, Fourier acaba renunciado seu novo cargo dias depois.

Naquele mesmo ano, Napoleão é derrotado em Waterloo, pondo um fim de vez na Era Napoleônica. Fourier se encontrava em uma profunda crise financeira, pois, após a renúncia do seu último cargo, o foi concedido uma pensão de aposentadoria, que acabaria sendo confiscada após a queda do Napoleão. Por sorte, um antigo aluno da École Polytechnique que agora exercia o cargo de prefeito em Sena (antigo departamento Francês agora reintegrado a Paris), concede a Fourier o cargo de diretor do Departamento de Estatística de Sena. Agora, longe de suas antigas funções administrativas, Fourier poderia se dedicar às ciências.

Nos anos seguintes, Fourier chegou a apresentar diversos estudos sobre matemática e estatística à Academia de Ciências de Paris. Lá em Paris, ele pode firmar laços que foram muito importantes para o seu legado. Dentre seus amigos pessoais, é possível destacar o matemático Alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), que estabeleceu firmemente as condições gerais de convergência das séries de Fourier para uma função.¹⁸

Em 1822, é eleito como secretário da Academia, mesmo cargo que Laplace já havia se encarregado anteriormente. Agora, Fourier era o principal responsável pelos assuntos que envolviam ciências e matemática na Academia.

No ano de 1823, se torna membro estrangeiro da Royal Society, em 1827 é eleito para a Académie Française e a Académie de Médecine. Em seus últimos anos de vida, por conta de suas dores reumáticas, precisou se preocupar constantemente com a temperatura, afim de se manter sempre aquecido. Fourier faleceu em 16 de maio de 1830, deixando o seu precioso legado no campo da matemática e física, assim reivindicando o seu direito à imortalidade.

¹⁸ Tonidandel e Araújo.