

# A Matemática do Efeito Geodético

Marlon Stefano  
Universidade Federal de Ouro Preto

2019

Universidade Federal de Ouro Preto  
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas  
Departamento de Matemática  
Bacharelado-Matemática

# A Matemática do Efeito Geodético

**Marlon Stefano**

Monografia submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Curso de Matemática-Bacharelado da Universidade Federal de Ouro Preto, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Dr. Gustavo Henrique Costa de Souza

Ouro Preto/MG, Dezembro de 2019

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

E79m Estanislau, Marlon Stefano Fernandes .  
A matemática do efeito geodético. [manuscrito] / Marlon Stefano  
Fernandes Estanislau. - 2019.  
132 f.: il.: color..

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Henrique Costa de Souza.  
Monografia (Bacharelado). Universidade Federal de Ouro Preto.  
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Matemática .

1. Relatividade geral (Física). 2. Geodésia. 3. Giroscópios . I. Souza,  
Gustavo Henrique Costa de . II. Universidade Federal de Ouro Preto. III.  
Título.

CDU 528.2

Bibliotecário(a) Responsável: Celina Brasil Luiz - CRB6 - 1589



UFOP  
Universidade Federal  
de Ouro Preto



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)  
Colegiado do Curso de Bacharelado em Matemática



**Ata da sessão pública para julgamento da Monografia de conclusão de curso de Marlon Stefano Fernandes Estanislau, na área de Matemática, do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto.**

Aos vinte dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezenove, às dezesseis horas, no Auditório do Departamento de Matemática (Sala 2-02) do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto (ICEB-III), reuniu-se a Comissão Julgadora composta pelos professores: Gustavo Henrique Costa de Souza (orientador), Rogério Gomes Alves e Josué Geraldo Damasceno para avaliação da monografia do aluno Marlon Stefano Fernandes Estanislau, intitulada “**A Matemática do Efeito Geodético**”. A sessão pública foi aberta pelo professor Gustavo Henrique Costa de Souza, Presidente da Comissão Julgadora e orientador, que após formalidades de praxe passou a palavra ao aluno para apresentação oral e, em seguida, arguição pelos membros da Banca. Terminada a arguição, a Comissão reuniu-se em sessão secreta para julgamento e expedição do resultado final e decidiu pela aprovação da Monografia, por unanimidade. O resultado foi comunicado publicamente ao aluno pelo presidente da comissão. Nada havendo mais a tratar, foi encerrada a sessão da qual lavrou-se a presente ata que vai assinada pela Comissão Julgadora. Ouro Preto, vinte de dezembro do ano de dois mil e dezenove.

Prof. Dr. Gustavo Henrique Costa de Souza  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Presidente

Prof. Dr. Rogério Gomes Alves  
Universidade Federal de Ouro Preto

Prof. Dr. Josué Geraldo Damasceno  
Universidade Federal de Ouro Preto

# Abstract

The geodetic effect, a prediction of the General Theory of Relativity (TGR), it is an anomalous precession movement that occurs over in parallel transported vectors along of certain types of trajectories in curved spacetime. An example is given by the closed geodesics in Schwarzschild geometry. Around spherically symmetrical distributions of matter in slow rotation, like the Earth, the effect can be measured by gyroscopes based on satellites like the Gravity Probe B (Stanford University / NASA). In this work, we present the principles Mathematicians and Physicists involved in this phenomenon. We will discuss ideas from Riemanian Geometry in the relevant Lorentzian signature setup, the central ideas behind the formulation of gravitation as the curvature of an space-time, and the experimental validation of the geodetic effect completed only in 2011.

# Resumo

O efeito geodético, uma previsão da Teoria Geral da Relatividade (TGR), é um movimento de precessão anômalo que ocorre sobre vetores paralelamente transportados ao longo de certos tipos de trajetórias em espaços-tempo curvos. Um exemplo é dado pelas geodésicas fechadas na geometria de Schwarzschild. Em torno de distribuições esféricamente simétricas de matéria em rotação lenta, como a Terra, o efeito pode ser medido por giroscópios baseados em satélites como o Gravity Probe B (Universidade de Stanford/NASA). Neste trabalho, apresentamos os princípios Matemáticos e Físicos envolvidos neste fenômeno. Discutiremos ideias da Geometria Riemanniana no *setup* relevante de assinatura Lorentziana, as ideias centrais por trás da formulação da gravitação como curvatura de um espaço-tempo, e da validação experimental do efeito geodético completada apenas em 2011.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Introdução ao efeito geodético . . . . .	3
1.2	Incompatibilidade entre a Teoria Newtoniana e a Teoria Especial da Relatividade . . . . .	3
1.3	Princípio da equivalência . . . . .	5
1.3.1	Princípio da equivalência segundo Einstein . . . . .	6
1.4	Uma nova teoria de gravitação . . . . .	6
1.5	Organização do trabalho . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Ferramentas Matemáticas I</b>	<b>8</b>
2.1	Gravidade como curvatura do espaço-tempo . . . . .	8
2.2	$C^\infty$ -variedades, vetores tangentes, espaços tangentes . . . . .	8
2.3	Derivações lineares . . . . .	10
2.4	Campos Vetoriais. . . . .	12
2.5	Campos de 1-Formas . . . . .	14
2.6	Tensores . . . . .	16
2.6.1	Operações com tensores . . . . .	17
2.6.2	Campo de Tensores em Variedades . . . . .	23
2.7	Métricas . . . . .	26
2.7.1	Levantamento e abaixamento de índices . . . . .	31
2.8	Curvas parametrizadas e Linhas-Mundo . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Ferramentas matemáticas II</b>	<b>39</b>
3.1	Derivada Covariante . . . . .	39
3.2	A definição de Derivada Covariante . . . . .	41
3.3	Propriedades de transformação dos coeficientes de conexão . . . . .	42
3.4	Transporte Paralelo . . . . .	45
3.5	Geodésicas . . . . .	51
3.5.1	Geodésicas de uma conexão . . . . .	51
3.5.2	Geodésicas da métrica e compatibilidade entre a métrica e a conexão . . . . .	52
3.5.3	A conexão de Levi-Civita . . . . .	55
3.5.4	Geodésicas do tipo tempo: a Teoria Variacional das Geodésicas . . . . .	57
3.6	Campos Gravitacionais fracos e o Limite Newtoniano da TGR . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Ferramentas Matemáticas III</b>	<b>63</b>
4.1	Derivada Covariante de Campos de Tensores . . . . .	63
4.2	O Tensor Curvatura de Riemann . . . . .	67
4.2.1	Simetrias do Tensor Curvatura . . . . .	70
4.2.2	A identidade de Bianchi . . . . .	71

4.3	Desvio Geodésico . . . . .	71
4.4	O Limite Newtoniano: forças de maré . . . . .	75
4.4.1	Forças de maré na teoria Newtoniana . . . . .	75
4.4.2	Forças de maré na TGR . . . . .	76
<b>5</b>	<b>As equações de Einstein</b>	<b>79</b>
5.1	O tensor energia-momentum . . . . .	79
5.1.1	Poeira e Fluidos Perfeitos . . . . .	82
5.1.2	O princípio da covariância . . . . .	85
5.2	O tensor de Einstein . . . . .	86
<b>6</b>	<b>A solução de Schwarzschild</b>	<b>89</b>
6.1	Geometria do espaço-tempo de Schwarzschild . . . . .	96
6.1.1	Generalidades: o teorema de Birkhoff . . . . .	97
6.1.2	Observadores e quadros de referência no espaço tempo de Schwarzschild . . . . .	97
6.1.3	Intervalos de tempo e distância no espaço-tempo de Schwarzschild . . . . .	97
6.1.4	Tempo próprio e dilatação temporal gravitacional . . . . .	97
6.1.5	Intervalos de distância própria e dilatação gravitacional do comprimento . . . . .	98
6.2	Geodésicas no espaço-tempo de Schwarzschild . . . . .	99
6.2.1	Movimento radial de queda-livre . . . . .	102
6.2.2	Órbitas circulares . . . . .	102
6.3	Precessão de giroscópios em queda-livre: efeito geodético . . . . .	103
6.4	O experimento Gravity Probe B . . . . .	106
<b>A</b>	<b>Relatividade Especial</b>	<b>108</b>
A.1	Preliminares . . . . .	108
A.2	Transformações de Lorentz . . . . .	111
A.3	Deduzindo uma transformação de Lorentz . . . . .	119
A.3.1	Dilatação temporal. . . . .	121
A.3.2	Contração do comprimento. . . . .	122
A.3.3	Diagramas de Minkowski. . . . .	122
A.4	Curvas do tipo tempo em $M$ . . . . .	124

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Introdução ao efeito geodético

O Espaço-tempo em torno da Terra é “curvo” e esta curvatura é responsável pelo o que entendemos como gravidade. A descrição de gravidade fornecida pela TGR é fonte de efeitos que a teoria Newtoniana não pode explicar e até mesmo prever. O efeito geodético é um que não é previsto pela teoria Newtoniana de gravidade, ele está estritamente ligado ao fato do espaço-tempo em torno da Terra ser curvo. Este é um movimento de precessão anômalo que ocorre sobre vetores paralelamente transportados ao longo de certos tipos de trajetórias em espaços-tempo curvos. O experimento Gravity Probe B forneceu dados que comprovam o efeito geodético com grande precisão, possibilitando, ao menos em princípio, quantificar a curvatura do espaço-tempo ao redor da Terra. Construiremos ao longo deste trabalho as ferramentas matemáticas necessárias para a descrição desse efeito (na geometria de Schwarzschild) e estabelecer o “ângulo de De Sitter”.

### 1.2 Incompatibilidade entre a Teoria Newtoniana e a Teoria Especial da Relatividade

Gravidade, uma entidade da natureza que está presente em todos os lugares do universo. Não podemos simplesmente nos “livrar” dela como fazemos com outras entidades da semelhantes. Por exemplo, quando estamos com frio vestimos um agasalho e conseguimos amenizar a sensação térmica pelo menos momentaneamente. Entretanto, não é possível amenizar os efeitos da gravidade: onde quer que estejamos, a gravidade estará presente facilitando nossa vida ou dificultando-a (é notável quando estamos subindo ou descendo uma ladeira).

Essa entidade onipresente, quando observada por Galileu, foi descrita como capaz de acelerar objetos em direção a Terra com uma taxa constate. Mais tarde, Newton deu sua descrição física e matemática como sendo uma força  $\vec{F}$  que age sobre qualquer corpo de massa  $m$  em direção ao centro da Terra com módulo constante,  $F = mg$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade no local. Esse foi o ponto de partida de Newton para formular a teoria de gravitação Newtoniana que descreve a força gravitacional entre dois corpos massivos, mais precisamente, o campo gravitacional em torno de uma dada distribuição de matéria.

A teoria gravitacional Newtoniana por muito tempo foi considerada absoluta, pois descreve com bastante precisão o movimento de corpos celestes no sistema solar (exceto as orbitas de mercúrio que tem um comportamento que não se descreve

usando a teoria de gravidade de Newton, apesar de que este fato isoladamente não é suficiente para desconfiarmos da precisão desta teoria de gravitação). A teoria de gravitação de Newton propõe que em uma partícula de massa gravitacional  $m_g$  age uma força gravitacional  $\vec{F}$  dada por  $\vec{F} = m_G \vec{g} = -m_G \vec{\nabla} \phi$  onde  $\vec{g}$  é o campo gravitacional devido ao potencial gravitacional  $\phi$  dado por  $\vec{g} = -\vec{\nabla} \phi$ . O potencial  $\phi$  é determinado por uma densidade de massa  $\rho$  pela equação de Poisson:

$$\text{div}(\vec{\nabla} \phi) = \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (1.1)$$

em que  $G$  é a constante de gravitação universal. A equação (1.1) representa a lei de Newton para o campo gravitacional  $g(\vec{r})$  dado por:

$$g(\vec{r}) = -G \iiint_B \rho(\vec{s}) \frac{\vec{r} - \vec{s}}{\|\vec{r} - \vec{s}\|^3} d^3 \vec{s} \quad (1.2)$$

onde  $B$  é a região do espaço em que se situa a distribuição de matéria.

Ao analisar as equações (1.1) e (1.2), notamos que estas não possuem dependência temporal explícita. Isto significa que  $\phi(\vec{s})$  responde instantaneamente a uma modificação na densidade de matéria  $\rho$ .

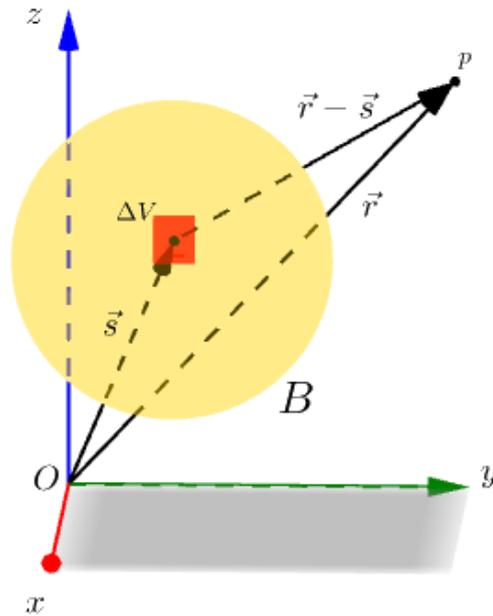


Figura 1.1: A figura mostra uma distribuição de matéria com simetria esférica e um ponto  $p$  fora da distribuição. Cada elemento de massa  $\rho(\vec{s})\Delta V$  contribui para o campo gravitacional  $g(r)$  da distribuição  $B$ .

**Exemplo 1.2.1.** Se  $\rho(\vec{s}, t)$  tem a forma

$$\rho(\vec{s}, t) = \begin{cases} \rho(\vec{s}) & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ 0 & \text{se } t_0 \leq t \end{cases}$$

então a equação

$$g(\vec{r}, t) = -G \iiint_B \rho(\vec{s}, t) \frac{\vec{r} - \vec{s}}{\|\vec{r} - \vec{s}\|^3} d^3 \vec{s},$$

significa que  $\vec{g}$ , logo também o potencial  $\phi$ , é instantaneamente reduzido a zero em  $t = t_0$ . Mas isto quer dizer que sinais físicos viajam mais rápido que  $c$  (velocidade da luz). Para compreender melhor este fato, imaginemos que  $\rho(s, t)$  seja a densidade de massa do Sol, e suponhamos que a partir de um instante de tempo  $t = t_0$  tivéssemos  $\rho(\vec{s}, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$ . Então instantaneamente, para todo  $t \geq t_0$ , teríamos  $g(\vec{r}, t) = 0$  na posição  $\vec{r}$  da Terra. Ou seja, o campo gravitacional do Sol simplesmente desapareceria para  $t \geq t_0$ , apesar de que a luz do sol demora cerca de 8 minutos para chegar à Terra. Na nossa suposição o campo gravitacional desaparece instantaneamente. Concluímos que a gravidade “viaja mais rápido que  $c$ ”, contrariando uma das consequências da Relatividade Especial. Tal conclusão significa que a gravitação Newtoniana não é compatível com a Teoria da Relatividade Especial de Einstein.

Einstein ao propor a teoria especial da relatividade, toma como base para teoria dois princípios:

1. As leis da física são as mesmas em qualquer quadro referencial inercial.
2. Observadores em movimento relativo uniforme sempre concordam sobre a velocidade da luz.

O Exemplo (1.2.1) contradiz o fato de que sinais luminosos não podem viajar mais rápido que  $c$ , fato esse provindo da teoria especial da relatividade, sendo assim uma nova teoria de gravitação deve ser construída para adequar ao fato de que sinais físicos não podem viajar mais rápido que  $c$ .

### 1.3 Princípio da equivalência

Na teoria gravitacional newtoniana a equação para o movimento de uma partícula de massa gravitacional  $m_G$  (carga gravitacional) é:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{m_G}{m_I} \vec{\nabla} \phi \quad (1.3)$$

onde  $m_I$  é a massa inercial da partícula. Um fato inexplicável na teoria newtoniana e que  $m_G = m_I$ , de forma que (1.3) se reduz a

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi \quad (1.4)$$

e todos os corpos experimentam o campo gravitacional  $\vec{g} = -\vec{\nabla} \phi$  da mesma forma, ou mais precisamente, de forma independente de suas massas (inercial e gravitacional). Este fato foi percebido por Galileu através de seus experimentos, sendo um resultado contrário à teoria então prevalente de Aristóteles de que corpos com maior massa inercial caem mais rápido que corpos com um  $m_I$  menor.

Não existe razão a priori na teoria Newtoniana para a qual a grandeza  $m_G$  que determina a magnitude da força gravitacional na partícula (quando submetida a um campo gravitacional) deva ser igual à grandeza que determina a “resistência a movimento” da partícula quando submetida a forças em geral.

### 1.3.1 Princípio da equivalência segundo Einstein

A igualdade entre  $m_I$  e  $m_G$  levou Einstein ao clássico “gedankenexperiment” (experimento mental) do elevador: considere um observador dentro de um elevador em queda livre caindo de uma grande distância em relação ao solo terrestre (com os cabos cortados). Objetos soltos a partir do repouso dentro da cabine permanecerão flutuando “sem peso”. Projéteis atirados, cada um de um lado da cabine, se moverão em linha reta descrevendo uma trajetória retilínea diferente da trajetória curva usual. Tudo isto segue imediatamente do fato de que  $m_I = m_G$ , significando que a aceleração de qualquer partícula em relação a cabine é zero e a aceleração da cabine e da partícula em relação à Terra é a mesma.

A Teoria Geral da Relatividade ou qualquer outra teoria de gravitação deve ser consistente com a teoria Newtoniana uma vez que a mesma, quando aplicadas a vários problemas que envolvem o movimento de corpos celestes, leva a resultados precisos. Isso valida nosso uso no raciocínio anterior da noção Newtoniana de campo gravitacional. A observação de que partículas soltas dentro da cabine a partir do repouso possuem aceleração relativa nula só é válida dentro de regime onde o campo gravitacional terrestre seja constante. De fato, o campo gravitacional terrestre não é constante, variando de acordo com a distância ao centro da terra; ou seja, o campo gravitacional age radialmente em direção ao centro da Terra, com intensidade proporcional a  $1/r^2$  onde  $r$  é a distância da partícula (submetida ao campo gravitacional terrestre) ao centro da Terra. Se o tamanho do elevador for uma fração significativa do raio da Terra seria possível ver dois objetos soltos dentro da cabine a partir do repouso se aproximando ou, sendo atraídos um pelo outro. Ao observar de dentro da cabine (digamos, em um referencial instantaneamente em repouso com a cabine) dois objetos posicionados um próximo do teto e outro próximo ao chão e soltos a partir do repouso nessas posições, seria possível observar o de cima subindo e o de baixo descendo em movimento repulsivo um do outro.

Estas observações seriam manifestações das chamadas “forças de maré gravitacional” (discutiremos ao longo do texto sobre esse efeito). Estes efeitos também poderiam ser observados se a cabine permanecesse em queda livre durante um grande período de tempo. Não obstante, vemos que contanto que a cabine seja espacialmente pequena e seja considerada por um intervalo curto de tempo, o elevador em queda livre pode ser considerado como um referencial inercial (isto é, um referencial onde as leis de Newton são válidas) local. Este é o princípio da equivalência segundo Einstein.

**Princípio da equivalência:** *Em um laboratório em queda livre (não girante) ocupando uma pequena região do espaço-tempo, as leis da física são as mesmas da Relatividade Especial.*

## 1.4 Uma nova teoria de gravitação

Como vimos, a teoria Newtoniana de gravitação é inconsistente com a Relatividade Especial. O grande trabalho de Einstein foi criar uma nova teoria de gravitação onde a ideia de gravidade como força é completamente abandonada. Como veremos, a Geometria Riemanniana desenvolve papel fundamental para atrelar gravitação e geometria, excluindo a ideia de gravidade como força. Vamos construir neste trabalho as principais ideias e ferramentas para a formulação da teoria gravitacional de

Einstein, a TGR, e por fim vamos estabelecer matematicamente um efeito previsto por esta teoria e comprovado pelo grande experimento Gravity Probe B.

## 1.5 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Após a introdução geral no presente Capítulo, procederemos no Capítulo 2 com uma discussão dos princípios básicos da Matemática necessários para o desenvolvimento da Teoria Geral da Relatividade (TGR), tais como, noções básicas de variedades e Cálculo Tensorial. No capítulo 3 definiremos a noção de Derivada Covariante e geodésicas, finalizando com o limite Newtoniano da TGR para campos fracos. Utilizamos o capítulo 4 para estender a noção de derivada covariante de campos de vetores para tensores em geral, e com posse dessas ferramentas, definimos o tensor curvatura de Riemann e suas simetrias, tendo como resultado parcial as equações de desvio geodésico. O final do capítulo relaciona forças de maré na teoria Newtoniana com forças de maré na TGR. No capítulo 5 estabeleceremos o tensor energia-momentum e as equações de Einstein. O capítulo 6 é reservado para a famosa solução de Schwarzschild. Na seção 6.3, estabelecemos matematicamente o efeito geodético, calculando a taxa de precessão de um giroscópio em queda livre no espaço-tempo de Schwarzschild. Finalmente, na seção 6.4, concluiremos com uma discussão da medição deste efeito no âmbito do experimento Gravity Probe B.

# Capítulo 2

## Ferramentas Matemáticas I

Vamos começar estabelecendo os primeiros conceitos matemáticos.

### 2.1 Gravidade como curvatura do espaço-tempo

A proposta de Einstein para resolver simultaneamente os problemas de

- (i) introduzir uma descrição relativística da gravidade, no sentido de compatível com a Teoria especial da Relatividade (vide apêndice);
- (ii) introduzir uma descrição de gravidade que incorpore de maneira natural o Princípio da equivalência;

foi:

*Gravidade não deve ser vista como uma força no sentido convencional, gravidade deve ser vista como uma propriedade geométrica do espaço-tempo causada pela presença de matéria-energia.*

Para sermos um pouco mais precisos a ideia é que:

- o espaço-tempo em torno de uma distribuição de matéria-energia é uma  $C^\infty$ -variedade (pseudo) Riemanniana  $(M, g)$ , com métrica de assinatura Lorentziana e difeomorfa ao espaço euclidiano  $\mathbb{R}^4$ , equipado com a estrutura diferenciável usual. O campo gravitacional será descrito pela métrica  $g$  e suas propriedades. Além disso, a métrica  $g$  é determinada pela distribuição de matéria-energia pelas equações de Einstein (veremos adiante).
- partículas em movimento de queda livre, isto é, partículas que se movem sob ação exclusiva da gravidade, se propagam ao longo de geodésicas parametrizadas em  $(M, g)$ .

Para elaborarmos esta ideia com mais detalhes, vamos estabelecer alguns conceitos matemáticos dos quais faremos uso.

### 2.2 $C^\infty$ -variedades, vetores tangentes, espaços tangentes

De agora em diante  $M$  denota um espaço topológico.

**Definição 2.2.1.** Uma “carta local” ou um “referencial local” ou “sistemas de coordenadas em  $M$ ” é um par  $(U, \phi)$  consistindo de um aberto  $U \subset M$  e um homeomorfismo  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset M$  entre  $\mathbb{R}^n$  e  $U$ .

Um “atlas n-dimensional” de classe  $C^\infty$  em  $M$  é uma coleção indexada  $\{(U_\lambda, \phi_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$  em um conjunto de índices  $\Lambda$  de sistemas de coordenadas locais n-dimensional tais que:

1.  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = M$ .
2. Todas as funções de transição entre os sistemas de coordenadas que compõem o atlas são difeomorfismos de classe  $C^\infty$ .

**Definição 2.2.2.** Dois atlas  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}'$  de classe  $C^\infty$  em  $M$  são ditos compatíveis se  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  é um atlas.

**Definição 2.2.3.** Uma  $C^\infty$ -variedade (diferenciável) n-dimensional é um espaço topológico  $M^1$  equipado com um atlas maximal n-dimensional de classe  $C^\infty$ ,  $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, \phi_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ , isto é, um atlas de classe  $C^\infty$  que contém qualquer outro atlas compatível com ele.

Sejam  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  duas cartas locais do atlas  $\{(U_\lambda, \phi_\lambda : \lambda \in \Lambda)\}$  tais que  $U \cap V \neq \emptyset$ . A função de transição associada as duas cartas locais é a aplicação  $\phi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \phi^{-1}(U \cap V)$  que realiza a mudança de coordenadas entre os sistemas de coordenadas no overlap  $U \cap V$ . Na sequência estaremos interessados exclusivamente no caso em que  $M$  é uma variedade quadridimensional de classe  $C^\infty$ . Portanto especializaremos todos nossos conceito a este caso. Vamos definir agora

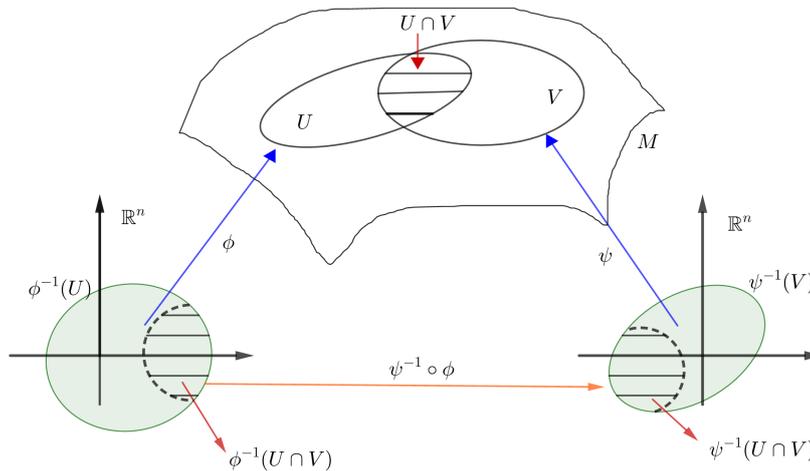


Figura 2.1: Cone de luz do evento  $\tilde{x}$

um conceito de funções reais definidas em  $M$ .

<sup>1</sup>Hausdorff, possuindo base enumerável de abertos.

**Definição 2.2.4.** 1. Dada uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  e um sistema de coordenadas  $(U, \phi(x^0, \dots, x^3))$ , dizemos que  $f \circ \phi$  é a representação local de  $f$  associada a coordenadas  $x^0, \dots, x^3$ .

2. Dizemos que uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é  $C^\infty$  ou suave se todas as suas representações locais são suaves, isto é, se  $f \circ \phi_\lambda : \phi_\lambda^{-1}(U_\lambda) \rightarrow \mathbb{R}$  é suave  $\forall \lambda \in \Lambda$ .

**Observação 2.2.1.** Denotamos no que segue um sistema de coordenadas simplesmente por  $(U, x^\mu)$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$ , sem que façamos referência explícita ao homeomorfismo  $\phi$  a menos que seja necessário. Assim, consideramos entendido que  $(x^0, \dots, x^3)$  varia somente no aberto  $\phi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^4$ . A representação de  $f$  associada a  $(U, \phi)$  será denotada simplesmente por  $f(x^0, \dots, x^3)$  ou  $f(x^\mu)$ . Para o conjunto das funções reais suaves definidas em  $M$  utilizaremos a notação  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ , e claro que definindo a soma de funções ponto a ponto (o que podemos fazer uma vez que  $f(M) \subset \mathbb{R}$ ) e a multiplicação por escalares de  $\mathbb{R}$  temos  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial. Note que também que dadas  $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  então  $fg \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

## 2.3 Derivações lineares

Vamos definir um conceito de vetor tangente em um ponto  $p \in M$ . Para tanto precisaremos definir o conceito de derivações lineares em  $p \in M$ .

**Definição 2.3.1.** Uma derivação linear em  $p \in M$  é um funcional linear

$$v_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz à seguinte “regra de Leibniz” em  $p$ :

$$v_p(fg) = f(p)v_p(g) + g(p)v_p(f).$$

O conjunto das derivações lineares em  $p \in M$  é um subespaço de  $[C^\infty(M, \mathbb{R})]^*$ .

**Definição 2.3.2.** O espaço tangente de  $M$  no ponto  $p \in M$ , denotado por  $T_p M$ , é o espaço vetorial de todas derivações lineares em  $p$ .

Dado um sistema de coordenadas locais  $(U, x^\mu)$  em  $M$  e  $p = (x^0, \dots, x^3) \in U$  definimos o funcional linear  $\partial_\mu$  associado,  $\partial_\mu \in [C^\infty(M, \mathbb{R})]^*$ , da seguinte forma:

$$\partial_\mu \Big|_p f = \frac{\partial}{\partial x^\mu} [f(x^0, \dots, x^3)] \Big|_{p=(x^0, \dots, x^3)}.$$

Em outras palavras: dado um sistema de coordenadas locais  $(U, \phi)$  em  $M$  definimos uma noção de derivadas parciais associadas a estas coordenadas, para funções  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  restritas ao aberto  $U$ , por

$$(\partial_\mu f)(x^0, \dots, x^3) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x^0, \dots, x^3).$$

Ou seja, pelas derivadas parciais da representação local de  $f$  no sistema de coordenadas  $(U, \phi)$ .  $\partial_\mu \Big|_p f$  consiste em avaliar a derivada parcial de interesse no ponto  $p = (x^0, \dots, x^3)$ .

**Observação 2.3.1.** Se o sistema local de coordenadas é definido pelo homeomorfismo  $\phi : \phi^{-1}(U) \rightarrow U; (x^0, \dots, x^3) \mapsto \phi(x^0, \dots, x^3)$ , escrevemos simplesmente  $p = (x^0, \dots, x^3)$  para indicar que  $p = \phi(x^0, \dots, x^3) = (x_p^0, \dots, x_p^3)$ .

Pela regra de derivação usual de produto de funções temos

$$\partial_\mu \Big|_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma derivação linear, isto é,  $\partial_\mu \in T_p M \forall \mu = 0, 1, 2, 3$ . Além disso, vale o seguinte

**Teorema 2.3.1.** O conjunto  $\{\partial_0|_p, \dots, \partial_3|_p\}$  é uma base de  $T_p M$ , em particular  $\dim(T_p M) = 4$ .

*Demonstração.* Omitiremos a demonstração. □

**Definição 2.3.3.** Dizemos que  $\{\partial_\mu|_p\}$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$  é uma base de  $T_p M$  associada ao sistema de coordenadas local  $(U, \phi)$

É fato que  $T_p M$  admitindo uma base, admite uma infinidade delas, então faz sentido a seguinte pergunta: qual é a relação entre as bases de  $T_p M$  associadas a dois sistemas de coordenadas locais distintos  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  em um dado  $p \in M$ ? Ora, dado  $p \in U \cap V$  temos duas bases  $\{\partial_\mu|_p\}$  e  $\{\tilde{\partial}_\mu|_p\}$  para  $T_p M$ . Por outro lado,  $p \in W = U \cap V$  e pontos em  $W$  possuem coordenadas nos dois referencias locais  $x^\mu$  e  $\tilde{x}^\mu$ , que se relacionam pela função de transição associada

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^0, \dots, x^3), \mu = 0, \dots, 3,$$

com transformação de coordenadas inversa  $x^\mu = x^\mu(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)$ . Sob esta transformação de coordenadas, a representação local  $f(x^0, \dots, x^3)$  de  $f$  restrita a  $W$  se transforma como

$$f(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) \rightarrow f(x^0(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3), \dots, x^3(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)).$$

De fato, note que  $(f \circ \psi)(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) = (f \circ \phi) \circ (\phi^{-1} \circ \psi)(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)$ , de forma que em acordo com a observação (2.2.1) por construção podemos escrever

$$f(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) = f(x^0(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3), \dots, x^3(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)). \quad (2.1)$$

Neste caso segue da regra da cadeia (usual) e de (2.1) que

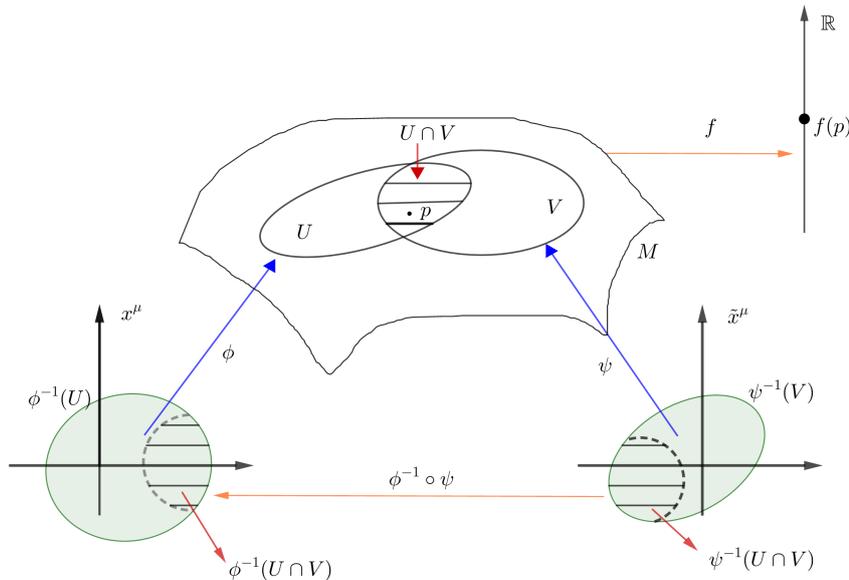
$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} f(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} f(x^0, \dots, x^3) \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\mu} \quad (2.2)$$

Em (2.2) devemos avaliar  $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} f(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)$  em  $p = (\tilde{x}_p^0, \dots, \tilde{x}_p^3)$ , lembrando que  $x^0 = x^0(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3), \dots, x^3 = x^3(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)$ . Logo vemos que a relação desejada é

$$\tilde{\partial}_\mu \Big|_p = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\mu} \Big|_{(\tilde{x}_p^0, \dots, \tilde{x}_p^3)} \partial_\lambda \Big|_{(x_p^0, \dots, x_p^3)}$$

**Observação 2.3.2.** O lado direito da última expressão e de (2.2) acima está somado sobre o índice  $\lambda$ . Embora, não tenhamos explicitado isto com um somatório. Está é a conhecida e muito utilizada “convenção de Einstein”. De forma mais geral, sempre que tivermos somas do tipo

$$\sum_\mu A^\mu_\mu$$


 Figura 2.2: Representação local da função  $f$ .

indicaremos esta simplesmente por

$$\sum_{\mu}^n A^{\mu}_{\mu} = A^{\mu}_{\mu}.$$

Muitas vezes diremos, no presente contexto, que o índice  $\mu$  está “contraído”.

## 2.4 Campos Vetoriais.

**Definição 2.4.1.** Um campo de vetores em  $M$  é uma aplicação

$$v : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M$$

que associa a cada  $p \in M$  a um  $v_p \in T_p M$ , onde  $v_p$  é uma derivação linear em  $p$ .

Dado um referencial local  $(U; x^0, \dots, x^3)$ , temos que um campo de vetores tangentes no aberto  $U \subset M$  sempre pode ser escrito na forma:

$$v(x^0, \dots, x^3) = v^{\mu}(x^0, \dots, x^3) \partial_{\mu} \Big|_{(x^0, \dots, x^3)} \quad (2.3)$$

Esta se diz a representação de  $v$  associada ao referencial local  $(U; x^0, \dots, x^3)$ . Os  $v^{\mu}$  são ditos as componentes de  $v$  neste referencial local. O campo  $v$  se diz suave se suas componentes  $v^{\mu}$  forem suave e se, além disso, para qualquer outro referencial local  $(\tilde{U}; \tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)$  possuindo overlap com  $(U; x^0, \dots, x^3)$  as componentes  $\tilde{v}^{\mu}$  de  $v$  associadas forem suaves em  $U \cap \tilde{U}$ .

Os  $\partial_\mu$  agem em funções  $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$  como derivações lineares em  $(x^0, \dots, x^3)$  definidas por

$$\partial_\mu f = \partial_\mu \Big|_{(x^0, \dots, x^3)} f = \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x^0, \dots, x^3) \Big|_{(x^0, \dots, x^3)}.$$

Usando isto como convenção, eliminamos a necessidade de especificar o ponto em que  $\partial_\mu$  age em expressões como (2.3) e passamos a escrever simplesmente

$$v = v^\mu(x^0, \dots, x^3) \partial_\mu.$$

Considere  $v = \tilde{v}^\mu \tilde{\partial}_\mu$  a representação do mesmo campo associado ao referencial local  $(\tilde{U}; \tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)$  sendo  $(U \cap \tilde{U}) \neq \emptyset$ . Então usando a relação entre  $\partial_\mu$  e  $\tilde{\partial}_\mu$  no overlap  $U \cap \tilde{U}$ , obtemos

$$v = \tilde{v}^\mu \tilde{\partial}_\mu = \tilde{v}^\mu \left( \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\mu} \partial_\lambda \right) = \left( \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\mu} \tilde{v}^\mu \right) \partial_\lambda \quad (2.4)$$

Comparando (2.4) com (2.3) segue que:

$$\begin{aligned} v^\lambda &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\mu} \tilde{v}^\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{v}^\nu \\ &= \sum_\nu \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{v}^\nu \end{aligned}$$

Esta relação pode ser invertida para escrever  $\tilde{v}^\mu$  em termos dos  $v^\lambda$ :

$$\begin{aligned} \sum_\lambda \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} v^\lambda &= \sum_\lambda \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \sum_\nu \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{v}^\nu = \sum_\lambda \sum_\nu \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{v}^\nu \\ &= \sum_\nu \tilde{v}^\nu \sum_\lambda \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} \\ &= \sum_\nu \tilde{v}^\nu \delta_\nu^\mu = \tilde{v}^\mu \end{aligned}$$

onde

$$\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \nu \\ 0 & \text{se } \delta \neq \mu \end{cases}.$$

Temos que  $\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} = \delta_\nu^\mu$  porque os  $\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda}$  e  $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\mu}$  são as entradas das matrizes jacobianas das funções de transição  $x^\mu, \tilde{x}^\mu$  (uma inversa da outra), respectivamente. Assim, no overlap  $U \cap \tilde{U}$  dos dois referenciais locais considerados, as componentes de  $v$  associadas se relacionam por

$$\tilde{v}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} v^\lambda$$

**Observação 2.4.1.**  $\tilde{v}^\mu$  é escrito em termos de  $(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)$ , e  $\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda}, v^\lambda$  são escritos em termos de  $(x^0, \dots, x^3)$  logo podem ser expressos em termos de  $(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)$  via relação inversa  $x^\mu = x^\mu(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)$ . Isto justifica a maneira como campos vetoriais são introduzidos na literatura de Física em geral. Dado um referencial local  $(U, x^\mu)$  temos que um campo de vetores suave no aberto  $U \subset M$  é introduzido nesta literatura como sendo um objeto de quatro componentes  $v^\mu$  onde os  $v^\mu$  são funções suaves,  $v^\mu = v^\mu(x^0, \dots, x^3)$ , sujeitas à seguinte condição: se  $(\tilde{U}; \tilde{x}^\mu)$  é outro referencial local possuindo overlap com  $U$  então as componentes  $\tilde{v}^\mu$  do campo se relacionam com os  $v^\mu$  por

$$\tilde{v}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} v^\lambda.$$

## 2.5 Campos de 1-Formas

**Definição 2.5.1.** *Um campo de 1-formas em  $M$  é uma aplicação*

$$\omega : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} (T_p M)^*$$

que associa a cada  $p \in M$  a um  $\omega(p) := \omega_p \in (T_p M)^*$ , onde  $\omega_p$  age em derivações lineares em  $p$ .

Dado um referencial local  $(U; x^0, \dots, x^3)$  seja  $\omega(p)$  uma 1-forma em  $p$ , isto é, uma 1-forma em  $(T_p M)^*$ . Dada a base  $\left\{ \partial_\mu \Big|_p \right\}$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$ , de  $T_p M$  correspondente a  $(U; x^\mu)$ , seja  $\left\{ dx^\mu \Big|_p \right\}$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$  a base dual associada para  $(T_p M)^*$ . Então:

$$dx^\mu \Big|_p \cdot \partial_\nu = \delta_\nu^\mu.$$

Daí, temos que um campo de 1-formas no aberto  $U \subset M$  sempre pode ser escrito na forma:

$$\omega(x^0, \dots, x^3) = \omega_\mu(x^0, \dots, x^3) dx^\mu \Big|_p. \quad (2.5)$$

Então as componentes de  $\omega(p)$  na base dual são

$$\omega_\mu(x_p^0, \dots, x_p^3) = \omega(p) \cdot \partial_\mu \Big|_{(x_p^0, \dots, x_p^3)} \in \mathbb{R}.$$

De fato, a ação de  $\omega_p$  em um vetor tangente arbitrário  $v = v^\mu \partial_\mu \Big|_p$  é caracterizada pela especificação em (2.5), visto que por linearidade podemos apenas especificar  $\omega(p)$  na base  $\left\{ \partial_\mu \Big|_p \right\}$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$ :

$$\omega(p) \cdot \left[ v^\mu \partial_\mu \Big|_p \right] = v^\mu \left[ \omega(p) \cdot \partial_\mu \Big|_p \right] = v^\mu \omega_\mu(x_p^0, \dots, x_p^3).$$

Posto isto, analogamente ao caso de campos vetoriais; dado o referencial local  $(U; x^\mu)$ , um campo de 1-formas (ou de “covetores”) no aberto  $U \subset M$  sempre pode ser escrito na forma:

$$\omega(x^0, \dots, x^3) = \omega_\mu(x^0, \dots, x^3) dx^\mu \Big|_p \quad (2.6)$$

Esta se diz a representação local de  $\omega$  associada ao referencial local  $(U; x^0, \dots, x^3)$ . Os  $\omega_\mu$  são ditos as componentes de  $\omega$  neste referencial local. O campo  $\omega$  se diz suave se suas componentes  $\omega_\mu$  forem suave e se, além disso, para qualquer outro referencial local  $(\tilde{U}; \tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)$  possuindo overlap com  $(U; x^0, \dots, x^3)$  as componentes

$\tilde{\omega}^\mu$  de  $\omega$  associadas forem suaves em  $U \cap \tilde{U}$ . Neste caso a relação entre  $\tilde{\omega}_\mu$  e  $\omega_\mu$  é a seguinte:

$$\tilde{\omega}_\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\mu} \omega_\lambda. \quad (2.7)$$

De fato, primeiramente note que

$$d\tilde{x}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \quad (2.8)$$

pois

$$\begin{aligned} d\tilde{x}^\mu \tilde{\partial}_\nu &= \left[ \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \right] \tilde{\partial}_\nu = \left[ \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \right] \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} \partial_\rho \\ &= \sum_\lambda \sum_\rho \left[ \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \right] \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} \partial_\rho \\ &= \sum_{\lambda, \rho} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} \delta_\rho^\lambda \\ &= \sum_\lambda \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} = \delta_\nu^\mu \end{aligned}$$

Assim fica verificado que  $d\tilde{x}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda$ . De  $d\tilde{x}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda$  segue que  $\tilde{\omega}^\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\mu} \omega_\lambda$ , pois

$$\omega = \tilde{\omega}_\mu d\tilde{x}^\mu = \tilde{\omega}_\mu \left( \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \right) dx^\lambda = \left( \tilde{\omega}_\mu \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \right) dx^\lambda,$$

e devemos ter

$$\omega = \omega_\lambda dx^\lambda = \left( \tilde{\omega}_\mu \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \right) dx^\lambda \Rightarrow \omega_\lambda = \left( \tilde{\omega}_\mu \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \right),$$

isto é,  $\omega_\lambda = \sum_\mu \left( \tilde{\omega}_\mu \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \right)$ . Daí vem, para  $\nu$  fixado,

$$\begin{aligned} \sum_\lambda \left( \sum_\mu \tilde{\omega}_\mu \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \right) \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} &= \sum_\lambda \omega_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} \Rightarrow \sum_\mu \tilde{\omega}_\mu \left( \sum_\lambda \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} \right) = \sum_\lambda \omega_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_\mu \tilde{\omega}_\mu \delta_\nu^\mu = \sum_\lambda \omega_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} \Rightarrow \tilde{\omega}_\nu = \omega_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} \end{aligned}$$

Mudando o índice fixado  $\nu$  para  $\mu$  teremos a equação (2.7) conforme desejado:

$$\tilde{\omega}_\mu = \omega_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\mu}.$$

**Observação 2.5.1.** Se  $U \subset M$  é um aberto coberto por dois referenciais locais  $x^\mu$  e  $\tilde{x}^\mu$ , as componentes da 1-forma  $\omega$  relativas a um dos referenciais é suave somente se as mesmas forem também suaves relativamente ao outro referencial. De fato, temos pela argumentação acima que a relação entre as componentes de  $\omega$  relativamente aos dois referenciais locais é  $\tilde{\omega}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \omega_\nu$  e  $\omega_\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \tilde{\omega}_\mu$ . Supondo que  $\omega_\mu$  seja suave, teremos com  $\frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu}$  suave que o produto  $\tilde{\omega}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \omega_\nu$  é suave. O outro caso é análogo.

## 2.6 Tensores

Seja  $V$  um  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial de dimensão finita e consideremos o seu dual  $V^*$ . Sejam  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma base de  $V$  e  $B^* = \{v^{1*}, \dots, v^{n*}\}$  base de  $V^*$  associada a base  $B$  de  $V$ , isto é, tal que:

$$v^{\mu*}(v_\nu) = \delta_\nu^\mu$$

Considere, agora o  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial  $V^{**}$  dual do dual de  $V$ . Por definição, os elementos de  $V^{**}$  são funcionais lineares

$$f : V^* \longrightarrow \mathbb{R}.$$

**Proposição 2.6.1.** *Existe um isomorfismo natural*

$$\phi : V \longrightarrow V^{**}$$

definido por  $v \mapsto \phi(v) : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\phi(v)$  é o funcional linear em  $V^{**}$  tal que  $\phi(v)(\omega^*) = \omega^*(v)$ ,  $\omega^* \in V^*$ .

Demonstramos a proposição demonstrando duas afirmações.

1.  $\phi$  é linear.

Com efeito, dados  $v, u \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos

$$\phi(v + \lambda u)\omega^* = \omega^*(v + \lambda u) = \omega^*(v) + \lambda\omega^*(u) = \phi(v)(\omega^*) + \lambda\phi(u)(\omega^*) \quad \forall \omega^* \in V^*$$

Aqui, as igualdades seguem da definição de  $\phi$  e da linearidade de  $\omega^* \in V^*$

2.  $\phi$  é injetiva.

Com efeito, se  $v \in \text{Ker}(\phi)$  então  $\phi(v)\omega^* = 0 \quad \forall \omega^* \in V^*$ , ou seja,  $\forall \omega^* \in V^*$  tem se  $\omega^*(v) = 0$ . Isto só é possível se  $v = 0$ . De fato, se  $v$  não é o vetor nulo, então dada uma base  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  de  $V$  teremos  $v = v^j e_j$ ,  $v^j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n$  que, para algum  $j$ ,  $v^j \neq 0$ . Considerando a base dual associada a  $B$ , teremos  $e^{j*}(v) = e^{j*}(v^j e_j) = v^j \neq 0$ , e daí segue que  $v \neq 0$  e portanto  $\text{ker}(\phi) = \{0\}$ . Donde  $\phi$  injetiva.

3.  $\phi$  é sobrejetiva.

De fato, dado um espaço vetorial real  $W$  de dimensão finita, tem se  $\dim(W) = \dim(W^*)$ , logo  $\dim(V^*) = \dim(V^{**})$ . Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos:  $\dim(\text{Im}(\phi)) + \dim(\text{Ker}(\phi)) = \dim(\text{Im}(\phi)) + 0 = \dim(\text{Im}(\phi)) = \dim(V)$ . Portanto,  $\text{Im}(\phi)$  é um subespaço de  $V^{**}$  com dimensão máxima, donde  $\text{Im}(\phi) = V^{**}$  e  $\phi$  é sobrejetiva.

Assim fica verificado que  $\phi$  é um isomorfismo.

Devido a existência desse isomorfismo natural, enxergaremos daqui em diante um vetor  $v \in V$  de duas formas

1. Um vetor no espaço vetorial  $V$ .

2. Um funcional linear que age em covetores  $\omega^* \in V^*$  da seguinte forma

$$v \cdot \omega^* = \omega^*(v).$$

Assim, a cada  $v \in V$  associamos um funcional linear  $\phi(v) : V^* \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\phi(v)(\omega^*) = \omega^*(v)$ , ou seja, a ação de  $\phi$  em um vetor de  $v$  consiste em avaliar todos funcionais lineares de  $V^*$  no vetor  $v \in V$ .

**Nota:** Uma outra forma de mostrar que  $\phi$  é sobrejetiva é exibir para um dado funcional  $T : V^* \rightarrow \mathbb{R}$  o vetor de  $V$  tal que  $\phi(v) = T$ . Isto é útil para simplificar o processo de visualizar tensores do tipo  $(1, 0)$  como vetores de  $V$ . Note que tal vetor  $v$  deve ser tal que  $T(\omega^*) = \phi(v)(\omega^*) = \omega^*(v) \forall \omega \in V^*$ . Para especificar quem é  $v$  devemos escrevê-lo como combinação linear de elementos de uma base. Seja  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$  e seja  $B^* = \{v^{1*}, \dots, v^{n*}\}$  a base dual assoada a  $B$ . Se os  $v^\mu \in \mathbb{R}, \mu = 1, \dots, n$  são tais que  $v = v^\mu v_\mu$ , então teremos para  $v^{\mu*} \in B^*$

$$\begin{aligned} T(v^{\mu*}) &= \phi(v)(v^{\mu*}) = v^{\mu*}(v) \Rightarrow \\ &\Rightarrow T(v^{\mu*}) = v^{\mu*}(v^\nu v_\nu) = v^\mu. \end{aligned}$$

Portanto,  $v = T(v^{\mu*})v_\mu$ .

**Definição 2.6.1.** Um tensor do tipo  $(k, l)$  sobre  $V$  é uma forma multilinear

$$T : V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Um tensor do tipo  $(0, 1)$  sobre  $V$  é um funcional linear  $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é, uma 1-forma de  $V$ . Um tensor do tipo  $(1, 0)$  sobre  $V$  é um funcional linear  $T : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é, um elemento de  $V^{**}$ . Pela identificação natural que foi estabelecida pelo isomorfismo  $\phi$  podemos identificar tensores do tipo  $(1, 0)$  como vetores de  $V$ .

Munido com as operações de soma de funções reais e multiplicação por escalar de funções reais por escalares o conjunto  $\mathcal{T}_{k,l}(V)$  formado por todos os tensores do tipo  $(k, l)$  sobre  $V$  fica com uma estrutura de espaço vetorial real.

**Nomenclatura:**

Se  $T \in \mathcal{T}_{k,l}(V)$ , então  $k$  se diz o posto contravariante de  $T$  e  $l$  o posto covariante de  $T$ . No caso especial em que  $k = 0$ ,  $T$  se diz um  $l$ -tensor covariante. Por exemplo um tensor do tipo  $(0, 1)$  é um 1-tensor covariante.

A seguir, determinaremos uma base especial para  $\mathcal{T}_{k,l}(V)$  e, portanto  $\dim(\mathcal{T}_{k,l}(V))$ . Antes disso, iremos discutir duas operações básicas sobre tensores que serão utilizadas frequentemente na sequência.

Iremos definir duas operações a seguir das quais faremos uso.

### 2.6.1 Operações com tensores

**Contração de tensores:** a operação de contração de um tensor em  $\mathcal{T}_{k,l}(V)$  com relação ao  $i$ -ésimo argumento em  $V^*$  e ao  $j$ -ésimo argumento em  $V$  é a aplicação

$$C_{i,j} : \mathcal{T}_{k,l}(V) \rightarrow \mathcal{T}_{k-1,l-1}(V)$$

definida da seguinte maneira. Se  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  é uma base de  $V$  e se  $B^*$  é a base dual associada, então dado  $T \in \mathcal{T}_{k,l}(V)$  colocamos:

$$C_{i,j}(T) = \sum_{\sigma=1}^n T(\dots, v^{*\sigma}, \dots; \dots, v_\sigma, \dots)$$

Voltaremos a discutir esta operação mais adiante.

**Produto Tensorial:**

sejam  $T$  e  $T'$  dois tensores em  $\mathcal{T}_{k,l}(V)$  e  $\mathcal{T}_{k',l'}(V)$ . O produto tensorial de  $T$  por  $T'$ , denotado por  $T \otimes T'$  é um tensor do tipo  $(k+k', l+l')$  em  $\mathcal{T}_{k+k',l+l'}(V)$  definido da seguinte maneira. Se  $\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(k+k')}$  são  $k+k'$  1-formas em  $V^*$  e se  $u^{(1)}, \dots, u^{(l+l')}$  são  $(l+l')$  vetores em  $V$  então

$$\begin{aligned} T \otimes T'(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(k+k')}; u^{(1)}, \dots, u^{(l+l')}) &= \\ &= T(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(l)}) \cdot T'(\omega_{(k+1)}, \dots, \omega_{(k+k')}; u^{(l+1)}, \dots, u^{(l+l')}). \end{aligned}$$

Devemos demonstrar que realmente  $T \otimes T'$  é um tensor do tipo  $(k, l)$ . Ou seja devemos mostrar que  $T \otimes T'$  é uma forma multilinear. Mas isto segue induzido da definição: se  $\omega_{(1)}, \dots, \lambda\omega_{(i)} + \omega'_{(i)}, \dots, \omega_{(k+k')}$  são  $k+k'$  1-formas em  $V^*$  e se  $u^{(1)}, \dots, \beta u^{(j)} + u'^{(j)}, \dots, u^{(l+l')}$  são  $(l+l')$  vetores em  $V$ , então

$$\begin{aligned} T \otimes T'(\omega_{(1)}, \dots, \lambda\omega_{(i)} + \omega'_{(i)}, \dots, \omega_{(k+k')}; u^{(1)}, \dots, \beta u^{(j)} + u'^{(j)}, \dots, u^{(l+l')}) &= \\ &= T(\omega_{(1)}, \dots, \lambda\omega_{(i)} + \omega'_{(i)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(l)}) \times \\ &\quad \times T'(\omega_{(k+1)}, \dots, \omega_{(k+k')}; u^{(l+1)}, \dots, \beta u^{(j)} + u'^{(j)}, \dots, u^{(l+l')}) = \\ &= \lambda\beta T(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(i)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(l)}) \times T'(\omega_{(k+1)}, \dots, \omega_{(k+k')}; u^{(l+1)}, \dots, u^{(j)}, \dots, u^{(l+l')}) + \\ &\quad + \lambda T(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(i)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(l)}) \times T'(\omega_{(k+1)}, \dots, \omega_{(k+k')}; u^{(l+1)}, \dots, u'^{(j)}, \dots, u^{(l+l')}) + \\ &\quad + \beta T(\omega_{(1)}, \dots, \omega'_{(i)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(l)}) \times T'(\omega_{(k+1)}, \dots, \omega_{(k+k')}; u^{(l+1)}, \dots, u^{(j)}, \dots, u^{(l+l')}) + \\ &\quad + T(\omega_{(1)}, \dots, \omega'_{(i)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(l)}) \times T'(\omega_{(k+1)}, \dots, \omega_{(k+k')}; u^{(l+1)}, \dots, u'^{(j)}, \dots, u^{(l+l')}) = \\ &= \lambda\beta T \otimes T'(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(i)}, \dots, \omega_{(k+k')}; u^1, \dots, u^{(j)}, \dots, u^{(l+l')}) + \\ &\quad + \lambda T \otimes T'(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(i)}, \dots, \omega_{(k+k')}; u^1, \dots, u'^{(j)}, \dots, u^{(l+l')}) + \\ &\quad + \beta T \otimes T'(\omega_{(1)}, \dots, \omega'_{(i)}, \dots, \omega_{(k+k')}; u^1, \dots, u^{(j)}, \dots, u^{(l+l')}) + \\ &\quad + T \otimes T'(\omega_{(1)}, \dots, \omega'_{(i)}, \dots, \omega_{(k+k')}; u^1, \dots, u'^{(j)}, \dots, u^{(l+l')}), \end{aligned}$$

no caso em que  $1 \leq i \leq k$  e  $l+1 \leq j \leq l+l'$ . Os outros casos são análogos.

**Proposição 2.6.2.** *Sejam  $T, T_1, T_2$  tensores em  $\mathcal{T}_{k,l}(V)$  e  $S, S_1, S_2$  tensores em  $\mathcal{T}_{k',l'}$ , o produto tensorial goza das seguintes propriedades:*

1.  $\lambda(T \otimes S) = (\lambda T) \otimes S = T \otimes (\lambda S), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
2.  $(\lambda + \beta) \cdot T \otimes T' = \lambda \cdot T \otimes T' + \beta \cdot T \otimes T' \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$
3.  $\beta T \otimes (\lambda S + S') = \beta\lambda T \otimes S + \beta T \otimes S' \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$
4.  $(\lambda S + S') \otimes (\beta T) = \lambda\beta S \otimes T + \beta S' \otimes T \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$

Utilizaremos desta operação para construir uma base para  $\mathcal{T}_{k,l}(V)$ .

**Proposição 2.6.3.** *Seja  $\{v_\mu\}$  uma base para  $V$  e  $\{v^{*\mu}\}$  a base dual associada. O conjunto de tensores*

$$\{v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l} \mid 1 \leq \mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_l \leq n\}$$

*é uma base para  $\mathcal{T}_{k,l}(V)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(k)}$   $k$  1-formas em  $V^*$  e sejam  $u^{(1)}, \dots, u^{(l)}$   $l$  vetores em  $V$ . Suponha que tenhamos:

$$\omega_{(r)} = \sum_{\mu_r}^n \omega_{(r)\mu_r} v^{\mu_r}, \quad r = 1, \dots, k,$$

e

$$u^{(s)} = \sum_{\nu_s}^n v^{(s)\nu_s} v_{\nu_s}, \quad s = 1, \dots, l.$$

Dado  $T \in \mathcal{T}_{k,l}(V)$  considere o seguinte valor de  $T$ :

$$T(\omega_1, \dots, \omega_k; u^1, \dots, u^l).$$

Temos

$$\begin{aligned} T(\omega_1, \dots, \omega_k; u^1, \dots, u^l) &= \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k=1}^n \omega_{(1)\mu_1} \dots \omega_{(k)\mu_k} T(v^{*\mu_1}, \dots, v^{*\mu_k}; u^1, \dots, u^l) = \\ &= \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k=1}^n \sum_{\nu_1, \dots, \nu_l=1}^n \omega_{(1)\mu_1} \dots \omega_{(k)\mu_k} u^{(1)\nu_1} \dots u^{(l)\nu_l} T(v^{*\mu_1}, \dots, v^{*\mu_k}; v_1, \dots, v_l). \end{aligned}$$

Defina:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = T(v^{*\mu_1}, \dots, v^{*\mu_k}; v_{\nu_1}, \dots, v_{\nu_l}).$$

Com esta definição a última equação acima se escreve como

$$T(\omega_1, \dots, \omega_k; u^1, \dots, u^l) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k=1}^n \sum_{\nu_1, \dots, \nu_l=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \omega_{(1)\mu_1} \dots \omega_{(k)\mu_k} u^{(1)\nu_1} \dots u^{(l)\nu_l}.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\begin{aligned} v_{\mu_r} * \omega_{(r)} &= \omega_{(r)}(v_{\mu_r}) \\ &= \left( \sum_{\beta_r} \omega_{(r)\beta_r} v^{*\beta_r} \right) (v_{\mu_r}) = \sum_{\beta_r} \omega_{(r)\beta_r} [v^{*\beta_r}(v_{\mu_r})] \\ &= \sum_{\beta_r=1}^n \omega_{(r)\beta_r} \delta_{\beta_r}^{\mu_r} = \omega_{(r)\mu_r} \end{aligned}$$

e

$$v^{*\nu_s} * u^s = v^{*\nu_s}(u^{(s)}) = v^{*\nu_s} \left( \sum_{\beta_s=1}^n u^{(s)\beta_s} v_{\beta_s} \right) = \sum_{\beta_s=1}^n u^{(s)\beta_s} v^{*\nu_s}(v_{\beta_s}) = \sum_{\beta_s=1}^n u^{(s)\beta_s} \delta_{\beta_s}^{\nu_s} = u^{(s)\nu_s}.$$

Agora, observe que

$$v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l}(\omega_1, \dots, \omega_k; u^1, \dots, u^l) = \omega_{(1)\mu_1} \dots \omega_{(k)\mu_k} u^{(1)\nu_1} \dots u^{(l)\nu_l},$$

Assim podemos escrever

$$\begin{aligned} T(\omega_1, \dots, \omega_k; u^1, \dots, u^l) &= \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k=1}^n \sum_{\nu_1, \dots, \nu_l=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes \\ &\otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l}(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(l)}). \end{aligned}$$

Uma vez que a escolha de  $\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(k)}$  e de  $u^{(1)}, \dots, u^{(l)}$  foi arbitrária, temos:

$$T \equiv \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k=1}^n \sum_{\nu_1, \dots, \nu_l=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l},$$

donde, o conjunto  $\{v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l} \mid 1 \leq \mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_l \leq n\}$  gera  $\mathcal{T}_{k,l}(V)$ .

Agora, considere o tensor identicamente nulo escrito como combinação linear dos elementos do conjunto

$$\{v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l} \mid 1 \leq \mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_l \leq n\}$$

e suponha que  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \in \mathbb{R}$  sejam tais que

$$0 \equiv \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k=1}^n \sum_{\nu_1, \dots, \nu_l=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l}.$$

Então, para todo  $w = (\omega_1, \dots, \omega_k; u^1, \dots, u^l) \in V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V$ , tem se

$$\sum_{\mu_1, \dots, \mu_k=1}^n \sum_{\nu_1, \dots, \nu_l=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l}(w) = 0.$$

Em particular, se  $\{v_{\mu}\}$  é uma base de  $V$  e  $\{v^{*\nu}\}$  é a base dual associada, podemos tomar  $w = (v^{*\beta_1}, \dots, v^{*\beta_k}; v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_l})$  e daí escrever

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k=1}^n \sum_{\nu_1, \dots, \nu_l=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l}(v^{*\beta_1}, \dots, v^{*\beta_k}; v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_l}) = \\ &= \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k=1}^n \sum_{\nu_1, \dots, \nu_l=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \delta_{\mu_1}^{\beta_1} \cdot \dots \cdot \delta_{\mu_k}^{\beta_k} \cdot \delta_{\sigma_1}^{\nu_1} \cdot \dots \cdot \delta_{\sigma_l}^{\nu_l} = \\ &= T^{\beta_1 \dots \beta_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_l}, 1 \leq \beta_1, \dots, \beta_k, \sigma_1, \dots, \sigma_l \leq n. \end{aligned}$$

Assim, vemos que o conjunto  $\{v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l} \mid 1 \leq \mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_l \leq n\}$  gera  $\mathcal{T}_{k,l}(V)$  e é linearmente independente, portanto uma base.  $\square$

**Corolário 2.6.1.**  $\dim [\mathcal{T}_{k,l}(V)] = n^{k+l}$ .

Os números  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = T(v^{*\mu_1}, \dots, v^{*\mu_k}; v_{\nu_1}, \dots, v_{\nu_l})$  são ditos as componentes do tensor  $T$  na base  $\{v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l} \mid 1 \leq \mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_l \leq n\}$  que denominamos base produto relativa as bases  $v_{\mu}$  e  $v^{*\mu}$ . por

**Exemplo 2.6.1.** Seja  $T \in \mathcal{T}_{k,l}(V)$  dado em componentes por

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{\nu_l},$$

e seja  $T' \in \mathcal{T}_{k',l'}(V)$  dado em componentes por

$$T'^{\beta_1 \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_l} v_{\beta_1} \otimes \dots \otimes v_{\beta_k} \otimes v^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes v^{\alpha_l}.$$

Vamos determinar a expansão em componentes do tensor  $T \otimes T' \in \mathcal{T}_{k+k',l+l'}(V)$  na base produto.

Temos por definição que

$$\begin{aligned} T \otimes T'(v^{\mu_1}, \dots, v^{\mu_k}, v^{\beta_1}, \dots, v^{\beta_k}, v_{\nu_1}, \dots, v_{\nu_l}, v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_l}) &= \\ &= T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \cdot T'^{\beta_1 \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}. \end{aligned}$$

Assim, vemos que a expansão desejada é

$$T \otimes T' = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \cdot T'^{\beta_1 \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v_{\beta_1} \otimes \dots \otimes v_{\beta_k} \otimes v^{\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{\nu_l} \otimes v^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes v^{\alpha_l}.$$

Voltemos a operação de contração. A contração  $C_{i,j} : \mathcal{T}_{k,l}(V) \rightarrow \mathcal{T}_{k-1,l-1}(V)$  é definida da seguinte forma: se  $T$  é o tensor a ser contraído,  $B = \{v_\mu\}$  é uma base de  $V$  e  $B^*$  a base dual associada, para uma  $(k+l)$ -upla da forma  $(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(l)})$  temos:

$$C_{i,j}(T)(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(l)}) = \sum_{\sigma=1}^n T(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(l)})$$

Observe que

$$\begin{aligned} &C_{i,j}(T)(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(i-1)}, \omega_{(i+1)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(j-1)}, u^{(j+1)}, \dots, u^{(l)}) = \\ &= \sum_{\sigma=1}^n T(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(i-1)}, v^\sigma, \omega_{(i+1)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(j-1)}, v_\sigma, u^{(j+1)}, \dots, u^{(l)}) = \\ &= \sum_{\sigma=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes \\ &\otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l}(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(i-1)}, v^{*\sigma}, \omega_{(i+1)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(j-1)}, v_\sigma, u^{(j+1)}, \dots, u^{(l)}) = \\ &= \sum_{\sigma=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \omega_{(1)}(v_{\mu_1}) \cdot \dots \cdot v^\sigma(v_{\mu_i}) \cdot \dots \cdot \omega_{(k)}(v_{\mu_k}) \cdot v^{*\nu_1}(u^{(1)}) \cdot \dots \cdot v^{*\nu_j}(v_\sigma) \cdot \dots \cdot v^{*\nu_l}(u^{(l)}) = \\ &= \sum_{\sigma=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \sigma \mu_{i+1} \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \sigma \nu_{j+1} \dots \nu_l} \omega_{(1)}(v_{\mu_1}) \cdot \dots \cdot \delta_{\mu_i}^\sigma(v_{\mu_i}) \\ &\cdot \dots \cdot \omega_{(k)}(v_{\mu_k}) \cdot v^{*\nu_1} \cdot \dots \cdot \delta_{\nu_j}^\sigma \cdot \dots \cdot v^{*\nu_l}(v_l) = T^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \sigma \mu_{i+1} \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \sigma \nu_{j+1} \dots \nu_l} \omega_{(1)}(v_{\mu_1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots \cdot \omega_k(v_{\mu_k}) \cdot v^{*\nu_1} \cdot \dots \cdot v^{*\nu_l}(v_l) = \\
 & = T^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \sigma \mu_{i+1} \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \sigma \nu_{j+1} \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_{i-1}} \otimes v_{\mu_{i+1}} \otimes \dots \\
 & \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{\nu_{j-1}} \otimes v^{\nu_{j+1}} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l}(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \dots, \omega_k; u^1, \dots, u^{j-1}, u^{j+1}, \dots, u^l).
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 C_{i,j}(T) & \equiv T^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \sigma \mu_{i+1} \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \sigma \nu_{j+1} \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_{i-1}} \otimes v_{\mu_{i+1}} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes \\
 & \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{\nu_{j-1}} \otimes v^{\nu_{j+1}} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l}.
 \end{aligned}$$

Devemos mostrar que tal operação está bem definida, ou seja, se  $\tilde{B} = \{\tilde{v}_\mu\}$  e  $\tilde{B}^* = \{\tilde{v}^{*\mu}\}$  são outras bases (duais), então

$$\begin{aligned}
 & T^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \sigma \mu_{i+1} \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \sigma \nu_{j+1} \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_{i-1}} \otimes v_{\mu_{i+1}} \otimes \dots \otimes \\
 & \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{\nu_{j-1}} \otimes v^{\nu_{j+1}} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l} = \\
 & = T^{\beta_1 \dots \beta_{i-1} \sigma \beta_{i+1} \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_{j-1} \sigma \alpha_{j+1} \dots \alpha_l} \tilde{v}_{\beta_1} \otimes \dots \otimes \tilde{v}_{\beta_{i-1}} \otimes \tilde{v}_{\beta_{i+1}} \otimes \dots \otimes \tilde{v}_{\beta_k} \otimes \\
 & \otimes \tilde{v}^{*\alpha_1} \otimes \dots \otimes \tilde{v}^{\alpha_{j-1}} \otimes \tilde{v}^{*\alpha_{j+1}} \otimes \dots \otimes \tilde{v}^{*\alpha_l}.
 \end{aligned}$$

Com efeito, note primeiramente que  $v^{*\nu} = v^{*\nu}(\tilde{v}_\beta)\tilde{v}^{*\beta}$  e  $v_\mu = \tilde{v}^{*\alpha}(v_\mu)\tilde{v}_\alpha$ . Daí, temos:

$$\begin{aligned}
C_{i,j}(T)(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(l)}) &= \\
\sum_{\sigma=1}^n T(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(i-1)}, v^\sigma, \omega_{(i+1)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(j-1)}, v_\sigma, u^{(j+1)}, \dots, u^{(l)}) &= \\
\sum_{\sigma=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \times & \\
\times \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l}(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(i-1)}, v^\sigma, \omega_{(i+1)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(j-1)}, v_\sigma, u^{(j+1)}, \dots, u^{(l)}) &= \\
= \sum_{\sigma=1}^n \tilde{T}^{\beta_1 \dots \beta_{i-1} \beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_{j-1} \alpha_j \alpha_{j+1} \dots \alpha_l} \times & \\
\times v^{*\mu_1}(\tilde{v}_{\beta_1}) \cdot \dots \cdot v^{*\mu_i}(\tilde{v}_{\beta_i}) \cdot & \\
\cdot \dots \cdot v^{*\mu_k}(\tilde{v}_{\beta_k}) \cdot \tilde{v}^{*\alpha_1}(v_{\nu_1}) \cdot \dots \cdot \tilde{v}^{*\alpha_j}(v_{\nu_j}) \cdot \dots \cdot \tilde{v}^{*\alpha_l}(v_{\nu_l}) \cdot v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes & \\
\otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l}(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(i-1)}, v^\sigma, \omega_{(i+1)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(j-1)}, v_\sigma, u^{(j+1)}, \dots, u^{(l)}) &= \\
= \sum_{\sigma=1}^n \tilde{T}^{\beta_1 \dots \beta_{i-1} \beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_{j-1} \alpha_j \alpha_{j+1} \dots \alpha_l} \times & \\
\times (v^{*\mu_1}(\tilde{v}_{\beta_1}) \cdot v_{\mu_1}) \otimes \dots \otimes (v^{\mu_k}(\tilde{v}_{\beta_k}) \cdot v_{\mu_k}) \otimes & \\
\otimes (\tilde{v}^{*\alpha_1}(v_{\nu_1}) \cdot v^{*\nu_1}) \otimes & \\
\otimes \dots \otimes (\tilde{v}^{*\alpha_l}(v_{\nu_l}) \cdot v^{*\nu_l})(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(i-1)}, v^\sigma, \omega_{(i+1)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(j-1)}, v_\sigma, u^{(j+1)}, \dots, u^{(l)}) &= \\
= \sum_{\sigma=1}^n \tilde{T}^{\beta_1 \dots \beta_{i-1} \beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_{j-1} \alpha_j \alpha_{j+1} \dots \alpha_l} \tilde{v}_{\beta_1} \otimes \dots \otimes \tilde{v}_{\beta_k} \otimes \tilde{v}^{*\alpha_1} \otimes & \\
\otimes \dots \otimes \tilde{v}^{*\alpha_l}(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(i-1)}, v^\sigma, \omega_{(i+1)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(j-1)}, v_\sigma, u^{(j+1)}, \dots, u^{(l)}) &= \\
= \sum_{\sigma=1}^n \tilde{T}^{\beta_1 \dots \beta_{i-1} \sigma \beta_{i+1} \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_{j-1} \sigma \alpha_{j+1} \dots \alpha_l} \times & \\
\times \omega_{(1)}(\tilde{v}_{\beta_1}) \cdot \dots \cdot v^\sigma(\tilde{v}_{\beta_i}) \cdot \dots \cdot \omega_{(k)}(\tilde{v}_{\beta_k}) \cdot \tilde{v}^{*\alpha_1}(u^{(1)}) \cdot \dots \cdot \tilde{v}^{*\alpha_j}(v_\sigma) \cdot \dots \cdot \tilde{v}^{*\alpha_l}(u^{(l)}) &= \\
= \sum_{\sigma=1}^n T^{\beta_1 \dots \beta_{i-1} \sigma \beta_{i+1} \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_{j-1} \sigma \alpha_{j+1} \dots \alpha_l} \times & \\
\times \omega_{(1)}(\tilde{v}_{\beta_1}) \cdot \dots \cdot \omega_{(k)}(\tilde{v}_{\beta_k}) \cdot \tilde{v}^{\alpha_1}(u^{(1)}) \cdot \dots \cdot \tilde{v}^{\alpha_l}(u^{(l)}) v^\sigma(\tilde{v}_{\beta_i}) \tilde{v}^{*\alpha_j}(v_\sigma) &= \\
= T^{\beta_1 \dots \beta_{i-1} \sigma \beta_{i+1} \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_{j-1} \sigma \alpha_{j+1} \dots \alpha_l} \omega_{(1)}(\tilde{v}_{\beta_1}) \cdot \dots \cdot \omega_{(k)}(\tilde{v}_{\beta_k}) \cdot \tilde{v}^{\alpha_1}(u^{(1)}) \cdot \dots \cdot \tilde{v}^{\alpha_l} & \\
(u^{(l)}) v^\sigma(\tilde{v}_{\beta_i}) \cdot \tilde{v}^{*\alpha_j}(\tilde{v}_{\beta_i}) &= \\
= T^{\beta_1 \dots \beta_{i-1} \sigma \beta_{i+1} \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_{j-1} \sigma \alpha_{j+1} \dots \alpha_l} \times & \\
\times \tilde{v}_{\beta_1} \otimes \dots \otimes \tilde{v}_{\beta_{i-1}} \otimes \tilde{v}_{\beta_{i+1}} \otimes \dots \otimes \tilde{v}_{\beta_k} \otimes \tilde{v}^{\alpha_1} \otimes & \\
\otimes \dots \otimes \tilde{v}^{\alpha_{j-1}} \otimes \tilde{v}^{\alpha_{j+1}} \otimes \dots \otimes \tilde{v}^{\alpha_l}(\omega_{(1)}, \dots, \omega_{(i-1)}, \omega_{(i+1)}, \dots, \omega_{(k)}; u^{(1)}, \dots, u^{(j-1)}, u^{(j+1)}, \dots, u^{(l)}) &
\end{aligned}$$

## 2.6.2 Campo de Tensores em Variedades

O nosso interesse está na definição de campos tensoriais em variedades. Especializaremos a discussão anterior ao espaço vetorial  $T_p M$ .

**Definição 2.6.2.** *Um campo tensorial do tipo  $(k, l)$  em  $M$  é uma aplicação*

$$T : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} \mathcal{T}_{k,l}(T_p M)$$

tal que  $T(p) \in \mathcal{T}_{k,l}(T_p M) \quad \forall p \in M$ .

Seja  $U \subset M$  um aberto coberto por um referencial local  $x^\mu$ . Então a restrição  $T|_U$  de  $T$  a  $U$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$T(x^0, \dots, x^3) = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x^0, \dots, x^3) (\partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l}) \Big|_{(x^0, \dots, x^3)}$$

De fato, ao longo da região coberta por  $U$ , podemos utilizar a base  $\left\{ \partial_\mu \Big|_{(x^0, \dots, x^3)} : \mu = 0, \dots, 3 \right\}$  para  $T_p M$  associada ao referencial  $x^\mu$  e a base dual correspondente para  $(T_p M)^*$  para estabelecer a base-produto

$$\left\{ (\partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l}) \Big|_{(x^0, \dots, x^3)} \right\} : 1 \leq \mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_l$$

para  $\mathcal{T}_{k,l}(T_{(x^0, \dots, x^3)} M)$ . Como as componentes de  $T$  relativas a esta base são dadas por  $T(dx^{\mu_1}, \dots, dx^{\mu_k}, \partial_{\nu_1}, \dots, \partial_{\nu_l}) = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$  temos:

$$T(x^0, \dots, x^3) = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x^0, \dots, x^3) (\partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l}) \Big|_{(x^0, \dots, x^3)}.$$

**Definição 2.6.3.** As funções  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x^0, \dots, x^3)$  são ditas as componentes do tensor  $T$  relativas ao referencial  $x^\mu$ .

**Definição 2.6.4.** Dizemos que um campo tensorial do tipo  $(k, l)$  é suave se suas componentes relativas a qualquer referencial local forem suaves.

Estamos interessados em determinar a relação entre as componentes de um campo tensorial relativas a dois referenciais locais distintos. Para isso, suponha que  $U \subset M$  seja um aberto contido no overlap  $V \cap \tilde{V}$  de dois referenciais locais  $(V; x^\mu)$  e  $(\tilde{V}; \tilde{x}^\mu)$ . Sejam  $T$  um campo tensorial em  $U$  do tipo  $(k, l)$  e sejam  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$  e  $\tilde{T}^{\beta_1 \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$  as componentes de  $T$  relativas aos dois referenciais locais  $x^\mu$  e  $\tilde{x}^\mu$  respectivamente. Afirmamos que vale a

**Proposição 2.6.4.** Em qualquer ponto de  $U \subset V \cap \tilde{V}$  se tem:

$$\tilde{T}^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = T^{\beta_1 \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \frac{\partial \tilde{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \tilde{x}^{\mu_k}}{\partial x^{\beta_k}} \cdot \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \tilde{x}^{\nu_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x^{\alpha_l}}{\partial \tilde{x}^{\nu_l}}.$$

*Demonstração.* Se  $T = T^{\beta_1 \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(x^0, \dots, x^3) \partial_{\beta_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\beta_k} \otimes dx^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_l}$  podemos usar as relações entre as bases de cada espaço tangente e cotangente nos pontos de  $U$  associado aos referenciais locais  $x^\mu$  e  $\tilde{x}^\mu$  para escrevermos

$$T = T^{\beta_1 \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \left( \tilde{\partial}_{\mu_1} \frac{\partial \tilde{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\beta_1}} \right) \otimes \dots \otimes \left( \tilde{\partial}_{\mu_k} \frac{\partial \tilde{x}^{\mu_k}}{\partial x^{\beta_k}} \right) \otimes \left( d\tilde{x}^{\nu_1} \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \tilde{x}^{\nu_1}} \right) \otimes \dots \otimes \left( d\tilde{x}^{\nu_l} \frac{\partial x^{\alpha_l}}{\partial \tilde{x}^{\nu_l}} \right)$$

Usando a proposição 2.6.2 podemos escrever a última equação como

$$T = T^{\beta_1 \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \frac{\partial \tilde{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \tilde{x}^{\mu_k}}{\partial x^{\beta_k}} \times \\ \times \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \tilde{x}^{\nu_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x^{\alpha_l}}{\partial \tilde{x}^{\nu_l}} \tilde{\partial}_{\mu_1} \otimes \tilde{\partial}_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \tilde{\partial}_{\mu_k} \otimes d\tilde{x}^{\nu_1} \otimes \dots \otimes d\tilde{x}^{\nu_l}$$

Como  $T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \tilde{\partial}_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \tilde{\partial}_{\mu_k} \otimes d\tilde{x}^{\nu_1} \otimes \dots \otimes d\tilde{x}^{\nu_l}$  na base

$$\left\{ \tilde{\partial}_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \tilde{\partial}_{\mu_k} \otimes d\tilde{x}^{\nu_1} \otimes \dots \otimes d\tilde{x}^{\nu_l} : 1 \leq \mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_l \leq n \right\}$$

de  $T_{(x^0, \dots, x^3)}M$  associada ao referencial  $\tilde{x}^\mu$ , segue que devemos ter

$$\tilde{T}^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = T^{\beta_1 \dots \beta_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \frac{\partial \tilde{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\beta_1}} \cdot \frac{\partial \tilde{x}^{\mu_2}}{\partial x^{\beta_2}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \tilde{x}^{\mu_k}}{\partial x^{\beta_k}} \cdot \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \tilde{x}^{\nu_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x^{\alpha_l}}{\partial \tilde{x}^{\nu_l}},$$

como desejado. □

Segue imediatamente desta proposição que, tal como no caso de campos vetoriais e de 1-formas, vale que: se  $U \subset M$  é um aberto coberto por dois referenciais locais  $x^\mu$  e  $\tilde{x}^\mu$ , basta verificarmos se as componentes de um campo tensorial em  $U$  relativa a um deles são suaves para saber se isto vale relativo a ambos.

## 2.7 Métricas

**Definição 2.7.1.** *Uma métrica pseudo-Riemanniana em  $M$  é um campo tensorial suave simétrico e não-degenerado  $g$  do tipo  $(0, 2)$ .*

Por um campo tensorial simétrico  $g$  do tipo  $(0, 2)$  entendemos um campo tal que para cada  $p \in M$ ,

$$g(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfaz:  $g(p)(v, w) = g(p)(w, v) \quad \forall v, w \in T_p M$ .

Um campo tensorial não degenerado  $g$  do tipo  $(0, 2)$  é um campo tal que para cada  $p \in T_p M$

$$g(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfaz:  $g(p)(v, w) = 0 \quad \forall v \in T_p M \Leftrightarrow w = 0$ . Às vezes, quando o contexto estiver claro, nos referiremos a uma métrica pseudo-Riemanniana  $g$  simplesmente como uma “métrica”, ou como sendo o “tensor métrico”.

Assim, uma métrica  $g$  associa a cada  $p \in M$  uma forma quadrática não-degenerada em  $T_p M$  que se comporta exatamente como um produto interno, exceto pelo fato de não ser necessariamente positivo definido.

Dado um aberto  $U \subset M$  coberto por um referencial local  $x^\mu$  temos que a restrição de  $g$  a  $U$  pode ser escrita como

$$g(x^0, \dots, x^3) = g_{\mu\nu} (dx^\mu \otimes dx^\nu) \Big|_{(x^0, \dots, x^3)},$$

ou simplesmente

$$g \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu.$$

As componentes do tensor métrico são  $g_{\mu\nu}(x^0, \dots, x^3) = g(x^0, \dots, x^3) \left( \partial_\mu \Big|_{(x^0, \dots, x^3)} ; \partial_\nu \Big|_{(x^0, \dots, x^3)} \right)$

relativamente à base  $\left\{ \partial_\mu \Big|_{(x^0, \dots, x^3)} ; \mu = 0, \dots, 3 \right\}$  de  $T_p M$  associada ao referencial  $x^\mu$ . Podemos enxergar as componentes  $g_{\mu\nu}$  como sendo as entradas da matriz  $[g_{\mu\nu}(x^0, \dots, x^3)]_{4 \times 4} \equiv \mathcal{G}$  da forma quadrática associada a  $g(x^0, \dots, x^3)$  relativamente ao referencial local  $x^\mu$ . Um conceito especial em nosso estudo é o conceito de assinatura de uma métrica  $g$ , que estende o conceito de assinatura de uma forma quadrática da Álgebra Linear para métricas pseudo-Riemannianas em variedades.

A assinatura de uma forma quadrática não-degenerada em um espaço vetorial real é dada pelo número  $n_+$  de autovalores positivos e pelo número  $n_-$  de autovalores negativos da sua matriz  $Q$ , sendo representada pelo par ordenado  $(n_+, n_-)$ . Pela “Lei da Inercia de Sylvester<sup>2</sup>”,  $n_+$  e  $n_-$  não dependem da escolha da matriz para representar a forma quadrática. Isto é, se  $R$  é outra matriz que representa a mesma forma quadrática, com  $R = SQS^T$  para alguma matriz  $S \in GL$ , então o número de autovalores positivos de  $R$  é o mesmo de  $Q$ , bem como o número de autovalores negativos.

**Proposição 2.7.1.** *Seja  $g$  uma métrica pseudo-Riemanniana em  $M$ . Então a assinatura de  $g(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  deve ser a mesma para todo  $p \in M$ .*

Esta proposição nos permite formular a seguinte

<sup>2</sup>Para a “Lei de Sylvester”, veja: NORMAN, C.W., “Undergraduate Algebra: First Course”. Oxford: Oxford University Press, 1986.

**Definição 2.7.2.** A assinatura  $(n_+, n_-)$  de uma métrica Pseudo-Riemanniana  $g$  em  $M$  é a assinatura comum das formas quadráticas não degeneradas

$$g(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

$p \in M$ .

**Casos especiais de interesse:**

- Assinatura  $(4, 0)$ : neste caso a métrica é dita “Riemanniana”. Para cada  $p \in T_p M$ ,  $g(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  é neste caso um produto interno no espaço tangente  $T_p M$ .
- Assinatura  $(3, 1)$  ou  $(1, 3)$ : nestes casos, a métrica se diz “Lorentziana” ou “Minkowskiana”.

**Observação 2.7.1.** Seja  $W \subset M$  um aberto coberto por dois sistemas de coordenadas locais  $x^\mu$  e  $\tilde{x}^\mu$ . Considere as matrizes  $\mathcal{G}(x^0, \dots, x^3) = [g_{\mu\nu}(x^0, \dots, x^3)]_{4 \times 4}$  e  $\tilde{\mathcal{G}}(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) = [g_{\mu\nu}(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)]_{4 \times 4}$  da forma quadrática  $g$  relativamente aos dois referenciais locais respectivamente. Seja

$$J = [J_{\sigma\theta}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0} & \cdots & \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^0} & \cdots & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^3} \end{bmatrix}$$

a matriz jacobiana para o difeomorfismo de mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x^0 = x^0(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) \\ \vdots \\ x^3 = x^3(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) \end{cases}.$$

Então, a matriz  $J \in GL(4)$  e a relação tensorial

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\rho\lambda} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu}$$

equivale à seguinte relação entre as matrizes  $\tilde{\mathcal{G}}$  e  $\mathcal{G}$ :

$$\tilde{\mathcal{G}} = J^T \mathcal{G} J$$

De fato, basta observar que

$$[JGJ^T]_{\mu\nu} = \sum_{\sigma} [J^T \tilde{\mathcal{G}}]_{\mu\sigma} [J]_{\sigma\nu} = \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} [J^T]_{\mu\lambda} [\mathcal{G}]_{\lambda\sigma} [J]_{\sigma\nu} = \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\mu} g_{\mu\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu}.$$

Portanto segue da Lei de Sylvester que a assinatura da métrica  $g$  pode ser determinada usando suas componentes relativas a qualquer referencial local.

Na seção (2.1) falamos do conceito de espaço-tempo. Registremos agora na forma de uma definição.

**Definição 2.7.3.** Um “espaço tempo”  $(M, g)$  é uma  $C^\infty$ -variedade quadridimensional (conexa por caminhos) equipada com uma métrica pseudo-Riemanniana  $g$  de assinatura Lorentziana. Neste contexto, os pontos  $p \in M$  se dizem “eventos”.

De agora em diante,  $M$  denota sempre um espaço-tempo. Como mencionado na introdução, a formulação matemática da teoria gravitacional oferecida pela TGR é baseada na seguinte ideia:

- O sistema de coordenadas espaciais e temporais utilizados por um observador para descrever a realidade física ao seu redor é uma carta local  $(U, x^\mu)$  em um espaço-tempo  $(M, g)$ . A restrição  $g_{\mu\nu}$  de  $g$  a  $(U, x^\mu)$  é determinada pelas equações de campo de Einstein (vejamos adiante) e contém todas as informações sobre efeitos gravitacionais conforme vistos pelo observador no referencial  $(U, x^\mu)$ .

O princípio acima é suficiente para formular matematicamente o seguinte princípio fundamental: o Princípio da Equivalência segundo Einstein.

**Teorema 2.7.1.** Seja  $M$  um espaço-tempo,  $(U; x^\mu)$  um referencial local de  $M$ , e  $A \in U$  um evento de coordenadas  $(x^0, \dots, x^3) = 0$ . Então existe um sistema de coordenadas  $\tilde{x}^\mu$  em torno de  $A$  tal que

1. as coordenadas de  $A$  neste referencial também são  $(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) = 0$ ;

2. a métrica neste referencial satisfaz  $\left. \left( \tilde{\partial}_\gamma \tilde{g}_{\alpha\beta} \right) \right|_A = 0$

*Demonstração.* Sejam  $g_{\mu\nu}$  as componentes da métrica  $g$  em  $U$  relativas ao referencial  $x^\mu$ . Seja  $h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \Big|_A$  e  $\kappa_{\theta\mu\nu} := (\partial_\theta g_{\mu\nu}) \Big|_A$ . Então, em primeira ordem, temos  $g_{\mu\nu}(x^0, \dots, x^3) = h_{\mu\nu} + \kappa_{\theta\mu\nu} x^\theta + O(2)$ . Vamos definir um novo referencial local  $\tilde{x}^\mu$  pela equação:

$$x^\mu = \tilde{x}^\mu - \frac{1}{2} \Gamma_{\sigma\tau}^\mu \tilde{x}^\sigma \tilde{x}^\tau \quad (2.9)$$

onde os  $\Gamma_{\sigma\tau}^\mu$ ,  $\mu, \sigma, \tau = 0, 1, 2, 3$ , são constantes reais que determinaremos mais tarde, sujeitos à condição de simetria  $\Gamma_{\sigma\tau}^\mu = \Gamma_{\tau\sigma}^\mu$ . Trata-se de uma transformação quadrática para cada  $\mu = 0, 1, 2, 3$  tal que

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} = \delta_\nu^\mu - \Gamma_{\nu\rho}^\mu \tilde{x}^\rho \quad \forall \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

Além disso, temos que

$$\left. \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \right|_{(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)=0} = \delta_\nu^\mu \quad \forall \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

de forma que a matriz jacobiana desta transformação para  $(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) = 0$ , satisfaz

$$J = I_{4 \times 4} \Rightarrow \det(J) \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema da Função Inversa, esta transformação é um difeomorfismo local em torno de  $(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) = 0$ , o que garante que de fato a equação (2.9) define um referencial local em subconjunto de  $U$  aberto em  $M$  e contendo  $A$ .

Note que isto também garante que só existe o ponto  $(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) = 0$  com imagem  $(x^0, \dots, x^3) = 0$ . As coordenadas de  $A$  no referencial  $\tilde{x}^\mu$  serão portanto, conforme afirmado,  $(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) = 0$ .

Vamos demonstrar a validade da segunda afirmação do teorema. Para isso, basta usar a lei de transformação tensorial

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta}$$

relacionando as componentes  $\tilde{g}_{\alpha\beta}$  de  $g$  relativas ao referencial  $\tilde{x}^\mu$  com as componentes de  $g$  relativas ao referencial  $x^\mu$ . Da mesma forma que em (2.10), escreva

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} &= \delta_\alpha^\mu - \Gamma_{\alpha\tau}^\mu \tilde{x}^\tau \\ \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} &= \delta_\beta^\nu - \Gamma_{\beta\sigma}^\nu \tilde{x}^\sigma \end{aligned}$$

Daí,

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = (h_{\mu\nu} + \kappa_{\theta\mu\nu} x^\theta + O(2)) (\delta_\alpha^\mu - \Gamma_{\alpha\tau}^\mu \tilde{x}^\tau) (\delta_\beta^\nu - \Gamma_{\beta\sigma}^\nu \tilde{x}^\sigma),$$

Como vamos manter até a primeira ordem, podemos trocar  $x^\theta$  por  $\tilde{x}^\theta$  e ignoraremos os outros termos na relação

$$x^\mu = \tilde{x}^\mu - \frac{1}{2} \Gamma_{\sigma\tau}^\mu \tilde{x}^\sigma \tilde{x}^\tau.$$

Posto isto, a relação desejada é

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\alpha\beta} &= (h_{\mu\nu} + \kappa_{\theta\mu\nu} \tilde{x}^\theta) (\delta_\alpha^\mu - \Gamma_{\alpha\tau}^\mu \tilde{x}^\tau) (\delta_\beta^\nu - \Gamma_{\beta\sigma}^\nu \tilde{x}^\sigma) \\ &= h_{\mu\nu} \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - h_{\mu\nu} \delta_\alpha^\mu \Gamma_{\beta\sigma}^\nu \tilde{x}^\sigma - h_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\tau}^\mu \tilde{x}^\tau \delta_\beta^\nu \\ &\quad + \kappa_{\theta\mu\nu} \tilde{x}^\theta \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + O(2) \\ &= h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\nu} \Gamma_{\beta\sigma}^\nu \tilde{x}^\sigma - h_{\mu\beta} \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu \tilde{x}^\sigma + \kappa_{\theta\alpha\beta} \tilde{x}^\theta + O(2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Defina:

$$\begin{aligned} h_{\mu\beta} \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu &:= \Gamma_{\beta\sigma\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha\sigma} \\ h_{\alpha\nu} \Gamma_{\beta\sigma}^\nu &:= \Gamma_{\alpha\beta\sigma} = \Gamma_{\alpha\sigma\beta} \end{aligned}$$

Assim, a equação (2.11) pode ser escrita como

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + (\kappa_{\sigma\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta\sigma} - \Gamma_{\beta\sigma\alpha}) \tilde{x}^\sigma + O(2).$$

Esta expressão mostra claramente o seguinte: para que se tenha

$$(\partial_\gamma \tilde{g}_{\alpha\beta}) \Big|_A = 0 \quad \forall \gamma,$$

deve se ter a expressão entre parenteses na segunda parcela do membro direito identicamente nula, isto é,

$$\kappa_{\sigma\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\sigma} + \Gamma_{\beta\sigma\alpha} \quad (2.12)$$

Para concluir, mostraremos como extrair os  $\Gamma$ 's a partir dos  $\kappa$ 's usando (2.12). Para isso, aplicaremos o “truque de Levi-Civita”. Permutando ciclicamente índices em (2.12) obtemos

$$\begin{aligned} \kappa_{\sigma\alpha\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta\sigma} + \Gamma_{\beta\sigma\alpha}, \\ \kappa_{\alpha\beta\sigma} &= \Gamma_{\beta\sigma\alpha} + \Gamma_{\sigma\alpha\beta}, \\ \kappa_{\beta\sigma\alpha} &= \Gamma_{\sigma\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta\sigma}. \end{aligned}$$

Logo

$$\Gamma_{\alpha\beta\sigma} = \frac{1}{2}(\kappa_{\sigma\alpha\beta} + \kappa_{\beta\sigma\alpha} - \kappa_{\alpha\beta\sigma})$$

Agora, observe que  $g_{\mu\nu}(A) = h_{\mu\nu}$  e portanto  $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(A)$ ; isto nos permite escrever

$$h^{\alpha\lambda}\Gamma_{\lambda\beta\sigma} = (h^{\alpha\lambda}h_{\lambda\theta})\Gamma_{\beta\sigma}^{\theta} = \delta_{\theta}^{\alpha}\Gamma_{\beta\sigma}^{\theta} = \Gamma_{\beta\sigma}^{\alpha}.$$

Concluimos a demonstração observando que

$$\Gamma_{\beta\sigma}^{\alpha} = \frac{1}{2}h^{\alpha\lambda}(\kappa_{\sigma\lambda\beta} + \kappa_{\beta\sigma\lambda} - \kappa_{\lambda\beta\sigma})$$

.

□

**Teorema 2.7.2.** (*Existência de referencias inerciais locais*). *Seja  $M$  um espaço-tempo,  $A$  um evento, e seja  $(U, x^{\mu})$  um referencial local fornecido pelo teorema anterior, isto é, relativamente ao qual as coordenadas de  $A$  são  $(x^0, \dots, x^3) = 0$  e as componentes  $g_{\mu\nu}$  do tensor métrico satisfazem*

$$(\partial_{\gamma}g_{\mu\nu}) \Big|_A = 0, \quad \forall \gamma.$$

Então, existe um referencial  $\tilde{x}^{\mu}$  contendo  $A$  tal que :

1. as coordenadas de  $A$  ainda são  $(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) = 0$ ;
2. vale

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^{\mu}) \approx \eta_{\mu\nu} + O(2), \quad (2.13)$$

para  $[\eta_{\mu\nu}]_{4 \times 4} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , sendo que em  $A$  vale  $\tilde{g}_{\mu\nu} \Big|_A = \eta_{\mu\nu}$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{G}(A)$  a matriz de  $g_{\mu\nu}(A)$ . Como temos a assinatura  $(3, 1)$ , segue que existe alguma matriz  $J$  tal que

$$J^t \mathcal{G}(A) J = \text{diag}(-1, 1, 1, 1).$$

Para esta  $J = [J_{\nu}^{\mu}]_{4 \times 4}$  defina a transformação linear

$$x^{\mu} = J_{\nu}^{\mu} \tilde{x}^{\nu}, \quad \forall \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

Trata-se de um difeomorfismo (global), que associa  $(x^0, \dots, x^3) = 0$  com  $(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) = 0$ . Assim,  $\tilde{x}^{\mu}$  definido por (2.14) é um referencial local cobrindo o mesmo aberto  $U$  em torno de  $A$  e satisfazendo à propriedade (1). Observe que

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\mu}} (J_{\nu}^{\alpha} \tilde{x}^{\nu}) = J_{\nu}^{\alpha} \delta_{\mu}^{\nu} = J_{\mu}^{\alpha},$$

de forma que a matriz jacobiana da transformação (2.14) é exatamente  $J$ . Segue que relação tensorial

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde{x}^{\nu}}$$

implica que as matrizes

$$\mathcal{G} = [g_{\mu\nu}]_{4 \times 4}, \quad \tilde{\mathcal{G}} = [\tilde{g}_{\mu\nu}]_{4 \times 4}$$

da forma quadrática  $g$  relativamente aos referencias locais  $x^\mu$  e  $\tilde{x}^\mu$  cobrindo  $U \subset M$  se relacionam por

$$\tilde{\mathcal{G}} = J^t \mathcal{G} J. \quad (2.15)$$

Conclusão: a matriz

$$\tilde{\mathcal{G}} = [\tilde{g}_{\mu\nu}(x^0, \dots, x^3)]_{4 \times 4}$$

é dada em  $A$  por

$$\tilde{\mathcal{G}}(A) = J^t \mathcal{G}(A) J = \text{diag}(-1, 1, 1, 1).$$

Além disso, visto que pelo teorema anterior em um aberto contendo  $A$  e contido em  $U$  pode-se escrever

$$g_{\mu\nu}(x^0, \dots, x^3) \approx g_{\mu\nu}(A) + O(2),$$

segue de (2.15) que

$$\tilde{\mathcal{G}}((\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)) \approx \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + O(2).$$

Como desejávamos. □

Estes resultados mostram que com a mera reformulação da gravitação como um fenômeno geométrico, abandonando a ideia de gravidade como uma força no sentido Newtoniano, Einstein já consegue, resolver o problema levantado na seção (2.1), de introduzir uma descrição da gravidade que incorpore de maneira natural a equivalência entre massa inercial e massa gravitacional.

### 2.7.1 Levantamento e abaixamento de índices

Vamos introduzir duas “operações” sobre os índices das componentes de um tensor  $T \in \mathcal{T}_{k,l}(V)$  que serão úteis daqui em diante. Manteremos as notações e convenções feitas na seção de cálculo tensorial. A maneira mais correta de ver estas operações é, no entanto, no nível de álgebra multilinear, conforme faremos a seguir.

Suponha que o espaço vetorial  $V$  esteja equipado com uma forma bilinear simétrica não-degenerada  $g$ . Então, através de  $g$  podemos estabelecer dois isomorfismos canônicos

$$\Phi : V \longrightarrow V^*$$

$$\Psi : V^* \longrightarrow V$$

denominados “abaixamento” e “levantamento de índices”, respectivamente.

#### Abaixamento de índices

Dada uma base  $B = \{v_\mu; \mu = 1, \dots, n\}$  para  $V$  o isomorfismo  $\Phi$  leva o vetor  $w = w^\sigma v_\sigma$  na 1-forma  $\Phi_w$  definida da seguinte forma:

$$\Phi_w(u) = g(w, u).$$

Se  $u = u^\alpha v_\alpha$  veja que

$$\Phi_w(u) = g(w, u) = g_{\sigma\alpha} w^\sigma u^\alpha. \quad (2.16)$$

Por outro lado, se  $\Phi_w = \phi_\beta v^{*\beta}$ , onde  $B^* = \{v^{*\mu}; \mu = 1, \dots, n\}$  é a base dual associada a  $B$ , temos

$$\Phi_w(u) = (\phi_\beta v^{*\beta})(u^\alpha v_\alpha) = \phi_\beta u^\alpha v^{*\beta}(v_\alpha) = \phi_\beta u^\alpha \delta_\alpha^\beta = \phi_\alpha u^\alpha. \quad (2.17)$$

Comparando (2.16) e (2.17) vemos que as componentes de  $\Phi_w$  na base dual  $B^*$  de  $V^*$  devem ser

$$\phi_\alpha = g_{\sigma\alpha} w^\sigma,$$

que denotaremos por  $w_\alpha = g_{\sigma\alpha} w^\sigma$ . É costumeiro dizer que as componentes  $w_\mu$  de  $\Phi_w$  foram obtidas das componentes  $w^\mu$  de  $w$  pela operação de “abaixamento de índices”.

**Proposição 2.7.2.** *A aplicação  $\Phi$  definida acima é um isomorfismo entre  $V$  e  $V^*$ .*

*Demonstração.* A linearidade de  $\Phi$  e de  $\Phi_w$  segue imediatamente da bilinearidade de  $g$ . Agora, se  $\Phi(w) = \Phi_w = 0$  para algum  $w \in V$ , então

$$\Phi_w(u) = g(w, u) = 0 \quad \forall u \in V.$$

Como  $g$  é não-degenerada, segue  $w = 0$ , e portanto  $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$ . Como a dimensão de  $V$  é finita, segue que  $\Phi$  é um isomorfismo.  $\square$

### Levantamento de índices

Dada uma base  $B = \{v_\mu; \mu = 1, \dots, n\}$  para  $V$  seja  $B^* = \{v^{*\mu}; \mu = 1, \dots, n\}$  a base dual associada. A aplicação  $\Psi$  leva a 1-forma  $\omega = \omega_\sigma v^{*\sigma}$  no vetor  $\Psi_\omega$  tal que

$$\omega(u) = g(\Psi_\omega, u) \quad \forall u \in V \quad (2.18)$$

Se  $u = u^\alpha v_\alpha$  e  $\Psi_\omega = \psi^\beta v_\beta$ , então veja que

$$g(\Psi_\omega, u) = g_{\alpha\beta} \psi^\beta u^\alpha \quad (2.19)$$

Por outro lado,

$$\omega(u) = \omega_\sigma v^{*\sigma}(u) = \omega_\sigma u^\alpha v^{*\sigma}(v_\alpha) = \omega_\sigma u^\alpha \delta_\alpha^\sigma = \omega_\alpha u^\alpha \quad (2.20)$$

Comparando (2.19) e (2.20), vemos que para (21) ser válida precisamos ter

$$\omega_\alpha = g_{\alpha\beta} \psi^\beta.$$

Então, podemos escrever

$$g^{\alpha\mu} \omega_\alpha = g^{\alpha\mu} g_{\alpha\beta} \psi^\beta = \delta_\beta^\mu \psi^\beta = \psi^\mu,$$

o que significa que as componentes de  $\Psi_\omega$  relativas a base  $B$ , que denotaremos por  $\omega^\mu$ , são dadas por

$$\omega^\mu = g^{\alpha\mu} \omega_\alpha.$$

Nesse sentido, dizemos que as componentes de  $\Psi_\omega$  foram obtidas pela operação “levantamento de índice” das componentes de  $\omega$ .

**Proposição 2.7.3.** *A aplicação  $\Psi$  é um isomorfismo entre  $V^*$  e  $V$ .*

*Demonstração.* A linearidade de  $\Psi$  segue das componentes  $\kappa^\alpha$  do vetor  $\Psi_{(\omega^{(1)} + \lambda\omega^{(2)})}$  que são dadas relativamente à base  $B$  por

$$\kappa^\alpha = g^{\alpha\mu} (\omega_\mu^{(1)} + \lambda\omega_\mu^{(2)}) = g^{\alpha\mu} \omega_\mu^{(1)} + \lambda g^{\alpha\mu} \omega_\mu^{(2)},$$

no caso em que  $\omega^{(i)} = \omega_\beta^{(i)} v^{*\beta}$ ,  $i = 1, 2$ . Agora, observe que

$$\Psi(\omega) = \Psi_\omega = 0 \Rightarrow \omega(u) = g(\Psi_\omega, u) = 0 \quad \forall u \in V \Rightarrow \omega \equiv 0,$$

e portanto  $\Psi$  é injetiva. Como a dimensão de  $V$  é finita segue que  $\Psi$  é um isomorfismo.  $\square$

### Generalização para Tensores

As operações de levantamento e abaixamento de índices podem ser generalizadas para tensores do tipo  $(k, l)$ . Seja

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l}$$

um tensor em  $\mathcal{T}_{k,l}(V)$ . Então, por exemplo, o tensor obtido de  $T$  por abaixamento de índice é o seguinte tensor em  $\mathcal{T}_{k-1,l+1}(V)$

$$\begin{aligned} \tilde{T} &:= \tilde{T}^{\mu_1 \dots \mu_{k-1}}_{\nu_1 \dots \nu_l \lambda} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_{k-1}} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l} \otimes v^{*\lambda} \\ &:= g_{\lambda \mu_k} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l} \otimes v^{*\lambda}. \end{aligned}$$

É comum dizer que as componentes de  $\tilde{T}$  foram obtidas das de  $T$  pela operação de “abaixamento de índices”

$$\tilde{T}^{\mu_1 \dots \mu_{k-1}}_{\nu_1 \dots \nu_l \lambda} = g_{\lambda \mu_k} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}.$$

Mais precisamente, a lógica neste exemplo é a seguinte: sejam

$$u_{(r)} = u_{(r)}^\alpha v_\alpha, \quad r = 1, \dots, l, \quad (2.21)$$

$$\omega^{(s)} = \omega_\alpha^{(s)} v^{*\alpha}, \quad s = 1, \dots, k, \quad (2.22)$$

$$W = W^\sigma v_\sigma. \quad (2.23)$$

Então, a operação de levantamento e abaixamento de índices leva o tensor  $T$  ao tensor  $\tilde{T}$  definido da seguinte maneira

$$\tilde{T}(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k-1)}, u_{(1)}, \dots, u_{(l)}, W) = T(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k-1)}, \Phi_W, u_{(1)}, \dots, u_{(l)}) \quad (2.24)$$

Para ver isso, basta observar que a equação acima equivale a escrever

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k-1)}, u_{(1)}, \dots, u_{(l)}, W) &= T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(\omega^{(1)}(v_{\mu_1})) \dots (\omega^{(k-1)}(v_{\mu_{k-1}})) \\ &\quad \times (\Phi_W(v_{\mu_k}))(v^{*\nu_1}(u_{(1)}))(v^{*\nu_l}(u_{(l)})) \\ &= T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \left[ \omega_{\mu_1}^{(1)} \dots (\Phi_W(v_{\mu_k})) u_{(1)}^{\nu_1} \dots u_{(l)}^{\nu_l} \right] \\ &= T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \left[ \omega_{\mu_1}^{(1)} \dots ((g_{\lambda \tau} W^\tau v^{*\lambda})(v_{\mu_k})) u_{(1)}^{\nu_1} \dots u_{(l)}^{\nu_l} \right] \\ &= T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \left[ \omega_{\mu_1}^{(1)} \dots g_{\mu_k \tau} W^\tau u_{(1)}^{\nu_1} \dots u_{(l)}^{\nu_l} \right] \\ &= (g_{\mu_k \lambda} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}) \left[ \omega_{\mu_1}^{(1)} \dots u_{(1)}^{\nu_1} \dots u_{(l)}^{\nu_l} W^\lambda \right]. \end{aligned}$$

Daí, visto que

$$\tilde{T}(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k-1)}, u_{(1)}, \dots, u_{(l)}, W) = \tilde{T}^{\mu_1 \dots \mu_{k-1}}_{\nu_1 \dots \nu_l \lambda} \left[ \omega_{\mu_1}^{(1)} \dots u_{(1)}^{\nu_1} \dots u_{(l)}^{\nu_l} W^\lambda \right],$$

vê-se que de fato a igualdade tensorial em (2.24) equivale a relação

$$\tilde{T}^{\mu_1 \dots \mu_{k-1}}_{\nu_1 \dots \nu_l \lambda} = g_{\mu_k \lambda} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}.$$

**Proposição 2.7.4.** *A aplicação*

$$\Theta : \mathcal{T}_{k,l}(V) \longrightarrow \mathcal{T}_{k-1,l+1}(V)$$

que associa a cada  $T \in \mathcal{T}_{k,l}(V)$  o tensor  $\Theta(T) = \tilde{T}$  acima é um isomorfismo entre  $\mathcal{T}_{k,l}(V)$  e  $\mathcal{T}_{k-1,l+1}(V)$ .

*Demonstração.* Verifica-se facilmente que esta aplicação é um isomorfismo.  $\square$

Podemos definir, de maneira análoga, uma operação de “levantamento” de índices para tensores em geral. Esta leva um tensor do tipo  $(k, l)$  em um tensor do tipo  $(k + 1, l - 1)$  e é um isomorfismo entre  $\mathcal{T}_{k,l}(V)$  e  $\mathcal{T}_{k+1,l-1}(V)$ . Para isto, utilizamos a operação de levantamento de índices para vetores descrita anteriormente.

## 2.8 Curvas parametrizadas e Linhas-Mundo

É essencial estendermos algumas noções sobre curvas parametrizadas em espaços euclidianos para variedades. Na sequência  $M$  ainda denota um espaço-tempo.

**Definição 2.8.1.** *Uma curva parametrizada em  $M$  é uma aplicação contínua*

$$\alpha : I = [0, 1] \longrightarrow M$$

$$t \mapsto \alpha(t) \in M.$$

Dizemos que  $\alpha(0), \alpha(1) \in M$  são os pontos inicial e final da curva  $\alpha$  respectivamente, e que  $t$  é o parâmetro.

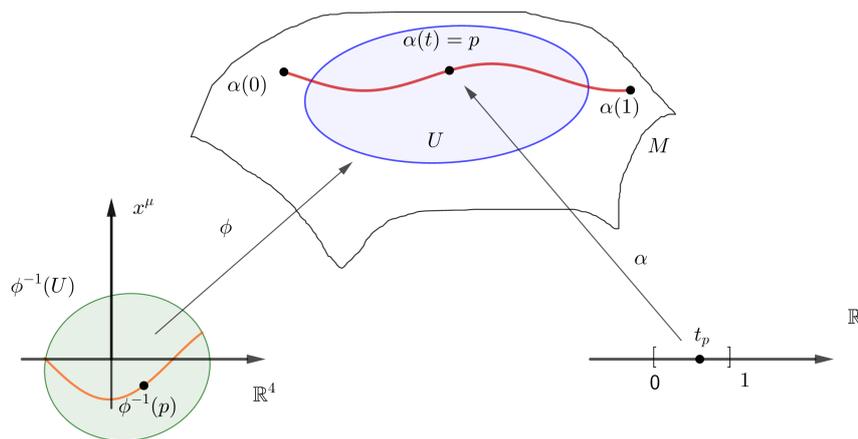


Figura 2.3: Representação da curva  $\alpha$  em  $M$ .

Seja  $(U, x^\mu)$  um referencial local em  $M$  determinado pelo homeomorfismo  $\phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow M$  e suponha que interessa analisar uma componente conexa da imagem

de  $\alpha(I)$  contida em  $U$ , digamos, associada à variação de  $t$  em um subintervalo aberto  $J$  contido em  $I$ . Então, identificando  $(x^0, \dots, x^3)$  como nas seções anteriores com o ponto  $\phi(x^0, \dots, x^3)$  de  $U$ , podemos escrever equações paramétricas para esta componente de interesse de  $\alpha(I) \cap U$  na forma

$$x^\mu = x^\mu(t), \quad t \in J, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.25)$$

Para isso, basta que as equações acima sejam da forma  $\alpha(t) = \phi(x^0(t), \dots, x^3(t))$ ,  $t \in J$ . Frequentemente, estaremos interessados em considerar curvas paramétricas com imagem inteiramente contida numa região aberta  $U \subset M$  coberta por um referencial local  $x^\mu$ . Tais curvas serão definidas por equações paramétricas como acima, ficando subentendido que se o referencial  $x^\mu$  for definido pelo homeomorfismo  $\phi$ , então a imagem da curva em  $M$  propriamente dita é  $\{\phi(x^0, \dots, x^3); t \in I\}$ . Neste caso, a curva paramétrica será dita “suave” se  $x^\mu(t)$  for suave para todo  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , e  $t \in \text{int}(I)$ .

Na sequência,  $U \subset M$  é um aberto coberto pelo referencial  $x^\mu$  definido por um homeomorfismo

$$\phi : V \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow U$$

e  $x^\mu = x^\mu(t)$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , denota uma curva paramétrica suave em  $U$ .

Se  $C$  denota a imagem em  $M$  descrita pelas equações  $x^\mu = x^\mu(t)$ , ou seja,

$$C = \{p \in M; p = \phi(x^0(t), \dots, x^3(t)), \quad t \in I \subset \mathbb{R}\},$$

então nos referiremos à esta curva paramétrica também como  $C$ . Escrevemos

$$C : x^\mu = x^\mu(t), \quad t \in I.$$

**Proposição 2.8.1.** *Seja  $(V; \tilde{x}^\mu)$  outro referencial local de  $M$  tal que  $C \subset U \cap V$ . Então, relativamente ao referencial  $\tilde{x}^\mu$ , a curva paramétrica  $x^\mu = x^\mu(t)$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , é dada por*

$$\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(t) = \tilde{x}^\mu(x^0(t), \dots, x^3(t)), \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

**Observação 2.8.1.** *Está última proposição é uma afirmação evidente, mas à qual convém chamar a atenção! Ela manifesta o fato de que uma curva paramétrica é uma aplicação: como tal ela é determinada por 3 elementos—seu domínio, seu contradomínio e a sua lei de associação, isto é, uma indicação de qual é o único elemento no conjunto imagem associado a cada elemento do domínio. Assim, digamos que o referencial  $\tilde{x}^\mu$  seja determinado pelo homeomorfismo  $\psi$ . Então, a representação de  $C$  relativamente a este referencial deve ser a aplicação que leva um dado  $t$  no intervalo de definição  $I$  de  $C$  no mesmo ponto  $\phi((x^0, \dots, x^3))$  de  $M$ . Logicamente, a associação deve ser*

$$t \in I \mapsto \tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(t) = \tilde{x}^\mu(x^0(t), \dots, x^3(t)), \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

visto que a função de transição  $\tilde{x}^\mu(x^0, \dots, x^3)$  entre os referenciais é dada por  $(\psi^{-1} \circ \phi)$ .

Esta proposição nos permite formular a seguinte definição.

**Definição 2.8.2.** *O “vetor tangente” à curva paramétrica  $C$  em  $t = t_p \in \text{int}(I)$  é definido por*

$$T^\mu(t_p) = \left( \frac{dx^\mu}{dt} \Big|_{t=t_p} \right) \partial_\mu \Big|_{(x^0(t_p), \dots, x^3(t_p))}.$$

Precisamos verificar que se  $C$  é representada relativamente a outro referencial  $\tilde{x}^\mu$  conforme a última proposição, o vetor tangente a  $C$  em  $t = t_p$  será dado por

$$\left( \frac{d\tilde{x}^\mu}{dt} \Big|_{t=t_p} \right) \tilde{\partial}_\mu \Big|_{(\tilde{x}^0(t_p), \dots, \tilde{x}^3(t_p))}.$$

Com efeito, sendo  $C$  dada neste novo referencial por  $\tilde{x}^\mu(t) = \tilde{x}^\mu(x^0(t), \dots, x^3(t))$ , vem

$$\frac{d\tilde{x}^\mu}{dt} \Big|_{t=t_p} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \Big|_{(x^0(t_p), \dots, x^3(t_p))} \frac{dx^\alpha}{dt} \Big|_{t=t_p}.$$

Como

$$\tilde{\partial}_\mu(\tilde{x}^0(t_p), \dots, \tilde{x}^3(t_p)) = \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu} \Big|_{(\tilde{x}^0(t_p), \dots, \tilde{x}^3(t_p))} \partial_\beta \Big|_{(x^0(t_p), \dots, x^3(t_p))},$$

segue que

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\tilde{x}^\mu}{dt} \Big|_{t=t_p} \right) \tilde{\partial}_\mu \Big|_{(\tilde{x}^0(t_p), \dots, \tilde{x}^3(t_p))} &= \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \Big|_{(x^0(t_p), \dots, x^3(t_p))} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu} \Big|_{(\tilde{x}^0(t_p), \dots, \tilde{x}^3(t_p))} \frac{dx^\alpha}{dt} \Big|_{t=t_p} \partial_\beta \Big|_{(x^0(t_p), \dots, x^3(t_p))} \\ &= \delta_\alpha^\beta \frac{dx^\alpha}{dt} \Big|_{t=t_p} \partial_\beta \Big|_{(x^0(t_p), \dots, x^3(t_p))} = \frac{dx^\beta}{dt} \Big|_{t=t_p} \partial_\beta \Big|_{(x^0(t_p), \dots, x^3(t_p))}. \end{aligned}$$

Como desejado.

No que se segue, manteremos as notações da seção anterior.

**Definição 2.8.3.** *Seja  $p \in M$  um evento e  $v$  um vetor tangente em  $p$ ,  $v \in T_p M$ . Dizemos que:*

1.  $v$  é do “tipo tempo” ou “negativo” se  $g(p)(v, v) < 0$ .
2.  $v$  é do “tipo espaço” ou “positivo” se  $g(p)(v, v) > 0$ .
3.  $v$  é do “tipo luz” ou “nulo” se  $g(p)(v, v) = 0$ .

Suponha que  $p$  se situa no overlap de dois referenciais locais  $x^\mu, \tilde{x}^\mu$ . Relativamente ao referencial  $x^\mu$ , a quantidade  $g(p)(v, v)$  se escreve como

$$g_{\mu\nu}(x_p^0, \dots, x_p^3) v^\mu v^\nu, \quad (2.26)$$

onde os  $g_{\mu\nu}$  são as componentes do tensor métrico,  $v^\mu$  são as componente do vetor  $v$  e  $(x_p^0, \dots, x_p^3)$  são as coordenadas de  $p$  neste referencial. Daí, relativamente ao referencial  $\tilde{x}^\mu$ , teremos

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x_p^0, \dots, x_p^3) v^\mu v^\nu &= \tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{v}^\theta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\theta} \tilde{v}^\sigma \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\sigma} \\ &= \tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\theta} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\sigma} \tilde{v}^\theta \tilde{v}^\sigma \\ &= \tilde{g}_{\alpha\beta} \delta_\theta^\alpha \delta_\sigma^\beta \tilde{v}^\theta \tilde{v}^\sigma = \tilde{g}_{\theta\sigma} \tilde{v}^\theta \tilde{v}^\sigma. \end{aligned}$$

Vemos que: a quantidade  $g(p)(v, v)$ , e portanto a classificação de um vetor tangente em  $p$  como negativo, positivo ou nulo, não depende da escolha de um referencial local.

**Definição 2.8.4.** Diremos que a curva paramétrica  $C$  é uma curva do tipo tempo se todos os seus vetores tangentes são vetores do tipo tempo. Isto é, mantendo as notações da presente seção, se

$$g_{\mu\nu}(x^0(t), \dots, x^3(t)) \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} < 0 \quad \forall t \in \text{int}(I).$$

Para aplicações na TGR, curvas do tipo tempo paramétricas  $C$  representam parametrizações da “história da partícula”, para partículas massivas no espaço-tempo. Neste contexto,  $C$  será dita a “linha-mundo” da partícula.

**Definição 2.8.5.** Suponha que  $C$  é uma curva paramétrica do tipo tempo e fixe um evento  $O = (x^0(t_0), \dots, x^3(t_0))$ . Definimos o “tempo próprio” ao longo de  $C$  decorrido entre os eventos  $O$  e  $(x^0(t), \dots, x^3(t))$  como sendo o número

$$\tau(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{-g_{\mu\nu}(x^0(u), \dots, x^3(u)) \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du}} du.$$

No que se segue, convencionaremos pega  $t_0 = 0 \in I$ .

Pelo que acabamos de discutir  $\tau(t)$  não depende da escolha de referencial local utilizado para representar a curva paramétrica  $C$ . O significado físico de  $\tau(t)$  será discutido em breve.

Claramente, como  $\frac{d\tau}{dt} > 0 \quad \forall t \in \text{int}(I)$ , temos que  $\tau(t)$  é uma função crescente de  $t$  para  $t$  variando no intervalo de definição de  $C$ . Assim, podemos considerar a função inversa  $t = t(\tau)$  definida no conjunto imagem  $H$  de  $\tau(t)$ , e analisar a reparametrização de  $C$  pelo tempo próprio, definida para  $\tau \in H$  por

$$x^\mu(\tau) := x^\mu(t(\tau)), \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Isto é análogo à reparametrização pelo comprimento de arco de uma curva paramétrica regular na Geometria Diferencial básica.

**Proposição 2.8.2.**  $C$  está parametrizada pelo tempo próprio se, e somente se,

$$g_{\mu\nu} T^\mu T^\nu = -1 \quad \forall t \in \text{int}(I). \quad (2.27)$$

*Demonstração.* De fato, se a expressão acima vale, temos

$$\tau(t) = \int_0^t du = t,$$

de forma que  $t = \tau$  e o próprio parâmetro  $t$  utilizado na parametrização de  $C$  já fornece o tempo próprio decorrido entre os eventos  $O$  e  $x^\mu(t)$ .

Reciprocamente, se o próprio parâmetro  $t$  utilizado na parametrização de  $C$  já fornece o tempo próprio decorrido entre os eventos  $O$  e  $x^\mu(t)$  teremos

$$\int_0^t \sqrt{-g_{\mu\nu} T^\mu T^\nu} du = t \Rightarrow \sqrt{-g_{\mu\nu} T^\mu T^\nu} = 1 \Rightarrow g_{\mu\nu} T^\mu T^\nu = -1,$$

como afirmamos. □

**Interpretação de  $\tau(t)$ :** em geral, trabalha-se em TGR com linhas-mundo de partículas massivas parametrizadas pelo tempo próprio  $\tau$ ,

$$C : x^\mu = x^\mu(\tau), \tau \geq 0.$$

Neste caso, costuma-se denotar o vetor tangente a  $C$  em  $\tau > 0$  por

$$u^\mu(\tau) \partial_\mu \Big|_{(x^0(\tau), \dots, x^3(\tau))} := \frac{dx^\mu}{d\tau} \partial_\mu \Big|_{(x^0(\tau), \dots, x^3(\tau))},$$

e chamá-lo de “4-velocidade” da partícula em  $\tau$ .

Conforme vimos, vale

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1 \quad \forall \tau \quad (2.28)$$

Considere um evento  $A$ , digamos  $(x^0(\tau_A), \dots, x^3(\tau_A))$ , na linha-mundo  $C$ . Assuma sem perda de generalidade  $(x^0(\tau_A), \dots, x^3(\tau_A)) = 0$ . Sabemos que existe um referencial local  $\tilde{x}^\mu$  de  $M$  definido em torno de  $A$  relativo ao qual as coordenadas de  $A$  ainda são  $(0, \dots, 0)$ , e as componentes  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  do tensor métrico satisfazem  $\tilde{g}_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + O(2)$ , sendo que exatamente em  $A$  se tem

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \Big|_A = \eta_{\mu\nu}.$$

Se

$$C : \tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(\tau), \tau \geq 0$$

neste referencial e  $\tilde{u}^\mu = \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau}$  são as componentes da 4-velocidades neste referencial, já que (2.28) não depende do referencial teremos

$$\eta_{\mu\nu} \tilde{u}^\mu \Big|_{\tau_A} u^\nu \Big|_{\tau_A} = \eta_{\mu\nu} \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau} \frac{d\tilde{x}^\nu}{d\tau} = -1.$$

Daí,  $\Delta\tau > 0$  é pequeno e se  $\Delta\tilde{x}^\mu := \tilde{x}^\mu(\tau_A + \Delta\tau) - \tilde{x}^\mu(\tau_A)$ , podemos usar (2.28) para escrever em boa aproximação

$$\eta_{\mu\nu} \Delta\tilde{x}^\mu \Delta\tilde{x}^\nu \approx -(\Delta\tau)^2.$$

E com isso, podemos usar a Relatividade Especial para interpretar  $\Delta\tau$ : é o intervalo de tempo decorrido entre os eventos  $A$  e o evento próximo  $\tilde{x}^\mu(\tau_A + \Delta\tau)$  em um referencial no qual estes dois eventos ocorrem na mesma localização espacial. Ou seja: o tempo próprio  $\tau$  ao longo de  $C$  é o tempo medido por um relógio que viaja com a partícula, isto é, o tempo medido no referencial instantâneo de repouso da partícula.

# Capítulo 3

## Ferramentas matemáticas II

No presente capítulo vamos estabelecer uma noção de diferenciação de campos de vetores em variedades.

### 3.1 Derivada Covariante

A Diferenciação de campos de vetores em um espaço-tempo  $M$  não pode ser realizada simplesmente se reproduzindo em um referencial local o que é feito em espaços euclidianos. De fato, sejam  $x^\mu$  e  $\tilde{x}^\mu$  dois referenciais cobrindo o mesmo aberto  $U \subset M$ , onde  $U$  representa o overlap dos referenciais  $(V; x^\mu)$  e  $(\tilde{V}; \tilde{x}^\mu)$ . Sejam  $X$  e  $v$  campos de vetores em  $U$  definidos relativamente ao referencial  $x^\mu$  por

$$X = X^\mu \partial_\mu = X^\mu(x^0, \dots, x^3) \partial_\mu|_{(x^0, \dots, x^3)}$$

e

$$v = v^\mu \partial_\mu = v^\mu(x^0, \dots, x^3) \partial_\mu|_{(x^0, \dots, x^3)}.$$

Lembre que  $\partial_\mu|_{(x^0, \dots, x^3)}$  age em funções  $f \in C^\infty(M)$ , como

$$\partial|_{(x^0, \dots, x^3)} \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x^0, \dots, x^3),$$

onde  $f(x^0, \dots, x^3)$  é a representação local de  $f$  associada ao referencial local  $(U, x^\mu)$ . Então a derivada usual do campo  $X$  na direção do campo  $v$  que reproduziria a do Cálculo usual em espaços euclidianos no referencial local  $(U, x^\mu)$  seria:

$$\nabla_v X = \sum_\lambda (D_v X^\lambda) \partial_\lambda, \quad (3.1)$$

onde

$$D_v X^\lambda = \sum_\mu v^\mu \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\mu}.$$

Ou seja seria  $\nabla_v X = \sum_\lambda \sum_\mu v^\mu \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\mu} \partial_\lambda$

Entretanto, vamos reescrever a expressão acima transformando para o referencial  $\tilde{x}^\mu$  em  $U$ . Temos:

$$v^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \tilde{v}^\alpha; \quad X^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\beta} \tilde{X}^\beta$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\mu} &= \sum_\beta \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\beta} \right) \right] \tilde{X}^\beta + \sum_\beta \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\beta} \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tilde{X}^\beta \right], \\ \frac{\partial \tilde{X}^\beta}{\partial x^\mu} &= \sum_\theta \frac{\partial \tilde{X}^\beta}{\partial \tilde{x}^\theta} \frac{\partial \tilde{x}^\theta}{\partial x^\mu}; \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\beta} = \sum_\omega \left( \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\omega \partial \tilde{x}^\beta} \right) \left( \frac{\partial \tilde{x}^\omega}{\partial x^\mu} \right).\end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\mu} = \sum_\beta \sum_\omega \tilde{X}^\beta \left( \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\omega \partial \tilde{x}^\beta} \right) \left( \frac{\partial \tilde{x}^\omega}{\partial x^\mu} \right) + \sum_\beta \sum_\theta \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\beta} \frac{\partial \tilde{X}^\beta}{\partial \tilde{x}^\theta} \frac{\partial \tilde{x}^\theta}{\partial x^\mu}.$$

Levando na equação (3.1) ficamos com:

$$\begin{aligned}\nabla_v X &= \frac{\partial \tilde{X}^\beta}{\partial \tilde{x}^\theta} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\beta} \frac{\partial \tilde{x}^\theta}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \tilde{v}^\alpha \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^\lambda} \tilde{\partial}_\gamma + \tilde{X}^\beta \left( \frac{\partial \tilde{x}^\theta}{\partial x^\mu} \right) \left( \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\theta \partial \tilde{x}^\beta} \right) \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \tilde{v}^\alpha \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^\lambda} \tilde{\partial}_\gamma = \\ &= \frac{\partial \tilde{X}^\beta}{\partial \tilde{x}^\theta} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\beta} \frac{\partial \tilde{x}^\theta}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \tilde{v}^\alpha \tilde{\partial}_\gamma + \tilde{X}^\beta \left( \frac{\partial \tilde{x}^\theta}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \tilde{v}^\alpha \left( \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\theta \partial \tilde{x}^\beta} \right) \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^\lambda} \tilde{\partial}_\gamma = \\ &= \tilde{v}^\alpha \frac{\partial \tilde{X}^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha} \tilde{\partial}_\gamma + \tilde{v}^\alpha \tilde{X}^\beta \left( \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\alpha \partial \tilde{x}^\beta} \right) \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^\lambda} \tilde{\partial}_\gamma.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Esta seria a expressão para  $\nabla_v X$  no referencial  $\tilde{x}^\mu$  sob a mudança de coordenadas  $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^0, \dots, x^3)$ . Mas veja que se escrevemos  $\nabla_v X$  no referencial  $\tilde{x}^\mu$  como na definição em (3.1) obteremos:

$$\tilde{v}^\mu \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial \tilde{x}^\mu} \tilde{\partial}_\lambda.$$

Isto corresponderia a somente a primeira parcela em (3.2)! Vemos que  $\nabla_v X$  definida por (3.1) só será bem comportada sob mudanças de referencial no caso em que  $\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\alpha \partial \tilde{x}^\beta} = 0 \quad \forall \alpha, \beta$ , o que em geral não será válido. Quaisquer funções de transição não-lineares quebrariam essa propriedade.

**Exemplo 3.1.1.** *Pra funções suaves  $f \in C^\infty(M)$ , a reprodução em um referencial local da noção de derivada direcional em espaços euclidianos é bem comportada sob mudanças de referencial.*

Vejam: se  $f(x^0, \dots, x^3)$  é a representação local de  $f$  associada ao referencial local  $x^\mu$  cobrindo o aberto  $U$  e se  $v$  é um campo em  $U$  definido relativamente ao referencial  $x^\mu$  por

$$v = v^\mu \partial_\mu = v^\mu(x^0, \dots, x^3) \partial_\mu \Big|_{(x^0, \dots, x^3)},$$

defina

$$\nabla_v f = v^\mu(x^0, \dots, x^3) \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x^0, \dots, x^3).\quad (3.3)$$

Esta seria a noção usual do Cálculo em espaços euclidianos aplicada a  $(U, x^\mu)$ . Agora, seja  $\tilde{x}^\mu$  outro referencial cobrindo  $U$ , relativamente ao qual se tenha

$$v^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \tilde{\partial}_\alpha \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x^0, \dots, x^3) = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^\lambda}(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\mu}(x^0, \dots, x^3)$$

(uma vez que  $f(x^0, \dots, x^3) = f(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)$ ). Então, levando isto em (3.3), obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla_v f &= v^\mu(x^0, \dots, x^3) \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \tilde{v}^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha}(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\mu}(x^0, \dots, x^3) \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^\lambda}(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3) = \\ &= \tilde{v}^\alpha \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^\alpha} \delta^\lambda_\alpha = \tilde{v}^\alpha \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^\alpha}, \end{aligned}$$

sendo esta exatamente a expressão para  $\nabla_v f$  no referencial  $\tilde{x}^\mu$  que se obteria aplicando a ele a definição (3.3). Portanto esta noção de derivada é bem comportada sob mudança de referenciais, no caso em que consideramos funções  $f \in C^\infty(M)$ .

## 3.2 A definição de Derivada Covariante

Vimos que se quisermos uma noção de derivada de campos ao longo de campos que seja invariante sob mudança de referencias não podemos simplesmente “copiar” a noção usual do Cálculo em espaços euclidianos em referenciais locais. Devemos introduzir tal noção de derivada como uma estrutura adicional na variedade  $M$ .

**Definição 3.2.1.** *Uma “derivada covariante” (ou “conexão”)  $\nabla$  em  $M$  é uma operação que atua em dois campos de vetores suaves  $X$  e  $v$  em  $M$ , tendo como resultado o campo de vetores suave  $\nabla_v X$  em  $M$  (dito a derivada covariante de  $X$  ao longo de  $v$  segundo a conexão  $\nabla$ ), tal que as seguintes propriedades são válidas:*

1. *Se  $v_1$  e  $v_2$  são dois campos suaves em  $M$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então*

$$\nabla_{(v_1 + \lambda v_2)} X = \nabla_{v_1} X + \lambda \nabla_{v_2} X$$

2. *Se  $X_1, X_2$  e  $v$  são campos suaves em  $M$ , então*

$$\nabla_v (X_1 + X_2) = \nabla_v X_1 + \nabla_v X_2.$$

3. *(Regra de Leibniz) Seja  $f \in C^\infty(M)$  e  $X, v$  campos em  $M$ , então*

$$\nabla_v (fX) = f(\nabla_v X) + (\nabla_v f)X.$$

Na definição acima subentende-se a definição dada para  $\nabla_v f$  conforme o exemplo anterior, que vimos funcionar bem sob mudanças de referencial local. Isto é:

**Definição 3.2.2.** *Seja  $f \in C^\infty(M)$  e  $v$  um campo suave em  $M$ . Então definimos  $\nabla_v f$  como sendo a função em  $C^\infty(M)$  cuja a representação no referencial  $(U; x^\mu)$  cobrindo a região aberta  $U$  é*

$$\nabla_v f = v^\mu(x^0, \dots, x^3) \frac{\partial f}{\partial x^\mu}.$$

**Proposição 3.2.1.**  *$\nabla_v f$  está bem-definida.*

*Demonstração.* O valor assumido por  $\nabla_v f$  em um ponto  $p \in M$  está fortemente atrelado nesta definição à escolha de um referencial  $(U, x^\mu)$ ,  $p \in U$ . Precisamos verificar que o valor de  $\nabla_v f$  em um ponto de  $M$  está unicamente determinado e que, de fato,  $\nabla_v f$  é suave. Mas a independência da escolha do referencial já foi verificada no ultimo exemplo. Além disso, a expressão de  $\nabla_v f$  torna óbvia a sua suavidade.  $\square$

**Definição 3.2.3.** Dada uma conexão  $\nabla \in M$  e um referencial local  $x^\mu$  cobrindo um aberto  $U \subset M$ , definimos os “coeficientes de conexão” para  $\nabla$  associados a  $(U, x^\mu)$  como sendo as funções suaves  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x^0, \dots, x^3)$ ,  $(x^0, \dots, x^3) \in U$  definidas por:

$$\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda.$$

É importante entendermos como a derivação covariante associada a uma conexão  $\nabla$  fica determinada relativamente a um referencial local pelos coeficientes de conexão associados. Para isso, seja  $(U, x^\mu)$  um referencial local como na definição anterior, e sejam  $X$  e  $v$  campos de vetores em  $M$  dados em  $U \subset M$  por

$$X = X^\mu \partial_\mu; \quad v = v^\mu \partial_\mu.$$

Então, podemos escrever o campo  $\nabla_v X$  (utilizando as propriedades de  $\nabla$  na definição) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla_v X &= v^\nu \nabla_{\partial_\nu} X = v^\nu \nabla_{\partial_\nu} (X^\mu \partial_\mu) = v^\nu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\nu + v^\nu X^\mu (\nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu) = \\ &= \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu \partial_\nu + v^\nu X^\mu (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) = \left( \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\nu} v^\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda X^\mu v^\nu \right) \partial_\lambda. \end{aligned}$$

Ou seja, em termos dos coeficientes de conexão a derivação covariante associada a  $\nabla$  é dada localmente pela fórmula

$$\nabla_v X = \left( \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\nu} v^\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda X^\mu v^\nu \right) \partial_\lambda. \quad (3.4)$$

Logo a representação do campo  $\nabla_v X$  relativamente ao referencial  $x^\mu$  é dada por

$$\begin{aligned} (\nabla_v X)(x^0, \dots, x^3) &= \\ &= \left( \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\nu} (x^0, \dots, x^3) v^\nu (x^0, \dots, x^3) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda (x^0, \dots, x^3) X^\mu (x^0, \dots, x^3) v^\nu (x^0, \dots, x^3) \right) \partial_\lambda \Big|_{(x^0, \dots, x^3)}. \end{aligned}$$

Um caso especial de (3.4) é a derivada de um campo na direções coordenadas, isto é, quando  $v = \partial_\mu$  em (3.4) para algum  $\mu$  fixo,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ .

**Definição 3.2.4.** Dada uma conexão  $\nabla$  em  $M$ , um referencial local  $x^\mu$  cobrindo um aberto  $U \subset M$ , e um campo  $X$  dado relativamente a esse referencial por  $X = X^\nu \partial_\nu$ , definimos a “Derivada Covariante” de  $X$  na direção  $\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  como sendo o campo vetorial

$$\nabla_\mu X = \nabla_{\partial_\mu} X = \left( \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda X^\nu \right) \partial_\lambda$$

Assim, podemos escrever (3.1) como

$$\nabla_v X = v^\mu \nabla_\mu X.$$

### 3.3 Propriedades de transformação dos coeficientes de conexão

Será importante na nossa discussão subsequente ter disponível duas expressões para a relação entre os coeficientes de conexão relativos a dois referenciais locais  $x^\mu$  e  $\tilde{x}^\mu$  cobrindo uma região aberta  $U \subset M$ .

**Primeira expressão:** começamos com a definição dos coeficientes de conexão para o referencial  $\tilde{x}^\mu$ ,

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\partial}_\nu = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$$

onde  $\tilde{\nabla}_\mu = \tilde{\nabla}_{\tilde{\partial}_\mu}$ . Ora, escrevendo  $\tilde{\partial}_\nu = \frac{\partial x^\sigma}{\tilde{x}^\nu} \partial_\sigma$ ;  $\tilde{\partial}_\lambda = \frac{\partial x^\rho}{\tilde{x}^\lambda} \partial_\rho$ , obtemos:

$$\tilde{\nabla} \left( \frac{\partial x^\sigma}{\tilde{x}^\nu} \partial_\sigma \right) = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial x^\rho}{\tilde{x}^\lambda} \partial_\rho,$$

e pelas propriedades da derivada covariante vem

$$\left( \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu} \right) \partial_\sigma + \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} \left( \nabla_{\tilde{\partial}_\mu} \partial_\sigma \right) = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\lambda} \partial_\rho.$$

Agora, aplicando à esta última

$$\nabla_{\tilde{\partial}_\mu} \partial_\sigma = \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\mu} \nabla_{\partial_\tau} \partial_\sigma = \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\mu} \Gamma_{\tau\sigma}^\theta \partial_\theta,$$

vem

$$\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu} \partial_\rho + \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\mu} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho \partial_\rho = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\lambda} \partial_\rho,$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu} + \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\mu} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\lambda},$$

isto valendo no caso  $\forall \rho = 0, 1, 2, 3$ .

Dai:

$$\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\rho} + \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\mu} \Gamma_{\sigma\tau}^\rho \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\rho} = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\rho}.$$

Como  $\sum_\rho \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\rho} = \delta_\lambda^\alpha$  temos :

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\rho} + \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\nu} \Gamma_{\sigma\tau}^\rho \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\rho} \quad (3.5)$$

**Segunda expressão:** existe uma outra expressão equivalente a (3.5) que costuma ser útil. Para obtermos ela, começamos considerando a relação  $\sum_\mu \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^\beta \quad \forall \alpha, \beta$ . Como o lado direito desta é constante, fixando  $\rho = 0, 1, 2, 3$  e derivando em relação a  $\tilde{x}^\rho$  temos:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\rho} \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \right) = 0.$$

Ora, o lado esquerdo da última pode ser reescrito de forma a ficarmos com

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\rho} \left( \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} + \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tilde{x}^\rho \partial \tilde{x}^\alpha} = 0.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\rho} \left( \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\mu} \right) = \frac{\partial x^\omega}{\partial \tilde{x}^\rho} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\beta}{\partial x^\omega \partial x^\mu},$$

vem:

$$\frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tilde{x}^\rho \partial \tilde{x}^\alpha} = - \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\omega}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\beta}{\partial x^\omega \partial x^\mu}.$$

Fazendo uma reindexação para que o termo no lado direito de (3.5) tenha os mesmos índices do lado esquerdo da última, reescrevemos ela como:

$$\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\beta} = - \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\beta} \frac{\partial \tilde{x}^\omega}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\omega \partial x^\rho}.$$

Posto isto, a expressão desejada para transformação dos coeficientes de conexão é obtida substituindo o lado esquerdo da última em (3.5). A expressão desejada é a seguinte:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\nu} \Gamma_{\sigma\tau}^\rho \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\rho} - \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\beta} \frac{\partial \tilde{x}^\omega}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\omega \partial x^\rho}. \quad (3.6)$$

Para concluir esta seção vamos mostrar que de fato a noção de uma conexão  $\nabla$  em  $M$  resolve o problema de tentarmos definir “genuinamente” a noção de derivada de um campo de vetores na direção de outro campo. Mais precisamente mostraremos o seguinte resultado.

**Proposição 3.3.1.** *Sejam  $x^\mu$  e  $\tilde{x}^\mu$  dois referenciais locais cobrindo a região aberta  $U \subset M$  e sejam  $F, v$  dois campos vetoriais tais que relativamente aos referenciais  $x^\mu$ ,  $\tilde{x}^\mu$  se tenha*

$$F = F^\lambda \partial_\lambda; \quad F = \tilde{F}^\mu \partial_\mu$$

e

$$v = v^\mu v_\mu; \quad v = \tilde{v}^\mu v_\mu.$$

Então, a derivada covariante de  $F$  sobre  $v$  em  $U$  pode ser determinada pela expressão (3.4) tanto relativamente ao referencial  $x^\mu$  quanto a  $\tilde{x}^\mu$ . Isto é, vale

$$\nabla_v X = \left( \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\nu} v^\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda X^\mu v^\nu \right) \partial_\lambda = \left( \frac{\partial \tilde{X}^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} v^\nu + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \tilde{X}^\mu \tilde{v}^\nu \right) \tilde{\partial}_\lambda$$

em  $U$ , onde os  $\Gamma, \tilde{\Gamma}$  denotam os coeficientes de conexão para  $\nabla$  em  $U$  associados aos referenciais  $x^\mu$  e  $\tilde{x}^\mu$ , respectivamente.

*Demonstração.* Para demonstrar essa proposição podemos nos restringir a considerar a derivada covariante na direção  $x^\mu$  para algum  $\mu$  pré-fixado, mostrando que:

$$\nabla_\mu (F^\omega \partial_\omega) = \frac{\partial \tilde{x}^\theta}{\partial x^\mu} \nabla_{\tilde{\partial}_\theta} (\tilde{F}^\omega \tilde{\partial}_\omega).$$

Para provar que ambas as expressões tem o mesmo valor, escrevamos

$$\left( \frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu F^\lambda \right) \partial_\nu \quad (3.7)$$

relativamente ao referencial  $x^\mu$ , e mudemos para  $\tilde{x}^\mu$  usando as transformações já conhecidas:

$$F^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \tilde{F}^\alpha; \quad F^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\eta} \tilde{F}^\eta,$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} &= \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial \tilde{x}^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial \tilde{x}^{\lambda}} \tilde{\Gamma}_{\sigma\tau}^{\rho} - \frac{\partial \tilde{x}^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \tilde{x}^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\sigma} \partial \tilde{x}^{\tau}}, \\
 \frac{\partial F^{\nu}}{\partial x^{\mu}} &= \tilde{F}^{\beta} \left( \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\theta} \partial \tilde{x}^{\beta}} \right) \left( \frac{\partial \tilde{x}^{\theta}}{\partial x^{\mu}} \right) + \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\beta}} \frac{\partial \tilde{F}^{\beta}}{\partial \tilde{x}^{\theta}} \frac{\partial \tilde{x}^{\theta}}{\partial x^{\mu}}, \\
 \partial_{\nu} &= \frac{\partial \tilde{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \tilde{\partial}_{\gamma}.
 \end{aligned}$$

Levando tudo isto em (3.7) obtemos

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mu}(F^{\omega} \partial_{\omega}) &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\beta}} \frac{\partial \tilde{F}^{\beta}}{\partial \tilde{x}^{\theta}} \frac{\partial \tilde{x}^{\theta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \tilde{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \tilde{\partial}_{\gamma} + \tilde{F}^{\beta} \left( \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\theta} \partial \tilde{x}^{\beta}} \right) \left( \frac{\partial \tilde{x}^{\theta}}{\partial x^{\mu}} \right) \frac{\partial \tilde{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \tilde{\partial}_{\gamma} + \\
 &+ \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial \tilde{x}^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial \tilde{x}^{\lambda}} \tilde{\Gamma}_{\sigma\tau}^{\rho} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tilde{x}^{\eta}} \tilde{F}^{\eta} \frac{\partial \tilde{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \tilde{\partial}_{\gamma} - \frac{\partial \tilde{x}^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \tilde{x}^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\sigma} \partial \tilde{x}^{\tau}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tilde{x}^{\eta}} \tilde{F}^{\eta} \frac{\partial \tilde{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \tilde{\partial}_{\gamma}. \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

A quarta parcela da equação acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial \tilde{x}^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tilde{x}^{\eta}} \frac{\partial \tilde{x}^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\sigma} \partial \tilde{x}^{\tau}} \tilde{F}^{\eta} \frac{\partial \tilde{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \tilde{\partial}_{\gamma} = \\
 &\frac{\partial \tilde{x}^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \delta_{\eta}^{\tau} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\sigma} \partial \tilde{x}^{\tau}} \tilde{F}^{\eta} \frac{\partial \tilde{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \tilde{\partial}_{\gamma} = \frac{\partial \tilde{x}^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\sigma} \partial \tilde{x}^{\tau}} \frac{\partial \tilde{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \tilde{\partial}_{\gamma} \tilde{F}^{\eta} = \\
 &= \frac{\partial \tilde{x}^{\theta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\theta} \partial \tilde{x}^{\beta}} \frac{\partial \tilde{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \tilde{\partial}_{\gamma} \tilde{F}^{\eta}.
 \end{aligned}$$

Logo esta parcela acima cancela a segunda parcela de (3.8). Sobram a primeira e a segunda dadas respectivamente por

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\beta}} \frac{\partial \tilde{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \tilde{F}^{\beta}}{\partial \tilde{x}^{\theta}} \frac{\partial \tilde{x}^{\theta}}{\partial x^{\mu}} \tilde{\partial}_{\gamma} = \delta_{\beta}^{\gamma} \frac{\partial \tilde{F}^{\beta}}{\partial \tilde{x}^{\theta}} \frac{\partial \tilde{x}^{\theta}}{\partial x^{\mu}} \tilde{\partial}_{\gamma} = \frac{\partial \tilde{F}^{\gamma}}{\partial \tilde{x}^{\theta}} \frac{\partial \tilde{x}^{\theta}}{\partial x^{\mu}} \tilde{\partial}_{\gamma},$$

e

$$\frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial \tilde{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \tilde{x}^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tilde{x}^{\eta}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial \tilde{x}^{\lambda}} \tilde{\Gamma}_{\sigma\tau}^{\rho} \tilde{F}^{\eta} \tilde{\partial}_{\gamma} = \delta_{\rho}^{\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \delta_{\eta}^{\tau} \tilde{\Gamma}_{\sigma\tau}^{\rho} \tilde{F}^{\eta} \tilde{\partial}_{\gamma} = \frac{\partial \tilde{x}^{\theta}}{\partial x^{\mu}} \tilde{\Gamma}_{\theta\tau}^{\gamma} \tilde{F}^{\tau} \tilde{\partial}_{\gamma}.$$

Portanto

$$\nabla_{\mu}(F^{\omega} \partial_{\omega}) = \frac{\partial \tilde{x}^{\theta}}{\partial x^{\mu}} \left[ \frac{\partial \tilde{F}^{\gamma}}{\partial \tilde{x}^{\theta}} + \tilde{\Gamma}_{\theta\tau}^{\gamma} \tilde{F}^{\tau} \right] \tilde{\partial}_{\gamma} = \frac{\partial \tilde{x}^{\theta}}{\partial x^{\mu}} \nabla_{\tilde{\partial}_{\theta}}(\tilde{F}^{\tau} \tilde{\partial}_{\tau}),$$

como afirmado. □

### 3.4 Transporte Paralelo

Frequentemente, consideraremos campos vetoriais definido somente ao longo de uma curva em  $M$ .

**Definição 3.4.1.** *Mantendo as notações e convenções introduzidas na seção anterior sobre curvas, seja  $\alpha : I \rightarrow M$  uma curva parametrizada. Definimos um campo de vetores sobre essa curva como sendo uma aplicação*

$$V : I \rightarrow \bigcup_{q \in M} T_q M$$

definida por

$$t \mapsto V(t)$$

onde  $V(t) \in T_{\alpha(t)} M \quad \forall t \in I$ .

Como discutido na seção anterior, na TGR estamos interessados quase que exclusivamente em curvas inteiramente contidas em um aberto  $U \subset M$  coberto por um referencial local  $x^\mu$ . Por isso, de agora em diante, consideraremos exclusivamente curvas paramétricas que satisfaçam a esta condição. Posto isto, digamos que relativamente ao referencial  $x^\mu$  a curva  $C$  seja dada pelas equações paramétricas

$$C : \begin{cases} x^0 = x^0(t) \\ \vdots \\ x^3 = x^3(t) \end{cases} ; t \in I$$

Então, relativamente a este referencial, um campo  $V$  ao longo de  $C$  pode ser representado como

$$V(t) = v^\mu(t) \partial_\mu \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}.$$

Dizemos que os  $v^\mu(t)$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , são as componentes de  $V(t)$  relativamente ao referencial  $x^\mu$ .

Se  $\tilde{x}^\mu$  é outro referencial cobrindo  $U$ , temos que relativamente a este referencial  $C$  tem representação

$$C : \begin{cases} \tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0(t), \dots, x^3(t)) \\ \vdots \\ \tilde{x}^3 = \tilde{x}^3(x^0(t), \dots, x^3(t)) \end{cases} ; t \in I.$$

Então, relativamente a este referencial, um campo  $V$  ao longo de  $C$  pode ser representado como

$$V(t) = \tilde{v}^\mu(t) \tilde{\partial}_\mu \Big|_{(\tilde{x}^0(t), \dots, \tilde{x}^3(t))}$$

onde

$$C : \tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(t), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad t \in I$$

e onde as componentes  $\tilde{v}^\mu(t)$  satisfazem

$$\tilde{v}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\gamma}(x^0(t), \dots, x^3(t)) v^\gamma(t).$$

Além disso,

$$\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\gamma}(x^0(t), \dots, x^3(t)) \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu}(\tilde{x}^0(t), \dots, \tilde{x}^3(t)) = \delta_\gamma^\beta,$$

o que juntamente com

$$\tilde{\partial}_\mu \Big|_{(\tilde{x}^0(t), \dots, \tilde{x}^3(t))} = \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu}(\tilde{x}^0(t), \dots, \tilde{x}^3(t)) \partial_\beta \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}$$

nos assegura que de fato

$$v^\mu(t) \partial_\mu \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))} = \tilde{v}^\mu(\tilde{x}^0(t), \dots, \tilde{x}^3(t)) \tilde{\partial}_\mu \Big|_{(\tilde{x}^0(t), \dots, \tilde{x}^3(t))}, \quad \forall t \in I. \quad (3.9)$$

**Definição 3.4.2.** Dizemos que o campo vetorial  $V(t)$  ao longo de  $C$  é suave se suas componentes  $v^\mu(t)$  forem funções suaves de  $t \in \text{int}(I)$ .

A expressão (3.9) mostra que esta definição independe da escolha de um referencial local.

A noção de derivada covariante construída na seção anterior pode ser especializada para campos de vetores ao longo de uma curva paramétrica.

**Proposição 3.4.1.** (*Derivada covariante ao longo de uma curva*). Seja  $\nabla$  uma conexão em  $M$  e sejam  $V(t)$  e  $W(t)$  campos suaves definidos sobre a curva paramétrica  $C$ . Então, existe uma única noção de derivada covariante que leva  $V(t)$  em um novo campo vetorial suave ao longo de  $C$ , denotado por  $\frac{DV(t)}{dt}$ , que satisfaz às seguintes propriedades:

1.  $\frac{D}{dt}(V(t) + W(t)) = \frac{D}{dt}V(t) + \frac{D}{dt}W(t)$
2.  $\frac{D}{dt}(f(t)V(t)) = \left(\frac{d}{dt}f(t)\right)V(t) + f(t)\frac{D}{dt}V(t)$
3. Se  $V(t)$  é a restrição à curva  $C$  de um campo  $\bar{V}$  definido em  $U \subset M$ , isto é

$$V(t) = \bar{V}(x^0(t), \dots, x^3(t)),$$

então deve valer a relação de compatibilidade

$$\frac{DV(t)}{dt} = \nabla_{T(t)}\bar{V}(x^0(t), \dots, x^3(t))$$

onde  $T(t)$  é o vetor tangente à curva  $C$  em  $t$ .

Observe que  $T(t)$  também define um campo de vetores sobre  $C$ , dito “campo tangente á curva  $C$ ”.

Basicamente, o que caracteriza a derivada  $\frac{D}{dt}$  ao longo da curva  $C$  é a condição de compatibilidade expressa no item (3) da proposição acima. De fato, se as representações de  $C$  e  $V$  relativamente ao referencial  $x^\mu$  forem respectivamente

$$C : x^\mu = x^\mu(t) \text{ e } V(t) = v^\mu(t)\partial_\mu \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}, t \in I,$$

e as condições (1) e (2) da proposição nos levam a

$$\frac{D}{dt}V(t) = \frac{d}{dt}v^\mu(t)\partial_\mu \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))} + v^\mu(t)\frac{D}{dt}\partial_\mu \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}.$$

Como  $\partial_\mu \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}$  é a restrição do campo  $\partial_\mu \Big|_{(x^0, \dots, x^3)}$  em  $U$  a  $x^\mu(t)$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , a condição (3) por sua vez demanda que seja:

$$\frac{D}{dt}\partial_\mu \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))} = \nabla_{T(t)}\partial_\mu \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))},$$

$$\text{onde } T(t) = \left(\frac{d}{dt}x^\nu(t)\right)\partial_\nu \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}.$$

Segue das propriedades da conexão  $\nabla$  que :

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}\partial_\mu \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))} &= \nabla_{T(t)}\partial_\mu \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))} = \left(\frac{d}{dt}x^\nu(t)\right)\nabla_{\partial_\nu}\partial_\mu \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))} \\ &= \left(\frac{d}{dt}x^\nu(t)\right)\partial_\nu(\mu) \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))} \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}, \end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}V(t) &= \frac{dv^\mu}{dt}(t)\partial_\mu \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))} + v^\mu(t)\frac{D}{dt}\partial_\mu \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))} = \\ &= \left[ \frac{dv^\lambda}{dt}(t) + \frac{dx^\nu}{dt}(t)v^\mu(t)\Gamma_{\nu\mu}^\lambda \right] \partial_\lambda \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}. \end{aligned}$$

Isto é, a única noção de derivada covariante compatível com as condições 1, 2, e 3 na proposição é a definida impondo se que relativamente ao referencial  $x^\mu$  se tenha

$$\frac{D}{dt}V(t) = \left[ \frac{dv^\lambda}{dt}(t) + \frac{dx^\nu}{dt}(t)v^\mu(t)\Gamma_{\nu\mu}^\lambda \right] \partial_\lambda \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}.$$

Convém observar que o item 3 da proposição (3.4.1) e a derivada covariante  $\frac{D}{dt}$  não dependem da escolha do referencial local em  $U$ . De fato, suponha que  $\tilde{x}^\mu$  é outro referencial local relativamente ao qual

$$C : \tilde{x}^\mu,$$

$$V(t) = \bar{V}(\tilde{x}^0(t), \dots, \tilde{x}^3(t)) = \tilde{v}^\nu(t)\tilde{\partial}_\nu \Big|_{(\tilde{x}^0(t), \dots, \tilde{x}^3(t))}.$$

Então, usando as propriedades (1) e (2) da proposição (3.4.1) e estas expressões, temos que a condição de compatibilidade  $\frac{D}{dt}V(t) = \nabla_{T(t)}\bar{V}(x^0(t), \dots, x^3(t))$  levará da mesma forma que no cálculo feito na proposição 3.3.1 à expressão

$$\frac{D}{dt}V(t) = \left[ \frac{d\tilde{v}^\lambda}{dt}(t) + \frac{d\tilde{x}^\nu}{dt}(t)\tilde{v}^\mu(t)\tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\lambda \right] \tilde{\partial}_\lambda \Big|_{(\tilde{x}^0(t), \dots, \tilde{x}^3(t))}$$

para  $\frac{D}{dt}V$ . E daí, através de um cálculo semelhante ao feito na proposição (3.3.1), teremos:

$$\left[ \frac{dv^\lambda}{dt}(t) + \frac{dx^\nu}{dt}(t)v^\mu(t)\Gamma_{\nu\mu}^\lambda \right] \partial_\lambda \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))} \equiv \left[ \frac{d\tilde{v}^\lambda}{dt}(t) + \frac{d\tilde{x}^\nu}{dt}(t)\tilde{v}^\mu(t)\tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\lambda \right] \tilde{\partial}_\lambda \Big|_{(\tilde{x}^0(t), \dots, \tilde{x}^3(t))}. \quad (3.10)$$

Vamos discutir agora o conceito de paralelismo e transporte paralelo ao longo de  $C$ .

**Definição 3.4.3.** Dizemos que o campo  $V$  ao longo de  $C$  é paralelo se

$$\frac{D}{dt}V(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

isto é, se a derivada covariante de  $V$  ao longo de  $C$  é nula.

**Proposição 3.4.2.** Existe uma única família de isomorfismos

$$P_t : T_{(x^0(0), \dots, x^3(0))}M \rightarrow T_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}M,$$

tais que o campo de vetores  $V(t)$  ao longo de  $C$  é paralelo se, e somente se,  $V(t) = P_t(V(0))$ .

*Demonstração.* Para ver isto basta olhar para equação

$$\frac{D}{dt}V(t) = 0,$$

que será chamada neste contexto de equação de transporte paralelo. Novamente continuamos trabalhando com as representações de  $C$  e  $V$  relativamente ao referencial local  $(U; x^\mu)$ . Então, a equação de transporte paralelo será

$$\frac{dv^\lambda}{dt}(t) + \frac{dx^\nu}{dt}(t)v^\mu(t)\Gamma_{\nu\mu}^\lambda = 0, \quad t \in I, \quad \lambda = 0, 1, 2, 3. \quad (3.11)$$

Observe que (3.11) acima é um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem para as componentes  $v^\lambda(t)$  do campo  $V(t)$  na representação considerada. Assim, fixadas condições iniciais

$$v^0(0) = v_*^0, \dots, v^3(0) = v_*^3,$$

existe uma única solução

$$v^0(t), \dots, v^3(t) \quad (3.12)$$

de (3.11) satisfazendo a elas para  $t = 0$ .

Em outras palavras, especificando o vetor tangente  $V_* \in T_{(x^0(0), \dots, x^3(0))}M$  existe um único campo vetorial  $V(t)$  paralelo ao longo de  $C$  tal que  $V(0) = V_*$ , que é dado relativamente ao referencial considerado por  $V(t) = v^\lambda(t)\partial_\lambda \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}$  para as  $v^\mu(t)$  em (3.11).

Dado  $t = t_p > 0$  em  $I$ , o vetor  $V(t_p)$  acima é por definição o vetor obtido por “transporte paralelo” de  $V_*$  ao longo de  $C$  desde  $t = 0$  até  $t = t_p$  ou, alternativamente do ponto  $O = (x^0(0), \dots, x^3(0))$  até  $p = (x^0(t_p), \dots, x^3(t_p))$ .

Suponha que tivéssemos escolhido trabalhar com outro referencial local  $\tilde{x}^\mu$  cobrindo o aberto  $U \subset M$ . Defina as componentes do vetor  $V_*$  relativas a este referencial por

$$V_* = \tilde{v}_*^\mu \tilde{\partial}_\mu \Big|_{(x^0(0), \dots, x^3(0))}.$$

Como  $\tilde{v}_*^\rho = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\alpha}(x^0(0), \dots, x^3(0))v_*^\alpha$  teremos que as equações de transporte paralelo para o campo  $V(t) = \tilde{v}^\lambda(t)\tilde{\partial}_\lambda \Big|_{(\tilde{x}^0(t), \dots, \tilde{x}^3(t))}$  escrito relativamente ao referencial  $\tilde{x}^\mu$  são dadas pelo seguinte sistema de EDO's de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{v}^\lambda}{dt}(t) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{d\tilde{x}^\mu}{dt}\tilde{v}^\nu(t) = 0 \\ \tilde{v}^\lambda(0) = \tilde{v}_*^\lambda \end{cases} \quad \lambda = 0, 1, 2, 3, \quad t \in I.$$

Este sistema que tem solução única será satisfeito se pegarmos, dados os  $v^\beta$ ,  $\beta = 0, 1, 2, 3$  da equação (3.11)

$$\tilde{v}^\lambda(t) = \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\beta}(x^0(t), \dots, x^3(t))v^\beta(t) \quad (3.13)$$

Pois válida a condição inicial, e além disso, a última equação acima significa  $v^\beta(t) = \frac{\partial x^\beta}{d\tilde{x}^\alpha} \tilde{v}^\alpha$ , e já que os  $v^\beta$ ,  $\beta = 0, 1, 2, 3$  satisfazem (3.11), segue de (3.10) que também validarão o último sistema..

Então, por definição segue que o transporte paralelo de  $V_*$  ao longo de  $C$ , até  $t$ , será dado relativamente ao referencial  $\tilde{x}^\mu$  por

$$\tilde{v}^\lambda(t) \tilde{\partial}_\lambda \Big|_{(\tilde{x}^0(t), \dots, \tilde{x}^3(t))} \equiv v^\lambda \partial_\lambda \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}.$$

Ou seja, coincide com o resultado obtido usando o referencial  $x_\mu$  para trabalhar. Assim, o transporte paralelo ao longo  $C$  conforme definido acima não depende da escolha do referencial local.

Posto tudo isto: a proposição segue de definir

$$P_t : T_{(x^0(0), \dots, x^3(0))} M \rightarrow T_{(x^0(t), \dots, x^3(t))} M$$

pondo  $V_* \mapsto V(t)$  onde  $V(t)$  é o transporte paralelo de  $V_*$  ao longo  $C$  desde o ponto de coordenadas  $(x^0(0), \dots, x^3(0))$  até ponto de coordenadas  $(x^0(t), \dots, x^3(t))$ . Pode-se verificar facilmente que estas aplicações são isomorfismos lineares.  $\square$

**Definição 3.4.4.** *Os isomorfismos  $P_t$  da proposição acima são chamados de “operadores de transporte paralelo” ao longo da curva  $C$ .*

Impressionantemente, a especificação de uma família de operadores de transporte paralelo é suficiente para reconstruir completamente a noção de derivação covariante  $\frac{D}{dt}$  ao longo de  $C$ .

Mais precisamente especificada uma família de isomorfismos

$$P_t : T_{(x^0(0), \dots, x^3(0))} M \rightarrow T_{(x^0(t), \dots, x^3(t))} M$$

temos que qualquer noção de derivada covariante  $\frac{D}{dt}$  ao longo de  $C$  que satisfaça às propriedades 1 e 2 da proposição 3.3 fica caracterizada pela condição de que

$$\frac{D}{dt} [P_t(V_*)] = 0 \quad \forall V_* \in T_{(x^0(0), \dots, x^3(0))} \quad \text{e} \quad \forall t \in I.$$

Isto é, pela condição de que o campo  $P_t(V_*)$  seja paralelo segundo  $\frac{D}{dt}$  para todo  $V_* \in T_{(x^0(0), \dots, x^3(0))} M$ , no sentido de que isto é suficiente para se determinar  $\frac{D}{dt}$  ao longo de  $C$  para qualquer campo de vetores  $W(t)$  sobre  $C$ .

**Proposição 3.4.3.** *Mantendo as convenções anteriores, seja*

$$P_t : T_{(x^0(0), \dots, x^3(0))} M \rightarrow T_{(x^0(t), \dots, x^3(t))} M$$

*uma família a 1-parâmetro de isomorfismos. Então, qualquer noção de derivada covariante  $\frac{D}{dt}$  ao longo de  $C$  que satisfaça às condições 1 e 2 da proposição (3.4.1) fica determinada pela condição de que,  $\forall V_* \in T_{(x^0(0), \dots, x^3(0))}$ , o campo ao longo de  $C$  definido por  $P_t(V_*)$  seja paralelo segundo  $\frac{D}{dt}$ . Isto é pela condição de que os  $P_t$  sejam os operadores de transporte paralelo ao longo de  $C$ .*

*Demonstração.* Seja  $W(t)$  um campo vetorial ao longo de  $C$ . Denote por

$$\left\{ \partial_\mu \Big|_0 ; \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

a base de  $T_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}M$  associado ao referencial local  $(U; x^\mu)$ , relativamente ao qual  $C$  é representada pelas equações paramétricas  $x^\mu = x^\mu(t)$ . temos que,  $\forall t$ ,  $\left\{ E_\mu(t) = P_t \left( \partial_\mu \Big|_0 \right) \mu = 0, 1, 2, 3 \right\}$  é base de  $T_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}M$ . Seja

$$W(t) = \Delta^\mu(t) E_\mu(t)$$

a expansão de  $W(t)$  nesta base. Então, nestas condições dada uma noção de derivada covariante qualquer  $\frac{D}{dt}$  satisfazendo as propriedades 1 e 2 da proposição 3.3, podemos escrever pela regra de Leibniz que será:

$$\frac{\partial}{dt} W(t) = \frac{d\Delta^\mu(t)}{dt} E_\mu(t) + \Delta^\mu(t) \frac{D}{dt} E_\mu(t).$$

Se adicionalmente esta noção de derivação covariante for tal que os isomorfismos  $P_t$  sejam os operadores de transporte paralelo associados a ela, então os  $E_\mu(t)$  serão campos paralelos ao longo de  $C$  e poderemos escrever, via  $\frac{D}{dt} E_\mu(t) = 0$ , a seguinte forma para a última expressão acima:

$$\frac{D}{dt} W(t) = \frac{d\Delta^\mu(t)}{dt} E_\mu(t) = \frac{d\Delta^\mu(t)}{dt} P_t \left( \partial_\mu \Big|_0 \right) = P_t \left( \frac{d\Delta^\mu(t)}{dt} \partial_\mu \Big|_0 \right).$$

Isto é, para todo  $t$ ,  $\frac{D}{dt} W(t)$  fica determinado como a imagem do isomorfismo  $P_t$  do vetor em  $T_{(x^0(0), \dots, x^3(0))}M$  cujas componentes na base  $\left\{ \partial_\mu \Big|_0 ; \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \right\}$  são os  $\frac{d\Delta^\mu(t)}{dt}$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . □

## 3.5 Geodésicas

Novamente, visando as aplicações à TGR, iremos nos restringir durante essa seção a curvas paramétricas com traço inteiramente contido em um aberto  $U \subset M$  coberto por um referencial local  $x^\mu$ .

A equação paramétrica de uma tal curva será escrita como

$$C : x^\mu = x^\mu(t), \mu = 0, 1, 2, 3, t \in I = [0, 1],$$

com as notações e convenções anteriormente introduzidas.

### 3.5.1 Geodésicas de uma conexão

No que se segue assumiremos que  $M$  está equipado com uma conexão  $\nabla$ .

**Definição 3.5.1.** Dizemos que  $C$  é uma geodésica se

$$\frac{D}{dt} T(t) = 0 \quad \forall t \in \text{int}(I),$$

onde

$$T(t) = \frac{dx^\mu(t)}{dt} \partial_\mu \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}$$

é o campo tangente ao longo de  $C$ .

**Observação 3.5.1.** Note que definição acima não é métrica, ela depende apenas da especificação de uma conexão  $\nabla$  em  $M$ , que determina por sua vez a derivada covariante  $\frac{D}{dt}$  ao longo de  $C$ , sem fazer uso da métrica  $g$ .

Assim,  $C$  é uma geodésica se ela é o equivalente a uma “linha reta” em  $M$ . De fato, uma das formas de caracterizar uma curva como uma linha reta é pedindo que as suas direções tangentes não variem, ou seja, que ela seja “livre de curvatura”. Aqui, capturamos essa ideia pedindo que a derivada covariante do campo tangente ao longo de  $C$  seja zero.

**Proposição 3.5.1.** Dado  $p = (x_p^0, \dots, x_p^3) \in U \subset M$  e  $v_* \in T_p M$ , existe  $\delta > 0$  e uma única geodésica

$$C : x^\mu = x^\mu(t), \quad -\delta < t < \delta,$$

tal que  $x^\mu(0) = x_p^\mu$  e  $T(0) = v_*$ .

*Demonstração.* A curva paramétrica  $C : x^\mu = x^\mu(t)$ , que assumiremos estar definida em um intervalo em torno 0, é uma geodésica se somente se satisfaz a equação

$$\frac{D}{dt} T(t) = 0,$$

onde  $T(t) = \frac{d}{dt} x^\mu(t) \partial_\mu \Big|_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}$ , que será doravante chamada “Equação das Geodésicas”. Ou seja, se e somente se satisfaz

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dx^\lambda}{dt} \right) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0, \quad \lambda = 0, 1, 2, 3.$$

Fixadas as condições iniciais  $x^\lambda(0) = x_p^\lambda$ ,  $\lambda = 0, 1, 2, 3$ , e  $\frac{dx^\lambda}{dt}(0) = v_*^\lambda$ , onde os  $v_*^\lambda$  são as componentes do vetor  $v_* = v_*^\lambda \partial_\lambda \Big|_{(x^0(0), \dots, x^3(0))} \in T_p M$  relativamente ao referencial  $x^\mu$ , o Teorema de Existência e Unicidade garante que existe  $\delta > 0$  tal que o sistema de segunda ordem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^\lambda}{dt} \right) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0 \\ x^\lambda(0) = x_p^\lambda \\ \frac{dx^\lambda}{dt}(0) = v_*^\lambda \end{cases}$$

possui uma única solução no intervalo  $(-\delta, \delta)$ , como queríamos.  $\square$

### 3.5.2 Geodésicas da métrica e compatibilidade entre a métrica e a conexão

Antes de prosseguir, vamos examinar o conceito de compatibilidade entre uma conexão  $\nabla$  em  $M$  e a métrica  $g$ , que são em princípio duas estruturas não relacionadas. No que se segue, ao avaliarmos  $g$  em um par de vetores tangentes em  $M$ , leia-se  $g$  avaliada no ponto de tangência.

**Definição 3.5.2.** Uma conexão  $\nabla$  em  $M$  se diz compatível com a métrica  $g$  se para toda curva paramétrica  $C$  se tem

$$g(V_*, W_*) = g(P_t(V_*), P_t(W_*)), \forall t,$$

onde os  $P_t$  são os operadores de transporte paralelo ao longo de  $C$  associados à conexão  $\nabla$ .

**Lema 3.5.1.** A conexão  $\nabla$  é compatível com a métrica  $g$  se e somente se, para toda curva paramétrica  $C$  e para todos campos vetoriais  $V(t)$ ,  $W(t)$  ao longo de  $C$  tivermos que

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = g\left(\frac{D}{dt}V, W\right) + g\left(V, \frac{D}{dt}W\right).$$

*Demonstração.* Seja  $\left\{\partial_\mu\Big|_{t=0}; \mu = 0, 1, 2, 3\right\}$  a base de  $T_{(x^0(0), \dots, x^3(0))}M$  associado a um referencial local  $x^\mu$  e seja  $E_\mu(t) = P_t \cdot \partial_\mu\Big|_{t=0}$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  o transporte paralelo ao longo de  $C$  dos elementos desta base, onde

$$C : x^\mu = x^\mu(t), \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Então, como os operadores de transporte paralelo são isomorfismos, temos que  $\{E_\mu(t); \mu = 0, 1, 2, 3\}$  é uma base para  $T_{(x^0(t), \dots, x^3(t))}M$ . Sejam

$$V(t) = A^\mu(t)E_\mu(t) \text{ e } W = B^\mu(t)E_\mu(t)$$

as expansões de  $V$  e  $W$  nesta base, onde os  $A^\mu(t)$  e  $B^\mu(t)$  são funções suaves de  $t \in I$ .

Podemos escrever

$$g(x^0(t), \dots, x^3(t))(V(t), W(t)) = A^\mu(t)B^\nu(t)g(x^0(t), \dots, x^3(t))(E_\mu, E_\nu).$$

Pela compatibilidade temos,

$$g(x^0(t), \dots, x^3(t))(E_\mu, E_\nu) = g_{\mu\nu}(x^0(0), \dots, x^3(0)).$$

Escrevendo conforme convencionamos

$$g(x^0(t), \dots, x^3(t))(V(t), W(t)) = g(V(t), W(t)),$$

vem daí

$$g(V(t), W(t)) = g_{\mu\nu}(x^0(0), \dots, x^3(0))A^\mu(t)B^\nu(t).$$

Temos daí:

$$\frac{d}{dt}g(V(t), W(t)) = g_{\mu\nu}(x^0(0), \dots, x^3(0))\frac{dA^\mu}{dt}B^\nu(t) + g_{\mu\nu}(x^0(0), \dots, x^3(0))\frac{dB^\nu}{dt}A^\mu(t) \quad (3.14)$$

Agora, observe que pela regra Leibniz para a derivada covariante ao longo de  $C$  e pelo fato de que  $E_\mu(t)$ ,  $E_\nu(t)$  são por construção paralelos, temos  $\frac{D}{dt}V(t) = \frac{dA^\mu}{dt}E_\mu(t)$  e  $\frac{D}{dt}W(t) = \frac{dB^\nu}{dt}E_\nu(t)$ . Daí,

$$g\left(\frac{D}{dt}V(t), W(t)\right) = \frac{dA^\mu}{dt}B^\nu(t)g(E_\mu(t), E_\nu(t))$$

e

$$g\left(V(t), \frac{D}{dt}W(t)\right) = A_\mu(t) \frac{dB^\nu}{dt} g(E_\mu(t), E_\nu(t)).$$

Utilizando novamente a compatibilidade estas se reduzem a

$$g\left(\frac{D}{dt}V(t), W(t)\right) = \frac{dA^\mu}{dt} B^\nu(t) g_{\mu\nu}(x^0(0), \dots, x^3(0)),$$

$$g\left(V(t), \frac{D}{dt}W(t)\right) = A^\mu(t) \frac{dB^\nu}{dt} g_{\mu\nu}(x^0(0), \dots, x^3(0)).$$

Claramente a soma destas duas últimas expressões é igual a (3.14), como desejado.

Reciprocamente, suponha que vala a propriedade

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = g\left(\frac{D}{dt}V, W\right) + g\left(V, \frac{D}{dt}W\right)$$

ao longo de qualquer curva paramétrica. Seja  $C : x^\mu = x^\mu(t), t \in I$ , e sejam  $V_*, W_* \in T_{(x^0(0), \dots, x^3(0))}M$ . Sejam

$$V(t) = P_t \cdot V_* \text{ e } W(t) = P_t \cdot W_*$$

os transportes paralelos de  $V_*$  e  $W_*$  ao longo de  $C$ . Então,  $\frac{D}{dt}V(t)$  e  $\frac{D}{dt}W(t)$  são nulos, o que aplicado a equação acima fornece  $\frac{d}{dt}g(V(t), W(t)) = 0$ . Logo,  $g(V(t), W(t))$  é uma função constante de  $t$ , valendo daí

$$g(V_*, W_*) = g(V(t), W(t)) = g(P_t \cdot V_*, P_t \cdot W_*) \quad \forall t,$$

como desejado.  $\square$

O resultado do lema acima é uma caracterização extremamente importante da compatibilidade de uma métrica e uma conexão. Ele também pode ser lido em termos da derivação covariante de um campo na direção de outro associada a  $\nabla$ .

**Teorema 3.5.1.**  $\nabla$  é compatível com a métrica  $g$  se e somente se para todos campos de vetores suaves,  $V, X$  e  $W$  tivermos

$$\nabla_X g(V, W) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W). \quad (3.15)$$

*Demonstração.* Logicamente, é suficiente analisar a situação relativamente a um referencial local  $(U; x^\mu)$  fixo. Assumindo a compatibilidade de  $\nabla$  com a métrica  $g$ , devemos mostrar que as funções no lado direito e no lado esquerdo em (3.15) coincidem para todo  $p \in U, p = (x_p^0, \dots, x_p^3)$ .

Para isso, suponha que a representação de  $X$  relativamente ao referencial local  $x^\mu$  seja  $X = \Delta^\mu(x^0, \dots, x^3) \partial_\mu \Big|_{(x^0, \dots, x^3)}$  e seja  $C : x^\mu = x^\mu(t), t \in I$ , uma curva paramétrica com  $x_p^\mu = x^\mu(t_p), \mu = 0, 1, 2, 3, t_p \in \text{int}(I)$  e com  $T(t_p) = X(x_p^0, \dots, x_p^3)$ , onde  $T(t)$  é o campo tangente ao longo de  $C$ . Então, se  $V(t), W(t)$  denotam as restrições de  $V$  e  $W$  à curva  $C$ , de forma que  $V(t_p) = V(x_p^0, \dots, x_p^3)$  e  $W(t_p) = W(x_p^0, \dots, x_p^3)$ , teremos pelo item (3) da proposição (3.4.1) que

$$\frac{D}{dt}V(t) \Big|_{t_p} = \nabla_{T(t_p)} V(x_p^0, \dots, x_p^3), \text{ e } \frac{D}{dt}W(t) \Big|_{t_p} = \nabla_{T(t_p)} W(x_p^0, \dots, x_p^3)$$

de forma que a expressão (3.15) avaliada em  $p$  pode ser escrita como

$$g \left( \left. \frac{D}{dt} V(t) \right|_{t=t_p}, W(t_p) \right) + g \left( V(t_p), \left. \frac{D}{dt} W(t) \right|_{t=t_p} \right).$$

Daí, o resultado seguirá do lema anterior se pudermos mostrar que o lado esquerdo de (3.15) se reduz a  $\left. \frac{d}{dt} g(V(t), W(t)) \right|_{t=t_p}$ . Com efeito observe que se  $f$  é uma função real suave definida em  $U$  com representação  $f(x^0, \dots, x^3)$  relativamente ao referencial  $x^\mu$ , então

$$\nabla_X f|_{(x_p^0, \dots, x_p^3)} = \Delta^\mu(x_p^0, \dots, x_p^3) \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x_p^0, \dots, x_p^3) = T^\mu(t_p) \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x_p^0, \dots, x_p^3).$$

Além disso, pela regra da cadeia, se  $g(t) = f(x^0(t), \dots, x^3(t))$ , então

$$\left. \frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x_p^0, \dots, x_p^3) \frac{dx^\mu}{dt} \right|_{t=t_p} = T^\mu(t_p) \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x_p^0, \dots, x_p^3).$$

O resultado desejado segue então, de se tomar

$$f(x^0, \dots, x^3) = g(x^0, \dots, x^3)(V(x^0, \dots, x^3), W(x^0, \dots, x^3)).$$

Para mostrar a afirmação recíproca, basta mostrar que a validade da expressão (3.15) implica que para qualquer curva paramétrica  $C$  e para qualquer par de campos vetoriais suaves  $V$  e  $W$  em  $U$ , as restrições  $V(t), W(t)$  de  $V, W$  a  $C$  satisfazem

$$\left. \frac{d}{dt} g(V(t), W(t)) = g \left( \frac{D}{dt} V(t), W(t) \right) + g \left( v(t), \frac{D}{dt} W(t) \right) \right|_{t=t_p},$$

e o resultado seguirá do lema anterior. Mas se escrevemos  $C : x^\mu = x^\mu(t)$ ,  $t \in I$  e pegarmos  $X$  tal que  $X(x^0(t), \dots, x^3(t)) = T(t)$ , isto segue por sua vez de se usar tal  $X$  na expressão (3.15) e considerações análogas às que fizemos anteriormente.  $\square$

### 3.5.3 A conexão de Levi-Civita

Um resultado central em Geometria Riemanniana é que existe somente uma conexão  $\nabla$  em  $M$  que é compatível com a métrica  $g$  e satisfazendo à condição de simetria

$$\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu$$

para qualquer referencial local em  $M$ . Esta condição significa que os coeficientes de conexão associados a qualquer referencial local são simétricos no sentido de que

$$\Gamma_{\nu\mu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \quad \forall \mu\nu = 0, 1, 2, 3 \text{ qualquer que seja } \lambda = 0, 1, 2, 3.$$

**Teorema 3.5.2.** *Existe somente uma conexão em  $M$  simétrica e compatível com  $g$ .*

*Demonstração.* Basta provar a existência e unicidade em um aberto  $U$  de  $M$ , coberto por um referencial local  $x^\mu$ .

Escrevamos como de costume

$$g_{\mu\nu}(x^0, \dots, x^3) = g(x^0, \dots, x^3) \left( \left. \partial_\mu \right|_{(x^0, \dots, x^3)}, \left. \partial_\nu \right|_{(x^0, \dots, x^3)} \right),$$

$$(\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu)(x^0, \dots, x^3) = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x^0, \dots, x^3) \partial_\lambda \Big|_{(x^0, \dots, x^3)}.$$

Usando a compatibilidade com  $g$  na forma da expressão (3.15) com  $X \equiv \partial_\sigma$ ,  $V \equiv \partial_\mu$  e  $W = \partial_\nu$ , vem

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} = g(\nabla_\sigma \partial_\mu, \partial_\nu) + g(\partial_\mu, \nabla_\sigma \partial_\nu).$$

Fazendo permutações cíclicas

$$\sigma\mu\nu \rightarrow \mu\nu\sigma \rightarrow \nu\sigma\mu$$

na última expressão obtemos três novas:

$$(I) \quad \partial_\sigma g_{\mu\nu} = g(\nabla_\sigma \partial_\mu, \partial_\nu) + g(\partial_\mu, \nabla_\sigma \partial_\nu),$$

$$(II) \quad \partial_\mu g_{\nu\sigma} = g(\nabla_\mu \partial_\nu, \partial_\sigma) + g(\partial_\nu, \nabla_\mu \partial_\sigma),$$

$$(III) \quad \partial_\nu g_{\sigma\mu} = g(\nabla_\nu \partial_\sigma, \partial_\mu) + g(\partial_\sigma, \nabla_\nu \partial_\mu).$$

Usando agora a simetria:

$$\nabla_\nu \partial_\sigma = \nabla_\sigma \partial_\nu \Rightarrow g(\nabla_\nu \partial_\sigma, \partial_\mu) = g(\nabla_\nu \partial_\sigma, \partial_\mu),$$

$$\nabla_\sigma \partial_\mu = \nabla_\mu \partial_\sigma \Rightarrow g(\nabla_\sigma \partial_\mu, \partial_\nu) = g(\nabla_\mu \partial_\sigma, \partial_\nu),$$

$$\nabla_\mu \partial_\nu = \nabla_\nu \partial_\mu \Rightarrow g(\nabla_\mu \partial_\nu, \partial_\sigma) = g(\nabla_\mu \partial_\nu, \partial_\sigma).$$

Levando isto em conta, vê-se que  $(I) + (III) - (II)$  resulta em :

$$2g(\nabla_\sigma \partial_\nu) = \partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\mu g_{\nu\sigma};$$

ou seja,

$$g(\nabla_\sigma \partial_\nu) = \frac{1}{2}(\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\mu g_{\nu\sigma}).$$

Agora, usando

$$\nabla_\sigma \partial_\nu = \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \partial_\lambda$$

no lado esquerdo da última expressão obtemos

$$g_{\mu\lambda} \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda = \frac{1}{2}(\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\mu g_{\nu\sigma}).$$

Daí,

$$\Gamma_{\sigma\nu}^\rho = \frac{1}{2}g_{\rho\mu}(\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\mu g_{\nu\sigma}).$$

Então vemos que as hipóteses de compatibilidade e de simetria nos permitem escrever as componentes da conexão  $\nabla$  de forma única em termos dos coeficientes da métrica  $g$ . □

**Definição 3.5.3.** *A conexão  $\nabla$  no teorema anterior se diz a “conexão de Lévi-Civita”, ou “conexão Riemanniana”, associada à métrica  $g$ . Os coeficientes de conexão associados relativamente ao referencial local  $x^\mu$ ,*

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g_{\lambda\theta}(\partial_\mu g_{\nu\theta} + \partial_\nu g_{\theta\mu} - \partial_\theta g_{\mu\nu}),$$

são chamados de “símbolos de Christoffel” para a métrica  $g$  relativos a  $(U, x^\mu)$ .

O teorema anterior, conhecido também como “Teorema de Levi-Civita”, é às vezes chamado de “Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana”. O motivo é claro: partindo da ideia de que uma conexão “razoável” deve ser simétrica, a única conexão natural possível é a conexão de Levi-Civita, onde por “natural” se entende compatível com a métrica  $g$ . É bastante compreensível dizer que esta condição caracteriza naturalidade, visto que ela equivale a dizer que os operadores de transporte paralelos ao longo de qualquer curva parametrizada preservam a métrica  $g$ . Geometricamente isto é semelhante a dizer que o ângulo entre dois vetores transportados paralelamente ao longo de uma curva parametrizada é preservado. Assim, neste sentido, costuma se dizer que a conexão de Levi-Civita é a conexão “geométrica” em  $M$ .

No que diz respeito as geodésicas de  $M$ , vimos que elas estão em princípio associadas a uma conexão. A noção de geodésica compatível com a estrutura geométrica de  $M$  é obtida considerando o caso particular da conexão de Levi-Civita. Dessa forma, diremos que uma curva paramétrica é uma geodésica para a métrica  $g$ , se for uma geodésica para a conexão Levi-Civita.

Ao longo dos próximos capítulos, esta será a única noção de geodésica utilizada. Salvo menção explícito do contrário:

1. “Conexão” significa “conexão de Lévi-Civita”.
2. “Coeficientes de conexão” serão chamados “símbolos de Christoffel”, dados relativamente ao referencial  $x^\mu$  cobrindo o aberto  $U \subset M$  por

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\sigma}).$$

3. “Geodésica” a significa “geodésica da métrica”.

### 3.5.4 Geodésicas do tipo tempo: a Teoria Variacional das Geodésicas

A noção de geodésicas também pode ser formulada do ponto de vista variacional. Vamos discutir este tema brevemente na presente seção

**Definição 3.5.4.** *Dois pontos  $p, q \in M$  se dizem “causalmente conectados” se existir uma curva paramétrica  $C$  possuindo estes dois pontos como ponto inicial e final.*

Dados dois pontos  $p, q \in M$  causalmente conectados, seja  $\Xi^1$  o conjunto de todas as curvas paramétricas  $C$  do tipo tempo

$$C : x^\mu = x^\mu(t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

com  $p = (x^0(0), \dots, x^3(0))$  e  $q = (x^0(1), \dots, x^3(1))$ .

Defina o funcional:

$$\tau : \Xi \rightarrow \mathbb{R}$$

$$C \mapsto \tau(C)$$

onde

$$\tau(u) = \int_0^1 G(x^\mu(u); \dot{x}^\mu(u)) du, \quad (3.16)$$

---

<sup>1</sup> $\Xi$  equipado com estrutura de espaço vetorial real.

onde  $\dot{x}^\mu(u) = \frac{dx^\mu}{du}(u)$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , e  $G(x^\mu, \dot{x}^\mu) = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x^0(u), \dots, x^3(u))\dot{x}^\mu(u)\dot{x}^\nu(u)}$ . Ou seja,  $\tau(C)$  é o tempo próprio decorrido entre os eventos. Nos referiremos por isso a  $\Xi(C)$  como o “funcional de tempo próprio” associado à métrica  $g$ .

Temos o seguinte fato:

**Teorema 3.5.3.** *Se uma curva paramétrica  $C \in \Xi$  extremiza o funcional de tempo próprio então esta curva satisfaz a equação das geodésicas sempre que parametrizada pelo tempo próprio  $\tau$ .*

*Demonstração.* É possível demonstrar<sup>2</sup> que a extremização do funcional de tempo próprio é atingidos por curvas que satisfaçam à equação de Euler-Lagrange associada:

$$\frac{d}{du} \left( \frac{\partial G}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial G}{\partial x^\mu} = 0, \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Para uma tal curva teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}^\mu} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \left[ (-g_{\sigma\rho} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{2} (-g_{\sigma\rho} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho)^{-\frac{1}{2}} [-g_{\sigma\rho} \delta_\mu^\sigma \dot{x}^\rho - g_{\sigma\rho} \dot{x}^\sigma \delta_\mu^\rho] = \\ &= \frac{1}{2} (-g_{\sigma\rho}) [-2g_{\mu\rho} \dot{x}^\rho] = -\frac{1}{G} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ (-g_{\sigma\rho} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho)^{\frac{1}{2}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (-g_{\sigma\rho} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho)^{-\frac{1}{2}} (\partial_\mu g_{\sigma\rho}) (-1) \tilde{x}^\sigma \dot{x}^\rho = -\frac{1}{2G} (\partial_\mu g_{\sigma\rho}) (-1) \tilde{x}^\sigma \dot{x}^\rho. \end{aligned}$$

Digamos que a parametrização desta curva pelo tempo próprio a partir do evento  $p$  seja

$$\tau \mapsto (f^0(\tau), \dots, f^3(\tau)),$$

onde deve-se ter  $f^\mu(\tau(u)) = x^\mu(u)$ . Então, para  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ,  $\frac{dx^\mu}{du}(u) = \frac{df^\mu}{d\tau}(\tau) \frac{d\tau}{du}$ .

Ou, visto que  $\tau(u) = \int_0^u G(x^\mu(\theta); \dot{x}^\mu(\theta)) d\theta$  e portanto

$$\frac{d\tau}{du}(u) = G(x^\mu(u); \dot{x}^\mu(u)),$$

deve-se ter

$$\frac{dx^\mu}{du} = \frac{df^\mu}{d\tau}(\tau) G = \frac{df^\mu}{d\tau}(\tau(u)) G.$$

Assim:

$$\dot{x}^\nu = G \frac{df^\nu}{d\tau}(\tau(u)) = G(x^\mu(u); \dot{x}^\mu(u)) \frac{df^\nu}{d\tau}.$$

E, daí

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left( \frac{\partial G}{\partial \dot{x}^\mu} \right) &= \frac{d}{du} \left( -\frac{1}{G} g_{\mu\nu} G \frac{df^\nu}{d\tau}(\tau(u)) \right) = \\ &= \frac{d}{du} \left( -g_{\mu\nu} \frac{df^\nu}{d\tau} \right) = \frac{d}{du} \left( -g_{\mu\nu}(x^0(u), \dots, x^3(u)) \frac{df^\nu}{d\tau} \right) - \\ &= -(\partial_\rho g_{\mu\nu}) \frac{dx^\rho}{du} \frac{df^\nu}{d\tau} - g_{\mu\nu} \frac{d}{du} \left( \frac{df^\nu}{d\tau}(\tau(u)) \right) = -(\partial_\rho g_{\mu\nu}) \frac{dx^\rho}{du} \frac{df^\nu}{d\tau} - g_{\mu\nu} \frac{d^2 f^\nu}{d\tau^2} \left( \frac{d\tau}{du}(\tau(u)) \right) = \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Veja: GODINHO. Leonor; NATÁRIO. José. An Introduction to Riemannian Geometry, With Applications to Mechanics and Relativity. London: Springer, 2014.

$$= -(\partial_\rho g_{\mu\nu}) \frac{df^\rho}{d\tau} \frac{df^\nu}{d\tau} G - g_{\mu\nu} \frac{d^2 f^\nu}{d\tau^2} G.$$

Notando que

$$\frac{\partial G}{\partial x^\mu} = -\frac{1}{2G} (\partial_\mu g_{\lambda\theta}) G \frac{df^\lambda}{d\tau} \left( G \frac{df^\theta}{d\tau} \right) = -\frac{1}{2} G (\partial_\mu g_{\lambda\theta}) \frac{df^\lambda}{d\tau} \frac{df^\theta}{d\tau},$$

vemos que a equação de Euler-Lagrange fica:

$$-(\partial_\rho g_{\mu\nu}) \frac{df^\rho}{d\tau} \frac{df^\nu}{d\tau} G - g_{\mu\nu} \frac{d^2 f^\nu}{d\tau^2} G + \frac{1}{2} G (\partial_\mu g_{\lambda\theta}) \frac{df^\lambda}{d\tau} \frac{df^\theta}{d\tau} = 0.$$

Cancelando o fator de  $G$  vem

$$-(\partial_\rho g_{\mu\nu}) \frac{df^\rho}{d\tau} \frac{df^\nu}{d\tau} - g_{\mu\nu} \frac{d^2 f^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\lambda\theta}) \frac{df^\lambda}{d\tau} \frac{df^\theta}{d\tau} = 0, \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (3.17)$$

Ou seja: reescrevendo

$$\begin{aligned} (\partial_\rho g_{\mu\nu}) \frac{df^\rho}{d\tau} \frac{df^\nu}{d\tau} &= \frac{1}{2} (\partial_\rho g_{\mu\nu}) \frac{df^\rho}{d\tau} \frac{df^\nu}{d\tau} - g_{\mu\nu} \frac{d^2 f^\nu}{d\tau^2}, \\ \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\lambda\theta}) \frac{df^\lambda}{d\tau} \frac{df^\theta}{d\tau} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\rho\nu}) \frac{df^\rho}{d\tau} \frac{df^\nu}{d\tau}, \end{aligned}$$

multiplicando para cada  $\mu = 0, 1, 2, 3$  a equação (3.17) por  $g^{\omega\mu}$ , para  $\omega = 0, 1, 2, 3$  fixo, e somando sobre  $\mu$ , a equação de Euler-Lagrange fica:

$$0 = \frac{d^2 f^\omega}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\omega\mu} (\partial_\rho g_{\nu\mu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\mu g_{\rho\nu}) \frac{df^\rho}{d\tau} \frac{df^\nu}{d\tau}.$$

Quer dizer: após reparametrização pelo tempo próprio  $\tau$ , a curva que extremiza o funcional de tempo próprio satisfaz às equações

$$\frac{d^2 f^\omega}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\nu}^\omega \frac{df^\rho}{d\tau} \frac{df^\nu}{d\tau} = 0, \omega = 0, 1, 2, 3, \quad (3.18)$$

onde os  $\Gamma_{\rho\nu}^\omega$  são os símbolos de Christoffel. Como queríamos demonstrar.  $\square$

Em conclusão: geodésicas do tipo tempo parametrizadas pelo tempo próprio  $\tau$  ligando dois eventos causalmente conectados  $p, q \in U$  podem ser entendidas como curvas que extremizam o tempo próprio entre  $p, q$ , com  $G$  dado pela equação (3.18), isto significa que a equação das geodésicas é a equação de movimento de uma partícula massiva livre<sup>3</sup>. Este é mais um motivo pelo qual as geodésicas representam “linhas retas” elas são as trajetórias seguidas por partículas massivas na ausência de qualquer outra força, isto é, no caso, em queda livre, sujeitas apenas à ação da gravidade. Além disso, observando que as geodésicas são determinadas pela métrica, isto mostra também que movimento sob o campo gravitacional é descrito pela métrica, sugerindo novamente que a gravitação deva ser vista como um fenômeno geométrico. Mas note que é preciso especializarmos para geodésicas do tipo tempo nesta discussão para que o tempo próprio esteja definido.

<sup>3</sup>Veja: GODINHO. Leonor; NATÁRIO. José. An Introduction to Riemannian Geometry, With Applications to Mechanics and Relativity. London: Springer, 2014.

### 3.6 Campos Gravitacionais fracos e o Limite Newtoniano da TGR

Como aplicação das ideias do presente Capítulo, vamos apresentar outro pilar fundamental da TGR: o limite Newtoniano. No capítulo anterior, mostramos como as ideias introduzidas já eram suficientes para que conseguíssemos acomodar de forma natural na teoria o princípio da equivalência. Agora, já estamos em condição de mostrar como a descrição dos efeitos gravitacionais segundo a TGR se reduz à descrição Newtoniana no regime de campos gravitacionais fracos. Esta é uma checagem de consistência importante: qualquer nova teoria de gravitação deve reproduzir a teoria Newtoniana nos regimes em que ela goza de boa validação experimental.

Primeiro, o que é o regime de campos gravitacionais fracos? O princípio é o seguinte: na ausência completa de efeitos gravitacionais, a geometria do espaço-tempo modelo,  $(M, g)$ , deve ser descrita pela métrica de Minkowski. Assim, na presença de campos gravitacionais fracos, ela deve ser bem descrita por métricas  $g$  que desviem pouco da métrica de Minkowski.

Assim, temos que no limite de campo gravitacional fraco, deve existir um sistema de coordenadas cobrindo a região de interesse  $U$  do espaço-tempo  $(M, g)$  relativamente ao qual o tensor métrico possui a forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

onde  $|h_{\mu\nu}| \ll 1 \forall \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ . Além disso, vamos assumir que relativamente a este referencial local a métrica  $g$  é “estacionária”, significando que

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0 \quad \forall \nu, \mu = 0, 1, 2, 3,$$

apesar de que não necessariamente  $x^0$  representa uma coordenada temporal. Considere uma partícula em queda livre, cuja a linha-mundo assumiremos parametrizada pelo tempo próprio segundo a equação

$$C : x^\mu = x^\mu(\tau),$$

que para  $\tau \geq 0$  deve satisfazer a equação das geodésicas:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0.$$

Defina uma coordenada temporal  $t$  introduzindo

$$x^0 = ct.$$

Então, afirmamos que vale o seguinte

**Lema 3.6.1.** *A linha-mundo  $C$  também pode ser parametrizada de maneira natural em função de  $t$ .*

*Demonstração.* Nas coordenadas  $(t, x^1, x^2, x^3)$  a curva  $C$  se escreve como

$$\tau \mapsto (t(\tau), x^1(\tau), \dots, x^3(\tau)),$$

onde a função  $t(\tau)$  satisfaz portanto<sup>4</sup>

$$c \frac{dt}{d\tau} = \frac{dx^0}{d\tau}$$

<sup>4</sup>Ao escrevermos a curva  $C$  no sistema  $(t, x^1, \dots, x^3)$  como  $\tau \mapsto (t(\tau), x^1(\tau), \dots, x^3(\tau))$ , estamos considerando a imagem de  $C$  parametrizada por  $\tau$  mediante a transformação de coordenadas  $(t, x^1, \dots, x^3) = (\frac{x^0}{c}, x^1, \dots, x^3)$ . Como discutimos anteriormente, esta é a curva paramétrica que representa  $C$  corretamente neste novo referencial.

Ora, como  $C$  é a linha-mundo de uma partícula massiva e, portanto, é uma curva do tipo tempo, devemos ter

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)^2 < 0 \quad \forall \tau. \quad (3.19)$$

Como  $\sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)^2 \geq 0$ , isto significa que devemos ter  $\frac{dx^0}{d\tau} \neq 0 \quad \forall \tau$ . De fato, caso houvesse um  $\tau_*$  tal que  $\left.\frac{dx^0}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_*} = 0$  a equação (3.19) implicaria que seria  $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \geq 0$ , um absurdo. Juntamente ao fato de que  $\frac{dx^0}{d\tau}(\tau) \in C^\infty$ , pois  $C$  é suave segue que ou  $\frac{dx^0}{d\tau}(\tau) > 0 \quad \forall \tau$  ou  $\frac{dx^0}{d\tau}(\tau) < 0 \quad \forall \tau$ . Vemos que  $x^0(\tau)$  é uma função monótona logo invertível. Através da função inversa  $\tau = \tau(x^0)$  e da equação paramétrica de  $C$  podemos reparametrizar, portanto,  $C$  em função de  $x^0$ , ou de  $t$  via  $x^0 = ct$ , como havíamos afirmado.  $\square$

Levando em conta que a partícula está em queda-livre em um campo gravitacional fraco e estamos analisando um regime onde o tratamento Newtoniano para a dinâmica da partícula deve ser justificável, vamos supor que no referencial  $(t, x^1, \dots, x^3)$  a trajetória da partícula parametrizada pela coordenada temporal  $t$  satisfaz

$$\frac{dx^i}{dt} \ll c \quad \forall i = 1, 2, 3. \quad (3.20)$$

Ou seja, que no referencial  $(t, x^1, \dots, x^3)$  a velocidade em todas as direções espaciais é muito menor que a velocidade da luz. Isto equivale a supor que

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau} \quad \forall i = 1, 2, 3,$$

pois  $x^0 = ct \Rightarrow \frac{dx^0}{dt} = c$ , de forma que a equação (3.20) acima equivale a  $\frac{dx^i}{dt} \ll \frac{dx^0}{dt} \Leftrightarrow \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau}\right) \ll \frac{dx^0}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}$ . Então, na equação das geodésicas, os termos em que  $\nu, \sigma$  na segunda parcela do membro esquerdo podem ser ignorados por serem desprezíveis frente ao termo em que  $\nu, \mu = 0$ . A equação das geodésicas para a nossa partícula se reduz assim a:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0, \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Ou seja, se reduz a

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + c^2 \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0, \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (3.21)$$

Posto isto, olhemos para os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_0 g_{0\rho} + \partial_0 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{00}) = -\frac{1}{2}g^{\mu\rho}\partial_\rho g_{00}$ , onde usamos na segunda igualdade a hipótese de que a métrica é estacionária. Usando nesta última por outro lado que

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, g_{00} = \eta_{00} + h_{00} \Rightarrow \partial_\rho g_{00} = \partial_\rho h_{00},$$

e mantendo termos até ordem líder em  $h_{\mu\nu}$  (já que  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ), vem:

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\partial_{\rho}h_{00}.$$

Visto que  $\partial_0 h_{00} = 0$ , segue que

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^3\eta^{\mu\rho}\partial_{\rho}h_{00}.$$

Vemos que

- $\Gamma_{00}^0 = 0$ , pois  $\eta^{0\rho} = 0$  quando  $\rho = 1, 2, 3$ .
- $\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^3\eta^{\mu\rho}\partial_{\rho}h_{00} = -\frac{1}{2}\partial_{\mu}h_{00} \forall \mu = 1, 2, 3$ , pois  $\eta^{\mu\rho} = \delta^{\mu\rho}$ .

Levando estas expressões para os símbolos de Christoffel na equação (3.21) obtemos as seguintes equações:

- $\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = 0$ , ou visto que  $x^0 = ct$ ,  $\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0$
- $\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} - \frac{c^2}{2}(\partial_{\mu}h_{00})\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad \forall \mu = 1, 2, 3$ .

A primeira expressão acima nos diz que  $\frac{dt}{d\tau} = \text{constante}$ . Como  $\frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \left(\frac{dx^{\mu}}{dt}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)$  e

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right) = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\frac{d^2x^{\mu}}{dt^2} + \frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{d^2t}{d\tau^2},$$

o que fornece  $\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\frac{d^2x^{\mu}}{dt^2}$ , temos da segunda equação que

$$\frac{d^2x^{\mu}}{dt^2} = \frac{1}{2}c^2(\partial_{\mu}h_{00}), \quad \forall \mu = 1, 2, 3 \quad (3.22)$$

Analisemos a expressão (3.22). Como  $\partial_0 h_{00} = 0$ , podemos tratar  $h_{00}$  como uma função apenas das coordenadas espaciais  $x^1, x^2, x^3$ . Daí, nosso resultado principal é o seguinte:

Se identificarmos

$$\phi(x^1, x^2, x^3) = -\frac{1}{2}c^2h_{00}$$

como sendo o potencial gravitacional Newtoniano, então a equação (3.22) será a equação Newtoniana de movimento

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi$$

associada, se escrevemos  $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ .

Observe que, equivalentemente, podemos dizer: nossa descrição de gravidade como curvatura do espaço-tempo se reduz à teoria Newtoniana se no limite de um campo gravitacional fraco e de uma partícula que se move lentamente a métrica satisfaz, no referencial  $(x^0, \dots, x^3)$ , que

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right),$$

onde  $\phi(x^1, x^2, x^3)$  é o potencial Newtoniano associado.

# Capítulo 4

## Ferramentas Matemáticas III

Precisaremos derivar campos tensoriais em variedades. Para tanto vamos estender as ideias da derivada covariante para campos vetoriais.

### 4.1 Derivada Covariante de Campos de Tensores

A noção de derivada covariante pode ser estendida para campos tensoriais da seguinte forma.

**Definição 4.1.1.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo e  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita para à métrica  $g$ . Definimos a derivada covariante para campos tensoriais  $T$  em  $M$  como sendo a única operação que leva um tensor  $T$  do tipo  $(k, l)$  em um campo tensorial  $\nabla T$  do tipo  $(k, l + 1)$  e satisfaz às seguintes propriedades.*

1. (aditividade)  $\nabla(T + S) \equiv \nabla T + \nabla S$ , para qualquer outro tensor  $S$  do tipo  $(k, l)$ .
2. (regra de Leibniz para o produto tensorial)  $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$  para qualquer campo tensorial  $S$  do tipo  $(p, q)$

**Observação 4.1.1.** *Nesse caso,  $T \otimes S$  é um tensor do tipo  $(k + p, l + q)$ . Isto coincide com lado direito: com  $\nabla T$  do tipo  $(k, l + 1)$ ,  $(\nabla T) \otimes S$  será do tipo  $(k + p, l + q + 1)$ , e com  $\nabla S$  do tipo  $(p, q + 1)$ ,  $T \otimes (\nabla S)$  será do tipo  $(k + p, l + q + 1)$ .*

3. (consistência com o caso vetorial) *Se  $T$  é um campo tensorial do tipo  $(1, 0)$ , isto é, um campo vetorial, então pede se consistência com a derivação covariante de campos de vetores, no sentido de que se  $\omega$  é campo de um 1-formas e  $F$  é um campo de vetores, então*

$$(\nabla T)(\omega, F) = (\nabla_F T)(\omega)$$

**Observação 4.1.2.**  $\nabla_F T$  denota a derivada covariante usual de  $T$  visto como campo vetorial. Nesse caso  $\nabla_F T$  é outro campo vetorial, que subsequentemente pode ser visto como um tensor do tipo  $(1, 0)$  e daí pode agir em uma 1-forma da maneira usual. Note que nesse caso  $\nabla T$  é um tensor do tipo  $(1, 1)$ .

4. (compatibilidade com a contração de tensores)  $\nabla(C_{i,j}T) \equiv C_{i,j}(\nabla T)$  onde  $C_{i,j}T$  é a contração do tensor  $T$  do tipo  $(k, l)$ , que é um tensor do tipo  $(k - 1, l - 1)$ .

5. para um tensor do tipo  $(0,0)$ , isto é uma função escalar  $f$ ,  $\nabla f$  é um tensor do tipo  $(0,1)$ , ou seja, uma 1-forma que define-se como sendo a que age em campos vetoriais  $F$  do seguinte modo:

$$(\nabla f)(F) = D_F f.$$

Aqui,  $D_F f$  denota a derivada covariante da função escalar  $f$  na direção do campo  $F$ , expressa por

$$D_F f = \sum_{\mu} F^{\mu} \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}$$

relativamente a um dado referencial local  $x^{\mu}$  ( $f(x^0, \dots, x^3)$ ) e  $F = F^{\mu} \partial_{\mu}$  sendo as representações locais associadas).

Verificamos que especificada a conexão  $\nabla$  (no caso, utilizaremos  $\nabla$  como sendo a conexão de Levi-Civita para a métrica  $g$ , o que é suficiente para nossos propósitos) em  $M$ , uma derivação covariante de campos tensoriais satisfazendo os axiomas acima, fica, de fato, unicamente determinada.

Para isso, nosso primeiro passo será mostrar que  $\nabla T$  está unicamente determinada para um tensor  $T$  do tipo  $(1,0)$ . Suponha que  $x^{\mu}$  seja um referencial local cobrindo um aberto  $U \subset M$  e seja  $T = T^{\mu} \partial_{\mu}$  a representação local de  $T$  associada.

**Observação 4.1.3.** A ação em uma 1-forma  $\omega = \omega_{\lambda} dx^{\lambda}$  é  $T(\omega) = T^{\mu}(\partial_{\mu} \cdot \omega) = T^{\mu} \omega_{\lambda} \partial_{\mu} \cdot dx^{\lambda} = T^{\mu} \omega_{\lambda} \delta_{\mu}^{\lambda} = T^{\mu} \omega_{\mu}$ .

Então, afirmamos que se  $\nabla T = \Theta_{\nu}^{\mu} \partial_{\mu} \otimes dx^{\nu}$  for a representação local para o  $(1,1)$ -tensor  $\nabla T$  associado, as componentes  $\Theta_{\nu}^{\mu}$  para ele estão fixadas pela condição (3) de compatibilidade com a definição de derivada covariante no caso vetorial.

Com efeito, sejam  $F, \omega$  um campo de vetores e uma 1-forma respectivamente, dados relativamente ao referencial  $x^{\mu}$  por  $\omega = \omega_{\sigma} dx^{\sigma}$  e  $F = F^{\sigma} \partial_{\sigma}$ . Temos que se  $T$  for visto como um campo vetorial, então o campo  $\nabla_F T$  será

$$\nabla_F T = \left( \frac{\partial T^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} F^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} T^{\nu} F^{\rho} \right) \partial_{\lambda};$$

este último, visto como funcional multilinear, age na 1-forma  $\omega$  como

$$\begin{aligned} (\nabla_F T)(\omega) &= \left( \frac{\partial T^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} F^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} T^{\nu} F^{\rho} \right) \omega_{\sigma} (\partial_{\lambda} \cdot dx^{\sigma}) \\ &= \left( \frac{\partial T^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} F^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} T^{\nu} F^{\rho} \right) \omega_{\lambda} \\ &= \left( \frac{\partial T^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} T^{\rho} \right) F^{\nu} \omega_{\lambda}. \end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} (\nabla T)(\omega, F) &= \Theta_{\nu}^{\mu} (\partial_{\mu} \otimes dx^{\nu}) (\omega_{\sigma} dx^{\sigma}, F^{\rho} \partial_{\rho}) \\ &= \Theta_{\nu}^{\mu} \omega_{\sigma} F^{\rho} (\partial_{\mu} \cdot dx^{\sigma}) (dx^{\nu} \cdot \partial_{\rho}) \\ &= \Theta_{\nu}^{\mu} \omega_{\mu} F^{\nu} \\ &= \Theta_{\nu}^{\lambda} F^{\nu} \omega_{\lambda}. \end{aligned}$$

A parte (3) da definição pede que seja

$$(\nabla_F T)(\omega) = \nabla T(\omega, F).$$

Levando isto em conta temos

$$\Theta_\nu^\lambda \equiv \frac{\partial T^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\lambda T^\rho,$$

que fixa de maneira única as componentes de  $\nabla T$ , conforme afirmado. Ou seja: a representação local do tensor  $\nabla T$  associado ao referencial  $x^\mu$  será

$$\nabla T \equiv \left( \frac{\partial T^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu T^\rho \right) \partial_\mu \otimes dx^\nu.$$

Nosso segundo passo agora será mostrar que  $\nabla\omega$  também está unicamente determinada para um tensor do tipo  $(0, 1)$ , cuja representação local associada ao referencial local  $x^\mu$  denotaremos por  $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ . Denotaremos provisoriamente a representação local associada de  $\nabla\omega$  por

$$\nabla\omega \equiv W_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu.$$

Seja  $F$  um campo vetorial arbitrário dado relativamente ao referencial  $x^\mu$  por  $F = F^\sigma \partial_\sigma$ . Então,  $F \otimes \omega$  é um tensor do tipo  $(1, 1)$ .

**Lema 4.1.1.** *A contração  $C_{1,1}(F \otimes \omega)$  do tensor  $F \otimes \omega$  é o tensor do tipo  $(0, 0)$  dado por*

$$C_{1,1}(F \otimes \omega) = \omega(F).$$

*Demonstração.* De fato,

$$C_{1,1}(F \otimes \omega) = F^\sigma \omega_\sigma (\partial_\sigma \otimes dx^\sigma) = F^\sigma \omega_\sigma = \omega(F).$$

□

Pela propriedade (4) devemos ter

$$\nabla[C_{1,1}(F \otimes \omega)] = C_{1,1}\nabla(F \otimes \omega) = C_{1,1}((\nabla F) \otimes \omega + F \otimes \nabla\omega). \quad (4.1)$$

Vimos que  $C_{1,1}(F \otimes \omega)$  é a função escalar  $\omega(F)$ , de forma  $\nabla[C_{1,1}(F \otimes \omega)]$  é uma 1-forma a saber,  $\nabla(\omega(F))$ . Além disso:

- $\nabla F$  é um tensor do tipo  $(1, 1)$ ,  $\omega$  é um tensor do tipo  $(0, 1)$ , e daí  $(\nabla F) \otimes \omega$  é um tensor do tipo  $(1, 2)$ . Contraído, se torna um tensor do tipo  $0, 1$ , ou seja, uma 1-forma.
- $\nabla\omega$  é um tensor do tipo  $(0, 2)$ , e  $F$  é um tensor do tipo  $(1, 0)$ , de forma que  $F \otimes \nabla\omega$  é um tensor do tipo  $(1, 2)$ . Contraído, se torna o tensor do tipo  $(0, 1)$ , ou seja, uma 1-forma.

Logo, a equação (4.1) acima coloca a 1-forma  $\nabla(\omega(F))$  em igualdade com a soma de duas 1-formas no lado direito,

$$\nabla(\omega(F)) = C_{1,1}((\nabla F) \otimes \omega) + C_{1,1}(F \otimes \nabla\omega).$$

Em termos da ação destas 1-formas em um campo de vetores arbitrário  $X$ , isto se lê

$$\nabla(\omega(F)) \cdot X = C_{1,1}(\nabla F \otimes \omega) \cdot X + C_{1,1}(F \otimes \nabla\omega) \cdot X.$$

Agora, suponha que seja  $X = \partial_\mu$  e  $F = \delta_\nu^\beta \partial_\beta = \partial_\nu$ , de forma que com  $\omega = \omega_\tau dx^\tau$  se tenha  $\omega(F) = \omega_\nu$ . Então, teremos

$$\begin{aligned} \nabla(\omega(F)) \cdot X &= \nabla(\omega_\nu) \cdot X = D_X \omega_\nu \\ &= D_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Com  $\nabla F = \left( \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^\theta} + \Gamma_{\alpha\theta}^\gamma F^\alpha \right) \partial_\gamma \otimes dx^\theta$  e  $F = \delta_\nu^\beta \partial_\beta$  teremos

$$\nabla F = (\Gamma_{\alpha\theta}^\gamma \delta_\nu^\alpha) \partial_\gamma \otimes dx^\theta = \Gamma_{\nu\theta}^\gamma \partial_\gamma \otimes dx^\theta.$$

E daí

$$\nabla F \otimes \omega = \Gamma_{\nu\theta}^\gamma \omega_\tau \partial_\gamma \otimes dx^\theta \otimes dx^\tau,$$

e

$$C_{1,1}(\nabla F \otimes \omega) = \Gamma_{\nu\theta}^\sigma \omega_\sigma dx^\theta.$$

Assim,

$$C_{1,1}(\nabla F \otimes \omega) \cdot \partial_\mu = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \omega_\sigma.$$

Como

$$F \otimes \nabla \omega = F^\beta W_{\psi\kappa} \partial_\beta \otimes dx^\psi dx^\kappa,$$

temos

$$C_{1,1}(F \otimes \nabla \omega) = F^\sigma W_{\psi\sigma} dx^\psi,$$

e daí

$$C_{1,1}(F \otimes \nabla \omega) \cdot \partial_\mu = F^\sigma W_{\mu\sigma} = \delta_\nu^\sigma W_{\mu\sigma} = W_{\mu\nu}.$$

Então, temos que a equação

$$\nabla(\omega(F)) \cdot X = \nabla_X(\omega(F)) = C_{1,1}((\nabla F) \otimes \omega) \cdot X + C_{1,1}(F \otimes \nabla \omega) \cdot X$$

para  $X = \partial_\mu$  e  $F = \partial_\nu$  fornece

$$\partial_\mu \omega_\nu = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma + W_{\mu\nu},$$

donde segue que

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma.$$

Portanto,  $\nabla \omega$  fica unicamente determinado como

$$\nabla \omega = (\partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma) dx^\mu \otimes dx^\nu.$$

Agora, como nosso último passo, usaremos os resultados obtidos anteriormente para campos vetoriais e 1-formas, digamos  $V$  e  $\omega$  respectivamente, sendo

$$\nabla V = \left( \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\sigma \right) \partial_\mu \otimes dx^\nu$$

e

$$\nabla \omega = \left( \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \omega_\sigma \right) dx^\mu \otimes dx^\nu,$$

para considerar o caso de um tensor arbitrário do tipo  $(k, l)$ .

Suponha que relativamente ao referencial local  $x^\mu$  o campo tensorial  $T$  é dado por

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l}.$$

Então, afirmamos que o tensor  $\nabla T$  é dado relativamente a esse referencial pela seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} \nabla T &= (\partial_\rho T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + T^{\theta \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \Gamma_{\rho\theta}^{\mu_1} + \dots \\ &+ T^{\mu_1 \dots \theta}_{\nu_1 \dots \nu_l} \Gamma_{\rho\theta}^{\mu_k} - T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\theta \dots \nu_l} \Gamma_{\rho\nu_1}^\theta - \dots \\ &- T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \theta} \Gamma_{\rho\nu_l}^\theta) \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l} \otimes dx^\rho. \end{aligned} \quad (4.3)$$

*Demonstração.* Isto pode ser verificado facilmente utilizando os casos  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  anteriores  $\square$

Em conclusão, vamos sumarizar os resultados obtidos. Seja  $V$  um campo vetorial,  $\omega$  um campo de 1-formas, e  $T$  um campo tensorial do tipo  $(k, l)$ , dados relativamente ao referencial local  $x^\mu$  por

$$V = V^\alpha \partial_\alpha, \quad \omega = \omega_\alpha dx^\alpha,$$

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l}.$$

Então

$$\begin{aligned} \nabla V &= \Theta^\mu_{\nu} \partial_\mu \otimes dx^\nu \\ \nabla \omega &= W_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \\ \nabla T &= \mathcal{T}^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l \rho} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l} \otimes dx^\rho \end{aligned}$$

têm suas componentes,  $\theta^\mu_{\nu}$ ,  $W_{\mu\nu}$ ,  $\mathcal{T}^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l \rho}$ , relativamente ao referencial local  $x^\mu$  representadas conforme especificado abaixo.

- $\Theta^\mu_{\nu} \rightarrow \nabla_{\nu} V^\mu$ , onde definimos

$$\nabla_{\nu} V^\mu = \partial_{\nu} \omega^\mu - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}$$

- $W_{\mu\nu} \rightarrow \nabla_{\mu} \omega_{\nu}$ , onde definimos

$$\nabla_{\mu} \omega_{\nu} = \frac{\partial \omega_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \omega_{\sigma}$$

- $\mathcal{T}^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l \rho} \rightarrow \nabla_{\rho} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ , onde definimos

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} &= \partial_{\rho} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + T^{\theta \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \Gamma_{\rho\theta}^{\mu_1} + \dots \\ &+ T^{\mu_1 \dots \theta}_{\nu_1 \dots \nu_l} \Gamma_{\rho\theta}^{\mu_k} - T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\theta \dots \nu_l} \Gamma_{\rho\nu_1}^{\theta} - \dots \\ &- T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \theta} \Gamma_{\rho\nu_1}^{\theta} \end{aligned} \quad (4.4)$$

## 4.2 O Tensor Curvatura de Riemann

Dado um campo vetorial  $X$  em  $M$ , vamos analisar agora o campo tensorial

$$\nabla(\nabla X).$$

Como  $\nabla X$  é um campo tensorial do tipo  $(1, 1)$  então  $\nabla(\nabla X)$  será um campo tensorial do tipo  $(1, 2)$ . Seja  $x^\mu$  um referencial cobrindo um aberto  $U \subset M$ , relativo ao qual  $X = X^\kappa \partial_\kappa$  e

$$\nabla X = (\partial_{\nu} X^{\mu} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} X^{\sigma}) \partial_{\mu} \otimes dx^{\nu} := \Theta^{\mu}_{\nu} \partial_{\mu} \otimes dx^{\nu}.$$

Então, relativamente a esse referencial, podemos escrever

$$\nabla(\nabla X) = H^{\mu}_{\nu\rho} \partial_{\mu} \otimes dx^{\nu} \otimes dx^{\rho},$$

onde  $H_{\nu\rho}^{\mu} = \partial_{\rho}\Theta_{\nu}^{\mu} + \Theta_{\nu}^{\theta}\Gamma_{\rho\theta}^{\mu} - \Theta_{\theta}^{\mu}\Gamma_{\rho\nu}^{\theta}$ .

Considere as seguintes componentes de  $\nabla(\nabla X)$ :  $\nabla(\nabla X)(dx^{\epsilon}, \partial_{\beta}, \partial_{\alpha})$  e  $\nabla(\nabla X)(dx^{\epsilon}, \partial_{\alpha}, \partial_{\beta})$ , para  $\alpha, \beta, \epsilon = 0, 1, 2, 3$ . Temos por um lado

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla X)(dx^{\epsilon}, \partial_{\alpha}, \partial_{\beta}) &= \partial_{\beta}\Theta_{\alpha}^{\epsilon} + \Theta_{\alpha}^{\theta}\Gamma_{\beta\theta}^{\epsilon} - \Theta_{\theta}^{\epsilon}\Gamma_{\beta\alpha}^{\theta} \\ &= \partial_{\beta}(\partial_{\alpha}X^{\epsilon} + \Gamma_{\alpha\sigma}^{\epsilon}X^{\sigma}) + \Gamma_{\beta\theta}^{\epsilon}(\partial_{\alpha}X^{\theta} + \Gamma_{\alpha\sigma}^{\theta}X^{\sigma}) \\ &\quad - \Gamma_{\beta\alpha}^{\theta}(\partial_{\theta}X^{\epsilon} + \Gamma_{\theta\sigma}^{\epsilon}X^{\sigma})\end{aligned}\quad (4.5)$$

**Observação 4.2.1.** *Esta última pode ser facilmente lembrada definindo  $\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}X^{\epsilon} = \nabla_{\beta}(\nabla_{\alpha}X^{\epsilon})$ , sendo esta expressão vista como fornecendo as componentes da derivada covariante do tensor  $\nabla_{\alpha}X^{\epsilon}\partial_{\epsilon} \otimes dx^{\alpha}$ . Utilizaremos esta notação doravante.*

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla X)(dx^{\epsilon}, \partial_{\beta}, \partial_{\alpha}) = \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}X^{\epsilon} &= \partial_{\alpha}\Theta_{\beta}^{\epsilon} + \Theta_{\beta}^{\theta}\Gamma_{\alpha\theta}^{\epsilon} - \Theta_{\theta}^{\epsilon}\Gamma_{\alpha\beta}^{\theta} \\ &= \partial_{\alpha}(\partial_{\beta}X^{\epsilon} + \Gamma_{\beta\sigma}^{\epsilon}X^{\sigma}) + \Gamma_{\alpha\theta}^{\epsilon}(\partial_{\beta}X^{\theta} + \Gamma_{\beta\sigma}^{\theta}X^{\sigma}) \\ &\quad - \Gamma_{\alpha\beta}^{\theta}(\partial_{\theta}X^{\epsilon} + \Gamma_{\theta\sigma}^{\epsilon}X^{\sigma})\end{aligned}\quad (4.6)$$

Então, fica claro pelas expressões para  $\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}X^{\epsilon}$  e  $\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}X^{\epsilon}$ , que em geral estas componentes serão diferentes para  $\alpha \neq \beta$  e  $X$  arbitrário. Isto é, que em geral

$$\nabla(\nabla X)(dx^{\epsilon}, \partial_{\beta}, \partial_{\alpha}) - \nabla(\nabla X)(dx^{\epsilon}, \partial_{\alpha}, \partial_{\beta}) \neq 0,$$

ou ainda, empregando as notações introduzidas, que em geral

$$\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}X^{\epsilon} - \nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}X^{\epsilon} \neq 0.$$

Entretanto, suponha que estamos no espaço-tempo de Minkowski. Então (se quiser, a menos de se restringir o aberto  $U \subset M$  se necessário), podemos assumir que existe outro referencial  $\tilde{x}^{\mu}$  cobrindo  $U$  tal que  $g_{\mu\nu}|_p \equiv \eta_{\mu\nu} \forall p \in U$ . Nesse caso os coeficientes de conexão associados a  $\tilde{x}^{\mu}$  são todos nulos, e daí independentemente de qual for o campo  $X$  teremos

$$\tilde{\nabla}_{\alpha}\tilde{\nabla}_{\beta}\tilde{X}^{\epsilon} - \tilde{\nabla}_{\beta}\tilde{\nabla}_{\alpha}\tilde{X}^{\epsilon} \equiv 0,$$

onde  $X = \tilde{X}^{\epsilon}\tilde{\partial}_{\epsilon}$ . Pois, de fato,

$$\tilde{\nabla}_{\rho}\tilde{\nabla}_{\nu}\tilde{X}^{\mu} := \tilde{\nabla}_{\rho}(\tilde{\nabla}_{\nu}\tilde{X}^{\epsilon}) = \tilde{\partial}_{\rho}(\tilde{\nabla}_{\nu}\tilde{X}^{\mu}) + \tilde{\Gamma}_{\rho\theta}^{\mu}\tilde{\nabla}_{\nu}\tilde{X}^{\theta} - \tilde{\Gamma}_{\rho\nu}^{\theta}\tilde{\nabla}_{\theta}\tilde{X}^{\mu} = \tilde{\partial}_{\rho}(\tilde{\partial}_{\nu}\tilde{X}^{\mu}),$$

de forma que logicamente será nesse caso

$$\tilde{\nabla}_{\alpha}\tilde{\nabla}_{\beta}\tilde{X}^{\epsilon} = \tilde{\nabla}_{\beta}\tilde{\nabla}_{\alpha}\tilde{X}^{\epsilon}$$

Como

$$\tilde{\nabla}_{\alpha}\tilde{\nabla}_{\beta}\tilde{X}^{\epsilon} - \tilde{\nabla}_{\beta}\tilde{\nabla}_{\alpha}\tilde{X}^{\epsilon} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \tilde{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\beta}} \frac{\partial \tilde{x}^{\epsilon}}{\partial x^{\lambda}} (\nabla_{\rho}\nabla_{\nu}X^{\lambda} - \nabla_{\nu}\nabla_{\rho}X^{\lambda})$$

vemos que nesse caso será

$$\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}X^{\epsilon} - \nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}X^{\epsilon} = 0 \quad \forall \alpha, \beta$$

independente de qual for o campo  $X$ . Isto é, será

$$\nabla(\nabla X)(dx^{\epsilon}, \partial_{\beta}, \partial_{\alpha}) - \nabla(\nabla X)(dx^{\epsilon}, \partial_{\alpha}, \partial_{\beta}) = 0 \quad \forall \beta, \alpha, \epsilon$$

qualquer que seja o campo  $X$ . Equivalentemente, temos então o seguinte

**Teorema 4.2.1.** *Seja  $U \subset M$  um aberto coberto por um referencial local  $x^\mu$ . Se existe algum campo vetorial  $X$  definido em  $U$  para o qual*

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta X^\epsilon - \nabla_\beta \nabla_\alpha X^\epsilon$$

*não é identicamente nulo nesta região para alguma escolha de  $\alpha, \beta, \epsilon \in \{0, 1, 2, 3\}$ , então não existe referencial local  $\tilde{x}^\mu$  cobrindo  $U$  relativamente ao qual se tenha  $\tilde{g}_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$ . Em particular,  $(M, g)$  não é (isométrico ao) o espaço-tempo de Minkowski.*

Quando dizemos que  $(M, g)$  não é o espaço-tempo de Minkowski acima, interpreta-se: a representação local  $g_{\mu\nu}$  de  $g$  associada a um certo referencial  $(U, x^\mu)$  de  $M$  não pode ser reduzida a  $\eta_{\mu\nu}$  através de uma mudança de coordenadas. Se  $(M, g)$  é o espaço-tempo de Minkowski, qualquer aberto  $U \subset M$  pode ser coberto por coordenadas  $x^\mu$  relativas às quais a métrica tem representação local  $\eta_{\mu\nu}$ .

Estas considerações motivam a introdução do chamado “Tensor Curvatura de Riemann”. Trata-se do único tensor do tipo  $(1, 3)$  que satisfaz, dado um referencial local  $(U, x^\mu)$  para  $(M, g)$  cobrindo o aberto  $U \subset M$ , à equação

$$R(dx^\epsilon; \partial_\alpha, \partial_\beta; X) = \nabla(\nabla X)(dx^\epsilon; \partial_\beta, \partial_\alpha) - \nabla(\nabla X)(dx^\epsilon; \partial_\alpha, \partial_\beta).$$

para qualquer campo vetorial  $X$  em  $U$ . Se a representação local associada para  $X$  for  $X = X^\gamma \partial_\gamma$ , teremos

$$R(dx^\epsilon; \partial_\alpha; \partial_\beta; X) = R(dx^\epsilon; \partial_\alpha; \partial_\beta; \partial_\gamma) X^\gamma = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon X^\gamma$$

Assim, em termos das componentes do tensor de Riemann, podemos escrever

$$\nabla(\nabla X)(dx^\epsilon; \partial_\beta, \partial_\alpha) - \nabla(\nabla X)(dx^\epsilon; \partial_\alpha, \partial_\beta) = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon X^\gamma.$$

Desta forma:

- para o espaço tempo de Minkowski  $(M, g)$ , o tensor de Riemann possui componentes  $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon$  identicamente nulas relativamente a qualquer referencial local.
- se  $R$  possuir alguma componente não-nula associado a um dado referencial local  $x^\mu$  cobrindo uma região aberta  $U \subset M$ , então não é possível cobrir  $U$  com um referencial local  $\tilde{x}^\mu$  relativo ao qual as componentes do tensor métrico sejam  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ .

Interpretamos a noção de curvatura para um espaço tempo  $(M, g)$  como a ocorrência de um tensor de Riemann não nulo. Assim, diremos que um espaço tempo  $(M, g)$  é curvo se  $R \neq 0$ . A seguir, quando estudarmos a noção de desvio geodésico, veremos como as componentes de  $R$  quantificam o grau de curvatura de  $(M, g)$  em um dado ponto também no sentido geométrico.

Vamos calcular explicitamente as componentes do tensor de Riemann  $R$  relativas a um referencial local  $x^\mu$  cobrindo um aberto  $U \subset M$ . Para isso veja que

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\beta X^\epsilon &= \partial_\alpha (\partial_\beta X^\epsilon + \Gamma_{\beta\sigma}^\epsilon X^\sigma) + (\partial_\beta X^\theta + \Gamma_{\beta\sigma}^\theta X^\sigma) \Gamma_{\alpha\theta}^\epsilon - \\ &\quad - (\partial_\theta X^\epsilon + \Gamma_{\theta\sigma}^\epsilon X^\sigma) \Gamma_{\alpha\beta}^\theta \\ &= \partial_\alpha \partial_\beta X^\epsilon + (\partial_\alpha \Gamma_{\beta\sigma}^\epsilon) X^\sigma + \Gamma_{\beta\sigma}^\epsilon (\partial_\alpha X^\sigma) + (\partial_\beta X^\theta) \Gamma_{\alpha\theta}^\epsilon + \\ &\quad + \Gamma_{\beta\sigma}^\theta \Gamma_{\alpha\theta}^\epsilon X^\sigma - (\partial_\theta X^\epsilon) \Gamma_{\alpha\beta}^\theta - \Gamma_{\theta\sigma}^\epsilon \Gamma_{\alpha\beta}^\theta X^\sigma. \end{aligned}$$

Por outro lado, analogamente,

$$\begin{aligned}\nabla_\beta \nabla_\alpha X^\epsilon &= \partial_\beta \partial_\alpha X^\epsilon + (\partial_\beta \Gamma_{\alpha\sigma}^\epsilon) X^\sigma + \Gamma_{\alpha\sigma}^\epsilon (\partial_\beta X^\sigma) + (\partial_\alpha X^\theta) \Gamma_{\beta\theta}^\epsilon + \\ &+ \Gamma_{\alpha\sigma}^\theta \Gamma_{\beta\theta}^\epsilon X^\sigma - (\partial_\theta X^\epsilon) \Gamma_{\beta\alpha}^\theta - \Gamma_{\theta\sigma}^\epsilon \Gamma_{\beta\alpha}^\theta X^\sigma.\end{aligned}$$

Logo

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta X^\epsilon - \nabla_\beta \nabla_\alpha X^\epsilon = (\partial_\alpha \Gamma_{\beta\sigma}^\epsilon - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\sigma}^\epsilon + \Gamma_{\beta\sigma}^\theta \Gamma_{\alpha\theta}^\epsilon - \Gamma_{\alpha\sigma}^\theta \Gamma_{\beta\theta}^\epsilon) X^\sigma = R_{\alpha\beta\sigma}{}^\epsilon X^\sigma.$$

de forma que o resultado é:

$$R_{\alpha\beta\sigma}{}^\epsilon = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\sigma}^\epsilon - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\sigma}^\epsilon + \Gamma_{\beta\sigma}^\theta \Gamma_{\alpha\theta}^\epsilon - \Gamma_{\alpha\sigma}^\theta \Gamma_{\beta\theta}^\epsilon$$

### 4.2.1 Simetrias do Tensor Curvatura

O tensor curvatura de Riemann possui  $4^4$  componentes, mas algumas simetrias entre elas reduzem este número para 20 componentes. Vamos deduzir tais simetrias. Começamos com um referencial local  $x^\mu$  cobrindo uma região aberta  $U$  de  $M$ . Relativamente a esse referencial temos que as componentes do tensor de Riemann são dadas por

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\epsilon - \Gamma_{\beta\theta}^\epsilon \Gamma_{\alpha\gamma}^\theta + \Gamma_{\alpha\theta}^\epsilon \Gamma_{\beta\gamma}^\theta.$$

Suponha que  $(U; x^\mu)$  foi escolhido de forma que para um certo evento  $A$  em  $U$  tenha  $\partial_\alpha g_{\mu\nu} = 0$  e

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(2)$$

para eventos próximos de  $A$  (como vimos no Capítulo 2, isto é sempre possível). Então, nessa pequena região podemos escrever

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\epsilon.$$

Abaixando o índice  $\epsilon$ , obtemos

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta\gamma\epsilon} &= g_{\epsilon\theta} \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\theta - g_{\epsilon\theta} \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\theta \\ &= g_{\epsilon\theta} \left\{ \partial_\alpha \left[ \frac{1}{2} g^{\theta\lambda} (\partial_\beta g_{\gamma\lambda} + \partial_\gamma g_{\beta\lambda} - \partial_\lambda g_{\beta\gamma}) \right] \right\} - g_{\epsilon\theta} \left\{ \partial_\beta \left[ \frac{1}{2} g^{\theta\lambda} (\partial_\alpha g_{\gamma\lambda} + \partial_\gamma g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\gamma}) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} g_{\epsilon\theta} g^{\theta\lambda} \partial_\alpha (\partial_\beta g_{\gamma\lambda} + \partial_\gamma g_{\beta\lambda} - \partial_\lambda g_{\beta\gamma}) - \frac{1}{2} g_{\epsilon\theta} g^{\theta\lambda} \partial_\beta (\partial_\alpha g_{\gamma\lambda} + \partial_\gamma g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\gamma}) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\alpha (\partial_\beta g_{\gamma\epsilon} + \partial_\gamma g_{\beta\epsilon} - \partial_\epsilon g_{\beta\gamma}) - \frac{1}{2} \partial_\beta (\partial_\alpha g_{\gamma\epsilon} + \partial_\gamma g_{\alpha\epsilon} - \partial_\epsilon g_{\alpha\gamma}).\end{aligned}\tag{4.7}$$

Portanto, nesse referencial

$$R_{\alpha\beta\gamma\epsilon} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\gamma g_{\beta\epsilon} - \partial_\alpha \partial_\epsilon g_{\beta\gamma} - \partial_\beta \partial_\gamma g_{\alpha\epsilon} + \partial_\beta \partial_\epsilon g_{\alpha\gamma}).$$

Desse resultado extraímos as simetrias do tensor de curvatura no referencial  $x^\mu$  em torno de  $A$ :

1.  $R_{\beta\alpha\gamma\epsilon} = -R_{\alpha\beta\gamma\epsilon} = \frac{1}{2} (\partial_\beta \partial_\gamma g_{\alpha\epsilon} - \partial_\beta \partial_\epsilon g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\beta\epsilon} + \partial_\alpha \partial_\epsilon g_{\beta\gamma})$
2.  $R_{\gamma\epsilon\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\gamma\epsilon} = \frac{1}{2} (\partial_\epsilon \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\epsilon \partial_\alpha g_{\gamma\beta} - \partial_\gamma \partial_\beta g_{\epsilon\alpha} + \partial_\gamma \partial_\alpha g_{\epsilon\beta})$
3.  $R_{\alpha\beta\epsilon\gamma} = -R_{\alpha\beta\gamma\epsilon} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\epsilon g_{\beta\gamma} - \partial_\alpha \partial_\gamma g_{\beta\epsilon} - \partial_\beta \partial_\epsilon g_{\alpha\gamma} + \partial_\beta \partial_\gamma g_{\alpha\epsilon})$
4.  $R_{\beta\gamma\alpha\epsilon} + R_{\gamma\alpha\beta\epsilon} = -R_{\alpha\beta\gamma\epsilon} = \frac{1}{2} (-\partial_\alpha \partial_\gamma g_{\beta\epsilon} + \partial_\alpha \partial_\epsilon g_{\beta\gamma} + \partial_\beta \partial_\gamma g_{\alpha\epsilon} - \partial_\beta \partial_\epsilon g_{\alpha\gamma})$

Como estas igualdades são tensoriais e o evento  $A$  é arbitrário elas devem ser validas em todos referenciais locais.

### 4.2.2 A identidade de Bianchi

Agora, vamos deduzir uma identidade envolvendo as componentes da derivada covariante do tensor de Riemann conhecidas como "identidade de Bianchi".

**Proposição 4.2.1.**

$$\nabla_{\mu} R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\epsilon} + \nabla_{\alpha} R_{\beta\mu\gamma}{}^{\epsilon} + \nabla_{\beta} R_{\mu\alpha\gamma}{}^{\epsilon} = 0$$

*Demonstração.* Seja  $A$  um evento em  $M$  e escolhamos novamente um sistema de coordenadas  $x^{\mu}$  cobrindo uma região em torno de  $A$  tal que  $\partial_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0$  em  $A$  e, para eventos próximos de  $A$  valha

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(2).$$

Relativamente a esse referencial, temos

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\epsilon} &= \partial_{\mu} R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\epsilon} + \Gamma_{\mu\theta}^{\epsilon} R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\theta} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\theta} R_{\theta\beta\gamma}{}^{\epsilon} - \Gamma_{\mu\beta}^{\theta} R_{\alpha\theta\gamma}{}^{\epsilon} - \Gamma_{\mu\gamma}^{\theta} R_{\alpha\beta\theta}{}^{\epsilon} \\ &= \partial_{\mu} \partial_{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\epsilon} - \partial_{\mu} \partial_{\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\epsilon} + \text{termos em } \Gamma\partial\Gamma \text{ e } \Gamma\Gamma\Gamma \end{aligned}$$

As parcelas em  $\Gamma\Gamma\Gamma$  e  $\Gamma\partial\Gamma$  podem ser desprezadas, pois possuem produtos das derivadas de primeira e segunda ordem da métrica e relativamente ao referencial inercial local  $x^{\mu}$  em torno de  $A$  os coeficientes do tensor métrico são dados por  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(2)$ . Daí, relativamente ao referencial  $x^{\mu}$  podemos escrever

$$\nabla_{\mu} R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\epsilon} = \partial_{\mu} \partial_{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\epsilon} - \partial_{\mu} \partial_{\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\epsilon},$$

e portanto

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\epsilon} + \nabla_{\alpha} R_{\beta\mu\gamma}{}^{\epsilon} + \nabla_{\beta} R_{\mu\alpha\gamma}{}^{\epsilon} &= \partial_{\mu} \partial_{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\epsilon} - \partial_{\mu} \partial_{\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\epsilon} + \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \Gamma_{\mu\gamma}^{\epsilon} \\ &\quad - \partial_{\mu} \partial_{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\epsilon} + \partial_{\mu} \partial_{\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\epsilon} - \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \Gamma_{\mu\gamma}^{\epsilon} = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como esta identidade é tensorial, ela deve ser válida em todo referencial local cobrindo uma região aberta em torno de  $A$ .  $\square$

## 4.3 Desvio Geodésico

Seja  $(U; x^{\mu})$  um referencial local em  $M$  e seja

$$C_{\lambda} : x^{\mu} = x^{\mu}(\sigma, \lambda), \quad -\varepsilon \leq \sigma \leq \varepsilon, \quad -\delta \leq \lambda \leq \delta$$

uma família suave a 1-parâmetro de geodésicas do tipo tempo parametrizadas pelo tempo próprio com traço inteiramente contido em  $U \subset M$ . Assim, os campos tangentes a estas geodésicas,

$$T = T^{\mu}(\sigma, \lambda) \partial \Big|_{(x^0(\sigma, \lambda), \dots, x^3(\sigma, \lambda))},$$

satisfazem

$$g_{\mu\nu} T^{\mu} T^{\nu} = -1, \quad -\varepsilon \leq \sigma \leq \varepsilon, \quad -\delta \leq \lambda \leq \delta$$

e as curvas paramétricas

$$D_\sigma : \lambda \mapsto x^\mu(\sigma, \lambda)$$

são suaves. Assumiremos também que as curvas  $D_\sigma$ , são curvas paramétricas regulares, no sentido de que seus vetores tangentes

$$J = J^\mu(\sigma, \lambda) \partial_\mu \Big|_{(x^0(\sigma, \lambda), \dots, x^3(\sigma, \lambda))}$$

sejam sempre não-nulos e a aplicação  $x^\mu = x^\mu(\sigma, \lambda)$  é injetiva. Então: considerado uma das geodésicas  $C_\lambda$ , digamos a geodésica  $C_0$ , como a linha-mundo de uma partícula massiva de referência em queda livre conforme vista no referencial  $x^\mu$ , podemos utilizar o campo

$$J^\mu(\sigma, 0) \partial_\mu \Big|_{(x^0(\sigma, 0), \dots, x^3(\sigma, 0))}$$

ao longo de  $C_0$  para investigar a aceleração relativa de uma geodésica vizinha  $C_{\Delta\lambda}$ ,  $\Delta\lambda \approx 0$ , vista nesse referencial. Ou seja: olhando  $C_{\Delta\lambda}$  como a linha-mundo de uma partícula vizinha em queda-livre, podemos utilizar o campo  $J$  ao longo de  $C_0$  para estudar a aceleração relativa entre corpos vizinhos em queda-livre conforme visto no referencial  $x^\mu$ .

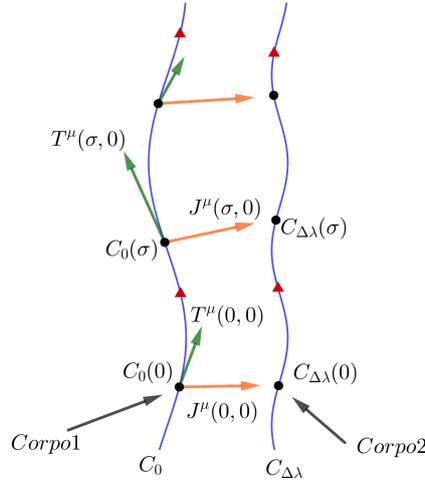


Figura 4.1: Geodésicas vizinhas.

De fato, basta observar que a “separação” entre estes corpos será dada relativamente ao referencial  $x^\mu$  por

$$(x^\mu(\sigma, \Delta\lambda) - x^\mu(\sigma, 0)) \partial_\mu \Big|_{(x^0(\sigma, 0), \dots, x^3(\sigma, 0))} := \xi(\sigma) \partial_\mu \Big|_{(x^0(\sigma, 0), \dots, x^3(\sigma, 0))} \quad (4.9)$$

e aceleração relativa entre eles, portanto, por

$$\frac{D}{d\sigma} \left( \frac{D}{d\sigma} \left( \xi(\sigma) \partial_\mu \Big|_{(x^0(\sigma, 0), \dots, x^3(\sigma, 0))} \right) \right), \quad (4.10)$$

isto é, pela derivada covariante segunda do quadri-vetor de separação  $\xi^\mu \partial_\mu$  ao longo da linha mundo de referência. Por outro lado, para cada  $\mu = 0, 1, 2, 3$  e para cada  $\Delta\lambda \approx$  pré-fixado temos em primeira ordem

$$x^\mu(\sigma, \Delta\lambda) - x^\mu(\sigma, 0) = \left( \frac{\partial x^\mu(\sigma, \lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{(\sigma, \lambda) = (\sigma, 0)} \right) \Delta\lambda := J^\mu(\sigma, \lambda) \Big|_{(\sigma, \lambda) = (\sigma, 0)} \Delta\lambda \quad (4.11)$$

de forma que

$$\frac{D^2}{d\sigma^2} \left( \xi^\mu(\sigma) \partial_\mu \Big|_{(x^0(\sigma, 0), \dots, x^3(\sigma, 0))} \right) = \Delta\lambda \frac{D}{d\sigma} \left( \frac{D}{d\sigma} \left( J^\mu(\sigma, \lambda) \partial_\mu \Big|_{(x^0(\sigma, \lambda), \dots, x^3(\sigma, \lambda))} \right) \right) \Big|_{(\sigma, \lambda) = (\sigma, 0)},$$

Assim, para determinar a aceleração relativa em (4.10) para um  $\Delta\lambda \approx 0$  qualquer, basta investigarmos  $\frac{D^2 J}{d\sigma^2}$ . Mostraremos nesta seção o seguinte:  $\frac{D^2 J}{d\sigma^2}$  é determinado pelo tensor curvatura de Riemann, sendo proporcional a ele. Do ponto de vista conceitual, este é um dos principais resultados da TGR. Lembre que o tensor curvatura de Riemann é caracterizado relativamente a um referencial local pelos coeficientes de conexão e, o que é mais importante, pelas derivadas espaciais (espaço-temporais) dos símbolos de Christoffel. O motivo pelo qual isto é mais importante é o seguinte: como vimos no estudo de geodésicas, os símbolos de Christoffel fornecem (na linguagem Newtoniana) a “aceleração devido a gravidade” para corpos em queda-livre. Assim, as derivadas dos símbolos de Christoffel fornecem as taxas de variação espaciais na aceleração devida à gravidade conforme experimentada por corpos em queda livre, é o que identifica-se como sendo o efeito de campos gravitacionais genuínos<sup>1</sup>. Estas informações ficam codificadas no tensor curvatura de Riemann. Esta é a ligação entre gravitação e curvatura de um espaço-tempo na TGR: um tensor curvatura de Riemann não-nulo (curvatura) qualifica a presença de um campo gravitacional. Por outro lado, o estabelecimento da relação entre  $\frac{D^2 J}{d\sigma^2}$  e o tensor curvatura de Riemann mostra que ele também oferece informação quantitativa, medindo a magnitude da aceleração relativa entre geodésicas vizinhas, isto é, a intensidade do campo gravitacional.

Vamos então estabelecer a relação entre  $\frac{D^2 J}{d\sigma^2}$  e o tensor de Riemann. Por definição temos que  $\forall \mu = 0, 1, 2, 3$  e em qualquer par  $(\sigma, \lambda)$

$$T^\mu(\sigma, \lambda) = \frac{\partial x^\mu(\sigma, \lambda)}{\partial \sigma},$$

e conforme já ressaltado na equação (4.11),

$$J^\mu(\sigma, \lambda) = \frac{\partial J(\sigma, \lambda)}{\partial \lambda}.$$

Considerando  $J^\mu \partial_\mu$  como um campo vetorial ao longo de  $C_\lambda$ , sua derivada covariante ao longo desta curva será o campo

$$\frac{D}{d\sigma} J = \left( \frac{\partial J^\mu}{\partial \sigma} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu J^\nu T^\rho \right) \partial_\mu$$

<sup>1</sup>Conforme observado no Capítulo 1 no contexto do Gedankenexperiment do elevador de Einstein, campos gravitacionais se manifestam pela aceleração relativa de corpos vizinhos em queda-livre.

ao longo de  $C_\lambda$ . A derivada do campo  $\frac{DJ}{d\sigma}$  ao longo desta curva será por sua vez

$$\begin{aligned} \frac{D^2J}{d\sigma^2} &= \left[ \frac{\partial}{\partial\sigma} \left( \frac{\partial J^\mu}{\partial\sigma} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu J^\nu T^\rho \right) \right] \partial_\mu \\ &+ \left[ \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \left( \frac{\partial J^\alpha}{\partial\sigma} + \Gamma_{\theta\omega}^\alpha J^\theta T^\omega \right) T^\beta \right] \partial_\mu. \end{aligned}$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} \frac{D^2J}{d\sigma^2} &= \left[ \frac{\partial^2 J^\mu}{\partial\sigma^2} + (\partial_\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\mu) \frac{\partial x^\lambda}{\partial\sigma} J^\nu T^\rho + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{\partial J^\nu}{\partial\sigma} T^\rho + \Gamma_{\nu\rho}^\mu J^\nu \frac{\partial T^\rho}{\partial\sigma} \right] \partial_\mu \\ &+ \left[ \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial J^\alpha}{\partial\sigma} T^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\theta\omega}^\alpha J^\theta T^\omega T^\beta \right] \partial_\mu. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Observe que  $\frac{\partial^2 J^\mu}{\partial\sigma^2} = \frac{\partial^3 x^\mu}{\partial\sigma\partial\sigma\partial\lambda}$  e, visto que  $x^\mu(\sigma, \lambda)$  é suave, que  $\frac{\partial^3 J^\mu}{\partial\sigma\partial\sigma\partial\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda} \left( \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\sigma^2} \right)$ . Por outro lado, o fato de  $C_\lambda$  ser uma geodésica significa que

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\sigma^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial\sigma} = 0. \quad (4.13)$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J^\mu}{\partial\sigma^2} &= \frac{\partial}{\partial\lambda} \left( -\Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial\sigma} \right) \\ &= -(\partial_\phi \Gamma_{\nu\rho}^\mu) \frac{\partial x^\phi}{\partial\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial\sigma} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial\lambda\partial\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial\sigma} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial\sigma} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial\lambda\partial\sigma} \\ &= -(\partial_\phi \Gamma_{\nu\rho}^\mu) J^\phi T^\nu T^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{\partial J^\nu}{\partial\sigma} T^\rho - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial J^\alpha}{\partial\sigma} T^\beta. \end{aligned}$$

Levando isto na equação (4.12) obtemos:

$$\frac{D^2J}{d\sigma^2} = \left[ (\partial_\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\mu) T^\lambda J^\nu T^\rho - (\partial_\phi \Gamma_{\nu\rho}^\mu) T^\nu J^\phi T^\rho + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\theta\omega}^\alpha T^\beta J^\theta T^\omega + \Gamma_{\nu\rho}^\mu J^\nu \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial\sigma^2} \right] \partial_\mu.$$

Usando a equação (4.13) para  $\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial\sigma^2}$  na última, isto é, usando

$$\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial\sigma^2} = -\Gamma_{\theta\omega}^\rho \frac{\partial x^\theta}{\partial\sigma} \frac{\partial x^\omega}{\partial\sigma},$$

vem:

$$\frac{D^2J}{d\sigma^2} = \left[ (\partial_\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\mu) T^\lambda J^\nu T^\rho - (\partial_\phi \Gamma_{\nu\rho}^\mu) T^\nu J^\phi T^\rho + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\theta\omega}^\alpha T^\beta J^\theta T^\omega - \Gamma_{\nu\rho}^\mu \Gamma_{\theta\omega}^\rho T^\theta J^\nu T^\omega \right] \partial_\mu.$$

Reindexando,

$$\frac{D^2J}{d\sigma^2} = \left[ (\partial_\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\mu - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\rho}^\mu + \Gamma_{\lambda\theta}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\theta - \Gamma_{\nu\theta}^\mu \Gamma_{\lambda\rho}^\theta) T^\lambda J^\nu T^\rho \right] \partial_\mu;$$

ou seja:

$$\frac{D^2J}{d\sigma^2} = (R_{\lambda\nu\rho}{}^\mu T^\lambda J^\nu T^\rho) \partial_\mu.$$

Escrevendo

$$\frac{D^2 J}{d\sigma^2} := \left( \frac{d^2 J^\mu}{d\sigma^2} \right) \partial_\mu$$

para denotar as componentes da derivada covariante de segunda ordem do campo  $J$  relativamente ao referencial  $x^\mu$ , vem:

$$\frac{D^2 J^\mu}{d\sigma^2} = R_{\lambda\nu\rho}{}^\mu T^\lambda J^\nu T^\rho, \quad (4.14)$$

que é a relação desejada. Esta equação é a chamada “equação de desvio geodésico”, ou “equação de Jacobi”.

## 4.4 O Limite Newtoniano: forças de maré

Vamos mostrar que no limite de campos de fracos (não-relativístico), a equação (4.14) descreve o efeito das chamadas (na linguagem Newtoniana) “forças de maré” sobre um sistema de partículas em queda-livre num potencial gravitacional. Para isso, vamos começar revisando rapidamente a descrição de forças de maré na teoria Newtoniana de gravitação.

### 4.4.1 Forças de maré na teoria Newtoniana

Considere duas partículas massivas não interagentes em queda-livre em um campo gravitacional não uniforme, por exemplo, o campo gravitacional da Terra. Então em um referencial inercial (onde vale a segunda lei de Newton), a equação de movimento para as partículas são, respectivamente, as seguintes.

$$\text{Partícula de referência: } \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\delta^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x^1, x^2, x^3)$$

$$\text{Partícula vizinha: } \frac{d^2}{dt^2}(x^i + \xi^i) = -\delta^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x^1 + \xi^1, x^2 + \xi^2, x^3 + \xi^3) \quad (4.15)$$

Aqui,  $\phi(x^1, x^2, x^3)$  é o potencial gravitacional (Newtoniano) visto neste referencial inercial e  $\vec{\xi}(t) = (\xi^1(t), \xi^2(t), \xi^3(t))$  é o vetor de separação em um dado tempo  $t$  entre a partícula de referência, situada em  $x^i = x^i(t)$ , e a segunda partícula situada em  $x^i(t) + \xi^i(t)$ . Para pequenas separações, digamos,  $|\xi^i| \ll 1 \quad \forall i, \quad \forall t$ , o lado direito de (4.15) pode ser escrito em primeira ordem como

$$-\delta^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x^1 + \xi^1, x^2 + \xi^2, x^3 + \xi^3) = -\delta^{ik} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x^1, x^2, x^3) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(x^1, x^2, x^3) \right) \xi^j \right].$$

Levando isto em (4.15) e subtraindo a equação de movimento para a partícula de referência, segue que: para pequenas separações, o vetor de separação  $\vec{\xi}(t) = (\xi^1(t), \xi^2(t), \xi^3(t))$  evolui segundo a equação

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} = -\delta^{ik} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^k}(x^1, x^2, x^3) \right] \xi^j.$$

Esta é a equação Newtoniana para a força de maré experimentada por uma distribuição de partículas não-interagentes em queda-livre no campo gravitacional considerado. O chamado “tensor de maré não relativístico”

$$E^i{}_j := \delta^{ik} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^k}(x^1, x^2, x^3) \right],$$

tal que  $\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -E^i_j\xi^j$ , descreve as chamadas forças de maré que causam a aproximação de partículas vizinhas ao longo do sistema, gerando forças de tensão distribuídas ao longo de toda sua extensão.

#### 4.4.2 Forças de maré na TGR

Vejam agora como o efeito de desvio geodésico conforme descrito pela equação de Jacobi conduz, naturalmente, no regime de campos fracos (limite Newtoniano), às forças de maré. Sendo assim, o fenômeno de desvio geodésico, que é uma manifestação geométrica de curvatura de um espaço-tempo, representa a generalização na TGR do efeito de maré Newtoniano. Em particular, nossa análise mostrará como no limite de campos fracos o tensor de maré descrito na seção anterior fica codificado em algumas componentes do tensor curvatura de Riemann.

Retornaremos ao longo da presente seção às mesmas notações e convenções da seção anterior para a descrição do desvio geodésico. Assim, seja  $p$  o evento na linha-mundo da partícula de referência correspondente a  $\sigma = \lambda = 0$ , isto é, o ponto  $p = (x^0(0,0), \dots, x^3(0,0))$  de  $C_0$ . Então: assumindo que estamos no limite “não relativístico” de campos gravitacionais fracos, podemos afirmar que existe um novo referencial local  $(V; y^\mu)$  relativo ao qual a métrica se escreve em boa aproximação como  $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$ , sendo que exatamente em  $p$ ,  $g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}$ . Por simplicidade, vamos usar a seguinte notação para representação da curva paramétrica  $C_0$  relativamente ao referencial local original  $x^\mu$ :

$$C_0 : x^\mu = \phi^\mu(\sigma) := x^\mu(\sigma, 0). \quad (4.16)$$

Aí,  $C_0$  se escreve relativamente ao referencial local  $y^\mu$  como<sup>2</sup>

$$C_0 : y^\mu = f^\mu(\sigma), \quad \forall \sigma \in I \quad (4.17)$$

onde  $f^\mu(\sigma) = y^\mu(\phi^0(\sigma), \dots, \phi^3(\sigma))$ . Visto que (4.16) acima é uma parametrização da geodésica  $C_0$  pelo tempo próprio, e já que

$$-1 = g_{\mu\nu} \frac{d\phi^\mu}{d\sigma} \frac{d\phi^\nu}{d\sigma} \approx \eta_{\mu\nu} \frac{df^\mu}{d\sigma} \frac{df^\nu}{d\sigma},$$

sob a mudança de coordenadas de  $x^\mu$  para  $y^\mu$  ao longo da região  $V \subset M$ , podemos assumir que (4.17) acima também é uma parametrização da geodésica  $C_0$  pelo tempo próprio.

Ora, como  $y^\mu$  pode ser considerado para todos os efeitos práticos (em boa aproximação) um referencial inercial, podemos considerar que existe uma transformação de Lorentz definindo um novo referencial local  $\tilde{y}^\mu$  em  $V$  (ou seja, a transformação de Lorentz em questão seria vista como uma aplicação de mudança de coordenadas  $\tilde{y}^\mu = \tilde{y}^\mu(y^0, \dots, y^3)$ ) tal que, se  $C_0$  se escreve relativamente a  $\tilde{y}^\mu$  como

$$C_0 = \tilde{y}^\mu = h^\mu(\sigma),$$

onde  $h^\mu(\sigma) := \tilde{y}^\mu(f^0(\sigma), \dots, f^3(\sigma))$ , então

$$\frac{dh^\mu}{d\sigma} \approx \delta_0^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

<sup>2</sup>A partir de agora, passaremos a restringir o parâmetro afim  $\sigma$  a variar em subintervalos  $I \subset \mathbb{R}$  de sua faixa original tal que o traço de  $y^\mu = f^\mu(\sigma)$ ,  $\sigma \in I$  esteja inteiramente contido em  $V \subset M$ .

em boa aproximação<sup>3</sup>, válida para todo  $\sigma$  em um subintervalo  $\tilde{I} \subset I$ .<sup>4</sup> Observe agora o seguinte: como a transformação de Lorentz  $\tilde{y}^\mu = \tilde{y}^\mu(y^0, \dots, y^3)$  é uma transformação linear, vale que  $\frac{\partial y^\theta}{\partial \tilde{y}^\omega}$  é constante  $\forall \theta, \omega = 0, 1, 2, 3$ . Logo se  $\tilde{\eta}_{\mu\nu}$  são as componentes do tensor métrico no referencial local  $\tilde{y}^\mu$ , então já que

$$\tilde{\eta}_{\mu\nu} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial \tilde{y}^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial \tilde{y}^\nu} \eta_{\alpha\beta}$$

segue que os  $\tilde{\eta}^{\mu\nu}$  também são constantes. Consequentemente: os símbolos de Christoffel  $\tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu$  para o referencial  $\tilde{y}^\mu$  são identicamente nulos. Isto significa que se  $\xi^\mu(\sigma)$  é o 4-vetor de separação visto relativo ao referencial  $x^\mu$  (um campo vetorial ao longo da geodésica  $C_0 : x^\mu = \phi^\mu(\sigma)$ ) e se  $w^\mu(\sigma)$  denota a representação local deste campo relativamente ao referencial  $\tilde{y}^\mu$ , ao longo de

$$C_0 : \tilde{y}^\mu = h^\mu(\sigma), \quad \sigma \in \tilde{I},$$

então a sua derivada covariante ao longo desta curva vista no referencial  $\tilde{y}^\mu$  será simplesmente  $\frac{d w^\mu}{d\sigma}$ . A derivada de segunda ordem também será  $\frac{d^2 w^\mu}{d^2 \sigma}$ , de forma que se  $\tilde{R}_{\lambda\nu\rho}^\mu$  são as componentes do tensor curvatura de Riemann relativas ao referencial  $\tilde{y}$ , então a equação de desvio geodésico para o 4-vetor de separação será<sup>5</sup>

$$\frac{d^2 w^\mu}{d^2 \sigma} = -\tilde{R}_{\lambda\nu\rho}^\mu \frac{d h^\lambda}{d\sigma} w^\nu \frac{d h^\rho}{d\sigma}.$$

Ora, com  $\frac{d h^\lambda}{d\sigma} = \delta_0^\lambda$ , a última reduz simplesmente para

$$\frac{d^2 w^\mu}{d^2 \sigma} = -\tilde{R}_{0\nu 0}^\mu w^\nu. \quad (4.18)$$

Além disso, claramente podemos identificar o “parâmetro afim”  $\sigma$  com a coordenada temporal  $t$ , definida via  $ct := \tilde{y}^0$ <sup>6</sup>. Com isso, chegamos ao resultado que queríamos

<sup>3</sup>O 4-vetor tangente  $\left(\frac{df^0}{d\sigma}, \dots, \frac{df^3}{d\sigma}\right)$  de  $C_0 : y^\mu = f^\mu(\sigma)$  em  $\sigma$  é unitário, isto é,  $\eta_{\mu\nu} \frac{df^\mu}{d\sigma} \frac{df^\nu}{d\sigma} = -1$ ,  $\forall \sigma \in I$ . Logicamente, isto vale em particular para  $\sigma = 0$ . Com isso, claro que existe uma transformação de Lorentz levando o 4-vetor tangente em  $\sigma = 0$  no vetor unitário  $(1, 0, 0, 0)$ . Esta é a transformação de Lorentz à qual nos referimos aqui.

<sup>4</sup>A transformação de Lorentz  $\tilde{y}^\mu = \tilde{y}^\mu(y^0, \dots, y^3)$  é selecionada de forma a levar o 4-vetor tangente  $\left(\frac{df^0}{d\sigma}, \dots, \frac{df^3}{d\sigma}\right)|_{\sigma=0}$  de  $C_0 : y^\mu = f^\mu(\sigma)$ ,  $\sigma \in I$  em  $\sigma = 0$  no 4-vetor de componentes  $(1, 0, 0, 0)$  relativas a  $\tilde{y}^\mu$ . Daí, em seguida, restringindo  $\sigma$  a uma vizinhança suficiente pequena  $\tilde{I} \subset I$  de  $\sigma = 0$ , podemos assumir por continuidade que temos em boa aproximação  $\frac{d h^\mu}{d\sigma} \approx \delta_0^\mu \forall \sigma \in \tilde{I}$ .

<sup>5</sup>A equação de desvio geodésico é uma equação para o “campo de Jacobi”  $J^\mu \partial_\mu$  ao longo  $C_0$ , escrita relativamente ao referencial local  $x^\mu$ . Como o 4-vetor de separação  $\xi^\mu(\sigma) \partial_\mu \Big|_{(x^0(\sigma, 0), \dots, x^3(\sigma, 0))}$  entre as geodésicas  $C_0$  e  $C_{\Delta\lambda}$  (ao longo de  $C_0$ ) introduzido na seção anterior satisfaz  $\xi^\mu \equiv J^\mu \Delta\lambda$ , podemos multiplicar a equação de Jacobi em ambos os lados por  $\Delta\lambda$  para escrever a equação de desvio geodésico para o 4-vetor de separação entre as geodésicas  $C_0$  e  $C_{\Delta\lambda}$ . Relativamente ao referencial local  $x^\mu$  esta equação seria, daí,  $\frac{D^2 \xi^\mu}{d\sigma^2} = R_{\lambda\nu\rho}^\mu T^\lambda \xi^\nu T^\rho$ .

<sup>6</sup>Como  $\frac{d h^\mu}{d\sigma} = \delta_0^\mu$ , a linha-mundo da partícula de referência pode ser escrita como  $h^0(\sigma) = \sigma$ ,  $h^1 = h^2 = h^3 = 0$ , lembrando que em  $\sigma = 0$  temos  $h^\mu(0) = 0 \forall \mu$ . Assim, para a 0-ésima componente, obtemos  $ct := \tilde{y}^0 = \sigma$ . Isto significa que podemos interpretar a “coordenada temporal”  $\tilde{y}^0 = ct$  como o tempo próprio ao longo da linha-mundo da partícula de referência.

atingir na presente seção:

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 w^\mu}{dt^2} = -\tilde{R}_{0\nu 0}{}^\mu w^\nu. \quad (4.19)$$

Esta expressão, restrita apenas às componentes espaciais do campo fornece

$$\frac{d^2 w^i}{dt^2} = -c^2 \tilde{R}_{0j0}{}^i w^j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.20)$$

Mas, as componentes espaciais do 4-vetor de separação vão coincidir, visto que  $\tilde{y}^\mu$  é para todos efeitos práticos um referencial inercial (por construção), com as componentes do “vetor de separação” Newtoniano considerado na seção anterior. Isto significa que no limite Newtoniano as componentes do tensor de Riemann codificam as forças de maré, o tensor de maré Newtoniano sendo dado por

$$E^i{}_j \equiv c^2 \tilde{R}_{0j0}{}^i.$$

Em conclusão: no regime de campos fracos as componentes  $R_{0j0}{}^i$ ,  $i, j = 1, 2, 3$

do tensor curvatura de Riemann devem se reduzir ao tensor Newtoniano de maré. Assim, o efeito de maré na gravitação Newtoniana tem como sua generalização relativística o fenômeno de desvio geodésico, que é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo.

# Capítulo 5

## As equações de Einstein

Discutiremos ao longo deste Capítulo os principais ingredientes para as famosas “equações de campo de Einstein”.

### 5.1 O tensor energia-momentum

O objeto adequado para descrever fontes de gravitação na TGR é o chamado tensor energia-momentum. Como muitas fontes de energia gravitacional na TGR podem ser modeladas como distribuições contínuas de matéria, focaremos aqui nesse caso. Inicialmente nossa discussão se referirá a um espaço-tempo flat (um espaço-tempo sem curvatura, isto é, onde  $R \equiv 0$ ) no qual utilizaremos referenciais inerciais globais. No final da seção, descreveremos como as definições introduzidas são generalizadas para um espaço tempo arbitrário (onde  $R \neq 0$ ).

Na relatividade especial, distribuições contínuas de matéria-energia são descritas por um tensor  $T$  do tipo  $(0, 2)$  simétrico chamado “tensor energia-momentum”, mais precisamente, um campo tensorial simétrico do tipo  $(0, 2)$ . Os valores assumidos pelo tensor energia-momentum avaliado em um evento especificado qualquer são determinados por algumas condições (interpretações físicas) que passaremos a especificar.

Ao se falar de uma distribuição contínua de matéria-energia, a hipótese é que se trata de um sistema com um número muito grande de partículas constituintes, tal que em torno de cada ponto da região espacial ocupada pelo sistema é possível construir uma caixa retangular chamada um “elemento de volume”, que é pequena<sup>1</sup> comparada com esta região, porém grande<sup>2</sup> comparada com o caminho livre médio<sup>3</sup> das partículas. Assim, a dinâmica das partículas do sistema, individualmente, não pode ser acompanhada. Além disso, podemos falar de elementos de volume localizados em pontos específicos, visto que o volume  $\Delta V$  do elemento é sempre desprezível frente à região espacial  $\Omega$  (veja a figura (5.1)) ocupada pelo sistema (logo, nesta escala, ele se confunde com um ponto).

Seja  $x^\mu$  um referencial inercial global relativamente ao qual o evento de interesse, denotado doravante por  $p$ , possui coordenadas  $p := (x_p^0, \dots, x_p^3) := (ct_p, x_p, y_p, z_p)$ . Considere um elemento de volume  $\Delta V$  de nossa distribuição contínua de matéria-energia localizado em  $(x_p, y_p, z_p)$ , conforme visto neste referencial (veja a figura).

---

<sup>1</sup>Volume desprezível.

<sup>2</sup>Comprimento grande, altura grande e largura grande, se comparados comparado com o caminho livre médio para o sistema considerado.

<sup>3</sup>Distância média que uma partícula do sistema viaja livremente, antes de colidir com outras partículas do sistema.

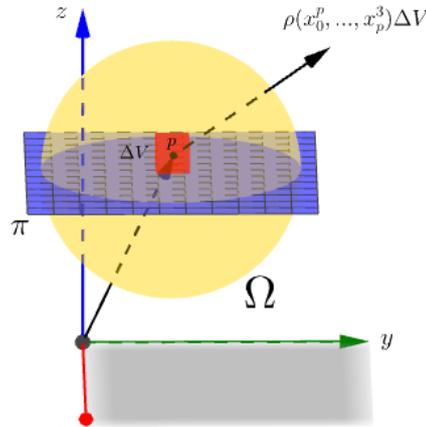


Figura 5.1: O vetor com rótulo  $\mathcal{P}(x^0, \dots, x^3)\Delta V$  representa o 4-momento da porção de matéria situada no elemento de volume  $\Delta V$ .

Então, a “densidade de 4-momento”  $\mathcal{P}$  em  $p$ , isto é,  $\mathcal{P}(x^0, \dots, x^3)$ , no referencial  $x^\mu$ , é definida pela condição de que  $(x^0, \dots, x^3)\Delta V$  seja o 4-momento da porção da matéria situada no elemento de volume  $\Delta V$  na posição especificada relativamente a este referencial, no instante  $ct = x_p^0$ . Convém observar que se no referencial  $x^\mu$  a densidade neste instante em,  $(x_p, y_p, z_p)$ , for  $\rho(x_p^0, \dots, x_p^3)$ , esta matéria pode ser considerada como uma massa puntiforme  $\rho(x_p^0, \dots, x_p^3)\Delta V$  localizada em  $(x_p, y_p, z_p)$ .

Dado um observador  $O$  com 4-velocidade  $v$  e um 4-vetor do tipo tempo unitário  $n$ , define-se que:

$$-T\left(\frac{v}{c}, n\right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{componente sobre } n \text{ da densidade de 4-momento} \\ \text{associada à nossa distribuição} \\ \text{contínua de massa-energia,} \\ \text{conforme medido por este observador} \end{array} \right\} \times c$$

Denotando provisoriamente por  $g$  o tensor métrico avaliado no evento de interesse, escreve-se então:

$$-T\left(\frac{v}{c}, n\right) = cg(n, \mathcal{P}).$$

Seja  $x^\mu$  um referencial inercial global relativamente ao qual as componentes do tensor métrico  $g$  são constantes, e possuem a forma de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ . Neste referencial, digamos que seja  $v = v^\alpha \partial_\alpha$  ao longo da linha-mundo do observador  $O$ , e digamos que no evento de interesse seja  $n = n^\beta \partial_\beta$ , e  $T = T_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ . Então, neste evento,

$$-T\left(\frac{v}{c}, n\right) = -(T_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu) \left(\frac{1}{c} v^\alpha \partial_\alpha, n^\beta \partial_\beta\right) = -T_{\mu\nu} \frac{v^\mu}{c} n^\nu.$$

Isto tem de ser numericamente igual a  $cg(\mathcal{P}, n)$  conforme medido pelo observador  $O$ . Assim, seja  $\tilde{x}^\mu$  o referencial instantâneo de repouso deste observador no evento de interesse, relacionado com o referencial  $x^\mu$  por uma transformação de Lorentz

$$\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^0, \dots, x^3), \quad , \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Digamos que no referencial  $\tilde{x}^\mu$  se tenha no evento de interesse  $n = \tilde{n}^\alpha \tilde{\partial}_\alpha$ , e que nele seja  $\mathcal{P} = \tilde{\mathcal{P}}^\beta \tilde{\partial}_\beta$ . Então

$$-T_{\mu\nu} \frac{v^\mu}{c} n^\nu = c \tilde{n}_\alpha \tilde{\mathcal{P}}^\alpha. \quad (5.1)$$

Ou também, uma vez que no presente caso o tensor métrico é invariante sob transformação de Lorentz, isto é, já que

$$g(n, \mathcal{P}) = \tilde{n}_\alpha \mathcal{P}^\alpha = n_\alpha \mathcal{P}^\alpha,$$

podemos escrever

$$-T_{\mu\nu} \frac{v^\mu}{c} n^\nu = c n_\alpha \mathcal{P}^\alpha \quad (5.2)$$

Se restringimos nesta última expressão  $n = \frac{v}{c}$ , então

$$-T \left( \frac{v}{c}, \frac{v}{c} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{densidade de massa-energia conforme medida por} \\ O \text{ em seu referencial instantâneo de repouso,} \\ \text{no evento de interesse.} \end{array} \right\}$$

De fato, neste caso será  $\tilde{n}^\alpha \tilde{\partial}_\alpha = (1, 0, 0, 0)^4$ , de forma que

$$-T_{\mu\nu} \frac{v^\mu}{c} \frac{v^\nu}{c} = c \tilde{n}^\alpha \tilde{\mathcal{P}}^\alpha = c \tilde{\eta}_{00} \tilde{\mathcal{P}}^0 = -c \tilde{\mathcal{P}}^0$$

onde  $\tilde{\eta}_{\mu\nu}$ <sup>5</sup> denotam as componentes do tensor métrico relativamente ao referencial  $\tilde{x}^\mu$ . Nossa afirmação segue de se observar que a componente  $\tilde{\mathcal{P}}^0$  da densidade de 4-momentum no referencial instantâneo de repouso do observador  $O$  deve ser justamente a densidade de massa-energia para a nossa distribuição de matéria-energia conforme medida por este observador, multiplicada por um fator de  $c^{-1}$ .

Dado um 4-vetor unitário do tipo espaço  $s$  ortogonal a 4-velocidades  $v$  do observador  $O$ , isto é, tal que  $g(s, s) = 1$  e  $g(v, s) = 0$ , define-se que

$$-T \left( \frac{v}{c}, s \right) = c \times \left\{ \begin{array}{l} \text{componente na direção "espacial" } s \text{ da densidade de} \\ \text{4-momentum, conforme medido por } O \end{array} \right\}.$$

Note que no referencial instantâneo de repouso  $\tilde{x}^\mu$  do observador  $O$ , no evento de interesse,  $s$  é de fato um 4-vetor puramente espacial, de acordo com a condição  $g(s, v) = 0$ . Agora, se no referencial  $x^\mu$  temos  $s = s^\alpha \partial_\alpha$  e no referencial  $\tilde{x}^\mu$  temos  $s = \tilde{s}^\mu \tilde{\partial}_\mu$ , então a condição que caracteriza o valor de  $-T \left( \frac{v}{c}, s \right)$  será igual a  $cg(s, \mathcal{P})$ , conforme medido por  $O$  (onde o tensor métrico é avaliado no evento de interesse). Logo,

$$-T_{\mu\nu} \frac{v^\mu}{c} s^\nu = c \tilde{s}_\alpha \tilde{\mathcal{P}}^\alpha = c s_\alpha \mathcal{P}^\alpha,$$

onde a segunda igualdade vem da invariância do tensor métrico sob transformações de Lorentz. Como no referencial  $\tilde{x}^\mu$  temos  $v$  expresso por  $v = \tilde{v}^\alpha \tilde{\partial}_\alpha = (c, 0, 0, 0)$  e como

$$g(s, v) = s_\nu v^\nu = \tilde{s}_\nu \tilde{v}^\nu = 0,$$

segue que necessariamente  $\tilde{s}^0 = 0$ . Portanto

$$\tilde{s}_\alpha \tilde{\mathcal{P}}^\alpha = \vec{\tilde{s}} \cdot \vec{\mathcal{P}}$$

<sup>4</sup>A 4-velocidade  $v$  em um dado referencial é  $\gamma(\vec{v})(c, \vec{v})$ , em que  $\vec{v}$  é a 3-velocidade e  $\gamma(\vec{v}) = \frac{1}{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}$ . Assim, no referencial instantâneo de repouso de  $O$ , no evento de interesse devemos ter a 4-velocidade  $(c, 0, 0, 0)$ .

<sup>5</sup>Pode-se assumir sem perda de generalidade que  $\tilde{\eta}_{00} = -1$

onde “.” representa o produto interno euclidiano usual entre  $\vec{s} = (\tilde{s}^1, \tilde{s}^2, \tilde{s}^3)$  e  $\vec{\mathcal{P}} = (\tilde{\mathcal{P}}^1, \tilde{\mathcal{P}}^2, \tilde{\mathcal{P}}^3)$ . Logo,  $-T_{\mu\nu} \frac{v^\mu}{c} s^\nu$  fornece a projeção da parte espacial da densidade de 4-momentum, conforme visto no referencial instantâneo de repouso do observador  $O$  no evento de interesse, na direção  $\tilde{s}$ .

Sejam  $s^{(1)}$  e  $s^{(2)}$  4-vetores do tipo espaço ortogonais à 4-velocidade do observador  $O$ . Novamente, isto significa que no referencial instantâneo de repouso  $\tilde{x}^\mu$  no evento de interesse,  $s^{(1)}$  e  $s^{(2)}$  são puramente espaciais. Então, define-se que

$$T(s^{(1)}, s^{(2)}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{valor do tensor de tensão da distribuição contínua de} \\ \text{matéria-energia avaliado nas direções espaciais } s^{(1)} \text{ e } s^{(2)} \\ \text{conforme visto pelo observador } O. \end{array} \right\}$$

A interpretação do tensor de tensão é que  $T(\vec{n}, \vec{l})$  é a força por unidade de área na direção  $\vec{l}$  exercida sobre a porção da matéria situada no semi-espaço determinado pelo plano  $\pi$  e  $\vec{n}$  pela porção de matéria situada no semi-espaço oposto (veja estes elementos na figura (5.2)).

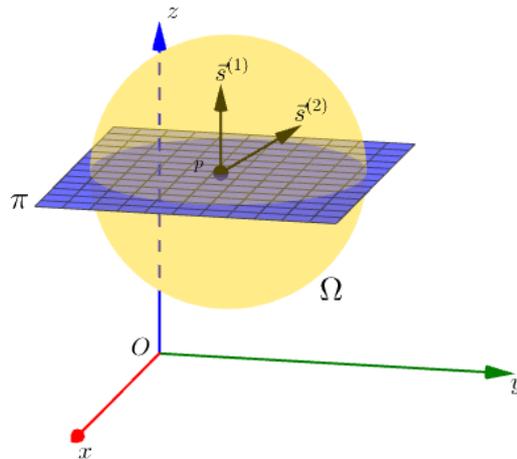


Figura 5.2: Tensor de tensão.

### 5.1.1 Poeira e Fluidos Perfeitos

Vamos agora, discutir dois casos importantes de distribuições contínuas de matéria-energia: poeira e fluidos perfeitos. Inicialmente vamos descrever um fluido: trata-se de uma distribuição contínua de matéria-energia que “flui”. Explicando, considere uma distribuição contínua de matéria-energia como antes. Fixe nela uma posição de interesse  $p$ , uma direção espacial especificada (relativa a um referencial de interesse) como  $\vec{n}$ , e seja  $\tau_0 := T(\vec{n}, \vec{l})$  onde  $\vec{l}$  é uma direção espacial ortogonal a  $\vec{n}$  (veja a figura (5.3)) em  $p$ , e onde  $T(\vec{n}, \vec{l})$  é avaliado em  $p$  como descrito anteriormente na página (82). Dada uma camada da distribuição transversal a  $\vec{n}$  e passando por  $p$  (representado pelo elemento de volume  $\Delta V_1$  na figura),  $\tau_0$  representa uma força de cisalhamento<sup>6</sup>, que faz com que essa camada se desloque com uma 3-velocidade  $\vec{u}_0$ , paralela a  $\vec{l}$ , relativamente a outra camada paralela separada por uma distância  $Y$  (representada na figura pelo elemento de volume  $\Delta V_2$ ). Nestas condições, dois com-

<sup>6</sup>Isto é, uma força por unidade de área ao longo de uma direção paralela à camada.

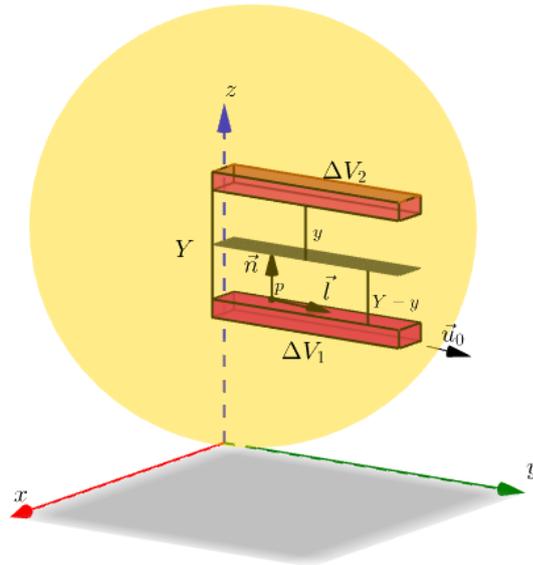


Figura 5.3: Tensão de cisalhamento.

portamentos qualitativos distintos podem ser identificados que são normalmente utilizados para caracterizar a distribuição contínua de matéria-energia como um fluido (como uma distribuição de matéria-energia “que flui”):

1. Sólidos “resistem” a esse tipo de força de cisalhamento com uma força restauradora do tipo elástica, que é a responsável portanto, no presente contexto, de impedir a este tipo de distribuição contínua de matéria-energia de fluir.
2. Fluidos não apresentam este tipo de força de “resistência” elástica a forças de cisalhamento. O que ocorre com este tipo de distribuição de matéria-energia é que, se a camada  $\Delta V_2$  é vista estacionária com a camada  $\Delta V_1$  vista se movendo relativamente a ela da forma descrita, então camadas intermediárias da distribuição são vistas se movendo com uma distribuição de 3-velocidades que aumenta linearmente com a distância  $y$  a partir da camada estacionária:  $\vec{u} = \frac{y}{Y}\vec{u}_0$ . A tensão de cisalhamento  $\tau_y$  subsequente experimentada por estas camadas intermediárias (oposta à suas 3-velocidade) é proporcional ao gradiente de velocidade  $\frac{d\|\vec{u}\|}{dy} = \frac{1}{Y}\|\vec{u}_0\|$ . A constante de proporcionalidade se chama “viscosidade” do fluido,  $\mu$ . Isto é,  $\tau_y = -\mu \frac{d\|\vec{u}\|}{dy}$ .

Para nossa discussão aqui, interessa em particular o caso dos chamados “fluidos ideais”: definidos como fluidos em que as componentes do seu tensor energia-momentum são dadas por

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho c^2) \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} + P \eta_{\mu\nu}.$$

Explicando mais detalhadamente, um pouco, o tensor energia-momentum para um fluido ideal é o tensor do tipo (0, 2) definido por

$$T \equiv \frac{1}{2}(P + \rho c^2)u \otimes u + Pg, \quad (5.3)$$

onde:

- $u$  é o campo de 4-velocidades para o fluido de interesse, visto como um tensor do tipo  $(0, 1)$ . Este campo especifica em cada evento a 4-velocidade do elemento do fluido localizado na posição espacial associada, no instante do evento de interesse, após a especificação de um referencial inercial;
- $P$  e  $\rho$  são, respectivamente, a pressão e densidade do fluido em um evento de interesse, vistos em seu referencial instantâneo de repouso;
- $g$  é o tensor métrico avaliado no evento de interesse.

Assim, se  $x^\mu$  é um referencial inercial global relativamente ao qual o tensor métrico satisfaz  $g(\partial_\mu, \partial_\nu) = \eta_{\mu\nu}$  para uma base do espaço tangente no evento de interesse, temos neste evento:

$$\begin{aligned} (u \otimes u)(\partial_\mu, \partial_\nu) &= (u \cdot \partial_\mu)(u \cdot \partial_\nu) = u_\mu u_\nu = (\eta_{\mu\alpha} u^\alpha)(\eta_{\nu\beta} u^\beta) \\ &= g(u^\alpha \partial_\alpha, \partial_\mu) g(u^\beta \partial_\beta, \partial_\nu) \end{aligned}$$

onde o vetor tangente  $u$  no evento de interesse é visto relativamente ao referencial  $x^\mu$  como  $u = u^\lambda \partial_\lambda$ . Ou seja: posto que neste caso as componentes de  $u$  relativamente ao referencial  $x^\mu$  visto como um tensor do tipo  $(0, 1)$  são

$$u_\lambda dx^\lambda := (\eta_{\theta\lambda} u^\theta) dx^\lambda,$$

teremos no evento de interesse  $(u \otimes u)(\partial_\mu, \partial_\nu) = u_\mu u_\nu$ . O que leva a equação para as componentes de  $T$  relativas ao referencial  $x^\mu$ :

$$T(\partial_\mu, \partial_\nu) = T_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} (P + \rho c^2) u_\mu u_\nu + P \eta_{\mu\nu}.$$

Vamos olhar para as componentes de  $T$  no caso em que  $x^\mu$  é o referencial de repouso do fluido. Neste caso, a 4-velocidade  $u$  de um elemento do fluido no evento deve possuir a forma  $[u^\mu] = (c, 0, 0, 0)$ . Logo,

$$u_\mu = \eta_{\mu\beta} u^\beta = \eta_{\mu 0} c, \quad u_\nu = \eta_{\nu\beta} u^\beta = \eta_{\nu 0} c,$$

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho c^2) \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} + P \eta_{\mu\nu}.$$

Isto nos fornece os seguintes resultados

$$T_{00} = (P + \rho c^2) - P = \rho c^2, \quad (5.4)$$

$$T_{ii} = (P + \rho c^2) \eta_{i0} \eta_{i0} + P \eta_{ii} = P, \quad (5.5)$$

$$T_{i0} = (P + \rho c^2) \eta_{i0} \eta_{00} + P \eta_{i0} = 0, \quad (5.6)$$

$$T_{0i} = (P + \rho c^2) \eta_{0i} \eta_{00} + P \eta_{0i} = 0, \quad (5.7)$$

$$T_{ji} = (P + \rho c^2) \eta_{j0} \eta_{0i} + P \eta_{ji} = 0, \quad j \neq i, \quad (5.8)$$

onde  $i, j = 1, 2, 3$ . Em termos de uma representação matricial, podemos escrever

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix}$$

no referencial de repouso do fluido no evento de interesse, no qual  $T = T_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$  está sendo avaliado. Convém observar que de uma forma geral a densidade de massa-energia medida no evento por um observador com 4-velocidade  $v$  no seu referencial de repouso será a seguinte:

$$\begin{aligned}
T\left(\frac{v}{c}, \frac{v}{c}\right) &= \frac{1}{c^2} T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = \frac{1}{c^2} \rho v^\mu v^\nu \eta_{\mu\theta} u^\theta \eta_{\nu\lambda} u^\lambda + \frac{1}{c^4} P v^\mu v^\nu \eta_{\mu\theta} u^\theta \eta_{\nu\lambda} u^\lambda + \frac{1}{c^2} P \eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \\
&= \frac{P}{c^4} c^2 (u^0)^2 - P + \frac{1}{c^4} \rho c^4 (u^0)^2 \\
&= -P + P \gamma^2(\vec{u}) + \rho c^2 \gamma^2(\vec{u}) = P(\gamma^2(\vec{u}) - 1) + \rho c^2 \gamma^2(\vec{u}) \\
&= P \frac{|\vec{v}|^2}{c^2} \gamma^2(\vec{u}) + \rho c^2 \gamma^2(\vec{u}) \\
&= \left( \rho c^2 + P \frac{|u|^2}{c^2} \right) \gamma^2(\vec{u}). \tag{5.9}
\end{aligned}$$

Isto se reduz ao termo  $\rho c^2$  quando o referencial de repouso do observador no evento coincide com o do fluido, mas contém caso contrário termos dependentes da pressão.

Estas considerações mostram o seguinte. Seja  $\tilde{x}^\mu$  o referencial instantâneo de repouso do fluido (isto é, de elementos de volume ou de uma camada do fluido representadas por um elemento de volume) no evento de interesse. Se  $T_{ij}$  denotam as componentes do tensor energia-momentum do fluido avaliados neste evento vistas relativas a  $x^\mu$  para  $i, j = 1, 2, 3$ , vimos que será  $T_{ij} = P \eta_{ij}$ . Sejam  $n, l$  dois vetores neste evento vistos como puramente espaciais relativamente ao referencial  $x^\mu$  no qual assume-se que seja  $n = n^i \partial_i$ ,  $l = l^j \partial_j$ . Então, se  $l$  representa uma direção espacial no evento ortogonal a  $n$ , de forma que  $n^k l_k = n^i l^j \eta_{ij} = 0$ , teremos que

$$T(n, l) = T(n^i \partial_i, l^j \partial_j) = n^i l^j T_{ij} = n^i l^j T_{ij} = (n^i l^j \eta_{ij}) P = 0.$$

Assim, camadas do fluido transversais a  $n$  na posição espacial de interesse (isto é, associada ao evento de interesse) não experimentam nenhuma força de cisalhamento e nenhuma tensão de cisalhamento provocada pelo deslocamento relativo de camadas do fluido paralelas vizinhas. Neste sentido, o fluido se comporta como um fluido de viscosidade  $\mu = 0$ . Esta é uma propriedade fundamental de fluidos com tensor energia-momentum dado pela equação (5.3), motivo de serem chamados de fluidos perfeitos ou ideais.

No caso em que o fluido possui pressão  $P$  nula dizemos que o fluido é uma “poeira”. Para este tipo de distribuição de matéria-energia o tensor energia-momentum é dado por

$$T = \frac{\rho c^2}{2} u \otimes u.$$

### 5.1.2 O princípio da covariância

Muitos resultados da Relatividade Geral são obtidos através da Relatividade Especial fazendo algumas modificações simples. Fazemos as seguintes mudanças ao trocar um espaço-tempo plano por um espaço-tempo curvo:

1. trocamos a derivada parcial convencional  $\partial_\mu$  pela derivada covariante  $\nabla_\mu$ ;
2. trocamos os coeficientes métricos do espaço-tempo de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  pelos de um espaço-tempo curvo  $g_{\mu\nu}$ .

Assim, as equações da Relatividade Especial podem ser “passadas” para a Relatividade Geral fazendo estas pequenas mudanças. Este é o chamado “Princípio da Covariância”.

**Postulado 5.1.1.** *O tensor energia-momentum para uma distribuição contínua de matéria-energia cumpre  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .*

## 5.2 O tensor de Einstein

Vimos que o tensor curvatura de Riemann desempenha papel fundamental para mensurar a aceleração relativa entre geodésicas vizinhas, ou seja, na aceleração relativa entre partículas próximas que estão submetidas apenas a ação exclusiva da gravidade. Esta é a manifestação “genuína” do campo gravitacional. O tensor energia-momentum por sua vez carrega informações sobre a fonte do campo gravitacional.

Na teoria gravitacional Newtoniana uma distribuição de matéria com simetria esférica gera ao seu redor um campo gravitacional que age radialmente na direção do centro da distribuição dado por

$$g(r) = \frac{MG}{r^2},$$

onde  $M$  é a massa da distribuição e  $G$  a constante de gravitação universal. Assim, uma nova teoria de gravitação tal como a teoria Newtoniana não poderia deixar de levar em consideração a distribuição de matéria para descrever o campo gravitacional em torno desta. É de se esperar pelas considerações feitas acima que as informações do campo gravitacional ao redor de uma distribuição de matéria-energia estejam codificadas na relação entre as componentes do tensor de Riemann e do tensor energia-momentum. Isso é umas das bases para justificar a famosa equação de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu},$$

onde  $\kappa$  é uma constante, e  $R_{\mu\nu} = R_{\mu\beta\nu}{}^\beta$  é uma contração do tensor de Riemann chamada “tensor de Ricci”.

Vamos validar esta expressão, isto é, justificar que de fato é razoável termos uma equação de campo da forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu},$$

e determinar neste caso qual deve ser o valor da constante  $\kappa$ .

Começamos, dado um referencial local em  $M$ , utilizando a identidade de Bianchi deduzida na seção anterior

$$\nabla_\mu R_{\alpha\beta\gamma\epsilon} + \nabla_\alpha R_{\beta\mu\gamma\epsilon} + \nabla_\beta R_{\mu\alpha\gamma\epsilon} = 0.$$

Multiplicando esta expressão por  $g^{\mu\gamma}g^{\beta\epsilon}$  e somando sobre os índices  $\mu, \gamma, \beta, \epsilon$  obtemos

$$\begin{aligned}
g^{\mu\gamma}g^{\beta\epsilon}(\nabla_{\mu}R_{\alpha\beta\gamma\epsilon} + \nabla_{\alpha}R_{\beta\mu\gamma\epsilon} + \nabla_{\beta}R_{\mu\alpha\gamma\epsilon}) &= 0 \\
&= g^{\mu\gamma}(\nabla_{\mu}R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\beta} + \nabla_{\alpha}R_{\beta\mu\gamma}{}^{\beta} + \nabla_{\beta}R_{\mu\alpha\gamma}{}^{\beta}) \\
&= \nabla_{\mu}R_{\alpha\beta}{}^{\mu\beta} + \nabla_{\alpha}R_{\beta\mu}{}^{\mu\beta} + \nabla_{\beta}R_{\mu\alpha}{}^{\mu\beta} \\
&= \nabla_{\mu}R_{\alpha\beta}{}^{\mu\beta} + \nabla_{\alpha}R_{\beta\mu}{}^{\mu\beta} + \nabla_{\mu}R_{\beta\alpha}{}^{\beta\mu} \\
&= \nabla_{\mu}R_{\alpha\beta}{}^{\mu\beta} - \nabla_{\alpha}R_{\mu\beta}{}^{\mu\beta} + \nabla_{\mu}R_{\alpha\beta}{}^{\mu\beta} \\
&= 2\nabla_{\mu}R_{\alpha}{}^{\mu} - \nabla_{\alpha}R \\
&= 2\nabla_{\mu}R^{\alpha\mu} - \nabla^{\alpha}R = 0,
\end{aligned}$$

onde  $R$  é a contração do tensor de Ricci, isto é, o conhecido escalar de Ricci  $R^{\mu}{}_{\mu} =$

$R_{\mu\nu}{}^{\mu\nu}$ . Como

$$\nabla_{\mu}(g^{\alpha\mu}R) = \nabla_{\mu}(g^{\alpha\mu})R + g^{\alpha\mu}\nabla_{\mu}R = g^{\alpha\mu}\nabla_{\mu}R,$$

onde usamos  $\nabla_{\mu}(g^{\alpha\mu}) = 0$ , temos

$$\nabla_{\mu}(g^{\alpha\mu}R) = g^{\alpha\mu}\nabla_{\mu}R := \nabla^{\alpha}R.$$

Assim,

$$\nabla_{\mu}R^{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\nabla_{\mu}(g^{\alpha\mu}R) = \nabla_{\mu}\left(R^{\alpha\mu} - \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}R\right) = 0.$$

Por outro lado vimos que  $\nabla_{\mu}T^{\mu\alpha} = 0$  de forma que a equação

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \kappa T^{\mu\nu}$$

onde  $\kappa$  é constante, é consistente. Quer dizer: embora o tensor de Ricci seja a contração mais simples possível do tensor de curvatura para um tensor do tipo  $(0, 2)$ , e portanto, a relação mais simples entre geometria do espaço-tempo e massa-energia-momentum ser  $T_{\mu\nu} = \kappa R_{\mu\nu}$ , esta relação não seria consistente porque enquanto  $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ ,  $\nabla_{\mu}R^{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$ . Isto poderia ser resolvido codificando a curvatura do espaço tempo não por  $R_{\mu\nu}$ , mas por  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ , que satisfaz  $\nabla_{\mu}G_{\mu\nu} = 0$ , e colocando  $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ . Esta foi a equação de campo gravitacional proposta por Einstein, as famosas “Equações de Einstein”. Evidentemente, esta não é a única possibilidade para uma relação consistente e simples entre curvatura do espaço-tempo e matéria-energia-momentum. Mas até o presente momento, todas as evidências experimentais apontam para a validade da relação proposta por Einstein em detrimento de outras diversas levantadas.

**Cálculo de  $\kappa$ .** Vamos considerar o caso especial em que a fonte gravitacional pode ser descrita como poeira. Neste caso o tensor energia-momentum é dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho U^{\mu}U^{\nu},$$

onde  $U^{\nu}$  são as componentes da 4-velocidade da poeira.

A equação de campo fica

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \kappa\rho U^{\mu}U^{\nu};$$

multiplicando por  $g_{\mu\nu}$  esta expressão e somando sobre esses índices temos

$$g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}R = \kappa\rho g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \Rightarrow R - \frac{1}{2}\delta^\nu_\nu R = -c^2\kappa\rho = T^\nu{}_\nu,$$

pois  $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1$ . Logo  $R = c^2\kappa\rho$ , e daí,

$$R^{\mu\nu} = \frac{c^2}{2}\kappa\rho g^{\mu\nu} + \kappa\rho U^\mu U^\nu = \kappa\left(\frac{c^2}{2}\rho g^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}\right).$$

Uma vez que no limite Newtoniano de campos fracos  $R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}$ ,  $T_{00} = c^2\rho$ ,  $g_{00} = -1 + h_{00} \approx -1$  e  $\frac{c^2}{2}h_{00} = \phi$ , temos

$$-\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} = R_{00} = \kappa\left(\frac{c^2}{2}\rho g_{00} + T_{00}\right) = \kappa\left(-\frac{c^2}{2}\rho + \rho c^2\right) = \frac{\kappa c^2 \rho}{2},$$

daí, como  $\phi = \frac{c^2}{2}h_{00} \Rightarrow -4\pi G\rho = -\nabla^2\left(\frac{c^2}{2}h_{00}\right) = \frac{\kappa\rho c^4}{2}$ , vem

$$\kappa = -\frac{8\pi G}{c^4},$$

e a equação de campo de Einstein fica

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

# Capítulo 6

## A solução de Schwarzschild

A métrica de Schwarzschild é uma solução obtida através das equações de campo de Einstein para a região exterior à uma distribuição de matéria-energia com simetria esférica sem rotação. Essa foi a primeira solução para as equações de Einstein, obtida por Karl Schwarzschild (1873-1916), astrônomo e físico alemão.

Vamos encontrar essa solução. Começamos com o sistema de coordenadas a ser utilizado por um observador. É útil utilizar um sistema de coordenadas espaciais esféricas com origem no centro do corpo massivo de modo que o observador que utiliza este referencial atribua coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  a eventos no espaço-tempo exterior ao corpo, chamadas “coordenadas de Schwarzschild”.

**Algumas considerações sobre a métrica.** Uma vez que o espaço-tempo neste caso possui simetria esférica e, conforme também assumiremos, é estático e isotrópico (isto é, a ação do campo gravitacional em determinado ponto depende apenas da distância do ponto ao centro do corpo massivo mas não da sua posição relativa e o corpo não tem rotação), devemos ter as seguintes condições:

1. A métrica é estacionária, isto é, os coeficientes métricos não possuem dependência temporal.
2. O elemento de linha  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  é invariante por reversão temporal, isto é, invariante por mudanças do tipo  $t \rightarrow -t$ .

Então procuramos por coeficientes  $g_{\mu\nu}$  que são independentes da coordenada temporal  $x^0 = t$  e de modo que  $ds^2$  depende apenas de invariantes rotacionais das coordenadas espaciais  $x^1, x^2, x^3$ , ou seja, procuramos por uma métrica estática, estacionária e isotrópica.

Vamos começar encontrando a forma geral de uma métrica estática e espacialmente isotrópica e em seguida restringimos ao caso estacionário.

A forma geral para o elemento de linha  $ds^2$  é

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu.$$

Na expressão de  $ds^2$  apenas invariantes rotacionais devem aparecer; estes são

$$dX \cdot dX, X \cdot X \text{ e } X \cdot dX$$

, onde  $X \equiv (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ . Posto isto, temos que  $ds^2$  deve ter a forma

$$ds^2 = A(t, r)dX \cdot dX + B(t, r)(X \cdot dX)^2 + C(t, r)dt(X \cdot X) + D(t, r)dt^2,$$

onde  $A, B, C$  e  $D$  são funções de  $t$  e  $r$  e onde

$$dX \cdot X = r dr, \quad dX \cdot dX = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2, \quad X \cdot X = r^2.$$

Logo,

$$ds^2 = A(r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2) + (Br + A) dr^2 + Cr(dt dr) + D dt^2$$

Renomeando as funções de  $r$  e  $t$  que aparecem multiplicando  $dr^2$  e  $dt^2$  obtemos

$$ds^2 = A(r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2) + B dr^2 + C dt dr + D dt^2.$$

Podemos realizar uma mudança de coordenadas para obter a expressão acima em forma mais simplificada lembrando que  $ds^2$  é invariante sob escolhas de referenciais. Para eliminar o termo  $dr dt$  introduzimos uma nova coordenada temporal

$$\tilde{t} = t + f(r)$$

de modo que  $d\tilde{t} = dt + f'(r) dr$ , e

$$d\tilde{t}^2 = (dt + f'(r) dr)^2 = dt^2 + 2f'(r) dt dr + dr^2 \Rightarrow dt^2 = d\tilde{t}^2 - 2f'(r) dt dr - dr^2.$$

Precisamos ter

$$dr dt (C - 2f'(r)D) = 0 \Rightarrow f'(r) = \frac{C}{2D}$$

e teremos

$$ds^2 = A(r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2) + B dr^2 + D dt^2.$$

Substituindo  $Ar^2 \rightarrow \tilde{r}^2$  ficamos com

$$ds^2 = D dt^2 + B dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2.$$

Trocando  $D \rightarrow A$ , vem

$$ds^2 = A dt^2 + B dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2.$$

Portanto, relativamente ao referencial local  $(ct, r, \theta, \varphi)$ ,

$$ds^2 = g_{00} c^2 dt^2 + g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} d\varphi^2,$$

isto é,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(g_{00}, g_{11}, r^2, r^2 \text{sen}^2 \theta).$$

Para encontrar as componentes do tensor métrico  $g_{00}$  e  $g_{11}$  vamos utilizar as equações de campo de Einstein para região exterior da distribuição de matéria-energia com simetria esférica. Primeiramente, iremos encontrar os símbolos de Christoffel para os coeficientes métricos  $g_{\mu\nu}$ . Para tanto, vamos utilizar a equação de Euler-Lagrange e a equação das geodésicas:

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0,$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\sigma} = 0,$$

com lagrangeano

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu,$$

sendo  $\sigma$  é um parâmetro afim para a geodésica. Para fins de cálculo vamos definir

$$g_{00} = \frac{1}{g^{00}} \equiv -e^A, g_{11} = \frac{1}{g^{11}} \equiv e^B$$

de modo que o lagrangeano tenha forma

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} \left( -e^A \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 + e^B \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right).$$

Como a equação das geodésicas pode ser obtida da equação de Euler-Lagrange, vamos encontrar os coeficientes de conexão a partir desta. Iremos denotar

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t}, A' = \frac{\partial A}{\partial r}, \dot{B} = \frac{\partial B}{\partial t}, B' = \frac{\partial B}{\partial r}.$$

Assim, para:  $\mu = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x^0} = \frac{1}{2} \left( -\dot{A} e^A \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 + \dot{B} e^B \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 \right), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = -e^A \frac{dt}{d\sigma} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left( -e^A \frac{dt}{d\sigma} \right) - \frac{1}{2} \left( -\dot{A} e^A \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 + \dot{B} e^B \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$-e^A \left[ \frac{d^2 t}{d\sigma^2} + A' \frac{dt}{d\sigma} \frac{dr}{d\sigma} + \frac{\dot{A}}{2} \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 + e^{B-A} \frac{\dot{B}}{2} \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 \right] = 0.$$

Comparando com a equação das geodésicas obtemos

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{A}}{2}, \quad \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{A'}{2}, \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{B}}{2} e^{B-A}$$

e os demais  $\Gamma_{\mu\nu}^0$  são nulos.

Para  $\mu = 1$  temos

$$\frac{\partial L}{\partial x^1} = \frac{1}{2} \left( -A' e^A \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 + B' e^B \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + 2r \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + 2r \text{sen}^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} = e^B \frac{dr}{d\sigma} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left( e^B \frac{dr}{d\sigma} \right) - \frac{1}{2} \left( -A' e^A \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 + B' e^B \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + 2r \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + 2r \text{sen}^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$e^B \left[ \frac{d^2 r}{d\sigma^2} + \frac{B'}{2} \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + \dot{B} \frac{dr}{d\sigma} \frac{dt}{d\sigma} + \frac{A'}{2} e^{A-B} \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - r e^{-B} \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 - r e^{-B} \text{sen}^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] = 0;$$

comparando com a equação das geodésicas correspondente vem

$$\Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{B}}{2}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{A'}{2} e^{A-B}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{B'}{2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r e^{-B}, \quad \Gamma_{33}^1 = -r e^{-B} \text{sen}^2 \theta,$$

e os demais  $\Gamma_{\mu\nu}^1$  são nulos.

Para  $\mu = 2$  temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x^2} &= r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2} = r^2 \frac{d\theta}{d\sigma} \Rightarrow \\ \frac{d}{d\sigma} \left( r^2 \frac{d\theta}{d\sigma} \right) - r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 &= 0 \Rightarrow \\ r^2 \left( \frac{d^2\theta}{d\sigma^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\sigma} \frac{d\theta}{d\sigma} - \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right) &= 0,\end{aligned}$$

comparando com a equação das geodésicas correspondente obtemos

$$\Gamma_{10}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\operatorname{sen} \theta \cos \theta;$$

com os demais  $\Gamma_{\mu\nu}^2$  nulos.

Para  $\mu = 3$  temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x^3} &= 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^3} = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \frac{d\varphi}{d\sigma} \Rightarrow \\ \frac{d}{d\sigma} \left( r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \frac{d\varphi}{d\sigma} \right) &= r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \left( \frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{d\sigma} \frac{dr}{d\sigma} + 2 \cot \theta \frac{d\varphi}{d\sigma} \frac{d\theta}{d\sigma} \right) = 0;\end{aligned}$$

comparando com a equação das geodésicas correspondente obtemos

$$\Gamma_{13}^3 = r^{-1}, \quad \Gamma_{32}^3 = \cot \theta.$$

Em resumo:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{A}}{2}, \quad \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{A'}{2}, \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{B}}{2} e^{B-A} \\ \Gamma_{10}^1 &= \frac{\dot{B}}{2}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{A'}{2} e^{A-B}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{B'}{2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r e^{-B}, \quad \Gamma_{33}^1 = -r e^{-B} \operatorname{sen}^2 \theta \\ \Gamma_{10}^2 &= \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\operatorname{sen} \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{13}^3 &= r^{-1}, \quad \Gamma_{32}^3 = \cot \theta.\end{aligned}$$

Em posse dos coeficientes de conexão para a geometria de Schwarzschild vamos obter equações diferenciais para as funções desconhecidas  $A$  e  $B$ . Faremos isso utilizando as componentes do tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  e em seguida o fato do tensor energia-momento se esvanecer na região exterior ao corpo massivo com simetria esférica (que traz como consequência o tensor de Ricci identicamente nulo nesta região). No entanto, isso não significa que espaço-tempo seja plano: o tensor de Ricci nulo não implica que o tensor de Riemann seja nulo.

Vamos encontrar as componentes do tensor de Ricci através dos símbolos de Christoffel, esse é definido por

$$R_{\mu\beta\nu}{}^\beta = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\beta - \partial_\beta \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\theta}^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\theta + \Gamma_{\mu\theta}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\theta.$$

Para  $\mu = \nu = 0$  temos

$$\begin{aligned}
R_{0\beta 0}{}^\beta &= \partial_0 \Gamma_{\beta 0}^\beta - \partial_\beta \Gamma_{00}^\beta - \Gamma_{\beta\theta}^\beta \Gamma_{00}^\theta + \Gamma_{\theta 0}^\beta \Gamma_{\beta 0}^\theta \\
&= \partial_0 \left( \frac{\dot{A}}{2} + \frac{\dot{B}}{2} \right) - \partial_0 \left( \frac{\dot{A}}{2} \right) - \partial_1 \left( \frac{A'}{2} e^{A-B} \right) - \Gamma_{\beta 0}^\beta \Gamma_{00}^0 \\
&\quad - \Gamma_{\beta 1}^\beta \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{\beta 2}^\beta \Gamma_{00}^2 - \Gamma_{\beta 3}^\beta \Gamma_{00}^3 + \Gamma_{00}^\beta \Gamma_{\beta 0}^0 + \Gamma_{10}^\beta \Gamma_{\beta 0}^1 + \Gamma_{20}^\beta \Gamma_{\beta 0}^2 + \Gamma_{30}^\beta \Gamma_{\beta 0}^3 \\
&= \frac{\ddot{B}}{2} - \frac{A''}{2} e^{A-B} - \frac{A'}{2} (A' - B') e^{A-B} - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{00}^0 \\
&\quad - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{10}^1 \\
&= \frac{\ddot{B}}{2} + \frac{\dot{B}^2}{4} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{4} - e^{A-B} \left( \frac{A''}{2} + \frac{A'^2}{4} - \frac{A'B'}{4} + \frac{A'}{r} \right). \tag{6.1}
\end{aligned}$$

Para  $\mu = \nu = 1$ :

$$\begin{aligned}
R_{1\beta 1}{}^\beta &= \partial_1 \Gamma_{\beta 1}^\beta - \partial_\beta \Gamma_{11}^\beta - \Gamma_{\beta\theta}^\beta \Gamma_{11}^\theta + \Gamma_{\theta 1}^\beta \Gamma_{\beta 1}^\theta \\
&= \partial_1 \left( \frac{A'}{2} + \frac{B'}{2} + \frac{2}{r} \right) - \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{\beta 0}^\beta \Gamma_{11}^0 \\
&\quad - \Gamma_{\beta 1}^\beta \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{\beta 2}^\beta \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{\beta 3}^\beta \Gamma_{11}^3 + \Gamma_{10}^\beta \Gamma_{\beta 1}^0 + \Gamma_{11}^\beta \Gamma_{\beta 1}^1 + \Gamma_{12}^\beta \Gamma_{\beta 1}^2 + \Gamma_{13}^\beta \Gamma_{\beta 1}^3 \\
&= \frac{A''}{2} + \frac{B''}{2} - \frac{2}{r^2} - e^{B-A} \left( \frac{\ddot{B}}{2} + \frac{\dot{B}^2}{2} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{2} \right) - \frac{B''}{2} \\
&\quad - \Gamma_{00}^0 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 \\
&\quad + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3 \\
&= \frac{A''}{2} + \frac{A'^2}{4} - \frac{A'B'}{4} - \frac{B'}{r} - e^{B-A} \left( -\frac{\dot{A}\dot{B}}{4} + \frac{\dot{B}^2}{4} + \frac{\ddot{B}}{2} \right). \tag{6.2}
\end{aligned}$$

Para  $\mu = 0$  e  $\nu = 1$  temos

$$\begin{aligned}
R_{0\beta 1}{}^\beta &= \partial_0 \Gamma_{\beta 1}^\beta - \partial_\beta \Gamma_{01}^\beta - \Gamma_{\beta\theta}^\beta \Gamma_{01}^\theta + \Gamma_{\theta 0}^\beta \Gamma_{\beta 1}^\theta \\
&= \partial_0 \left( \frac{A'}{2} + \frac{B'}{2} + \frac{2}{r} \right) - \partial_0 \left( \frac{A'}{2} \right) - \partial_1 \left( \frac{B}{2} \right) \\
&\quad - \Gamma_{\beta 0}^\beta \left( \frac{A'}{2} \right) - \Gamma_{\beta 1}^\beta \left( \frac{\dot{B}}{2} \right) + \Gamma_{00}^\beta \Gamma_{\beta 1}^0 + \Gamma_{01}^\beta \Gamma_{\beta 1}^1 + \Gamma_{02}^\beta \Gamma_{\beta 1}^2 + \Gamma_{03}^\beta \Gamma_{\beta 1}^3 \\
&= -\frac{\dot{A}A'}{4} - \frac{\dot{B}A'}{4} - \frac{\dot{B}A'}{4} - \frac{\dot{B}B'}{4} - \frac{\dot{B}}{r} \\
&\quad + \frac{\dot{A}A'}{4} + \frac{\dot{B}A'}{4} + \frac{\dot{B}A'}{4} + \frac{\dot{B}B'}{4} = -\frac{\dot{B}}{r}. \tag{6.3}
\end{aligned}$$

Para  $\mu = \nu = 2$  temos

$$\begin{aligned}
R_{2\beta 2}{}^\beta &= \partial_2 \Gamma_{\beta 2}^\beta - \partial_\beta \Gamma_{22}^\beta - \Gamma_{\beta\theta}^\beta \Gamma_{22}^\theta + \Gamma_{\theta 2}^\beta \Gamma_{\beta 2}^\theta \\
&= \partial_2(\cotg\theta) - \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{\beta 1}^\beta \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{21}^\beta \Gamma_{\beta 2}^1 + \Gamma_{22}^\beta \Gamma_{\beta 2}^2 + \Gamma_{23}^\beta \Gamma_{\beta 2}^3 \\
&= \partial_2(\cotg\theta) - \partial_1(-re^{-B}) + \frac{A'}{2} re^{-B} + \frac{B'}{2} re^{-B} + 2e^{-B} - re^{-B} - e^{-B} + \cotg^2\theta \\
&= -\operatorname{cosec}^2\theta + e^{-B} - rB'e^{-B} + r\frac{A'}{2}e^{-B} + \cotg^2\theta \\
&= e^{-B} \left( 1 + \frac{r}{2}(A' - B') \right) - 1. \tag{6.4}
\end{aligned}$$

Para  $\mu = \nu = 3$ :

$$\begin{aligned}
R_{3\beta 3}{}^\beta &= \partial_3 \Gamma_{\beta 3}^\beta - \partial_\beta \Gamma_{33}^\beta - \Gamma_{\beta\theta}^\beta \Gamma_{33}^\theta + \Gamma_{3\theta}^\beta \Gamma_{\beta 3}^\theta \\
&= -\partial_1(-re^{-B}\text{sen}^2\theta) - \partial_2(-\text{sen}\theta \cos\theta) - \Gamma_{\beta 1}^\beta \Gamma_{33}^\beta \\
&\quad - \Gamma_{\beta 2}^\beta \Gamma_{33}^\beta + \Gamma_{31}^\beta \Gamma_{\beta 3}^\beta + \Gamma_{32}^\beta \Gamma_{\beta 3}^\beta + \Gamma_{33}^\beta \Gamma_{\beta 3}^\beta \\
&= e^{-B}\text{sen}^2\theta - rB'e^{-B}\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta + re^{-B}\text{sen}^2\theta \frac{A'}{2} \\
&\quad + re^{-B}\text{sen}^2\theta \frac{B'}{2} + 2e^{-B}\text{sen}^2\theta + \cotg\theta \text{sen}\theta \cos\theta \\
&\quad - re^{-B}\text{sen}^2\theta - \cotg\theta \text{sen}\theta \cos\theta - e^{-B}\text{sen}^2\theta - \cotg\theta \text{sen}\theta \cos\theta \\
&= \text{sen}^2\theta \left[ e^{-B} \left( 1 + \frac{r}{2}(A' - B') \right) - 1 \right] = \text{sen}^2\theta R_{2\beta 2}{}^\beta. \tag{6.5}
\end{aligned}$$

Para  $\mu = 0$   $\nu = 2$ :

$$\begin{aligned}
R_{0\beta 2}{}^\beta &= \partial_0 \Gamma_{\beta 2}^\beta - \partial_\beta \Gamma_{02}^\beta - \Gamma_{\beta\theta}^\beta \Gamma_{02}^\theta + \Gamma_{0\theta}^\beta \Gamma_{\beta 2}^\theta \\
&= \Gamma_{0\theta}^\beta \Gamma_{\beta 2}^\theta \\
&= \Gamma_{\beta 2}^0 + \Gamma_{01}^\beta \Gamma_{\beta 2}^1 + \Gamma_{02}^\beta \Gamma_{\beta 2}^2 + \Gamma_{03}^\beta \Gamma_{\beta 2}^3 \\
&= +\Gamma_{00}^\beta \Gamma_{\beta 2}^0 + \Gamma_{01}^\beta \Gamma_{\beta 2}^1 = 0. \tag{6.6}
\end{aligned}$$

Para  $\mu = 0$  e  $\nu = 3$ :

$$\begin{aligned}
R_{0\beta 3}{}^\beta &= \partial_0 \Gamma_{\beta 3}^\beta - \partial_\beta \Gamma_{03}^\beta - \Gamma_{\beta\theta}^\beta \Gamma_{03}^\theta + \Gamma_{0\theta}^\beta \Gamma_{\beta 3}^\theta \\
&= \Gamma_{0\theta}^\beta \Gamma_{\beta 3}^\theta = \Gamma_{00}^\beta \Gamma_{\beta 3}^0 + \Gamma_{01}^\beta \Gamma_{\beta 3}^1 + \Gamma_{02}^\beta \Gamma_{\beta 3}^2 + \Gamma_{03}^\beta \Gamma_{\beta 3}^3 = 0. \tag{6.7}
\end{aligned}$$

Para  $\mu = 1$  e  $\nu = 2$ :

$$\begin{aligned}
R_{1\beta 2}{}^\beta &= \partial_1 \Gamma_{\beta 2}^\beta - \partial_\beta \Gamma_{12}^\beta - \Gamma_{\beta\theta}^\beta \Gamma_{12}^\theta + \Gamma_{1\theta}^\beta \Gamma_{\beta 2}^\theta \\
&= \partial_1 \Gamma_{\beta 2}^\beta + \Gamma_{1\theta}^\beta \Gamma_{\beta 2}^\theta \\
&= \Gamma_{1\theta}^\beta \Gamma_{\beta 2}^\theta = \Gamma_{10}^\beta \Gamma_{\beta 2}^0 + \Gamma_{11}^\beta \Gamma_{\beta 2}^1 + \Gamma_{12}^\beta \Gamma_{\beta 2}^2 + \Gamma_{13}^\beta \Gamma_{\beta 2}^3 = 0. \tag{6.8}
\end{aligned}$$

Para  $\mu = 1$  e  $\nu = 3$

$$\begin{aligned}
R_{1\beta 3}{}^\beta &= \partial_1 \Gamma_{\beta 3}^\beta - \partial_\beta \Gamma_{13}^\beta - \Gamma_{\beta\theta}^\beta \Gamma_{13}^\theta + \Gamma_{1\theta}^\beta \Gamma_{\beta 3}^\theta \\
&= -\Gamma_{\beta\theta}^\beta \Gamma_{13}^\theta + \Gamma_{1\theta}^\beta \Gamma_{\beta 3}^\theta = \Gamma_{1\theta}^\beta \Gamma_{\beta 3}^\theta \\
&= \Gamma_{10}^\beta \Gamma_{\beta 3}^0 + \Gamma_{11}^\beta \Gamma_{\beta 3}^1 + \Gamma_{12}^\beta \Gamma_{\beta 3}^2 + \Gamma_{13}^\beta \Gamma_{\beta 3}^3 = 0 \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Para  $\mu = 2$  e  $\nu = 3$

$$\begin{aligned}
R_{2\beta 3}{}^\beta &= \partial_2 \Gamma_{\beta 3}^\beta - \partial_\beta \Gamma_{23}^\beta - \Gamma_{\beta\theta}^\beta \Gamma_{23}^\theta + \Gamma_{2\theta}^\beta \Gamma_{\beta 3}^\theta \\
&= \Gamma_{2\theta}^\beta \Gamma_{\beta 3}^\theta = \Gamma_{20}^\beta \Gamma_{\beta 3}^0 + \Gamma_{21}^\beta \Gamma_{\beta 3}^1 + \Gamma_{22}^\beta \Gamma_{\beta 3}^2 + \Gamma_{23}^\beta \Gamma_{\beta 3}^3 \\
&= \Gamma_{21}^\beta \Gamma_{\beta 3}^1 + \Gamma_{22}^\beta \Gamma_{\beta 3}^2 + \Gamma_{23}^\beta \Gamma_{\beta 3}^3 = 0 \tag{6.10}
\end{aligned}$$

Utilizando o fato do tensor energia-momentum se esvanecer na região exterior ao corpo massivo com simetria esférica, obtemos que o tensor de Ricci também é nulo. O seguinte teorema afirma que nesse caso os coeficientes métricos são independentes do tempo.

**Teorema 6.0.1.** (*Teorema de Birkhoff*)

Se  $R_{\mu\nu} = 0 \quad \forall \mu, \nu$  então a métrica da geometria de Schwarzschild é estacionária, isto é,  $A = \dot{B} = 0$ .

*Demonstração.* Omitiremo a demonstração<sup>1</sup>. □

Segue do teorema de Birkhoff que

$$R_{0\beta 0}{}^\beta = -e^{A-B} \left( \frac{A''}{2} + \frac{A'^2}{4} - \frac{A'B'}{4} + \frac{A'}{r} \right) = 0,$$

$$R_{1\beta 1}{}^\beta = \frac{A''}{2} + \frac{A'^2}{4} - \frac{A'B'}{4} - \frac{B'}{r} = 0,$$

$$R_{2\beta 2}{}^\beta = e^{-B} \left( 1 + \frac{r}{2}(A' - B') \right) - 1 = 0,$$

$$e^{B-A}R_{00} + R_{11} = 0,$$

de onde obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{A''}{2} + \frac{A'^2}{4} - \frac{A'B'}{4} + \frac{A'}{r} = 0 & (6.11) \\ A' + B' = 0 & (6.12) \\ e^{-B} \left( 1 + \frac{r}{2}(A' - B') \right) - 1 = 0 & (6.13) \end{cases}$$

Precisamos apenas das equações (6.12) e (6.13) para obter a solução do sistema acima, pois uma vez obtida, podemos mostrar que ela também satisfaz (6.11).

A equação (6.12) fornece

$$A + B = k_0$$

, onde  $k_0$  é constante. Substituindo  $A' = -B'$  em (6.13) obtemos

$$(1 - rB')e^{-B} - 1 = 0. \tag{6.14}$$

Introduzindo uma nova variável

$$\lambda(r) = e^{-B(r)},$$

temos

$$\frac{d\lambda}{dr} = -B'e^{-B}$$

e (6.14) pode ser escrita sob a forma

$$\frac{\lambda}{r} + \frac{d\lambda}{dr} = \frac{1}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dr}(\lambda r) = 1 \Rightarrow \lambda(r) = 1 + \frac{k_1}{r} = e^{-B},$$

---

<sup>1</sup>Veja: CHENG. Ta-Pei. Relativity, Gravitation and Cosmology A basic introduction. New York: Oxford University Press, 2005.

onde  $k_1$  é constante. Logo

$$g_{00} = -e^A = -e^{-B+k} = -\frac{e^k}{g_{11}} = -e^k e^{-B} = -e^k \left(1 + \frac{k_1}{r}\right).$$

Do limite newtoniano para campos fracos obtemos

$$g_{00} = -1 - \frac{2\phi}{c^2} = -e^k \left(1 + \frac{k_1}{r}\right).$$

Fixamos as constantes impondo que no “infinito” seja  $g_{00} = -1$ . Então, devemos ter  $k_0 = 0$ , portanto  $-k_1 = \frac{2GM}{c^2}$  e a métrica de Schwarzschild é dada por

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left[ -1 + \frac{2GM}{c^2 r}, -\left(-1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}, r^2, r^2 \text{sen}^2 \theta \right].$$

Isto é, o elemento de linha da geometria de Schwarzschild é dado por

$$ds^2 = c^2 \left(-1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(-1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2.$$

## 6.1 Geometria do espaço-tempo de Schwarzschild

Para escolhas fixas de  $t$  e  $r$ , digamos,  $t = t_0, r = R$ , podemos nos restringir a geometria do subconjunto dos eventos do espaço-tempo de Schwarzschild em que essas coordenadas são fixas. O elemento de linha para esse subconjunto é obtido do elemento de linha de Schwarzschild com essas coordenadas constantes. Nesse caso

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi.$$

Ou seja,  $ds^2$  é exatamente o elemento de linha da esfera de raio  $R$ . Sendo o espaço-tempo isotrópico, todos os pontos nesta superfície são “fisicamente equivalentes”. Este é o reflexo da simetria esférica da geometria do espaço-tempo de Schwarzschild.

Quando  $r \rightarrow \infty$ , isto é, para valores de  $r$  que sejam suficientemente grandes para que  $\frac{2GM}{c^2 r} \ll 1$ , temos

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2,$$

e vemos que no “infinito” o espaço tempo de Schwarzschild é espaço-tempo de Minkowski. Nesse sentido, dizemos que a métrica de Schwarzschild é assintoticamente plana. Quando  $r \rightarrow \frac{2GM}{c^2} = R_S$  temos que  $g_{00} \rightarrow 0$  e  $g_{11}$  possui uma singularidade em  $R_S$ . Essa quantidade é denominada “o raio de Schwarzschild”, e não devemos imediatamente interpretar que esta singularidade tenha significado físico relacionado a efeitos gravitacionais. Pode ser que seja possível remover esta singularidade por uma mudança de coordenadas específica. Entretanto, quando  $r \rightarrow 0$  temos uma singularidade gravitacional, pois neste caso ela está também nas componentes do tensor de Ricci, que codifica a curvatura, e portanto, a gravidade.

Devemos observar que se o raio  $R$  do corpo massivo for maior que o seu raio de Schwarzschild  $R_S$ , então a solução é aplicável em toda região exterior ao corpo de massa  $M$ . No caso em que  $R_S$  é maior que o raio do corpo, a solução é aplicável apenas na região onde  $R < r < R_S$  e  $R_S < r$ .

### 6.1.1 Generalidades: o teorema de Birkhoff

Como vimos, o teorema de Birkhoff tem como resultado a independência temporal dos coeficientes métricos para o espaço tempo de Schwarzschild, resultando em uma métrica estática e estacionária. Em particular, o corpo só necessita não estar rotacionando, de modo que o corpo pode estar se expandindo ou contraindo radialmente ou até mesmo pulsando que a partir de uma certa região limitada o espaço-tempo não seria alterado. Por exemplo: se o corpo se expande de forma a ter raio  $R_0$  e se contrai até um raio  $R_5 < R_1$ , então a solução é aplicável na região  $R_0 < r$  e quando o corpo se contrai é aplicável na região  $R_1 < r$ . Isto é extremamente importante para aplicações no estudo de formação de objetos estelares massivos por colapso gravitacional, e em outras aplicações em Astrofísica. Mas estas fogem ao escopo deste trabalho.<sup>2</sup>

### 6.1.2 Observadores e quadros de referência no espaço tempo de Schwarzschild

Vamos discutir três tipos de observadores e quadros de referência no espaço tempo de Schwarzschild: estacionários, em queda-livre e observadores distantes do corpo massivo com simetria esférica.

Para um observador permanecer em repouso no campo gravitacional em torno do objeto massivo talvez seja necessário que o observador esteja dentro de um foguete, por exemplo. Daí, a relatividade especial poderá ser aplicada localmente se o observador supor que o foguete está submetido à uma força fictícia proporcional a massa do foguete.

Um observador que está em queda livre pode aplicar a relatividade especial localmente, no seu referencial de repouso a gravidade é “desligada”.

Já um observador que está longe da fonte gravitacional, o suficiente, a relatividade especial pode ser aplicada localmente. Esse observador pode ser até considerado como estando em repouso mesmo que esteja em queda livre.

### 6.1.3 Intervalos de tempo e distância no espaço-tempo de Schwarzschild

Na Relatividade Especial observadores nem sempre concordam sobre intervalos de tempo e distância entre eventos. Então, é preciso deixar claro como vamos fazer medições de tempo e espaço na Relatividade Geral para não termos esse tipo de ambiguidade ao tratarmos de separação espaço-temporal entre eventos no espaço-tempo de Schwarzschild. Intervalos de tempo e espaço entre eventos próximos na Relatividade Geral devem ser medidos utilizando a separação espaço-temporal infinitesimal  $ds^2$ .

### 6.1.4 Tempo próprio e dilatação temporal gravitacional

Considere dois eventos de emissão de luz que ocorrem na mesma posição espacial e separados por um intervalo de tempo  $dt_{em}$  com coordenadas

$$(t_1, r_{em}, \theta, \varphi), (t_1 + dt_{em}, r_{em}, \theta, \varphi).$$

<sup>2</sup>Veja: HOBSON.M.P; EFSTATHIOUS.G.P and LANSEBY.A.N. General relativity An Introduction for Physicists. New York: Cambridge University Press, 2006.

O tempo próprio entre esse eventos é dado por

$$d\tau_{em} = \sqrt{\frac{ds^2}{c^2}} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{em}}\right)^{\frac{1}{2}} dt_{em}.$$

Este é o tempo entre os dois eventos medido por um relógio que está em repouso na localização deles.

Vamos considerar um observador em repouso na posição espacial com coordenadas  $r_{ob}, \theta, \varphi$ . Podemos mostrar que para este observador o intervalo de tempo que separa a chegada dos dois sinais luminosos na sua localização é

$$dt_{ob} = dt_{em}.$$

Daí, o tempo próprio entre os sinais luminosos quando eles chegam em  $r_{ob}$  é dado por

$$d\tau_{ob} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{ob}}\right)^{\frac{1}{2}} dt_{ob} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{ob}}\right)^{\frac{1}{2}} dt_{em}.$$

Agora, observe que se  $r_{ob}$  é grande o suficiente para que  $\frac{2GM}{c^2 r_{ob}} \ll 1$ , então

$$d\tau_{ob} = dt_{em}$$

, ou seja, o tempo próprio entre os eventos de recepção pelo observador em  $r_{ob}$  é igual ao intervalo de tempo coordenado entre os eventos de emissão.

Da relação

$$d\tau_{em} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{em}}\right)^{\frac{1}{2}} dt_{em}$$

obtemos

$$dt_{em} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{em}}\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau_{em},$$

logo

$$d\tau_{ob} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{ob}}\right)^{\frac{1}{2}} dt_{em} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{ob}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{em}}\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau_{em}.$$

Assim, se o observador está longe o suficiente do corpo esférico massivo para que  $\frac{2GM}{c^2 r_{ob}} \ll 1$ , então

$$d\tau_{ob} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{em}}\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau_{em}.$$

Isto mostra que o tempo próprio entre os eventos de recepção é maior que o tempo próprio entre as emissões. Se considerarmos que as emissões desses sinais luminosos são tick's de um relógio, então o observador distante em  $r_{ob}$  diria que o relógio em repouso que emite estes sinais está mais lento que o relógio em repouso no evento de recepção desses sinais. Este é o chamado efeito de dilatação temporal gravitacional.

### 6.1.5 Intervalos de distância própria e dilatação gravitacional do comprimento

Sejam dois eventos simultâneos no espaço-tempo de Schwarzschild com coordenadas angulares  $\theta, \varphi$  e com diferentes coordenadas radiais  $r$  e  $r + dr$ . Para estes

eventos, a distância própria entre eles é dada por

$$d\rho = dr \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

O intervalo de distância própria  $d\rho$  é interpretado como sendo a distância entre os eventos obtida através de um objeto de medição quando ocorrem simultaneamente. Observe que  $d\rho$  é menor que  $dr$ , este efeito é denominado dilatação gravitacional do comprimento. No entanto, é diferente da dilatação do comprimento da Relatividade Especial, tendo em vista que a separação espacial coordenada  $dr$  não é uma distância "física" (realizada por um objeto de medição).

Para  $t$  e  $r$  fixado podemos obter a distância própria entre eventos simultâneos na superfície de uma esfera de raio coordenado  $r$  dada por

$$d\rho = (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, por exemplo, uma círculo de raio coordenado  $r$  possui comprimento próprio dado por  $2\pi r$ . Entretanto duas esferas concêntricas uma possuindo raio coordenado  $r$  e a outra raio coordenado  $r + dr$  possuem distancia própria dada por

$$d\rho = dr \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

e portanto o raio próprio difere do raio coordenado  $r$ .

## 6.2 Geodésicas no espaço-tempo de Schwarzschild

Nesta presente seção estaremos interessados na descrição do movimento de partículas massivas sob ação exclusiva da gravidade no espaço-tempo de Schwarzschild. Para isso precisamos encontrar a linha-mundo de partículas massivas em queda-livre na geometria de Schwarzschild. Vimos que a curva  $x^\mu(\tau)$  que representa a linha mundo de uma partícula em queda livre deve satisfazer a equação das geodésicas

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad \forall \mu = 0, 1, 2, 3,$$

onde  $\tau$  é o tempo próprio da partícula ao longo da geodésica. Por outro lado, estas equações podem ser obtidas da equação de Euler-Lagrange com lagrangeano

$$L = c^2 \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = -c^2.$$

Daí, resolvendo para cada  $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0,$$

onde  $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ , obtemos para  $\mu = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x^0} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = c^2 \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{dt}{d\tau} = k,$$

onde  $k$  é constante.

Para  $\mu = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^1} &= -\frac{2GM}{r^2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{2GM}{c^2 r^2} \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \\ &+ 2r \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + 2r \operatorname{sen}^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} = -2 \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \frac{dr}{d\tau}$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} \right) = -2 \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \frac{d^2 r}{d\tau^2} - 4 \frac{GM}{c^2 r^2} \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^1} &= \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{GM}{c^2 r^2} \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \\ &- \frac{GM}{r^2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + r \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + r \operatorname{sen}^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Para  $\mu = 2$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x^2} = 2r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2} = 2r^2 \frac{d\theta}{d\tau}$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2} \right) = 4r \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + 2r^2 \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

$\mu = 3$

$$\frac{\partial L}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^3} = 2r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^3} \right) = 0 \Rightarrow 2r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} = h,$$

onde  $h$  é constante. Então, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{dt}{d\tau} = k \quad (6.15) \\ \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (6.16) \\ \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{GM}{c^2 r^2} \left( -1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \\ - \frac{GM}{r^2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + r \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + r \operatorname{sen}^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (6.17) \\ r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} = h \quad (6.18) \end{array} \right.$$

Portanto, se formos capazes de resolver o sistema acima poderemos encontrar a linha mundo de uma partícula massiva livre ou um fóton em queda livre. Restringiremos nossa discussão ao caso de partículas massivas que se movem no plano equatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Substituindo a equação (6.17) pelo lagrangeano e levando em consideração que  $\theta = \frac{\pi}{2}$  obtemos o novo sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\tau} = k \quad (6.19) \\ c^2 \left(-1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(-1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = -c^2 \quad (6.20) \\ r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = h \quad (6.21) \end{array} \right.$$

Busquemos interpretações físicas para as constantes  $k, h$ . Como  $L$  não depende de  $t$  e  $\varphi$  as componentes  $p_0$  e  $p_3$  (onde  $p^\mu$  são as componentes do 4-momentum) são conservadas ao longo da geodésica. Com efeito, se a partícula tem massa de repouso  $m_0$ , então

$$p^\mu = m_0 \dot{x}^\mu$$

e, daí,

$$\begin{aligned} p_0 = g_{\mu 0} p^\mu = g_{00} p^0 &= m_0 c^2 \left(-1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\tau} = c^2 m_0 k, \quad p^3 = g_{\mu 3} p^\mu \\ &= g_{33} p^3 = m_0 r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = m_0 h. \end{aligned}$$

No “infinito”  $p_0 = -m_0 c^2 \frac{dt}{d\tau} = -E$ , onde  $E$  é a energia total da partícula. Logo devemos ter  $k = -\frac{E}{m_0 c^2}$ . A quantidade constante  $h$  deve ser a magnitude do momentum angular específico.

Observando que

$$k^2 = \left(-1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(-1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2, \quad \frac{h^2}{r^2} = r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2$$

e levando em (6.20) temos ,

$$c^2(k^2 - 1) = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{h^2}{r^2} \left(-1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{2GM}{r}. \quad (6.22)$$

Desta última expressão podemos obter uma equação com  $r$  em função de  $\varphi$ , ou seja, uma equação para a órbita da partícula.

Começamos usando a regra da cadeia para obter

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau}.$$

De  $h = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$ , temos

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{h}{r^2}.$$

Substituindo em (6.22), vem

$$c^2(k^2 - 1) + \frac{2h^2GM}{c^2r^3} + \frac{2GM}{r} = \left( \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{h^2}{r^2}. \quad (6.23)$$

Fazendo a substituição  $u = \frac{1}{r}$ , temos  $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}$ , e (6.23) se torna

$$c^2(k^2 - 1) + \frac{2h^2GMu^3}{c^2} + 2GMu = h^2 \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + h^2u^2.$$

Diferenciando esta última com relação à  $\varphi$ , obtemos a equação para órbita de uma partícula com momento angular não-nulo que se move no plano equatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$  dada por

$$\frac{3GMu^2}{c^2} + \frac{GM}{h^2} = \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u. \quad (6.24)$$

### 6.2.1 Movimento radial de queda-livre

Para uma partícula que se move radialmente no plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , temos  $\varphi$  constante e a equação (6.23) se torna

$$c^2(k^2 - 1) = \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{2GM}{r} \quad (6.25)$$

Derivando esta última com relação à  $\tau$  obtemos

$$2 \frac{dr}{d\tau} \left( \frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{GM}{r^2} \right) = 0,$$

donde

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{GM}{r^2}.$$

Na teoria Newtoniana a trajetória radial de uma partícula em queda-livre também é dada pela equação

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}.$$

Entretanto, não podemos dizer que as duas teorias de gravitação predizem os mesmos efeitos. De fato,  $r$  é apenas a distância coordenada na equação relativística e  $\tau$  é o tempo próprio da partícula. Em contraste com a equação Newtoniana,  $t$  é o tempo universal e  $r$  a distância da partícula ao centro do corpo esférico.

### 6.2.2 Órbitas circulares

Vamos considerar uma partícula que se move no plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$  com coordenada radial constante. Segue da equação de órbita que

$$\frac{3GMu^2}{c^2} + \frac{GM}{h^2} = u \Rightarrow h^2 = -\frac{c^2GM}{3Mr^{-2} - c^2r^{-1}} = \frac{c^2GM r^2}{c^2r - 3GM};$$

da equação das geodésicas (6.21) obtemos

$$r^4 \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = h^2 \Rightarrow \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = \frac{c^2GM}{r^2(c^2r - 3GM)}.$$

Portanto, órbitas circulares somente são possíveis se  $3R_S < r$ . Utilizando o fato que

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{d\tau}\right)^2 = k^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left(-1 + \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{-2},$$

vemos que

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = k^{-2} \left(-1 + \frac{2MG}{c^2 r}\right)^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = k^{-2} \left(-1 + \frac{2MG}{c^2 r}\right)^2 \frac{c^2 GM}{r^2(c^2 r - 3GM)} = \frac{Gm}{r^3},$$

onde utilizamos que da equação (6.22) temos  $k = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(1 - \frac{3GM}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}}$ . In-

tegrando  $\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{Gm}{r^3}}$  e utilizando que  $\varphi(0) = 0$ , obtemos o período coordenado da

órbita dado por  $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ . Observe que esta expressão é a mesma para uma órbita circular de raio  $r$  na teoria Newtoniana, no entanto,  $r$  não é o raio da órbita no caso relativístico.

### 6.3 Precessão de giroscópios em queda-livre: efeito geodético

Um dos efeitos gravitacionais mais interessante da geometria de Schwarzschild é o efeito geodético. Este é caracterizado pela precessão do 4-spin, no plano de órbita, de um giroscópio em órbita circular na geometria de Schwarzschild. No que se segue vamos estabelecer este efeito matematicamente, e vamos determinar o ângulo total de precessão por período orbital. O 4-spin é um vetor transportado paralelamente ao longo da linha mundo do centro de massa, que tem a direção espacial do eixo de rotação do giroscópio em seu quadro de repouso. Suponha que um pequeno giroscópio esteja em órbita circular, que as componentes do 4-spin  $S(\tau)$  sejam dadas relativamente ao referencial  $(t, r, \theta, \varphi)$  por  $s^\mu(\tau)$ , e que o giroscópio possua as componentes da 4-velocidade  $U(\tau)$  dadas por  $u^\mu(\tau)$ . No quadro de repouso da partícula as componentes do 4-spin são dadas por  $\tilde{s}^0 = 0, \tilde{s}^i, i = 1, 2, 3$  e as do 4-velocidade por  $\tilde{u}^0 = 1, \tilde{u}^i = 0, i = 1, 2, 3$ . Daí, pela condição de transporte paralelo

$$g(S, U) = g_{\mu\nu} s^\mu u^\nu = \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{s}^\mu \tilde{u}^\nu = 0 \quad (6.26)$$

ao longo da linha-mundo do giroscópio.

Visto que o giroscópio está em queda-livre,  $U(\tau)$  é transportado paralelamente ao longo da linha-mundo devemos ter que  $S(\tau)$  também é transportado paralelamente. Devemos ter de (6.26) que  $S(\tau)$  também é transportado paralelamente ao longo da linha-mundo do giroscópio. Segue que as componentes  $s^\mu$  devem satisfazer as equações de transporte paralelo ao longo da linha mundo do giroscópio, isto é,

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu s^\nu u^\lambda = 0.$$

Lembrando que as componentes da 4-velocidade

$$[u^\mu] = \left(\frac{dt}{d\tau}, 0, 0, \frac{d\varphi}{d\tau}\right) = (u^0, u^1, u^2, u^3)$$

onde

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\tau} &= k \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = \left(1 - \frac{3GM}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \Omega = \frac{GM}{c^2 r^3} \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \Omega \frac{dt}{d\tau} = u^0 \Omega = u^3 \\ [u^\mu] &= u^0(1, 0, 0, \Omega).\end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever a equação (6.26) como

$$g_{00}s^0u^0 + g_{33}s^3u^3 = 0 \Rightarrow c^2 \left(-1 + \frac{2GM}{r}\right) s^0u^0 + r^2s^3u^3 = 0,$$

donde

$$s^0 = c^{-2}r^2s^3\Omega \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}.$$

Daí, as equações de transporte paralelo se tornam

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} + \Gamma_{0\nu}^\mu s^\nu u^0 + \Gamma_{3\nu}^\mu s^\nu u^3 = 0.$$

Utilizando os símbolos de Christoffel já encontrados para a geometria de Schwarzschild, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds^0}{d\tau} + \Gamma_{01}^0 s^1 u^0 = 0 \end{array} \right. \quad (6.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds^1}{d\tau} + \Gamma_{00}^1 s^0 u^0 + \Gamma_{33}^1 s^3 u^3 = 0 \end{array} \right. \quad (6.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds^2}{d\tau} = 0 \end{array} \right. \quad (6.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds^3}{d\tau} + \Gamma_{13}^3 s^1 u^3 = 0 \end{array} \right. \quad (6.30)$$

onde

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right), & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}.\end{aligned}$$

Substituindo os símbolos de Christoffel no sistema acima e eliminando a primeira equação por ser equivalente à quarta obtemos o novo sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds^1}{d\tau} + \frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) s^0 u^0 - r \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) s^3 u^3 = 0 \end{array} \right. \quad (6.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds^2}{d\tau} = 0 \end{array} \right. \quad (6.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds^3}{d\tau} + \frac{1}{r} s^1 u^3 = 0 \end{array} \right. \quad (6.33)$$

Usando que  $s^0 = c^{-2}r^2s^3\Omega \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$ ,  $u^0\Omega = u^3$  obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds^1}{d\tau} - rs^3\Omega(u^0)^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad (6.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds^2}{d\tau} = 0 \end{array} \right. \quad (6.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds^3}{d\tau} + \frac{1}{r}s^1u^0\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (6.36)$$

Derivando a primeira equação temos

$$\frac{d^2s^1}{d\tau^2} - r\frac{\Omega}{u^0}\frac{ds^3}{d\tau} = 0.$$

Substituindo a terceira nesta vem

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2s^1}{d\tau^2} + s^1\Omega^2 = 0 \end{array} \right. \quad (6.37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds^2}{d\tau} = 0 \end{array} \right. \quad (6.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds^3}{d\tau} + \frac{1}{r}s^1u^0\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (6.39)$$

Observando que

$$\frac{d^2s^\mu}{d\tau^2} = \frac{ds^\mu}{dt} \frac{d^2t}{d\tau^2} + \frac{d^2s^\mu}{dt^2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{d^2s^\mu}{dt^2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{d^2s^\mu}{dt^2} (u^0)^2,$$

obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2s^1}{dt^2} + s^1 \left(\frac{\Omega^2}{u^0}\right)^2 = 0 \end{array} \right. \quad (6.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds^2}{dt} = 0 \end{array} \right. \quad (6.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds^3}{dt} + \frac{1}{r}s^1\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (6.42)$$

A primeira equação deste último sistema é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea, com equação característica dada por

$$\lambda^2 + \left(\frac{\Omega^2}{u^0}\right)^2 = 0,$$

as raízes sendo  $\lambda = \pm \frac{i\Omega}{u^0}$ . Logo, devemos ter

$$s^1 = a \cos(\Omega't) + b \text{sen}(\Omega't),$$

onde  $\Omega' = \frac{\Omega}{u^0}$ . Fixamos as constantes pedindo que em  $t = 0$  a direção espacial do 4-spin seja a direção radial, de modo que  $s^2(0) = 0 = s^3(0)$ . Logo,

$$s^1(t) = s^1(0) \cos(\Omega't), \quad (6.43)$$

$$s^2(t) = 0, \quad (6.44)$$

$$s^3(t) = -\frac{\Omega}{\Omega'r} s^1(0) \text{sen}(\Omega't). \quad (6.45)$$

Esta solução mostra que a parte espacial do 4-spin está girando com relação ao eixo radial do giroscópio de um ângulo  $(\Omega + \Omega')t$ . Este é o chamado efeito “geodético” ou “precessão de De Sitter”. Quando  $\Omega t = 2\pi$ , ou seja,  $t = T = \frac{2\pi}{\Omega}$ , temos

$$\Omega' T = 2\pi \left(1 - \frac{3GM}{c^2 r}\right)^{-\frac{1}{2}} < 2\pi.$$

Portanto, depois de uma órbita completa, a parte espacial do 4-spin sofreu uma precessão na direção da órbita de um ângulo

$$\alpha = 2\pi - \Omega' T = 2\pi \left(1 - \left(1 - \frac{3GM}{c^2 r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (6.46)$$

Este ângulo, o “ângulo de De Sitter”, é uma das previsões clássicas da TGR mais importantes, tendo sido prevista por De Sitter na década de 1910. Como a equação (6.46) mostra, trata-se de um efeito pequeno. Mas como discutiremos na próxima seção ele foi medido experimentalmente em um dos experimentos mais marcantes da ciência dos últimos 50 anos – a missão Gravity Probe B (Universidade de Stanford/Nasa)

## 6.4 O experimento Gravity Probe B

O experimento Gravity Probe B foi um dos experimentos de mais alta precisão já realizados. Este, por sua vez, tem como objetivo principal medir os efeitos “geodético” ou “De Sitter”, e ainda o efeito de “arrasto de referenciais” ou efeito “Lense-Thirring”, no espaço-tempo em torno da Terra. O experimento foi financiado pela NASA e os esforços liderados pelo Departamento de Física da Universidade de Stanford.

O efeito geodético, como descrito na seção anterior, é a precessão sofrida pelo 4-spin de um giroscópio, em queda-livre na geometria de Schwarzschild, no plano de órbita. Mas este efeito também é previsto para o espaço-tempo em torno da Terra que é descrito pela “métrica de Kerr<sup>3</sup>” (a Terra possui um pequeno momentum angular e, portanto, o espaço-tempo ao seu redor não é descrito pela métrica de Schwarzschild). O efeito “Lense-Thirring” é a precessão sofrida pelo 4-spin de um giroscópio, em queda-livre no espaço-tempo ao redor da Terra, na direção ortogonal ao seu plano de órbita. Este efeito foi previsto pelos físicos austríacos Joseph Lense e Hans Thirring em 1918. De forma mais simplificada, a descrição deste efeito é a seguinte: corpos massivos com momentum angular não-nulo, arrastam o espaço-tempo ao seu redor.

O objetivo do experimento Gravity Probe B foi medir estes efeitos (que são “minúsculos” no campo gravitacional terrestre) com enorme precisão. Podemos dizer que uns dos mais fantásticos na história da ciência, este quantifica o quanto a Terra “distorce” e “arrasta” o espaço-tempo ao seu redor. Além disso, a testes experimentais da TGR tiveram um grande avanço com este experimento em pelo menos dois aspectos:

1. medindo efeitos conhecidos, como a universalidade da queda-livre, com maior precisão;

---

<sup>3</sup>Veja: HOBSON.M.P; EFSTATHIOUS.G.P and LANSEBY.A.N. General relativity An Introduction for Physicists. New York: Cambridge University Press, 2006.

2. investigando fenômenos anteriormente não testados.

O experimento Gravity Probe B tem como princípio um satélite com 4 giroscópios com eixos de rotação alinhados, orbitando à Terra com uma distância de cerca de  $600\text{km}$  da superfície terrestre. Os eixos são alinhados, inicialmente, com uma estrela guia de referência (veja a figura). O satélite tem o papel de minimizar os efeitos externos sobre os giroscópios, tais como: radiação solar, perturbações da atmosfera terrestre, etc.

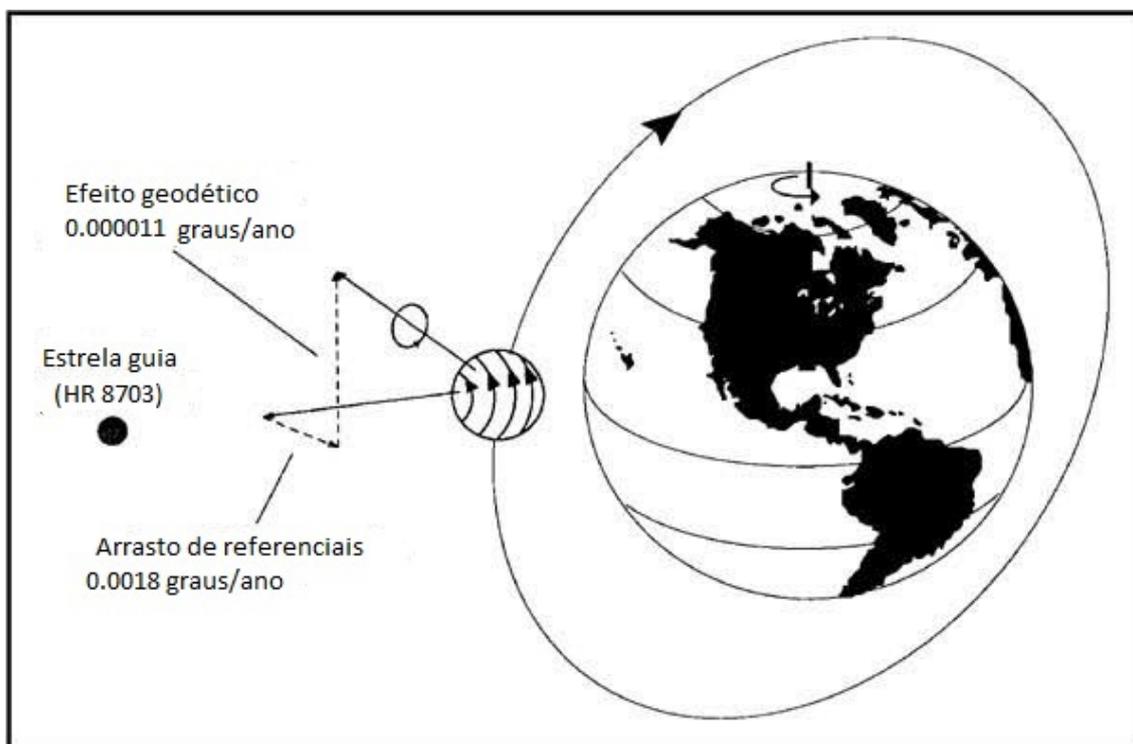


Figura 6.1: A figura mostra esquematicamente o experimento Gravity Probe B e alguns dos dados obtidos.

Testes da Relatividade Geral por meio de giroscópios em órbita foram sugeridos no final de 1950, mas as ideias teóricas surgiram em 1920. Somente em abril de 2004 foi possível executar a missão Gravity Probe B que possibilitou testes com giroscópios em queda-livre e reportou dados em acordo com as previsões da Teoria Geral da Relatividade. Em particular, os resultados deste experimento validaram nossa expressão para o ângulo de De Sitter, deduzida na seção anterior.

# Apêndice A

## Relatividade Especial

Começamos a nossa discussão sobre a TRE (Teoria Especial da Relatividade) estabelecendo alguns conceitos básicos para tal propósito.

### A.1 Preliminares

- **Evento:** um evento pode ser considerado como uma ocorrência física sem duração temporal e sem extensão espacial, em que se atribui coordenadas espaciais  $x^0, x^1, x^2, x^3$  e uma coordenada temporal  $x^4 = ct$  onde  $c$  é a velocidade da luz e  $t$  o instante em que o evento ocorre, assim, o tempo é medido em unidades de distância ao convencionarmos que  $c = 1$ .
- **Observador:** um observador tem o papel de observar eventos e rotulá-los com coordenadas espaciais e de tempo. Devemos chamar a atenção para o fato de que observar e ver no nosso contexto são atos distintos, observar um evento significa atribuir coordenadas precisas de espaço e tempo ao evento. Por exemplo, ao observar o “estouro” de uma supernova o observador deve ser capaz de atribuir a este evento coordenadas precisas de espaço e tempo, isto seria diferente de estar na Terra e ver a explosão. Certamente, o tempo que observador atribui ao evento é diferente do instante de tempo em que quem está na Terra vê a explosão, pois a luz emitida no instante do evento percorre uma certa distância até chegar à Terra.
- **Referencial inercial (ou quadro de referência):** um referencial inercial ou quadro de referência é uma estrutura idealizada na qual é possível observar fenômenos físicos, descreveremos esta estrutura abstratamente por um sistema de coordenadas espaciais e temporal onde são válidas as leis de Newton.

Um referencial é estabelecido usando o método do radar: utilizando um dispositivo para emitir sinais luminosos um observador mede a posição de um evento no espaço, calculando o tempo de emissão e chegada de um fóton que foi emitido pelo observador no instante da ocorrência do evento e refletido no evento por um auxiliar do observador. Como a distância  $d$  entre o observador e o evento é dada por  $d = \frac{ct}{2}$  onde  $t$  é o tempo decorrido desde a emissão até a chegada do fóton ao observador. O instante de tempo em que o evento ocorre é registrado pelo auxiliar do observador que preside no local do evento no instante em que ele ocorre. Admitimos que cada observador presidindo em um referencial inercial possui um auxiliar em cada ponto do sistema de coordenadas espaciais, e que cada auxiliar possui um relógio que está sincronizado

com o relógio do observador. Assim, todo referencial inercial consiste, além de um sistema de coordenadas espaciais, de uma rede de relógios sincronizados.

- Espaço-tempo de Minkowski: o conjunto de todos os eventos com possibilidades físicas será denotado por  $M$ . Os elementos de  $M$  se dizem eventos que serão representados por 4-upla de números reais  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ , onde os reais  $x^0, \dots, x^2$  denotam coordenadas espaciais e  $x^3 = ct$  onde  $t$  é o instante de tempo em que ocorreu o evento.

A mecânica Newtoniana se baseia no fato que o tempo é absoluto. Significando que na mecânica de Newton o “tempo” é o mesmo para todos os observadores que presidam em referencias inercias com relógios sincronizados. Para ficar mais claro, imagine que dois observadores que denotaremos por  $O$  e  $O'$  presidam em dois referencias  $S$  e  $S'$  respectivamente, e que estão em movimento relativo uniforme com velocidade  $V$ , observam um evento  $A$ . O que os observadores  $O$  e  $O'$  nos contam a respeito das coordenadas atribuídas ao evento  $A$  por ambos? Com apenas o conhecimento da mecânica de Newton e com a própria intuição, diríamos inquestionavelmente que o instante de tempo atribuído ao evento pelo os dois observadores seria o mesmo, e supondo que os referencias  $S$  e  $S'$  estão com os eixos sobrepostos e que o quadro  $S'$  se move com velocidade constante  $V$  na direção do eixo positivo dos  $x^0$ , e além disso a origem dos dois sistemas de coordenadas coincidem quando  $t = \tilde{t} = 0$ , temos que a relação entre as coordenadas nos dois referencias locais são dadas por

$$\begin{cases} x^0 = \tilde{x}^0 + Vt \\ x^1 = \tilde{x}^1 \\ x^2 = \tilde{x}^2 \\ t = \tilde{t} \end{cases}$$

A verdade é que estas relações não estão realmente corretas, iremos deduzir uma transformação de coordenadas que mostrará que  $t \neq \tilde{t}$  para certas velocidades  $V$ .

É evidente que se considerarmos todos os eventos possíveis e rotularmos todos com coordenadas  $x^0, \dots, x^3$  teremos  $M \simeq \mathbb{R}^4$ . Desse modo definimos em  $M$  a aplicação

$$g : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por  $g(u, v) = u^0v^0 + u^1v^1 + u^2v^2 - u^3v^3$ .

**Proposição A.1.1.** *A aplicação  $g$  definida acima é uma forma bilinear e satisfaz:*

1.  $g(u, v) = g(v, u) \quad \forall u, v \in M$
2.  $g(u, v) = 0 \quad \forall u \in M \text{ e } v \in M \text{ fixado} \Rightarrow v = \vec{0}$

*Demonstração.* 1. É obvio.

2. Se  $v = (v^0, \dots, v^3)$  tome  $u = (v^0, v^1, v^2, -v^3)$ , então  $g(u, v) = (v^0)^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = 0 \Leftrightarrow v^i = 0, i = 0, \dots, 3 \Rightarrow v = \vec{0}$ .

□

Por  $g$  satisfazer 1 dizemos que  $g$  é simétrica e por  $g$  satisfazer 2 dizemos que  $g$  é não degenerada.

**Definição A.1.1.** *A linha-mundo de uma partícula é o conjunto de todos os eventos experimentados por esta.*

Sejam  $x = (x^0, \dots, x^3)$  e  $\tilde{x} = (\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)$  dois eventos na linha-mundo de um fóton, e considere o vetor deslocamento  $\vec{d} = (x^0 - \tilde{x}^0, \dots, x^2 - \tilde{x}^2)$  entre os dois eventos. Como  $\vec{d}$  representa o deslocamento de um fóton do evento  $x$  ao evento  $\tilde{x}$  no intervalo de tempo  $t_0 - \tilde{t}_0$  temos que o vetor velocidade é dado por

$$\vec{v} = \left( \frac{\Delta x^0}{\Delta t}, \frac{\Delta x^1}{\Delta t}, \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \right)$$

e  $\|\vec{v}\| = \sum_{i=0}^2 \left( \frac{\Delta x^i}{\Delta t} \right)^2 = c^2$ , portanto

$$c^2 \cdot (t_0 - \tilde{t}_0) = (x^3 - \tilde{x}^3) = (x^0 - \tilde{x}^0)^2 + (x^1 - \tilde{x}^1)^2 + (x^2 - \tilde{x}^2)^2$$

Segue da ultima equação que

$$g(x - \tilde{x}, x - \tilde{x}) = (x^0 - \tilde{x}^0)^2 + (x^1 - \tilde{x}^1)^2 + (x^2 - \tilde{x}^2)^2 - (x^3 - \tilde{x}^3) = 0,$$

ou seja, se  $g(x, x) = 0, x \in M$  então  $x$  (pensado como um evento) está na linha-mundo de um fóton que “passou” pela origem do sistema de coordenadas. Além disso, se  $\tilde{x}$  e um evento em  $M$  o conjunto

$$C_N(\tilde{x}) = \{x \in M; \mathcal{Q}(x - \tilde{x}) = g(x - \tilde{x}, x - \tilde{x}) = 0\}$$

é denominado o cone de luz do evento  $\tilde{x}$ . O nome vem do fato de que  $g(x - \tilde{x}, x - \tilde{x}) = (x^0 - \tilde{x}^0)^2 + (x^1 - \tilde{x}^1)^2 + (x^2 - \tilde{x}^2)^2 - (x^3 - \tilde{x}^3)$  representa a equação de um cone em  $\mathbb{R}^4$  com vértice em  $\tilde{x}$ . Para sermos mais precisos, o evento  $x$  pertencer ao cone de luz de  $\tilde{x}$  significa que  $x$  e  $\tilde{x}$  podem ser conectados por um sinal de luz. Os vetores  $v$  tais que  $g(v, v) = 0$  são denominados “vetores do tipo luz”, estes estão no cone de luz do evento  $\tilde{x} = (0, 0, 0, 0)$ .

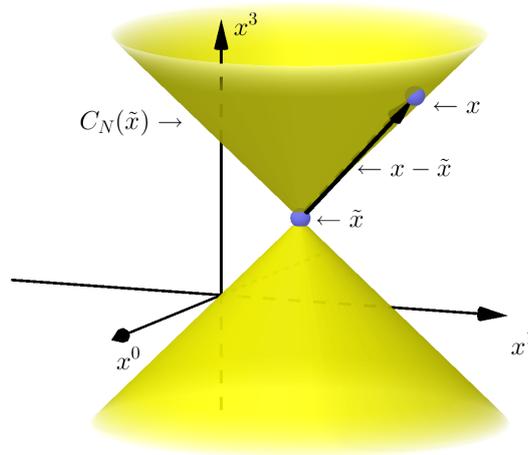


Figura A.1: Cone de luz do evento  $\tilde{x}$

Quando ocorre  $g(x - \tilde{x}, x - \tilde{x}) < 0$  temos que

$$(x^3 - \tilde{x}^3)^2 > (x^0 - \tilde{x}^0)^2 + (x^1 - \tilde{x}^1)^2 + (x^2 - \tilde{x}^2)^2,$$

assim, a distância que um fóton percorre no intervalo de tempo  $t - \tilde{t}$  é maior que a separação espacial entre  $x$  e  $\tilde{x}$ . Logo  $x$  e  $\tilde{x}$  podem ser conectados por sinais físicos que viajam abaixo da velocidade da luz em um intervalo de tempo  $t - \tilde{t}$ . Vetores  $x \in M$  tais que  $g(x, x) < 0$  são denominados “vetores do tipo tempo”.

No caso em que  $g(x - \tilde{x}, x - \tilde{x}) > 0$  temos

$$(x^3 - \tilde{x}^3)^2 < (x^0 - \tilde{x}^0)^2 + (x^1 - \tilde{x}^1)^2 + (x^2 - \tilde{x}^2)^2,$$

de modo que  $x$  não está no cone de luz do evento  $\tilde{x}$  e não pode ser conectado a  $\tilde{x}$  por um sinal luz. Ou seja, a separação espacial é grande o suficiente que para conectar os dois eventos com um sinal físico seria necessário que tal sinal viajasse com velocidade superior a da luz! Vetores  $x \in M$  tais que  $g(x, x) < 0$  são denominados “vetores do tipo espaço”. Os vetores  $v = (0, 0, 0, 1)$  e  $(1, 1, 1, 1)$  são respectivamente do “tipo tempo” e do “tipo espaço”.

A definição da forma bilinear  $g$  não foi sem propósito. Pelo o que foi exposto acima,  $g$  quando restrita ao subespaço de  $\mathbb{R}^4$  gerado pelos vetores  $(x^0, 0, 0, 0)$ ,  $(0, x^1, 0, 0)$  e  $(0, 0, x^2, 0)$  se comporta como o produto interno euclidiano usual em  $\mathbb{R}^3$ . Assim, possibilita determinar a separação espacial entre eventos e fornece interpretações físicas a respeito de tais eventos. Vimos que  $g$  tem a propriedade de ser simétrica, portanto, associamos a  $g$  uma forma quadrática

$$Q: M \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por  $Q(v) = g(v, v) \quad \forall v \in M$ , além disso diremos que  $g$  é um produto interno não definido pelo fato de existirem vetores  $v$  e  $u$  em  $M$  tais que  $Q(v) < 0$  e  $Q(u) \leq 0$ .

**Definição A.1.2.** *Dois vetores  $u, v \in M$  são ortogonais quando  $g(u, v) = 0$ , no caso em que  $Q(v) = \pm 1$  diremos que  $v$  é unitário.*

**Teorema A.1.1.** *Existe  $B = \{v_0, \dots, v_3\}$  uma base para  $\mathbb{R}^4$ , tal que  $g(v_3, v_3) = -1$ ,  $g(v_\mu, v_\nu) = 1$  quando  $\mu = \nu = 0, 1, 2$ , e  $g(v_\mu, v_\nu) = 0$  se  $\mu \neq \nu$ . O número de elementos  $v \in B$  que satisfazem  $Q(v) = -1$  é sempre o mesmo, independente da base  $B$  de  $\mathbb{R}^4$  escolhida satisfazendo as condições acima.*

*Demonstração.* Omitiremos a demonstração<sup>1</sup> □

A base referida acima é denominada base ortonormal de  $\mathbb{R}^4$ . A cada base ortonormal de  $\mathbb{R}^4$  iremos supor que existe um observador tal que seu quadro de referencia é descrito por esta base ortonormal, no seguinte sentido: se  $O$  é um observador que preside em um referencial inercial  $S$  e  $A = (v^0, \dots, v^3)$  é um evento descrito por  $O$  em  $S$ , relativamente a base  $B$  teremos  $A = v^0 v_0 + v^1 v_1 + v^2 v_2 + v^3 v_3$ . Agora, se  $O'$  é outro observador presidindo em um quadro  $S'$ , existe  $B' = \{\tilde{v}_0, \dots, \tilde{v}^3\}$  outra base de  $\mathbb{R}^4$  tal que o evento  $A$  nessa base será dado por  $A = \tilde{v}^0 \tilde{v}_0 + \tilde{v}^1 \tilde{v}_1 + \tilde{v}^2 \tilde{v}_2 + \tilde{v}^3 \tilde{v}_3$ , onde os  $\tilde{v}^\mu$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$  são as coordenadas do evento  $A$  relativamente a base  $B'$ .

## A.2 Transformações de Lorentz

Estamos interessados em uma transformação de coordenadas que relacionem as coordenadas que são atribuídas a um certo evento por dois observadores que presidem em referenciais inerciais distintos. O próximo teorema nos servirá de apoio.

<sup>1</sup>Veja: NABER. Gregory L. Geometry of Minkowski spacetime. 2.ed. Lodon: Springer, 2010.

**Teorema A.2.1.** *Sejam  $B = \{v_0, \dots, v_3\}$  e  $B' = \{\tilde{v}_0, \dots, \tilde{v}^3\}$  bases ortonormais de  $\mathbb{R}^4$ . Existe uma única transformação linear  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $T(v_\mu) = \tilde{v}_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ , além disso,  $T$  leva qualquer base ortonormal de  $\mathbb{R}^4$  em outra base ortonormal de  $\mathbb{R}^4$ .*

*Demonstração.* Seja  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definida por

$$T(v_\mu) = \tilde{v}_\mu.$$

Se  $C = \{w_\mu; \mu = 0, 1, 2, 3\}$  é outra base ortonormal de  $\mathbb{R}^4$  temos  $g(w_\mu, w_\nu) = \eta_{\mu\nu}$ , onde

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1; & \text{se } \mu = \nu = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu \\ -1 & \text{se } \mu = \nu = 3 \end{cases}$$

Se escrevemos os  $w_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ , como combinação linear dos elementos da base  $B$  teremos  $w_\mu = w_\mu^\lambda v_\lambda$  daí

$$g(T(w_\mu), T(w_\nu)) = g(T(w_\mu^\lambda v_\lambda), T(w_\nu^\sigma v_\sigma)) = w_\mu^\lambda w_\nu^\sigma g(T(v_\lambda), T(v_\sigma)) = w_\mu^\lambda w_\nu^\sigma \eta_{\lambda\sigma},$$

por outro lado,  $g(w_\mu, w_\nu) = g((w_\mu^\lambda v_\lambda), (w_\nu^\sigma v_\sigma)) = w_\mu^\lambda w_\nu^\sigma g(v_\lambda, v_\sigma) = w_\mu^\lambda w_\nu^\sigma \eta_{\lambda\sigma} = \eta_{\mu\nu}$ , portanto

$$g(T(w_\mu), T(w_\nu)) = \eta_{\mu\nu},$$

donde  $C' = \{T(w_\mu); \mu = 0, 1, 2, 3\}$  é um conjunto ortonormal de  $\mathbb{R}^4$ . Agora, suponha que  $0 = \lambda^\mu T(w_\mu)$ , então

$$\begin{aligned} 0 = \lambda^\mu T(w_\mu) &= \lambda^\mu T(w_\mu^\sigma v_\sigma) = \lambda^\mu w_\mu^\sigma T(v_\sigma) \Rightarrow \lambda^\mu w_\mu^\sigma = 0 \quad \forall \sigma = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda^\mu = 0, \mu = 0, 1, 2, 3, \end{aligned}$$

pois a equação  $\lambda^\mu w_\mu^\sigma = 0 \quad \forall \sigma = 0, 1, 2, 3$ , nos leva a um sistema homogêneo de quatro equações e quatro variáveis, que sabemos possuir ou a solução trivial ou infinitas soluções. Se tivermos infinitas soluções, então existiria infinitas formas de se escrever  $0 = \lambda^\mu w_\mu^\sigma T(v_\sigma)$  variando os escalares  $\lambda^\mu$  mas seria absurdo uma vez que  $\{T(v_\sigma); \sigma = 0, 1, 2, 3\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^4$ . Segue que  $C'$  é um conjunto linearmente independente, logo base de  $\mathbb{R}^4$ .

Para finalizar, note que se existir  $S : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  transformação linear tal que  $T(v_\mu) = S(v_\mu), \mu = 0, 1, 2, 3$ , então

$$T(v) = T(v^\lambda v_\lambda) = v^\lambda T(v_\lambda) = v^\lambda S(v_\lambda) = S(v^\lambda v_\lambda) = S(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^4,$$

como desejado. □

Observe que a transformação linear  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definida acima claramente é um isomorfismo. Assim, se  $B = \{v_0, \dots, v_3\}$  e  $B' = \{\tilde{v}_0, \dots, \tilde{v}^3\}$  são as bases tais que  $T(v_\mu) = \tilde{v}_\mu$  devemos ter  $T^{-1}(\tilde{v}_\mu) = v_\mu$  e se  $v_\mu = \Lambda_\mu^\sigma \tilde{v}_\sigma \Rightarrow T^{-1}(\tilde{v}_\mu) = \Lambda_\mu^\sigma \tilde{v}_\sigma$ . Agora, dado  $v \in \mathbb{R}^4$ , relativamente a base  $B$ , temos  $v = v^\mu v_\mu$  daí  $v^\mu v_\mu = v^\mu T^{-1}(\tilde{v}_\mu) = v^\mu \Lambda_\mu^\sigma \tilde{v}_\sigma$ . Assim, se  $v = \tilde{v}^\sigma \tilde{v}_\sigma \Rightarrow \tilde{v}^\sigma = v^\mu \Lambda_\mu^\sigma$ . Logo a matriz de  $T^{-1}$  relativa a base  $B'$  é dada por

$$\begin{bmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & \Lambda_2^0 & \Lambda_3^0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 & \Lambda_2^1 & \Lambda_3^1 \\ \Lambda_0^2 & \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 \\ \Lambda_0^3 & \Lambda_1^3 & \Lambda_2^3 & \Lambda_3^3 \end{bmatrix} = \Lambda.$$

A matriz  $\Lambda$  também representa a matriz de mudança de base de  $B'$  para  $B$ , isto é, a multiplicação da matriz  $\Lambda$  pelo vetor cujo as componentes são as coordenadas de um vetor escrito como combinação linear dos elementos da base  $B$ , fornece as coordenadas deste mesmo vetor relativamente a base  $B'$ .

Do fato de termos  $g(v_\mu, v_\nu) = \eta_{\mu\nu}$ , segue que

$$\begin{aligned} g(v_\mu, v_\nu) &= g(\Lambda_\mu^\sigma \tilde{v}_\sigma, \Lambda_\nu^\beta \tilde{v}_\beta) = \Lambda_\mu^\sigma \Lambda_\nu^\beta g(\tilde{v}_\sigma, \tilde{v}_\beta) = \Lambda_\mu^\sigma \Lambda_\nu^\beta \eta_{\sigma\beta} = \eta_{\mu\nu} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Lambda_\mu^\sigma \Lambda_\nu^\sigma \eta_{\sigma\sigma} = \eta_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

isto mostra que as colunas de  $\Lambda$  são mutualmente ortogonais e vale

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

**Definição A.2.1.** *Uma matriz  $\Lambda$  de ordem 4 tal que  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$  é chamada de transformação de Lorentz homogênea.*

Observe que sendo  $\Lambda$  uma transformação de Lorentz segue que  $\Lambda$  é invertível. Do fato de que  $\eta^2 = I$  vem:

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta,$$

e segue disso que  $\Lambda^{-1}$  é uma transformação de Lorentz, onde

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_0^1 & \Lambda_0^2 & -\Lambda_0^3 \\ \Lambda_1^0 & \Lambda_1^1 & \Lambda_1^2 & -\Lambda_1^3 \\ \Lambda_2^0 & \Lambda_2^1 & \Lambda_2^2 & -\Lambda_2^3 \\ \Lambda_3^0 & \Lambda_3^1 & \Lambda_3^2 & \Lambda_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & \Lambda_2^0 & \Lambda_3^0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 & \Lambda_2^1 & \Lambda_3^1 \\ \Lambda_0^2 & \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 \\ \Lambda_0^3 & \Lambda_1^3 & \Lambda_2^3 & \Lambda_3^3 \end{bmatrix}$$

Denotando por  $\mathcal{L}_H$  o conjunto das transformações homogêneas de Lorentz, o conjunto  $\mathcal{L}_H$  equipado com a operação usual de multiplicação de matrizes é um grupo multiplicativo. Em particular, isto quer dizer que a multiplicação de elementos de  $\mathcal{L}_H$  dão origem a elementos de  $\mathcal{L}_H$  e todo elemento  $\mathcal{L}_H$  possui inverso multiplicativo.

No caso em que  $\mu = \nu = 3$  temos

$$\begin{aligned} (\Lambda_3^0)^2 + (\Lambda_3^1)^2 + (\Lambda_3^2)^2 - (\Lambda_3^3)^2 &= -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\Lambda_3^3)^2 &= 1 + (\Lambda_1^0)^2 + (\Lambda_2^0)^2 + (\Lambda_3^0)^2 \geq 1 \Rightarrow \Lambda_3^3 \geq 1 \text{ ou } \Lambda_3^3 \leq -1. \end{aligned}$$

**Definição A.2.2.** *Dizemos que uma transformação de Lorentz é ortocrônica quando  $\Lambda_3^3 \geq 1$  e não ortocrônica quando  $\Lambda_3^3 \leq -1$ .*

Observe que dados dois vetores  $u, v \in \mathbb{R}^4$  temos  $g(u, v) = g(u^\mu v_\mu, v^\nu v_\nu) = u^\mu v^\nu g(v_\mu, v_\nu) = u^\mu v^\nu \eta_{\mu\nu}$  e se  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  é a transformação linear do teorema A.0.2 então

$$g(T(u), T(v)) = g(T(u^\mu v_\mu), T(v^\nu v_\nu)) = u^\mu v^\nu g(T(v_\mu), T(v_\nu)) = u^\mu v^\nu \eta_{\mu\nu},$$

logo  $g(u, v) = g(T(u), T(v))$ .

**Definição A.2.3.** *Uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  que satisfaz  $g(u, v) = g(T(u), T(v)) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^4$  é denominada transformação ortogonal.*

**Teorema A.2.2.** *Seja  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma transformação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $T$  é uma transformação ortogonal.
2.  $T$  preserva a forma quadrática de  $g$ , isto é,  $\forall v \in \mathbb{R}^4$  tem-se  $g(T(v), T(v)) = g(v, v)$ .
3.  $T$  leva conjunto ortonormal de  $\mathbb{R}^4$  em conjunto ortonormal de  $\mathbb{R}^4$ .
4. A matriz de  $T$  relativa a um dado par de bases ortonormais é uma matriz ortogonal.

*Demonstração.* É fácil verificar. □

A matriz  $\Lambda$  da transformação linear do teorema (A.0.2) é a matriz de mudança de base, da base  $B'$  para  $B$ , de modo que se  $v = v^\mu v_\mu$  e  $v = \tilde{v}^\mu \tilde{v}_\mu$  relativamente as bases ortonormais  $B$  e  $B'$  temos que

$$\Lambda \cdot \begin{bmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v}^0 \\ \tilde{v}^1 \\ \tilde{v}^2 \\ \tilde{v}^3 \end{bmatrix}.$$

Estamos interessados em encontrar uma transformação linear  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $F(v^0, v^1, v^2, v^3) = (\tilde{v}^0, \tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \tilde{v}^3)$ , onde  $v^1, \dots, v^3$  e  $\tilde{v}^0, \dots, \tilde{v}^3$  são as coordenadas do evento  $A$  relativamente a dois referenciais  $S, S'$  associados as bases  $B$  e  $B'$  respectivamente. Já conhecemos a relação entre estas coordenadas, elas são dadas por  $\tilde{v}^\mu = \Lambda_\nu^\mu v^\nu$ , assim, devemos ter  $F(v^0, v^1, v^2, v^3) = (\Lambda_\nu^0 v^\nu, \Lambda_\nu^1 v^\nu, \Lambda_\nu^2 v^\nu, \Lambda_\nu^3 v^\nu)$ . Dessa forma a matriz  $\Lambda$  é a matriz de  $F$  relativamente a base canônica de  $\mathbb{R}^4$ , pelo teorema (A.0.3)  $F$  é uma transformação ortogonal.

Vimos que toda transformação ortogonal preserva a forma quadrática de  $g$ . Considerando dois eventos  $x = (x^0, \dots, x^3)$  e  $x_0 = (x_0^0, \dots, x_0^3)$  na linha-mundo de um fóton, descritos por um observador  $O$  que preside em um referencial inercial  $S$  associado a base  $B$ , denotando  $x - x_0 = (\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$  temos

$$\mathcal{Q}(x - x_0) = \mathcal{Q}(F(x - x_0)) = 0 \Rightarrow \mathcal{Q}(F(x - x_0)) = \Delta \tilde{x}^0 + \Delta \tilde{x}^1 + \Delta \tilde{x}^2 - \Delta \tilde{x}^3 = 0.$$

onde  $\Delta \tilde{x}^\mu = \Lambda_\nu^\mu \Delta x^\nu$ , portanto o observador  $O'$  presidindo em um referencial inercial associado a base  $B'$  concorda com  $O$  que os eventos  $x$  e  $x_0$  podem ser conectados por um sinal de luz, ou seja, concordam a respeito da velocidade da luz!

Já sabemos, parcialmente, como deve ser a transformação linear  $F : \mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathbb{R}^4$  que associa as coordenadas atribuídas a um certo evento por dois observadores presidindo em referenciais inerciais distintos. Vimos que a entrada  $\Lambda_3^3$  da matriz  $\Lambda$  deve satisfazer  $\Lambda_3^3 \leq -1$  ou  $\Lambda_3^3 \geq 1$ , iremos impor que  $\Lambda_3^3 \geq 1$ , isto é, a transformação associada a  $\Lambda$  é uma transformação de lorentz ortocrônica com determinante igual a 1. Estas imposições não permitirão que a transformação de coordenadas tenha características desagradáveis, por exemplo, inverter a orientação temporal e espacial de eventos. Para chegar a tais conclusões precisaremos do seguinte

**Teorema A.2.3.** *Sejam  $v$  e  $w$  vetores em  $\mathbb{R}^4$ ,  $v$  do tipo tempo e  $w$  do tipo tempo ou do tipo luz. Se  $B = \{v_1, \dots, v_3\}$  é uma base ortonormal e relativamente a essa base tem-se  $v = v^\mu v_\mu$  e  $w = w^\mu v_\mu$  então*

1.  $v^3 w^3 < 0 \Rightarrow g(v, w) > 0$  ou;
2.  $v^3 w^3 > 0 \Rightarrow g(v, w) < 0$ .

*Demonstração.* De fato, como  $g(v, v) = (v^0)^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 - (v^3)^2 < 0$  e  $g(w, w) = (w^0)^2 + (w^1)^2 + (w^2)^2 - (w^3)^2 \leq 0$  devemos ter

$$(v^3)^2 > \sum_{\mu=0}^2 (v_\mu)^2 \text{ e } (w^3)^2 \geq \sum_{\mu=0}^2 (w_\mu)^2 \Rightarrow$$

$(v^3 w^3)^2 > (w^3)^2 \sum_{\mu=0}^2 (v_\mu)^2 \geq \sum_{\mu=0}^2 (w^\mu)^2 \sum_{\mu=0}^2 (v^\mu)^2$  da desigualdade Schwartz em  $\mathbb{R}^3$  temos

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^2 (w^\mu)^2 \sum_{\mu=0}^2 (v^\mu)^2 &\geq \left( \sum_{\mu=0}^2 v^\mu w^\mu \right)^2 \Rightarrow (v^3 w^3)^2 > \left( \sum_{\mu=0}^2 v^\mu w^\mu \right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow |v^3 w^3| > \left| \sum_{\mu=0}^2 w^\mu v_\mu \right|. \end{aligned}$$

Se ocorrer

$$v^3 w^3 > 0 \Rightarrow v^3 w^3 > \left| \sum_{\mu=0}^2 w^\mu v_\mu \right| \geq \sum_{\mu=0}^2 w^\mu v_\mu \Rightarrow v^3 w^3 > \sum_{\mu=0}^2 w^\mu v_\mu \Rightarrow g(v, w) < 0.$$

Caso ocorra  $v^3 w^3 < 0$  teremos  $v^3(-w^3) > 0$ , considerando o vetor  $-w$ , daí  $g(v, -w) < 0$  pelo que foi provado acima, portanto  $g(v, w) > 0$ .  $\square$

**Corolário A.2.4.** *Se um vetor diferente de  $\vec{0}$  é ortogonal a um vetor do tipo tempo, então este vetor é do tipo espaço.*

O que o Teorema acima revela é que se  $v$  e  $w$  tem mesma orientação temporal, ou seja, as coordenadas temporais tem mesmo sinal, então  $g(v, w) < 0$ . Fisicamente atribuir coordenadas temporais a eventos com sinal negativo significaria que o relógio do observador estaria “andando para traz”. Os vetores de  $\mathbb{R}^4$  do tipo tempo com coordenada temporal com sinal negativo serão ditos direcionados para o passado e os com coordenada positiva serão ditos direcionados para o futuro.

Considere o conjunto de todos os vetores de  $\mathbb{R}^4$  do tipo tempo, denote este conjunto por  $\tau$  e defina em  $\tau$  a relação  $\sim$  em  $\tau$  do seguinte modo: dados  $v$  e  $w$  em  $\tau$  então

$$v \sim w \Leftrightarrow g(v, w) < 0,$$

ou seja  $v \sim w$  se, e somente, se  $v$  e  $w$  tem mesma orientação temporal. A relação  $\sim$  é uma relação de equivalência em  $\tau$ , isto é,  $\sim$  satisfaz:

1.  $v \sim v \quad \forall v \in \tau$ .
2.  $v \sim w \Rightarrow w \sim v \quad \forall w, v \in \tau$ .
3. Se  $v, w$  e  $u \in \tau$  e  $v \sim w, w \sim u$  então  $v \sim u$ .

O item (1) é obviamente valido pois todo  $v \in \tau$  é do tipo tempo. O item (2) segue da simetria de  $g$ . Agora observe que dados  $v, w$  e  $u \in \tau$  são tais que  $v \sim w$  e  $w \sim u$  então temos  $w^3 u^3 > 0$  e  $w^3 v^3 > 0$  caso contrário teríamos  $w^3 u^3 < 0$  ou  $w^3 v^3 < 0$  (não pode ocorrer  $v^3 w^3 = 0$  ou  $v^3 w^3 = 0$  pois estamos lidando com vetores do tipo tempo) logo  $g(v, w) > 0$  ou  $g(u, w) > 0$  o que contraria a hipótese. Assim  $w^3 u^3 > 0$

e  $w^3v^3 > 0$ , daí segue que  $(w^3)^2v^3u^3 > 0 \Rightarrow v^3u^3 > 0$ , donde  $g(v, u) > 0$  e portanto  $u \sim v$ .

Uma relação de equivalência em um conjunto determina uma partição sobre o conjunto. A relação  $\sim$  em  $\tau$  determina duas partições sobre  $\tau$ , se  $w \sim v$  então  $w^3v^3 > 0$  isto acontece quando  $w^3$  e  $v^3$  possui o mesmo sinal. Denotaremos por  $\tau^+$  o conjunto dos vetores de  $\tau$  tais que sua coordenada temporal seja positiva e de  $\tau^-$  o conjunto dos elementos de  $\tau$  que tem a coordenada temporal negativa. Diremos que os elementos de  $\tau^+$  estão direcionados para o futuro e os de  $\tau^-$  direcionados para o passado.

Para um evento  $x_0$  em  $M$  definimos o conjunto  $C_T(x_0) = \{w \in M; \mathcal{Q}(w - x_0) < 0\}$  que simplesmente é o interior do cone de luz  $C_N(x_0)$ , temos  $C_T(x_0) = C_T^+ \cup C_T^-$  onde  $C_T^+(x_0) = \{w \in M; w - x_0 \in \tau^+\} = C_T(x_0) \cap \tau^+$  e  $C_T^-(x_0) = \{w \in M; w - x_0 \in \tau^-\} = C_T(x_0) \cap \tau^-$ . Assim, definimos o conjunto  $C_N^+(x_0) = \{w \in C_N(x_0); w - x_0 \in \tau^+\}$  de modo que  $w$  e  $u$  estarem em  $C_N^+(x_0)$  significa que  $x_0$  e  $w$  podem ser ligados por um sinal luminoso. Mais precisamente  $x_0$  pode ser considerado a emissão de um fóton e  $w$  a recepção.

Denominaremos o último conjunto definido acima por cone de luz do futuro do evento  $x_0$ .

De modo análogo vamos definir para o evento  $x_0$  o conjunto  $C_N^-(x_0)$  como sendo o conjunto dos eventos  $w$  em  $C_N(x_0)$  tais que  $w - x_0$  está em  $\tau^-$ , ou seja,  $C_N^- = \{w \in C_N(x_0); w - x_0 \in \tau^-\}$ . Denominaremos  $C_N^-(x_0)$  por cone de luz do passado do evento  $x_0$ .

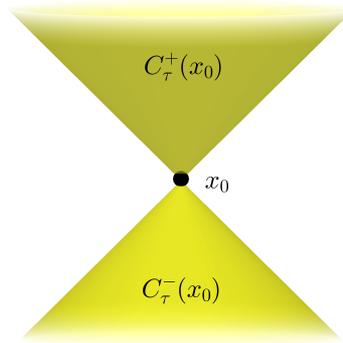


Figura A.2: Interior do cone de luz do evento  $x_0$

Definimos para vetores do tipo tempo a noção de direcionado para o futuro e direcionado para o passado. Vamos definir, agora, esta noção para vetores do tipo luz, afim de estabelecer algumas condições sobre a matriz  $\Lambda$  da transformação de coordenadas.

**Proposição A.2.1.** *Seja  $v \in M$  um vetor do tipo luz. Então  $\forall w \in \tau^+$  temos que  $g(v, w)$  tem o mesmo sinal relativamente a qualquer base ortonormal de  $M$ .*

*Demonstração.* De fato, caso contrário existiriam  $w_1$  e  $w_2$  tais que  $g(v, w_1) < 0$  e  $g(v, w_2) > 0$ . Seja  $w_3 = \frac{g(v, w_2)}{|g(v, w_1)|}w_1$ , então

$$g(v, w_3) = \frac{g(v, w_2)}{|g(v, w_1)|}g(v, w_1) = -g(v, w_2),$$

assim,  $g(v, w_2 + w_3) = 0$ .

Observe que se  $w_1, w_2 \in \tau^+$  então  $g(w_1, w_1) < 0$  e  $g(w_2, w_2) < 0$ , além disso temos que  $g(w_1, w_2) < 0$  pelo teorema acima. Dessa observação temos que  $g(w_1 + w_2, w_1 + w_2) < 0$  e portanto  $w_1 + w_2 \in \tau^+$ .

Segue que sendo  $w_1 + w_2$  do tipo tempo,  $v$  é do tipo espaço pelo último corolário. Contradição.  $\square$

Posto isto, diremos que um vetor  $v$  do tipo luz está direcionado para o futuro quando  $g(v, w) < 0 \forall w \in \tau^+$  e direcionado para o passado quando  $g(v, w) > 0 \forall w \in \tau^+$ . Com essas informações que dizem respeito a orientação temporal de eventos de  $M$  podemos estabelecer condições necessárias e suficientes para que a matriz de mudança de coordenadas não inverta a ordem temporal dos vetores do tipo luz e do tipo tempo. O próximo teorema, que não demonstraremos<sup>2</sup>, será de grande utilidade para o proposito de determinar uma transformação de Lorentz que não possua essas características indesejáveis.

**Teorema A.2.5.** *As seguintes afirmações sobre a matriz  $\Lambda$  são equivalentes :*

1.  $\Lambda$  é ortocrônica, isto é,  $\Lambda_3^3 \geq 1$
2.  $\Lambda$  preserva a ordem temporal dos vetores do tipo luz, ou seja, se  $\{v_\mu\}$  e  $\{\tilde{v}_\mu\}$  são duas ases ortonormais de  $M$ , então  $v^3$  e  $\tilde{v}^3 = \Lambda_\mu^3 v^\mu$  tem o mesmo sinal.
3.  $\Lambda$  preserva a ordem temporal dos vetores do tipo tempo.

O teorema acima deixa claro que uma transformação de Lorentz que não é ortocrônica necessariamente inverte a ordem temporal de vetores do tipo tempo. Daqui em diante, iremos considerar apenas bases ortonormais  $v_\mu$  de  $M$  tais que  $v_3$  é do tipo tempo direcionado para o futuro. Queremos também estabelecer condições para que a matriz da transformação de Lorentz não inverta a ordem espacial dos eventos. Devemos notar que sendo  $\Lambda$  uma matriz de mudança de bases ortonormais a matriz  $\Lambda$  satisfaz

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta,$$

daí

$$\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det(\Lambda)^2 \det(\eta) = \det(\eta) \Rightarrow \det(\Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1$$

.

**Definição A.2.4.** *Uma transformação de Lorentz é dita própria se  $\det(\Lambda) = 1$  e imprópria se  $\det(\Lambda) = -1$ .*

O motivo do de tal definição ficará mais claro depois do

**Teorema A.2.6.** *Uma transformação de Lorentz é imprópria se, e somente se, a matriz da transformação é da forma*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Lambda$$

onde  $\Lambda$  é uma matriz  $4 \times 4$  própria e ortocrônica.

<sup>2</sup>Veja: NABER. Gregory L. Geometry of Minkowski spacetime. 2.ed. Lodon: Springer, 2010.

*Demonstração.* Com efeito, se  $B = [b_{ij}]_{4 \times 4}$  é uma transformação de Lorentz ortocrônica imprópria, então, por definição  $\det(B) = -1$  e  $b_{33} \geq 1$ . Por outro lado, a matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é tal que  $D^2 = I$  logo

$$B = IB = DDB = D(DB).$$

Agora, observe que a matriz  $DB$  é obtida alterando o sinal do elementos da primeira linha da matriz  $B$ , além disso, temos que  $D$  é uma matriz ortogonal. Portanto  $D$  e  $DB$  pertencem ao grupo de Lorentz e  $DB$  é ortocrônica.

Como  $\det(B) = -1$  e  $\det(D) = -1$  teremos  $\det(DB) = 1$ , donde  $B = D(DB)$  é imprópria.

Reciprocamente, se  $B = D\Lambda$  onde  $\Lambda$  é ortocrônica imprópria, então  $\det(B) = -1$  logo  $B$  é imprópria. Pelo mesmo argumento utilizado acima mostra se que  $B$  é ortocrônica.  $\square$

O motivo de dizermos que uma transformação de coordenadas é imprópria, segue do fato de que ela inverte a ordem espacial dos eventos, no seguinte sentido: se  $O$  e  $O'$  são dois observadores presidindo em dois referenciais  $S$  e  $S'$  respectivamente, e  $B$  é transformação de coordenadas entre esses dois referenciais, teremos para um evento  $x = (x^0, \dots, x^3)$  no quadro  $S$  suas coordenadas no quadro  $S'$  descritas por  $\tilde{x} = (\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)$ , onde

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}^0 \\ \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^3 \end{bmatrix} = D\Lambda \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \hat{x}^0 \\ \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \hat{x}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{x}^0 \\ \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \hat{x}^3 \end{bmatrix}.$$

Assim  $D$  tem o papel de inverter o sinal da coordenada espacial  $\hat{x}^0$ . Iremos nos restringir a bases  $B = \{v_\mu\}$  de  $M$  tais que  $(v_0 \times v_1) \cdot v_2 = 1$  e  $v_3$  está direcionado para o futuro. Desse modo o espaço gerado por  $v_0, v_1$  e  $v_2$  deve coincidir com o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  e portanto com a nossa noção de espaço.

Diremos que a base  $\{v_\mu\}$  é admissível quando atender a todos esses requisitos, além de ser ortonormal. Assim, o referencial associado a tal base será admissível.

Um tipo de transformação de Lorentz ortocrônica e própria é a do tipo

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $[r_{ij}]$  é uma matriz ortogonal cujo determinante é igual a 1. Este tipo de transformação é denominada rotação, que fisicamente representa a rotação de um dos eixos do sistema de coordenada espaciais em relação a um dos outros.

**Teorema A.2.7.** *As seguintes afirmações a respeito de uma transformação  $\Lambda$  de lorentz são equivalentes:*

1.  $\Lambda$  é uma rotação.
2.  $\Lambda_3^0 = \Lambda_3^1 = \Lambda_3^2 = 0$
3.  $\Lambda_3^3 = 1$

### A.3 Deduzindo uma transformação de Lorentz

Voltemos a situação inicial onde supomos que dois referenciais inerciais  $S$  e  $S'$  estão em movimento relativo uniforme com velocidade  $V$  e configurado na posição padrão. Conjecturamos que as coordenadas  $(x^0, \dots, x^3)$  de um evento no quadro  $S$  deveriam se relacionar com as coordenadas deste mesmo evento no  $S'$  da seguinte forma

$$\begin{cases} x^0 = \tilde{x}^0 + Vt \\ x^1 = \tilde{x}^1 \\ x^2 = \tilde{x}^2 \\ t = \tilde{t} \end{cases} .$$

Na posição padrão em que os dois quadros se encontram é inquestionável que as coordenadas  $x^1$  e  $\tilde{x}^1$  sejam iguais, assim como as coordenadas  $x^2$  e  $\tilde{x}^2$ , mas seriam iguais as coordenadas  $x^3$  e  $\tilde{x}^3$ ? Vamos fazer uma dedução de uma transformação de coordenadas utilizando todo conteúdo que foi exposto até aqui, para mostrar que nossa conjectura está errada.

Suponha que os quadros  $S$  e  $S'$  estejam na posição padrão e que o quadro  $S'$  se move com velocidade constante  $V$  na direção do eixo positivo dos  $x^0$ . Sejam  $\tilde{x}$  e  $\tilde{x}_0$  dois eventos na linha-mundo de um ponto em repouso no quadro  $S'$ . Desse modo

$$\Delta\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu - \tilde{x}_0^\mu = 0, \mu = 0, 1, 2, \text{ e } \Delta\tilde{x}^3 = \tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3 \neq 0.$$

No quadro  $S$  devemos ter

$$\begin{aligned} \Delta x^\mu &= \Lambda_\nu{}^\mu \Delta\tilde{x}^\nu = \Lambda_3{}^\mu \Delta\tilde{x}^3 \Rightarrow \Delta x^3 = \Lambda_3{}^3 \Delta\tilde{x}^3 = \Lambda_3^3 \Delta\tilde{x}^3 \neq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\Delta x^\mu}{\Delta x^3} = \frac{\Lambda_3{}^\mu \Delta\tilde{x}^3}{\Lambda_3^3 \Delta\tilde{x}^3} = \frac{\Lambda_3{}^\mu}{\Lambda_3^3} = \frac{\Lambda_3^\mu}{\Lambda_3^3}, \mu = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Como  $\Delta\tilde{x}^\mu = \Delta x^\mu = 0, \mu = 1, 2$ , temos que  $\Lambda_3^1 = \Lambda_3^2 = -\Lambda_1^3 = -\Lambda_2^3$  e  $\frac{\Delta x^0}{\Delta x^3} = \frac{\Delta x^0}{c\Delta t} = \frac{\beta}{c}$ , onde  $\beta = \frac{\Delta x^0}{\Delta t}$ , qualquer que seja o ponto considerado no quadro  $S'$ .

Podemos interpretar a quantidade  $\Delta x^0$  como sendo o deslocamento, segundo o observador  $O$ , do quadro  $S'$  entre os eventos  $\tilde{x}$  e  $\tilde{x}_0$  no quadro  $S$  e que que ocorrem em um mesmo ponto no quadro  $S'$  no intervalo de tempo  $\Delta t$  medido pelo observador  $O$ . Portanto a quantidade  $\beta$  é interpretada como sendo a velocidade relativa entre os dois quadros. Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{c} &= -\frac{\Lambda_0^3}{\Lambda_3^3} \Rightarrow \frac{\beta^2}{c^2} = \frac{(\Lambda_0^3)^2}{(\Lambda_3^3)^2} = \\ &= \frac{(\Lambda_0^3)^2 + (\Lambda_1^3)^2 + (\Lambda_2^3)^2}{(\Lambda_3^3)^2} = \frac{(\Lambda_3^3)^2 - 1}{(\Lambda_3^3)^2} = 1 - \frac{1}{(\Lambda_3^3)^2} \Rightarrow \Lambda_3^3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

A quantidade  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{c^2}}}$  é frequentemente encontrada, e a denominamos fator de Lorentz, a denotamos por  $\gamma(\beta)$  ou simplesmente  $\gamma$ .

Utilizando o mesmo raciocínio para o caso em que consideramos dois eventos  $\tilde{x}$  e  $\tilde{x}_0$  que ocorrem na linha mundo de um ponto em repouso agora no quadro  $S$  teremos

$$\Delta x^\mu = x^\mu - x_0^\mu = 0, \mu = 0, 1, 2 \text{ e } \Delta x^3 \neq 0$$

No quadro  $S'$  teremos

$$\Delta \tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu \Delta x^\nu = \Lambda^\mu_3 \Delta x^3 \text{ e } \Delta \tilde{x}^3 = \Lambda^3_3 \Delta x^3 \neq 0,$$

assim, teremos que  $\frac{\Delta \tilde{x}^\mu}{\Delta \tilde{t}} = \frac{\Lambda^\mu_3 \Delta x^3}{\Lambda^3_3 \Delta x^3} = \frac{\Lambda^\mu_3}{\Lambda^3_3}$  e  $\frac{\Delta \tilde{x}^\mu}{\Delta \tilde{x}^3} = 0, \mu = 1, 2$ , logo

$$\frac{\Delta \tilde{x}^0}{\Delta \tilde{x}^3} = \frac{\Lambda^0_3}{\Lambda^3_3} \Rightarrow \frac{(\Delta \tilde{x}^0)^2}{(\Delta \tilde{x}^3)^2} = \frac{(\Lambda^0_3)^2}{(\Lambda^3_3)^2} = \frac{(\Lambda^0_3)^2 + (\Lambda^1_3)^2 + (\Lambda^2_3)^2}{(\Lambda^3_3)^2} = \frac{(\Lambda^3_3)^2 - 1}{v} = \frac{\beta^2}{c^2},$$

qualquer que seja o ponto analisado no quadro  $S$ . O mesmo raciocínio usado para interpretar a quantidade  $\beta$  é utilizada aqui. Assim,  $-\beta$  é a velocidade de  $S$  relativamente a  $S'$ , daí

$$\frac{\Delta \tilde{x}^0}{\Delta \tilde{x}^3} = \frac{\Delta \tilde{x}^0}{c \Delta \tilde{t}} = -\frac{\beta}{c} = \frac{\Lambda^0_3}{\Lambda^3_3}$$

$$\text{e } \Lambda^0_3 = -\Lambda^3_3 \frac{\beta}{c} = -\gamma \frac{\beta}{c}.$$

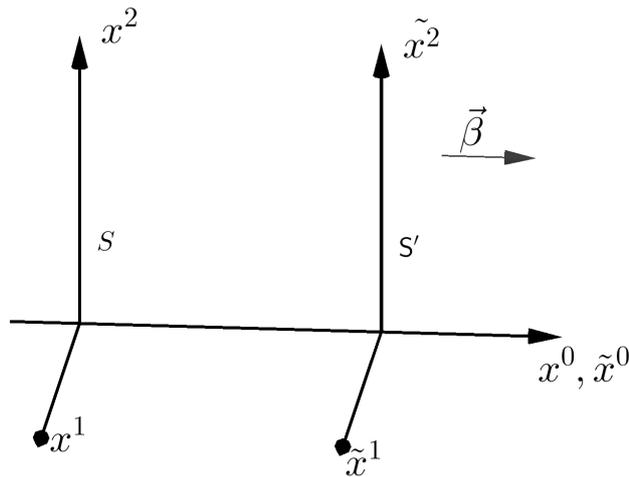


Figura A.3: Movimento relativo entre os quadros.

Vemos que nessas condições a transformação de Lorentz que fornece as coordenadas de um evento no quadro  $S'$  via as coordenadas do mesmo evento no quadro  $S$  deve ser:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & -\gamma \frac{\beta}{c} \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & 0 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & 0 \\ -\gamma \frac{\beta}{c} & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \Lambda.$$

Utilizando o fato de que  $\Lambda$  é ortogonal,  $x^1 = \tilde{x}^1$  e  $x^2 = \tilde{x}^2$  obtemos

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma \frac{\beta}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma \frac{\beta}{c} & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \Lambda,$$

e as coordenadas se relacionam da seguinte forma

$$\begin{cases} \tilde{x}^0 = \gamma(x^0 - \beta t) \\ \tilde{x}^1 = x^1 \\ \tilde{x}^2 = x^2 \\ \tilde{t} = \gamma(t - \frac{\beta}{c^2}x^0) \end{cases} .$$

e

$$\begin{cases} x^0 = \gamma(\tilde{x}^0 + \beta\tilde{t}) \\ x^1 = \tilde{x}^1 \\ x^2 = \tilde{x}^2 \\ t = \gamma(\tilde{t} + \frac{\beta}{c^2}\tilde{x}^0) \end{cases} .$$

Devemos observar que a transformação de coordenadas que acabamos de obter é uma transformação própria e ortocrônica, e portanto preserva a ordem temporal e espacial dos eventos em  $M$  que podem ser conectados por um sinal luminoso.

Vamos agora utilizar a transformação de Lorentz obtida acima para descrever dois efeitos relativísticos interessantes.

### A.3.1 Dilatação temporal.

Suponha que dois quadros de referências  $S$  e  $S'$  estejam em movimento relativo uniforme com velocidade  $\beta < c$  e configurados na posição padrão. Considere dois eventos sucessivos,  $x$  e  $x^0$ , que ocorrem na mesma posição espacial no quadro  $S'$ . Assim, se no quadro  $S'$  as coordenadas de  $x$  e  $x^0$  são respectivamente  $(x^0, \dots, x^3)$  e  $(\tilde{x}^0, \dots, \tilde{x}^3)$ , então as coordenadas do vetor  $x - x_0$  no quadro  $S'$  são dadas por  $\Delta\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu - \tilde{x}_0^\mu$ . Utilizando a transformação de coordenadas deduzida acima, temos que

$$\begin{cases} \Delta x^0 = \gamma(\Delta\tilde{x}^0 + \beta\Delta\tilde{t}) \\ \Delta x^1 = \Delta\tilde{x}^1 = 0 \\ \Delta x^2 = \Delta\tilde{x}^2 = 0 \\ \Delta t = \gamma(\Delta\tilde{t} + \frac{\beta}{c^2}\Delta\tilde{x}^0) \end{cases}$$

onde  $\Delta x^\mu = x^\mu - x_0^\mu$  são as coordenadas do vetor  $x - x_0$  relativas ao quadro  $S$ .

Como  $x$  e  $x^0$  ocorrem na mesma posição espacial no quadro  $S'$  devemos ter  $\Delta\tilde{x}^0 = 0$ , e portanto

$$\Delta t = \gamma\Delta\tilde{t}.$$

Mas  $\gamma > 1$ , e daí,  $\Delta t > \Delta\tilde{t}$ . Logo, o tempo medido entre os dois eventos no quadro  $S$  é maior que o tempo medido pelo observador que preside em  $S'$ .

Este efeito curioso revela que o tempo é uma grandeza relativa! Apesar de termos observadores com relógios sincronizados e em movimento relativo uniforme, eles nem sempre concordam sobre o intervalo de tempo entre dois eventos.

**Definição A.3.1.** *O tempo próprio entre dois eventos é o intervalo de tempo medido entre eles em um quadro onde os dois ocorrem na mesma posição espacial.*

### A.3.2 Contração do comprimento.

Vamos utilizar a transformação de coordenadas para analisar o caso particular de uma haste que se move com velocidade  $\beta$  na direção positiva do eixo dos  $x^0$  de um quadro de referencia  $S$ . Seja  $S'$  o quadro em que a haste se encontra em repouso, ou seja, o quadro que viaja junto com a haste. Sejam  $x$  e  $x^0$  eventos simultâneos no quadro  $S$ , que ocorrem cada um em uma das extremidades da haste. Desse modo, o comprimento da haste é dado por  $|\Delta x^0| = |x^0 - x_0^0|$  no quadro  $S$  e no quadro  $S'$  teremos o comprimento da haste dado por  $|\Delta \tilde{x}^0| = |\tilde{x}^0 - \tilde{x}_0^0|$ . Dizemos que a quantidade  $|\Delta x^0|$  é o tamanho próprio da haste. Segue da transformação de coordenadas que  $\Delta \tilde{x}^0 = \gamma(\Delta x^0 - \beta \Delta t) = \gamma \Delta x^0$ , ou seja, o comprimento da haste no quadro  $S$  é menor do que quando medido no quadro  $S'$ .

Devemos observar que  $\Delta t = 0 \Rightarrow \Delta \tilde{t} = -\gamma \frac{\beta}{c^2} \Delta x^0$ , e como  $\Delta x^0 \neq 0$  logo  $\Delta \tilde{t} \neq 0$ . Portanto  $x$  e  $x_0$  não ocorrem ao mesmo tempo em  $S'$ , ou seja, os dois eventos não são simultâneos em  $S'$ . Isto revela que dois eventos podem ser julgados simultâneos por um observador e um outro observador que esteja em movimento relativo uniforme não os jogue simultâneos.

Concluimos que a condição de simultaneidade é uma condição relativa e não absoluta.

### A.3.3 Diagramas de Minkowski.

Iremos introduzir um diagrama no qual vamos estabelecer relações entre eventos no espaço tempo de Minkowski. Este diagrama será constituído por um sistema de coordenadas cartesianas  $x^0, ct$  (iremos omitir as outras coordenadas espaciais, afim de tornar a análise do diagrama mais simples) relacionadas um referencial  $S$  estabelecido por um observador  $O$ . Neste sistema de coordenadas iremos plotar os eixos  $c\tilde{t}, \tilde{x}^0$  do referencial  $S'$  estabelecido por um observador  $O'$  no caso em que  $S$  e  $S'$  estão na posição padrão e o quadro  $S'$  viaja com velocidade constante  $\beta$  na direção do eixo positivo dos  $x^0$ .

Na situação acima, sabemos a relação entre as coordenadas de um evento descrito pelos dois observadores, temos

$$\begin{cases} \tilde{x}^0 = \gamma(x^0 - \beta t) \\ \tilde{t} = \gamma(t - \frac{\beta}{c^2} x^0) \end{cases} .$$

Definimos o eixo  $\tilde{x}$  quando  $\tilde{t} = 0$ , então

$$0 = \gamma(ct - \frac{\beta}{c} x^0) \Rightarrow ct = \frac{\beta}{c} x^0$$

será a representação do eixo  $c\tilde{x}^0$  no diagrama de Minkowski. Analogamente definiremos o eixo  $c\tilde{t}^0$  quando  $\tilde{x}^0 = 0$ , que fornece

$$0 = c\gamma(x - \beta t) \Rightarrow cx^0 = ct\beta \Rightarrow ct = \frac{cx^0}{\beta}.$$

Assim, o diagrama de Minkowski pode ser representado como na figura abaixo

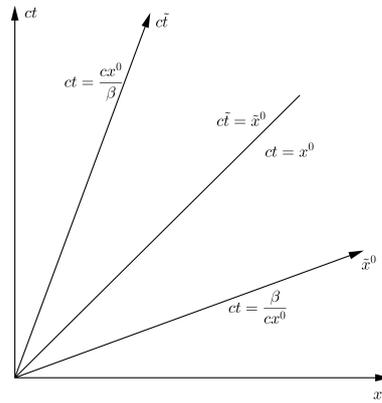


Figura A.4: Diagrama de Minkowski

Note que na figura acima os eventos onde  $ct = x^0$  estão na linha-mundo de um fóton que viaja na direção positiva do eixo dos  $x^0$ . Portanto, estes eventos pertencem ao cone de luz do evento  $(0, 0, 0, 0)$  na representação quadridimensional de  $M$ .

Agora que já nos foi apresentado o diagrama de Minkowski, podemos analisar a relação de causalidade entre eventos, isto é, quando um tem possibilidade de causar o outro.

Sejam  $E_0, E_1, E_2$  e  $E_3$  eventos no espaço tempo de acordo com o diagrama abaixo

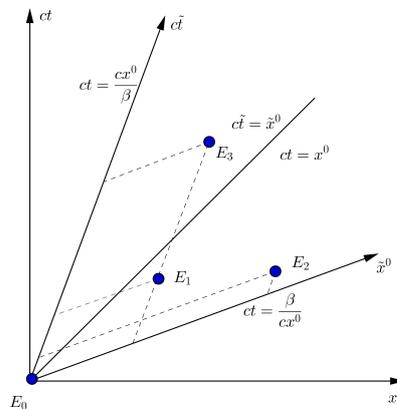


Figura A.5: Diagrama de Minkowski

As coordenadas  $(\tilde{x}^0, \tilde{t})$  de um evento em  $S'$ , cujos os eixos estão plotados no diagrama são encontrados por interseção, de retas paralelas aos eixos  $\tilde{ct}, \tilde{x}^0$  e que passam pelo evento, com os eixos  $\tilde{ct}$  e  $\tilde{x}^0$  como na figura acima.

Observe que no diagrama acima a ordem temporal dos eventos  $E_1$  e  $E_2$  está invertida no quadro  $S'$ , o evento  $E_1$  ocorre um instante de tempo após o ocorrimto de  $E_2$ , e o contrário ocorre em  $S$ . Isto quer dizer que dois observadores presidindo em referenciais distintos nem sempre concordam sobre a ordem temporal de certos eventos.

Fato importante a ser observado é que quando a ordem temporal de dois eventos está invertida, um desse eventos sempre está fora do cone de luz do outro evento.

Podemos ver este fato através do diagrama, uma vez que o cone de luz de qualquer um desses eventos pode ser obtido por translação do cone de luz do evento  $E_0$  para o evento em questão.

Assim, se dois observadores  $O$  e  $O'$  presidindo em referenciais inerciais distintos discordam sobre a ordem temporal de dois eventos  $A$  e  $B$ , então  $B$  está fora do cone de luz do evento  $A$  e vice-versa. Segue da definição de cone de luz do evento  $A$  que  $B$  não pode ser conectado a  $A$  por um sinal luminoso e vice-versa.

Agora, imagine que  $A$  represente o acionar do detonador de uma bomba que explode em  $B$ . Nesta situação um observador estaria observando primeiro o acionar do detonador e em seguida o explodir da bomba, algo de se esperar. No entanto, o outro observador, observaria primeiro o explodir da bomba e em seguida o acionar do seu detonador, algo que destrói a nossa noção de causalidade, isto é, que um evento possa influenciar no outro.

Não deixamos essa noção ser quebrada, não permitindo que sinais físicos viagem com velocidade superior a da luz. Portanto, este exemplo só seria possível se sinais físicos viajassem com velocidade superior a  $c$ . Não permitindo que isso ocorra, os observadores concordariam que o evento  $B$  não poderia causar o evento  $A$ .

## A.4 Curvas do tipo tempo em $M$

Sejam  $x$  e  $x_0$  dois eventos tais que  $x - x_0 = \Delta x = \Delta x^\mu v_\mu$  é do tipo tempo. Relativamente a uma base admissível de  $M$  temos

$$(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 < 0,$$

ou seja,

$$(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 < (\Delta x^3)^2$$

e consequentemente  $\Delta x^3 \neq 0$ . Assumindo que  $x - x_0$  esteja direcionado para o futuro, temos  $\Delta x^3 > 0$  e daí

$$\frac{((\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2)^{\frac{1}{2}}}{\Delta t} < c.$$

Isto quer dizer que a velocidade necessária para uma partícula massiva experimentar os eventos  $x$  e  $x_0$ , em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , é menor que a velocidade da luz.

Considere o quadro que se move com a partícula ao longo do seguimento que liga  $x$  a  $x_0$ , e o quadro em que a partícula está se movendo com velocidade constante  $\beta = \frac{((\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2)^{\frac{1}{2}}}{\Delta t}$ . Existe uma transformação de Lorentz  $\Lambda$  que relaciona as coordenadas dos eventos nos dois referenciais. É possível mostrar<sup>3</sup> através dessa transformação que no quadro que viaja com a partícula, vale

$$\Delta \tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu v^\nu = 0, \mu = 0, 1, 2,$$

e

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{x}^3 &= [ -((\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2) ]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{-g(x - x_0, x - x_0)} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu}. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Veja: NABER. Gregory L. Geometry of Minkowski spacetime. 2.ed. Lodon: Springer, 2010.

**Definição A.4.1.** *Seja  $v$  um vetor do tipo tempo em  $M$ . Definimos o tempo próprio de  $v$ , sendo o número*

$$\tau(v) = \sqrt{-g(v, v)}.$$

*Isto é, se  $v = x - x_0$  é o vetor que representa o deslocamento entre os eventos  $x$  e  $x_0$ , então  $\tau(v)$  é intervalo de tempo entre esses eventos em um quadro em que eles ocorrem na mesma posição espacial.*

Uma curva parametrizada em  $M$  é uma aplicação

$$\alpha : I \rightarrow M$$

onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo aberto. Por abuso de linguagem, referimos a  $\alpha$  como a curva  $\alpha$ .

Estamos interessados em trajetórias de partículas massivas em  $M$ . Essa trajetória representa a linha-mundo da partícula, ou seja, contém todas informações dos eventos experimentados pela partícula. Tal trajetória está relacionada a uma parametrização de uma curva

$$\alpha : I \rightarrow M$$

suave ( $\alpha \in C^\infty$  e  $\alpha'(t) \neq \vec{0} \forall t \in I$ ), tal que  $\alpha'(t)$  é para todo  $t \in I$  do tipo tempo e direcionado para o futuro.

Nesse sentido dizemos que

$$\alpha(t) = x^\mu(t)v_\mu,$$

dada relativamente ao referencial associado a base ortonormal  $\{v_\mu\}$  de  $M$ , é uma curva parametrizada do tipo tempo direcionada para o futuro.

**Proposição A.4.1.** *A suavidade de  $\alpha$  independe do referencial inercial escolhido.*

*Demonstração.* De fato, se relativamente a base  $\{v_\mu\}$ , temos

$$\alpha(t) = \frac{dx^\mu}{dt}v_\mu,$$

e se dada outra base ortonormal  $\{\tilde{v}_\mu\}$  tivermos

$$\alpha(t) = \frac{d\tilde{x}^\mu}{dt}\tilde{v}_\mu,$$

então

$$\frac{d\tilde{x}^\mu}{dt} = \Lambda_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{dt}.$$

Onde a matriz  $[\Lambda]_{\mu\nu}$  é a matriz mudança de base de  $\{\tilde{v}_\mu\}$  para  $\{v_\mu\}$ . Como  $\frac{dx^\mu}{dt} \in C^\infty$  e  $\Lambda_\nu^\mu$  é constante  $\forall \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ , logo  $\frac{d\tilde{x}^\mu}{dt} \in C^\infty \forall \mu = 0, 1, 2, 3$ .  $\square$

Dada uma função

$$h : J \rightarrow I$$

onde  $J, I \subset \mathbb{R}$  são intervalos abertos, tal que  $h'(s) > 0 \quad \forall s \in J$ . Temos que  $h$  é uma bijeção crescente diferenciável de  $J$  em  $I$  com inversa diferenciável, valendo  $(h^{-1})'(t) = [h'(h^{-1}(t))]^{-1}$ . Nessas condições, dizemos que  $h$  é uma mudança de parâmetro e a composição  $\alpha \circ h : J \rightarrow M$  é uma reparametrização de  $\alpha$  pelo parâmetro  $s$ .

Observe que

$$(\alpha \circ h)'(s) = \frac{dx^\mu(h(s))}{ds}(x^\mu(h(s))) \frac{dh}{ds} v_\mu = h'(s) \alpha'(h(s)) = h'(s) \alpha'(t) \Rightarrow$$

$$g(h'(s) \alpha'(t), h'(s) \alpha'(t)) = [h'(s)]^2 g(\alpha'(t), \alpha'(t)) < 0.$$

Portanto,  $\alpha \circ h$  também é do tipo tempo e direcionado para o futuro.

Para uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ , definimos o comprimento do tempo próprio de  $\alpha$  como sendo o número

$$L(\alpha) = \int_a^b |g(\alpha'(t), \alpha'(t))|^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt.$$

A interpretação física para  $L(\alpha)$  é a seguinte:

A Hipótese do relógio: se  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  representa a linha mundo de uma partícula então o número  $L(\alpha)$  é interpretado como sendo o intervalo de tempo entre os eventos  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  mencionados por um relógio que viaja junto com partícula.

**Teorema A.4.1.** *Sejam  $p$  e  $q$  dois eventos em  $M$  então  $p - q$  é do tipo tempo e direcionado para o futuro se, e somente se, existe uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  do tipo tempo direcionada para o futuro tal que  $\alpha(a) = p$  e  $\alpha(b) = q$ .*

*Demonstração.* Omitiremos a demonstração<sup>4</sup>. □

Agora, daremos argumentos plausíveis para interpretar fisicamente a quantidade  $L(\alpha)$ .

Dada uma partição  $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, t_i = b\}$  do intervalo  $[a, b]$ , onde  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_i = b$ , segue do teorema acima que  $v_i = \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})$  é do tipo tempo e direcionado para o futuro. Logo  $\tau(v_i)$  é interpretado como o intervalo de tempo entre  $\alpha(t_{i-1})$  e  $\alpha(t_i)$  em um referencial em que os dois eventos ocorrem na mesma posição espacial.

Se uma partícula massiva que viaja com velocidade constante tem sua linha mundo parametrizada por  $\alpha$ , então  $\tau(v_i)$  é o intervalo de tempo entre esses eventos medido por um relógio que viaja junto com a partícula. Relativamente a esse quadro admissível

$$\tau(v_i) = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \Delta x_i^\mu \Delta x_i^\nu} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{\Delta x_i^\mu}{\Delta t_i} \frac{\Delta x_i^\nu}{\Delta t_i} \Delta t_i}.$$

Como  $\alpha$  é contínua, teremos para  $\Delta t_i$  suficiente pequeno,  $\Delta x_i^3$  pequeno. Como a velocidade da partícula em relação ao nosso quadro de referencia é para curtos intervalos de tempo constante, vemos que  $\tau(v_i)$  é uma boa aproximação para o intervalo de tempo mensurado pelo “relógio da partícula” entre os eventos  $\alpha(t_{i-1})$  e  $\alpha(t_i)$ . Portanto, a soma

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{\Delta x_i^\mu}{\Delta t_i} \frac{\Delta x_i^\nu}{\Delta t_i} \Delta t_i}$$

é uma boa aproximação para o intervalo de tempo entre  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$  que é mensurado pelo relógio que viaja com a partícula. As aproximações melhoram quando  $\Delta t_i$  tende a zero, e no limite a soma acima se aproxima da definição de  $L(\alpha)$

Vimos que a definição de uma curva  $\alpha : I \rightarrow M$  do tipo tempo direcionada para o futuro independe da parametrização e do referencial escolhido. Voltaremos nossa atenção, a partir de agora, para um tipo especial de parametrização, vamos assumir que  $0 \in I$ .

<sup>4</sup>Veja: NABER. Gregory L. Geometry of Minkowski spacetime. 2.ed. Lodon: Springer, 2010.

**Definição A.4.2.** Definimos a função tempo próprio  $\tau(t)$   $t \in I$ , como sendo

$$\tau = \tau(t) = \int_0^t |g(\alpha'(u), \alpha'(u))|^{\frac{1}{2}} du.$$

Temos  $\frac{d\tau}{dt} = |g(\alpha'(t), \alpha'(t))|^{\frac{1}{2}} > 0$  e infinitamente diferenciável, logo  $\tau$  é uma bijeção crescente do intervalo  $I$  em um intervalo  $J$  com inversa  $h : J \rightarrow I$  diferenciável, e  $h'(\tau) = \frac{1}{\tau'(t)} = \frac{1}{|g(\alpha'(t), \alpha'(t))|^{\frac{1}{2}}} > 0$ . Portanto  $\tau$  assim definida é uma mudança de parâmetro. Fisicamente estamos parametrizando  $\alpha$  por medidas de tempo que realmente estão sendo registradas ao longo de  $\alpha$ .

Usaremos a mesma notação para  $\alpha$  e suas coordenadas relativamente a uma base admissível quando esta estiver parametrizada pelo parâmetro  $\tau$  ou pelo parâmetro  $t$ , ou seja,  $\alpha(\tau) = x^\mu(\tau)v_\mu$ .

O vetor  $\alpha'(\tau) = \frac{dx^\mu}{d\tau}v_\mu$  é dito a 4-velocidade de  $\alpha$  e denotamos por  $U = U^\mu(\tau)v_\mu$ . Temos  $U$ , um vetor do tipo tempo unitário.

Com efeito,

$$\begin{aligned} \alpha(\tau) = \alpha(h(t)) &\Rightarrow \alpha'(\tau) = \alpha'(h(t))h'(t) = \frac{\alpha'(t)}{|g(\alpha'(t), \alpha'(t))|^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow g(\alpha'(\tau), \alpha'(\tau)) = \frac{g(\alpha'(t), \alpha'(t))}{|g(\alpha'(t), \alpha'(t))|} = -1 \forall \tau, \end{aligned}$$

pois  $g(\alpha'(t), \alpha'(t)) < 0$ . Assim,  $g(U, U) = -1$ .

A segunda derivada de  $\alpha$  parametrizada pelo tempo próprio é dito a 4-aceleração de  $\alpha$ , e denotamos por  $A = A^\mu(\tau)v_\mu$  o vetor  $\alpha''(\tau) = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}v_\mu$ . Este é ortogonal a  $U$  para todo  $\tau$ , em particular é do tipo espaço se não for  $\vec{0}$ . Basta observar que

$$\begin{aligned} g(U, U) = g(\alpha'(\tau), \alpha'(\tau)) &= -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{d\tau}g(\alpha'(\tau), \alpha'(\tau)) &= 2g(\alpha'(\tau), \alpha''(\tau)) = 2g(U(\tau), A(\tau)) = 0 \forall \tau. \end{aligned}$$

A velocidade e aceleração mundial de uma partícula que tem sua linha mundo parametrizada por  $\alpha$  é essencial para compreensão da dinâmica da partícula. Para um dado observador talvez seja mais provável para ele parametrizar  $\alpha$  pelo tempo atribuído por ele para cada evento em  $\alpha$ , isto é, parametrizar  $\alpha$  pela coordenada  $x^3$  de cada evento em  $\alpha$  em vez de  $\tau$ . Então, devemos procurar um procedimento para encontrar  $U(\tau)$  e  $V(\tau)$  dessas parametrizações.

Começamos observando que como  $\alpha$  é suave então  $x^3(\tau)$  é infinitamente diferenciável. Como  $\alpha$  é do tipo tempo e direcionada para o futuro, devemos ter  $\frac{dx^3}{d\tau} > 0$  e logo  $x^3(\tau)$  possui inversa  $\tau = h(x^3)$  com  $\frac{d\tau}{dx^3} = \left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^{-1} > 0$ . Assim,  $x^3$  define uma mudança de parâmetro e vale

$$\frac{d\tau}{dx^3} = |g(\alpha'(x^3), \alpha'(x^3))|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 - \left[ \left(\frac{dx^0}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{dx^1}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dx^3}\right)^2 \right]} = \sqrt{1 - \beta^2(x^3)},$$

onde  $\beta(x^3)$  é a velocidade instantânea da partícula massiva cuja linha-mundo é parametrizada por  $\alpha$  relativamente ao quadro  $S(x^0, \dots, x^3)$ .

Temos  $\frac{dx^3}{d\tau} = (1 - \beta)^{\frac{1}{2}}$ , que iremos denotar por  $\gamma = \gamma(x^3)$ , daí

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{dx^3} \frac{dx^3}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dx^3}, \mu = 0, 1, 2 \text{ e } U^3 = \gamma.$$

Dessa forma, podemos escrever

$$U = U^\mu v_\mu = \gamma \frac{dx^0}{dx^3} v_0 + \gamma \frac{dx^1}{dx^3} v_1 + \gamma \frac{dx^2}{dx^3} v_2 + \gamma v_3.$$

Convenientemente escrevemos

$$(U^0, U^1, U^2, U^3) = \gamma \left( \frac{dx^0}{dx^3}, \frac{dx^1}{dx^3}, \frac{dx^2}{dx^3}, 1 \right)$$

ou de forma mais compacta  $(U^0, U^1, U^2, U^3) = \gamma(\vec{u}, 1)$ , onde  $\vec{u}$  é o vetor 3-velocidade de  $\alpha$  em  $S$ .

De modo análogo obtemos

$$A^\mu = \gamma \frac{d}{dx^3} \left( \gamma \frac{dx^\mu}{dx^3} \right), \mu = 0, 1, 2 \text{ e } A^3 = \gamma \frac{d\gamma}{dx^3},$$

de modo que,  $A = (A^0, A^1, A^2, A^3) = \gamma \frac{d}{dx^3} (\gamma \vec{u}, \gamma)$ .

**Proposição A.4.2.** *Utilizando um ponto para indicar a derivação com relação a variável  $x^3$  e considerando o produto interno euclidiano em  $\mathbb{R}^3$ ,  $E : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , são válidas*

1.  $\dot{\gamma} = \gamma^3 \dot{\beta}$ .
2.  $E(\vec{u}, \vec{u}) = |\vec{u}|^2 = \beta^2$ .
3.  $E(\vec{u}, \dot{\vec{u}}) = E(\vec{u}, \vec{a}) = \beta \dot{\beta}$ , onde  $\vec{a} = \dot{\vec{u}}$ .
4.  $g(A, A) = \gamma^4 |\vec{a}|^2 + \gamma^6 \beta^2 (\dot{\beta})^2$ .

*Demonstração.* A proposição é obtida através de cálculos simples. □

Para cada ponto  $\alpha(\tau_0)$  ao longo de  $\alpha$  o vetor  $\alpha'(\tau_0)$  é do tipo tempo unitário, logo podemos encontrar uma base admissível  $B(\tau_0) = \{\tilde{v}^\mu\}$  contendo o vetor  $U(\tau_0) = \tilde{v}^3$  relativamente a qual as coordenadas de  $U(\tau_0)$  serão  $(0, 0, 0, 1)$ . De modo que neste referencial admissível tenhamos em  $\tilde{x}_0^3 = \tilde{x}^3(\tau_0)$

$$\left. \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tilde{x}^3} \right|_{x^3=x_0^3} = 0, \mu = 0, 1, 2 \text{ e } \gamma = 1 \text{ e } \beta(x_0^3) = 0.$$

Neste quadro temos que a partícula cuja linha mundo é  $\alpha$  encontra-se momentaneamente em repouso, tal quadro é denominado o quadro de repouso instantâneo da partícula. Pela proposição anterior,  $g(A, A) = |\vec{a}|^2$  nesse quadro. Como  $g(A, A)$  é invariante sobre as transformação de coordenadas de Lorentz, então todos os observadores admissíveis concordam sobre a magnitude da 3-aceleração de  $\alpha$  em relação aos seus quadros instantâneos de repouso.

Com essas ideias em mente, vamos analisar a seguinte situação: um explorador futurista pretende viajar para uma parte distante do universo, seu ponto de partida será a Terra. Ele pretende viajar com uma aceleração constante de um  $g$  (uma

gravidade terrestre) em relação aos seus quadros instantâneos de repouso. Supondo que o viajante não faça dietas, ou seja, seu peso permanecerá constante durante toda viagem, vamos calcular a linha-mundo  $\alpha$  desse viajante.

Denotaremos por  $U(\tau)$  e  $A(\tau)$  a velocidade e a aceleração mundial de  $\alpha(\tau)$  respectivamente. Sendo  $\alpha(\tau)$  uma curva do tipo tempo e direcionada para o futuro, teremos:

$$g(U, U) = -1, g(U, A) = 0 \text{ e } g(A, A) = g^2.$$

Vamos analisar esta situação em que o quadro do viajante viaja na direção do eixo positivo dos  $x^0$  de um quadro que está na Terra (Devemos lembrar que na Relatividade Especial os quadros inerciais são livres de gravidade).

Nesta situação devemos ter:

$$U^1 = U^2 = 0, A^1 = A^2 = 0,$$

logo

$$\begin{cases} g(U, U) = (U^0)^2 - (U^3)^2 = -1 \\ g(A, U) = A^0 U^0 - A^3 U^3 = 0 \\ g(A, A) = (A^0)^2 - (A^3)^2 = g^2 \end{cases},$$

donde, obtemos :

$$A^3 = gU^0 \text{ e } A^0 = gU^3,$$

ou seja,  $U^0$  e  $U^3$  são soluções do sistema de EDOs

$$\begin{cases} \frac{dU^3}{d\tau} = gU^0 & (1) \\ \frac{dU^0}{d\tau} = gU^3 & (2) \end{cases}.$$

Derivando (2) temos  $\frac{d^2 U^0}{d\tau^2} = g \frac{dU^3}{d\tau}$ , substituindo em (1) vem

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 U^0}{d\tau^2} = gU^0 \Rightarrow \frac{d^2 U^0}{d\tau^2} - g^2 U^0 = 0.$$

A equação acima tem como equação característica

$$r^2 - g^2 = 0$$

quem tem solução  $r = \pm g$ , logo a solução é dada por

$$U^0(\tau) = c_1 e^{g\tau} + c_2 e^{-g\tau}.$$

Em  $\tau = 0$  devemos ter  $U^0(0) = 0$  e  $A^0(0) = g$ , utilizando estas condições iniciais obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ g c_1 - g c_2 = g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases},$$

segue dai que  $U^0(\tau) = \frac{1}{2}(e^{g\tau} - e^{-g\tau}) = \sinh g\tau$  e  $U^3 = \cosh g\tau$ .

Como  $\frac{dx^0}{d\tau} = U^0(\tau) = \sinh(g\tau)$  e  $\frac{dx^3}{d\tau} = U^3(\tau) = \cosh g\tau$ , vem

$$\begin{cases} x^0(\tau) = \frac{1}{g} \cosh g\tau + k_1 \\ x^3(\tau) = \frac{1}{g} \sinh g\tau + k_2 \end{cases}.$$

Supondo que  $x^0(0) = \frac{1}{g}$  e  $x^3(0) = 0$ , sem perda alguma, simplesmente para termos as constantes nulas no sistema acima, logo obtemos

$$\begin{cases} x^0(\tau) = \frac{1}{g} \cosh g\tau \\ x^3(\tau) = \frac{1}{g} \sinh g\tau \end{cases} .$$

Utilizando o fato que  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ , temos

$$(x^0)^2 - (x^3)^2 = \frac{1}{g^2},$$

assim, a linha mundo do viajante é uma hipérbole na representação bidimensional de  $M$ .

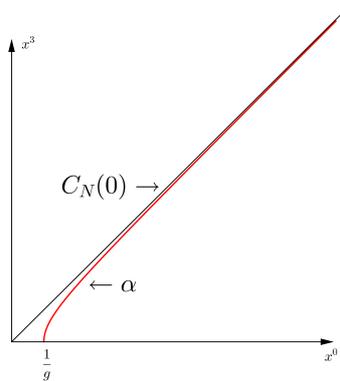


Figura A.6: Linha mundo do explorador

# Referências Bibliográficas

- [1] HOBSON.M.P; EFSTATHIOUS.G.P and LANSEBY.A.N. *General relativity An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, New York, 2006.
- [2] GODINHO. Leonor; NATÁRIO. José. *An Introduction to Rimanian Geometry, With Applications to Mechanics and Relativity*. Springer, London, 2014.
- [3] NABER. Gregory L. *Geometry of Minkowski sapcetime*. Springer, Lodon, 2010.
- [4] R.J.A LAMBOURNE. *Relativity, Gravitation and Cosmology*. Cambridge University Press, New York, 2010.
- [5] CHENG. Ta-Pei. *Relativity, Gravitation and Cosmology A basic introduction*. Oxford University Press, New York, 2005.
- [6] N.M.J WOODHOUSE. *General Relativity*. Springer, London, 2007.