Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Departamento de Engenharia de Produção

Trabalho de Conclusão de Curso

UMA HEURÍSTICA LAGRANGIANA PARA O PROBLEMA DE AJUSTE DE FLUXO DE CAIXA E SEQUENCIAMENTO DE PROJETOS COM RECURSOS LIMITADOS

Soraya Quaresma Santos

João Monlevade, MG
2018

Soraya Quaresma Santos

UMA HEURÍSTICA LAGRANGIANA PARA O PROBLEMA DE AJUSTE DE FLUXO DE CAIXA E SEQUENCIAMENTO DE PROJETOS COM RECURSOS LIMITADOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de Produção pelo Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.
Orientador: Prof. Dr. Thiago Augusto de Oliveira Silva

Universidade Federal de Ouro Preto
João Monlevade
2018

S237h Santos, Soraya Quaresma.
Uma heurística lagrangiana para o problema de ajuste de fluxo de caixa e sequenciamento de projetos com recursos limitados [manuscrito] / Soraya Quaresma Santos. - 2018.

55f.: il.: color; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Augusto de Oliveira Silva.

Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas. Departamento de Engenharia de Produção.

1. Engenharia de Produção. 2. Heurística. 3. Fluxo de caixa. I. Silva, Thiago Augusto de Oliveira. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Titulo.

CDU: 658.5

Catalogação: ficha.sisbin@ufop.edu.br

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas - ICEA
Colegiado do Curso de Engenharia de Produção - COEP
Campus João Monlevade

ATA DE DEFESA – ATV030

Aos 04 dias do mês de dezembro de 2018, às 18 horas, na sala H203 deste instituto, foi realizada a defesa do Trabalho de Conclusão de Curso pelo (a) aluno (a) Soraya Quaresma Santos, Matrícula 13.1.8288 sendo a comissão examinadora constituída pelos professores: Thiago Augusto de Oliveira Silva (Orientador), Mônica do Amaral e Alexandre Xavier Martins. O (a) aluno (a) apresentou o trabalho intitulado: UMA HEURÍSTICA LAGRANGIANA PARA O PROBLEMA DE AJUSTE DE FLUXO DE CAIXA E SEQUENCIAMENTO DE PROJETOS COM RECURSOS LIMITADOS. A comissão examinadora deliberou, pela: (__) Aprovação; ou (x) Aprovação com Ressalva - Prazo concedido para as correções: 10 DIAS; ou (__) Reprovação com Ressalva, com prazo para marcação da nova banca de: ______________; ou (__) Reprovação do(a) aluno(a), com a nota 9,5. Na forma regulamentar e seguindo as determinações da Resolução COEP 05/2018 foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da comissão examinadora e pelo (a) aluno(a).

João Monlevade, 04 de dezembro de 2018.

Thiago AOS
Nome do Orientador (a)

Nome do Membro (a)

Mônica do Amaral
Nome do Membro (a)

Santos
Nome do Aluno (a)

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais, Zico e Marta, pela paciência, apoio e por compreenderem minha ausência em certos momentos. Aos meus irmãos, Joyce e Igor, pelos conselhos e incentivo e aos meus sobrinhos, Enzo e Ayla, que muitas vezes foram meu alívio e distração para os momentos difíceis. Agradeço também todos meus familiares por toda torcida e boas energias enviadas.

Sou grata em especial ao meu orientador Thiago, não só pela ajuda e apoio neste trabalho mas também durante toda graduação. Obrigada pelos conselhos, pela paciência e por todos ensinamentos. Sem dúvidas sem o seu apoio não estaria escrevendo estas palavras hoje.

"O mais competente não discute, domina a sua ciência e cala-se."

– Voltaire

Resumo

A formação de uma carteira de investimento de forma assertiva e ótima quanto ao retorno obtido não é uma tarefa trivial. Ao longo dos anos, muitos modelos matemáticos foram elaborados de forma a otimizar essa seleção, no entanto os mesmos se tornaram cada vez mais complexos e, portanto, despertando menos interesse por sua aplicação em contextos reais. Uma forma de trazer mais aplicabilidade aos modelos seria a aplicação de métodos e heurísticas que reduzissem o seu tempo de execução e também a sua complexidade. Dessa forma, o presente trabalho está focado na aplicação de uma Heurística Lagrangiana em um modelo elaborado previamente que trata do ajuste de fluxo de caixa e sequenciamento de projetos considerando recursos limitados. Após alguns testes para escolha da heurística viu-se que aplicação baseada em uma Heurística Fix-and-Optimize poderia proporcionar os resultados almejados, sendo assim, a mesma foi aplicada e testada e os resultados obtidos foram comparados aos resultados do método exato. Essa comparação permitiu concluir que a heurística é capaz de reduz o tempo solução do problema.
Palavras-chave: Carteira de investimentos, Sequenciamento em projetos, Relaxação Lagrangiana, *Fix-and-Relax*, *Fix-and-Optimize*.

Abstract

The formation of an investment portfolio in an assertive and optimal way regarding the return obtained is not a trivial task. Over the years, many mathematical models have been developed in order to optimize this selection however, they have become increasingly complex and, therefore, arousing less interest in its application in real contexts. One way to make the model more applicability would be the application of methods and heuristics that would reduce its execution time and also its complexity. In this way, the present research is focused on the application of a Lagrangian Heuristic in a previously elaborated model that deals with the adjustment of cash flow and sequencing of projects considering limited resources. After some tests to choose the heuristic, it was found that the application based on a Fix-and-Optimize Heuristic could provide the expect results, so it was applied and tested and the results obtained were compared to the results of the exact method. This comparison allowed us to conclude that the heuristic is able to reduce the problem solving time.
Keywords: Investment Portfolio, Lagrangian Heuristics, Fix and Relax, Fix and Optimize, Project Sequencing.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

RL - Relaxação Lagrangiana;

F&R - *Fix-and-Relax*

F&O - *Fix-and-Optimize*;

CMO - *Critical Path Method* - Método do Caminho Crítico;

PSPRR - Problema de Sequenciamento em Projetos com Restrição de Recursos;

UB - *Upper Bound*;

LB - *Lower Bound*;

MIP - *Mixed Integer Programming*;

VPL - Valor Presente Líquido.

Sumário

1 Introdução

No âmbito da pesquisa operacional, Marins (2011) infere que a modelagem matemática pode ser compreendida como uma forma simplificada de representar a realidade e a qualidade do modelo está relacionada a inventividade da equipe que o desenvolve. Desta forma, diversos sistemas podem ser representados matematicamente, entretanto seus atributos variam de acordo com a percepção de quem o modela. Tais modelos surgem com o intuito de melhorar o processo de tomada de decisão e “as possibilidades de otimização dessas decisões conduziram os pesquisadores a fazerem propostas de técnicas de pesquisa operacional para resolução de tais problemas” (ABENSUR, 2012, p. 1).

Dentro da modelagem matemática podem ser observados diferentes tipos de modelos adaptados às particularidade dos sistemas aos quais representam e com inúmeros graus de dificuldade de resolução, um destes é o problema de sequenciamento de projetos/atividades que fundamenta diversos estudos. Tal problema permite que recursos sejam aplicados de forma ótima, podendo assim atender aos objetivos de quem o modela. Dessa maneira, no contexto empresarial um modelo de sequenciamento de projetos e alocação de recursos aplicado a situações reais podem facilitar a tomada de decisão.

Vieira (2010) afirma que, de modo geral, projetos envolvem empreendimentos de alto risco com um prazo determinado e uma quantidade pré-definida de recursos para sua execução. Portanto, percebe-se a necessidade de que a escolha dos investimentos seja feita de forma assertiva quanto ao retorno de investimento de modo que o mesmo seja maximizado. Para tanto faz-se necessário certo nível de conhecimento acerca dos investimentos em análise a fim de garantir que a decisão tomada tenha um nível satisfatório de confiabilidade.

O problema de ajuste de fluxo de caixa *(cash matching problem)* é uma alternativa viável para incorporar parâmetros relativos a receitas e despesas no contexto de projetos. Tal problema é dado pelas obrigações em um horizonte de tempo delimitado e o possível investimento, de modo que seja possível cumprir com tais obrigações com o mínimo de investimento (LUENBERGER et al., 1997). Esse tipo de problema pode ser aplicado a realidade das empresas de construção civil, realidade esta que enfrenta diversos problemas relacionados as formas de financiar o empreendimento de modo a não comprometer seu prazo de entrega. É comum ouvir falar de atrasos tanto no setor público como no privado e, na maioria dos casos, os atrasos se devem a dificuldade de cumprir com as obrigações financeiras.

No modelo de Barbosa (2016) que servirá como base para a presente pesquisa, vê-se a combinação destes dois tipos de problemas: ajuste de fluxo de caixa e sequenciamento de projetos com limitação de recursos. Em seu modelo, o mesmo apresentou uma forma ótima de selecionar títulos de investimentos para viabilizar financeiramente projetos maximizando o valor presente líquido. A associação dos mesmos estabelece uma relação entre o nível operacional representado pelo sequenciamento dos projetos e o nível estratégico pela definição do orçamento.

O fluxo de decisão formado se embasa no retorno que determinado investimento pode prover e, apoiado nessa informação, tem-se uma maior flexibilidade em relação ao orçamento sendo possível conhecer e decidir quando obter o retorno referente ao empreendimento. Essa combinação torna este modelo aplicável na área da construção civil pois pode auxiliar no planejamento dos investimentos.

Entretanto, o modelo de Barbosa (2016) é classificado como um problema NP-Difícil, pois combina dois problemas que também pertencem a esta classe. Portanto, para que a aplicação do mesmo seja viável em situações reais percebeu-se a necessidade de implementação de uma heurística a fim de melhorar o desempenho computacional do modelo em termos de tempo de execução para a busca por uma solução ótima. Logo, o que se propõem no presente trabalho é a implementação de uma Heurística Lagrangiana, na qual espera-se avaliar o desempenho computacional do modelo por meio de uma bateria de testes.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver um método de solução, baseado em uma Heurística Lagrangiana, capaz de melhorar o desempenho computacional, em termos de tempo para busca da solução ótima, do modelo de ajuste de fluxo de caixa e sequenciamento de projetos com recursos limitados proposto anteriormente por Barbosa (2016) e posteriormente executar uma bateria de testes para validação.

1.1.2 Objetivos Específicos

- √ Identificar as restrições que complicam o modelo;
- √ Gerar limite superior através da Relaxação Lagrangiana;
- √ Desenvolver uma Heurística Lagrangiana;
- √ Implementar e viabilizar a nova heurística para o problema;
- √ Testar as instâncias utilizadas por Barbosa (2016);
- √ Comparar resultados obtidos em ambos testes;
- √ Avaliar os resultados obtidos.

1.2 Justificativa

No contexto atual, as empresas têm buscado várias formas de investimento de modo a maximizar seus lucros, isso pode ser facilitado pelo acompanhamento e análise de fluxo de caixa. Um setor em que é importante um bom panejamento de todos os recurso necessários para os projetos é a construção civil. Para a realização de obras de construção civil é necessário a coordenação de diversos processos como prazos curtos, concorrência, restrições sejam de transporte ou armazenamento de materiais entre outros, além é claro, capital para financiar o empreendimento. Trata-se de um ambiente de constantes mudanças e dentro de um horizonte de planejamento que pode ser considerado longo (BOŻEJKO; HEJDUCKI; WODECKI, 2012).

O processo de planejamento e programação de obras deve ser bem elaborado sendo ainda importante considerar todos os custos involvidos no processo de execução. No entanto o que se percebe é que, cada vez mais, as obras não tem sido entregues dentro dos prazos estabelecidos. De acordo com a Confederação Nacional da Indústria - CNI (2018), o Ministério Público Brasileiro informou que o numero de atrasos em obras, incluindo projetos de infraestrutura, no Brasil chega em 2.796 e dentre os principais responsáveis listados estão os problemas orçamentários/financeiros. Esses atrasos que ocorrem trazem diversos prejuízos, não somente para os clientes mas também para as empresas da construção civil pois alguns custos são incrementados em caso de não cumprimento dos prazos. Em novembro de 2017 o Governo Brasileiro lançou o Programa Avançar com o objetivo de continuar as obras públicas paralisadas, o programa chega a abranger 7.439 projetos com implantação parcial (CNI, 2018) .

É cada vez comum a ocorrência de atrasos em obras, não somente no setor privado mas também em obras públicas, em diversos casos os concorrentes das licitações passam informações não condizentes com a realidade e quando a obra já está em execução ocorrem imprevistos como falta de orçamento por parte do governo. Um erro de planejamento afeta a execução de um projeto de forma significativa e, tratando de custos e planejamento financeiro é ainda mais grave. O que normalmente ocorre é que atrasos na finalização de projetos leva ao aumento dos custos e de forma análoga a possibilidade de adiantar a entrega pode reduzir também os custos (NG; ZHANG, 2008).

Retomando o contexto de obras no setor privado, muitos empreendedores tem dificuldades para financiar seus empreendimentos e, mais do que isso, fazer com que seu retorno de investimento seja satisfatório e uma forma de facilitar esse planejamento de investimento seria por meio da modelagem matemática. Contudo, resolver todas as questões que estão involvidas na construção civil por meio de modelos matemáticos tende a nos levar a construir modelos complicados e complexos de serem otimizados. Métodos ideais para solução de problemas da classe NP - Difícil não são amplamente aplicados na prática pois apenas instâncias de tamanho pequenos são solucionadas em tempo computacional viável. Portanto para a aplicação prática desses problemas são aplicados algoritmos que resultam em uma solução aproximada.

Em sua pesquisa Barbosa (2016) propôs uma melhor forma de selecionar títulos de investimentos no intuito de viabilizar financeiramente os projetos maximizando ainda o valor presente líquido, o que faz de seu modelo uma ferramenta para auxiliar empresas na formação de sua carteira e possivelmente evitar atrasos e falhas relacionados ao orçamento. Entretanto, seu modelo ao incorporar todos os fatores envolvidos na seleção de investimentos se tornou um modelo com um alto grau de complexidade, tornando importante e justificando o estudo de novos métodos de solução que permitam um melhor desempenho e uma correta aplicabilidade. Técnicas heurísticas podem ser uma boa opção, visto que são organizadas a partir de regras, ideias e proposições objetivando encontrar a solução ótima, podendo ser estruturadas a partir de algoritmos menos exigentes e que demandem um menor nível computacional (BELFIORE; FÁVERO, 2013).

Com base em estudo prévios desenvolvidos por Barbosa (2016), percebeu-se que a relaxação de um conjunto de restrições poderia levar a subproblemas mais fácies que por consequência demandariam um menor esforço computacional e portanto requereria um menor tempo para execução. Sendo assim, o que se espera é que com a relaxação do modelo a partir de uma restrição que o torna "difícil", obtenha-se limitantes superiores que por meio da Relaxação Lagrangiana - RL combinada a métodos heurísticos para viabilização do resultado, levarão a boas soluções. Essas soluções geradas podem ser superiores à solução ótima do problema original, então, a RL atuará de forma a tentar reduzir esse limitante fazendo com que o mesmo caminhe em direção à solução ótima do problema original.

Dessa forma, caso comprovado o ganho em termos de desempenho do modelo, a resolução desse problema de forma mais rápida e fácil possibilitaria uma melhor aceitação em ambientes empresarias como no setor da construção civil, encorajando então os gestores a aplicação desse modelo em situações práticas do cotidiano para auxiliar suas decisões, principalmente no que diz respeito a seleção da carteira de investimentos, com fundamentação numérica em relação à viabilidade dos empreendimentos.

1.3 Organização do trabalho

A construção do presente trabalho se deu da seguinte forma: no Capítulo 1 são apresentados os elementos de introdução ao contexto da pesquisa bem como seus objetivos e justificativa da elaboração e no Capítulo 2 a metodologia de pesquisa utilizada durante todas as fases de desenvolvimento é descrita. Na sequência, o Capítulo 3 expõe e explica questões teóricas que são abordadas no decorrer da pesquisa sendo no Capítulo 4 apresentada a fundamentação teórica trazendo a base teórica para os métodos de programação aplicados. No Capítulo 5 inicia-se de fato a apresentação do problema proposto explicando sua construção e a forma como as diferentes técnicas de programação foram aplicadas no mesmo seguido do Capítulo 6 com os resultados obtidos através de alguns testes e por fim o Capítulo 7 apresentando as inferências feitas sobre os resultados.

2 Metodologia de pesquisa

A metodologia científica pode ser compreendida como uma sucessão de passos que devidamente alinhados possibilitam a interpretação de um fato ou fenômeno. Adotar uma metodologia significa escolher um caminho, ou seja, é a definição de uma linha de raciocínio que involve métodos e instrumentos diversos com objetivo de dirigir-se à obtenção dos resultados desejados (SILVA; MENEZES, 2005).

De acordo com Morabito e Pureza (2010) as pesquisas em gestão da produção e operações permitem que sejam construídos modelos que se aproximem do desempenho de processos reais, o que vai de encontro aos objetivos desta pesquisa cujo objetivo é demonstrar o ambiente de sequenciamento de projetos ou seleção de títulos de investimento de forma matemática. No entanto neste trabalho não foi realizado nenhum teste em instância real, sendo assim, o foco principal está em obter soluções para o método proposto e viabiliza-lo fazendo com que a pesquisa seja classificada como sendo uma pesquisa axiomática. Possui objetivo de caráter normativo visando otimizar os resultados já existentes na literatura possibilitando ainda uma comparação entre os mesmos visto que as resultados obtidos por meio da nova heurística serão comparados com os resultados obtidos na pesquisa anterior a fim de inferir o quão eficiente a heurística foi para este problema e instancias em especifico.

Na esfera da abordagem pede-se classificar a presente pesquisa como sendo um abordagem quantitativa, isso por que trata-se da geração de conhecimentos de forma racional. Os resultados e análises nesta pesquisa serão expressos de forma numérica e precisa e no geral as técnicas de análise e interpretação dos resultados é feita de forma dedutiva podendo então receber a tipologia de uma pesquisa quantitativa axiomática (MORABITO; PUREZA, 2010).

O método a ser utilizado é a modelagem e simulação visto que um sistema real foi representado por meio de um modelo matemático e espera-se avaliar o comportamento do mesmo perante as modificações que lhe serão propostas, sendo assim um sistema real, com muitas variáveis foi transformado em um modelo conceitual que posteriormente será transformado em um modelo matemático analítico, sendo os processos do sistema interpretados em forma de funções matemáticas (TURRIONI; MELLO, 2012).

No âmbito da modelagem e simulação encontram-se diferentes técnicas para a fase de resolução dos modelos matemáticos e como descrito por TURRIONI e MELLO (2012) o importante é que essa técnica leva a melhor solução possível para o problema. No entanto, um dos fatores que pode interferir na escolha do método de solução é a complexidade do modelo. No caso de um modelo complexo soluções geradas pelo *branch-and-bound* não sejam a melhor opção devido ao seu tempo computacional elevado para busca de uma solução. Sendo assim, para o presente estudo foi escolhida uma técnica baseada em relaxação, a Relaxação Lagrangiana que será combinada a outra heurística para obtenção de um resultado ainda mais satisfatório. A heurística que será utilazada é a *Fix-and-Relax* e caso não apresente resultado satisfatório será utilizada a *Fix-and-Optimize* .

Afim de testar a heurística implementada e comparar os ganhos computacionais do modelo utilizou-se o conjunto de instâncias colocado por Barbosa (2016). No geral, modelos matemáticos possuem inúmeras variáveis e parâmetros e tratá-los manualmente seria extremamente inviável. Então, para que os testes pudessem ser feitos fez se o uso do software de otimização CPLEX na versão 12.8.0.0 e para implementação foi utilizada linguagem AMPL *(A Mathematical Programming Language)* .

3 Revisão de literatura

3.1 Sequenciamento de projetos com recursos limitados

Segundo PMBOK (2017), entende-se como projeto um esforço despendido para criação de um serviço, produto ou resultado específico cujo início e termino são bem definidos. De modo geral, projetos envolvem empreendimentos de alto risco com um prazo determinado e uma quantidade pré-definida de recursos para sua execução. Os projetos podem ser divididos em três etapas principais: a coleta dos dados, planejamento e sequenciamento das atividades e execução sendo a segunda etapa um fator importante a ser observado.

A etapa de sequenciar as atividades pode ser muito trabalhosa, visto que muitas vezes existem centenas ou até milhares de atividades para serem coordenadas de modo a atender todas as exigências em relação a tempo e custos principalmente. Determinar a melhor ordem cronológica das atividades bem como alocar recursos de maneira ótima às mesmas é um assunto relevante sendo retratado na literatura como Problema de Sequenciamento em Projeto com Restrição de Recursos (PSPRR) - *Resource Constrained Project Scheduling Problem(RCPSP)*. As técnicas de sequenciamento são aplicadas com o objetivo de obter uma melhor utilização dos recursos. A dificuldade do problema está relacionada ao fato de que o sequenciamento das atividades deve ocorrer de forma a minimizar a duração do projeto ao mesmo tempo em que os recursos devem ser alocados sem exceder seus limites de quantidade (VIEIRA, 2010).

Muitas técnicas podem ser utilizadas para o planejamento e coordenação de projetos no que se refere as atividades. A PERT *(Program Evaluation and Review Technique* – Técnica de Revisão e Avaliação de Programas) é uma técnica normalmente utilizada nos casos em que a estimativa de duração do projeto não pode ser realizada com um bom nível de confiabilidade. Outra técnica é CPM (*Critical Path Method* – Método do Caminho Crítico), aplicada nos casos em que os tempos das operações são conhecidos (RABENSCHLAG, 2005).

A PERT é uma técnica normalmente utilizada nos casos em que a estimativa de duração do projeto não pode ser realizada com um bom nível de confiabilidade sendo necessária a utilização de conceitos estatísticos. O CPM foi criado no intuito de auxiliar a programação de construções e manutenção de fábricas, atualmente a técnica é aplicada nos casos em que os tempos de das operações são conhecidos com certeza. Atualmente as duas técnicas tem muito em comum (RABENSCHLAG, 2005).

Com base na PERT pode ser construído um diagrama de rede no qual são representadas as precedências das atividades e os tempos para execução das mesmas de forma que seja possível identificar o caminho crítico, ou seja, o caminho pelo qual não existem folgas de tempo e, portanto, não permite atrasos na execução sem que comprometa a entrega no tempo estabelecido. Ao montar o diagrama, são definidas duas datas possíveis para seu início e também para o fim, chamadas de data mais cedo e data mais tarde sendo as mesmas diferentes apenas quando a atividade tiver folga de tempo . Basicamente o que problemas de sequenciamento buscam solucionar é determinar a melhor sequência e com a menor duração de modo a disponibilidade de recursos seja respeitada assim como a precedência das atividades. Este problema pode ser adaptado a diferentes contextos respondendo questões relevantes sobre o assunto (OLIVEIRA, 2012).

3.2 Ajuste de fluxo de caixa

Para que uma empresa se mantenha no mercado do ponto de vista financeiro, é crucial que exista um acompanhamento efetivo e detalhado das entradas e saídas no caixa. A gestão das finanças colabora de forma significativa para o planejamento e também a tomada de decisões estratégicas. Ao identificar a quantia e o momento da entrada ou saída ao final de cada período os tomadores de decisão podem observar as oscilações do caixa em relação ao progresso dos projetos (LIU; WANG, 2011).

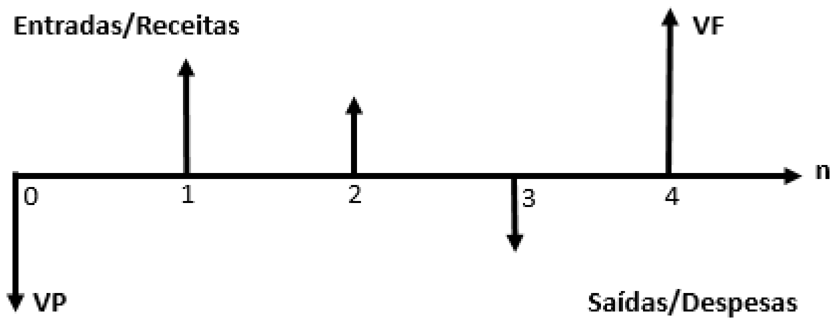
Como afirma Gitman et al. (1997), os fluxos de caixa das empresas podem ser divididos em três grupos: fluxos operacionais os quais estão diretamente relacionados à venda e produção de bens e serviços, fluxo de investimento que refere-se ao fluxo associado a ativos imobilizado ou sociedade em outra empresa e por fim fluxos financeiros que são resultado de financiamentos com capital de terceiros ou próprio. Em suma as demonstrações de fluxo de caixa apresentam as entradas e saídas do caixa durante um determinado período.

A maioria das empresas precisam lidar com muitos projetos acontecendo simultaneamente, isso faz com que o gerenciamento e principalmente o financiamento dos mesmos seja complicado. Portanto, identificar a quantia e o momento de entradas e saídas individuais ao fim de cada período é uma estratégia interessante para acompanhamento do progresso do projeto e das necessidades (LIU; WANG, 2011).

Segundo Liu e Wang (2011) a preocupação não deve se concentrar apenas nas quantidades de dinheiro mas também no memento em que ocorrem. Esse controle ao fim de cada período permite que os gestores determinem montantes e o *timing* de empréstimos (quando necessários) para resolver possíveis déficits no orçamento. É importante considerar que devido a incidência de juros o dinheiro sofre uma variação durante o tempo. Um fluxo de caixa pode ser representado pela Figura 1. Por meio de uma linha de tempo as entradas e saídas podem ser representadas com setas apontando para cima ou para baixo respectivamente.

O *CMP* pode ser combinado PSPRR. Como afirma Luenberger (1998), mais de 60% dos fracassos de empreendimentos da construção civil tem causas financeiras. Vários fatores financeiros durante a programação do projeto como taxas de juros, condições de pagamentos e limite de crédito afetam não apenas o fluxo de caixa do projeto mas também exercem influencia sobre a quantidade de recursos e o tempo de uso dos mesmos. Dessa forma, considerar os objetivos do planejamento bem como o fluxo de caixa possibilita a visualização de um plano de de previsão de fluxo de caixa que permite que falhas financeiras sejam evitadas.

Figura 1 – Fluxo de caixa



Fonte – Elaborado pelo autor

3.3 Ajuste de fluxo de caixa e sequenciamento de projetos

Como já descrito, no que diz respeito a sequenciamento de projetos é importante considerar os custos decorrentes dos mesmo. Portanto é relevante que os dois tipos de problemas – ajuste de fluxo de caixa e sequenciamento de projetos sejam combinados. Na literatura é possível encontrar diversos modelos que buscam otimizar os custos dos projetos além buscar formas de aprimorar a utilização dos recursos.

Uma parte considerável dos empreendimentos que falham são por questões financeiras. Sendo assim, os problemas de sequenciamento de projetos combinado ao ajuste de fluxo de caixa possibilita a geração de um plano de previsão do fluxo de caixa em determinado período. Esse plano fornece um nível considerável de confiabilidade o que faz do mesmo um recursos bastante útil para evitar problemas financeiros (LIU; WANG, 2008).

Liu e Wang (2008) propuseram um modelo de sequenciamento de projetos com recursos limitados considerando o fluxo de caixa. O modelo integra restrições de recursos e de fluxo de caixa no sequenciamento dos projetos para atender as necessidades de gerenciamento como limites de crédito, de recursos buscando a maximização do valor presente líquido. Algumas características do modelo são o fato da decisão estar em torno do fluxo de caixa acumulado, os recursos serem decorrentes de pagamentos por atividades e a definição de um limite de crédito máximo.

O modelo proposto por (BARBOSA, 2016) também apresenta essa interação entre estes dois problemas com algumas diferenças em relação ao modelo de (LIU; WANG, 2008) por exemplo completude de atividades, diferenciação das taxas de juros e incorporação da possibilidade de empréstimos para viabilizar financeiramente o projeto. Na Tabela 1 são apresentados os conjuntos do modelo, em seguida na Tabela 2 os parâmetros e as variáveis apresentadas na Tabela 3. Tal modelo foi implementado e testado pelo mesmo e, baseado em seus estudos, podê se concluir que o modelo proposto é um modelo com elevado nível de complexidade e portanto é viável aplicação de heurísticas.

O modelo é descrito nas tabelas à seguir sendo a Tabela 1 apresentando os conjuntos do modelo proposto, a Tabela 2 apresentando os parâmetros utilizados e a Tabela 3 descrevendo as variáveis do problema:

Tabela 1 – Conjuntos do modelo de Barbosa (2016)

Símbolo	**Descrição**
J	Conjunto de atividades
R	Conjunto de recursos renováveis
T	Conjunto de períodos
M	Conjunto de títulos
J_a	Conjunto de todos antecessores das atividades j
J_b	Conjunto de todas as atividades remuneradas

Tabela 2 – Parâmetros do modelo de Barbosa (2016)

Símbolo	**Descrição**
ES_j	Data mais cedo de início da atividade j
LF_j	Data mais tarde de fim da atividade j
d_j	Tempo necessário para realizar a atividade j
k_j^f	Montante necessário para executar a atividade j
k_{jr}^p	Quantidade necessária do recurso renovável r para realizar a atividade j
k_{rt}^p	Disponibilidade de recurso renovável r no tempo t
V_j	Retorno da atividade j
FD_t	$\frac{1}{(1+i)^t}$ (Fator de desconto no tempo t)
i_e	Taxa de juros de empréstimo
i_a	Custo de capital
p_m	Preço de títulos m disponíveis
c_{mt}	Retorno dos títulos m no período t
t_{max}	Ultimo período
I_0	Investimento inicial
E_{max}	Limite de crédito para empréstimos

A função objetivo é descrita pela equação 3.1 e é a maximização do valor presente líquido dado a partir das sobras de recursos menos o custo de se investir nos títulos.

$$\max VPL = S_{t_{max}} FD_{t_{max}} - \sum_{m \in M} p_m y_m \tag{3.1}$$

Tabela 3 – Variáveis do modelo proposto de Barbosa (2016)

Símbolo	**Descrição**
S_t	Variável que indica a sobra de recursos não renováveis no tempo t
x_{jt}	Variável binária que indica o término da atividade j no tempo t
y_m	Variável inteira que indica a quantidade de títulos a ser adquirida
E_t	Variável que indica a quantidade de empréstimos no tempo t
A_t	Variável que indica a quantidade financeira amortizada no tempo t
D_t	Variável que indica a dívida no tempo t
K_t	Variável que indica o montante no tempo t

Sujeito ao seguinte conjunto de restrições:

$$\sum_{t=ES_j+d_j-1}^{LF_j} x_{jt} = 1 \qquad \forall j \in J \tag{3.2}$$

$$\sum_{t=ES_j+d_j-1}^{LF_j} x_{jt} - \sum_{t=ES_j+d_j-1}^{LF_j} (t-d_j+1)x_{jt} \leq -1 \qquad \forall j \in J_a, \forall j \in J \tag{3.3}$$

$$\sum_{j}^{J} k_{jr}^{p} \sum_{q=t}^{t+d_j-1} x_{jq} - k_{rt}^{p} \leq 0 \qquad \forall r \in R, \forall t \in T \tag{3.4}$$

$$\sum_{j}^{J_b} V_j x_{jt} - \sum_{j}^{J} k_j^f \sum_{q=t}^{t+d_j-1} x_{jq} - S_t + E_t - K_t = 0 \qquad \forall t \in T : t = 1 \tag{3.5}$$

$$S_t - E_t - K_t + A_t - \sum_{j}^{J_b} V_j x_{jt} - S_{t-1}(1+i_a) + \sum_{j}^{J} k_j^f \sum_{q=t}^{t+d_j-1} x_{jq} = 0 \qquad \forall t \in T : t > 1 \tag{3.6}$$

$$\sum_{m}^{M} c_{mt} y_m = K_t \qquad \forall t \in T \tag{3.7}$$

$$\sum_{m}^{M} p_m y_m \leq I_0 \tag{3.8}$$

$$\sum_{t}^{T} E_t \leq E_{max} \tag{3.9}$$

$$D_1 = E_1 \qquad \forall t \in T : t = 1 \tag{3.10}$$

$$D_{t_{max}} = 0 \qquad \forall t \in T \tag{3.11}$$

$$x_{jt} \in \{0,1\} \qquad \forall j \in J; t \in \{ES[j], LF[j]\} \tag{3.12}$$

$$S_t \geq 0 \qquad \forall t \in T \tag{3.13}$$

$$y_m \in \{N\} \qquad \forall m \in M \tag{3.14}$$

$$E_t \geq 0 \qquad \forall t \in T \tag{3.15}$$

$$A_t \geq 0 \qquad \forall t \in T : t > 1 \tag{3.16}$$

$$D_t \geq 0 \qquad \forall t \in T \tag{3.17}$$

$$K_t \geq 0 \qquad \forall t \in T \tag{3.18}$$

Como descrito por Barbosa (2016), suas equações podem ser explicadas como apresentado nos parágrafos seguintes. A função objetivo do modelo que é representada pela Equação 3.1 é a maximização do VPL que é dado a partir da sobra de recursos do ultimo período trazido para o presente por meio do fator de desconto no tempo t, que seria o período corrente subtraído pelo custo do investimento em títulos. Partindo então para as restrições tem se a Equação 3.2 que garante a execução de todas as atividades no período t. A Equação 3.3 serve para garantir o cumprimento da regra de precedência das atividades j. A Equação 3.4 está relacionada aos recurso, a mesma ajusta a quantidade de recursos disponíveis por período garantido que não seja maior que a quantidade necessária neste período. A Equação 3.5 permite encontrar a sobra de recursos não renováveis S_t no período $t = 1$ por meio da soma dos empréstimos, montante e retorno das atividades remuneradas, já a Equação 3.6 calcula as sobras para os demais períodos sendo a sobra anterior multiplicada pelos juros correntes menos a quantidade amortizada.

A Equação 3.7 determina que a quantidade de investimento deve ser igual ao montante necessário no tempo t. A Equação 3.8 garante que o valor da compra de títulos não ultrapasse o investimento inicial estabelecido dado por I_0. A Equação 3.9 irá garantir que o somatório dos valores de todos os impréstimos feitos em todos os períodos não ultrapasse o limite total de crédito estabelecido inicialmente, E_{max}. Na Equação **??** o valor da dívida D_t será calculado a partir do primeiro período. A Equação **??** garante que o valor pago para quitar a dívida não seja superior ao valor da própria divida. A Equação 3.10 determina que o valor da dívida no primeiro período seja igual ao valor do impréstimo adquirido. A Equação 3.11 garante que a dívida seja completamente paga até o final do projeto. As equações seguintes 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17 e 3.18 descrevem os domínios das variáveis (BARBOSA, 2016).

4 Fundamentação teórica

4.1 Relaxação Lagrangiana

A relaxação lagrangiana é uma técnica que ganhou espaço e vem sendo aprimorada desde a década de 70. Alguns trabalhos foram desenvolvidos naquela época e um trabalho que obteve grande destaque foi o desenvolvido por Fisher (1981). Em seu estudo, o mesmo apresentou o método com maior abrangência e detalhamento o que fez do mesmo um trabalho que é usado como referência para diversos estudos até nos dias atuais. Sendo assim, essa pesquisa se baseará em seu trabalho devido á sua grande representatividade ainda no presente.

No contexto da otimização combinatória, de acordo com Fisher (1981) existem basicamente duas variedades de problemas: os que são considerados “fáceis” de serem resolvidos por apresentarem uma solução em tempo polinomial e os problemas “difíceis” para os quais os algoritmos conhecidos exigem um tempo exponencial para solução. Ao longo dos anos foi possível o desenvolvimento de sistemas cada vez mais robustos para a solução destes problemas mas, ainda assim, muitos problemas de grande porte tem sua resolução dificultada. Para isso desenvolveu-se diversas técnicas para resolução dos mesmos em tempo computacional viável.

Uma das ideias mais disseminadas é que muitos problemas difíceis podem ser compreendidos como um problema fácil complicado por um número relativamente pequeno de restrições. A base para relaxação lagrangiana é um problema de otimização combinatória inteiro no qual devem ser identificadas uma ou mais restrições que mais complicam o modelo e dualizar essas restrições, ou seja, adicioná-las a função objetivo penalizada por um vetor de multiplicadores. Dessa maneira, obtém-se um problema lagrangiano que é mais fácil de ser resolvido entretanto, o valor encontrado é um valor aproximado ao do problema, sendo um limite inferior para problemas de minimização e superior para problemas de maximização (FISHER, 1981).

Ainda assim, baseado neste limite é possível estimar o quão próxima da solução ótima essa solução viável está. Em termos matemáticos suponha a seguinte formulação de um problema de otimização combinatória como utilizado como exemplo por Fisher (1981):

$$Z = \min cx \tag{4.1}$$

$$Ax = b \tag{4.2}$$

$$Dx \leq e \tag{4.3}$$

$$x \geq 0 \tag{4.4}$$

Se considerarmos que $Ax = b$ é a restrição complicante então o método indica que a mesma deverá ser adicionada a função objetivo juntamente a um Multiplicador de Lagrange neste caso chamado de u. Dessa forma obtêm-se o seguinte problema que é conhecido como Relaxação Lagrangiana de (Z) onde a condição é satisfeita para todo $u \in R^m_+$.

$$Z_D(u) = \min cx + u(Ax - b) \tag{4.5}$$

$$Dx \leq e \tag{4.6}$$

$$x \geq 0 \tag{4.7}$$

Multiplicadores de Lagrange são termos adicionados a funções quando se tem o objetivo de encontrar máximos e mínimos de funções. Tais multiplicadores funcionarão como pontos estacionários, ou seja, pontos onde as derivadas são nulas. Se $Z_D(u) = \min cx + u(Ax - b)$ pode-se afirmar que $Z_D(u) \geq Z$ induzindo a um limite superior $Z_D(u) \geq Z^*$ sendo Z^* a solução ótima do problema primal.

Por conveniência assume-se que Z é viável, então existe um conjunto factível e finito de soluções para $Z_D(u)$. O objetivo principal do método é encontrar o melhor limite inferior para o problema dual lagrangiano gerado e por melhor, em um problema de minimização, entende-se o maior valor. Sendo $Z_D(u)$ um limite superior de Z^* consequentemente o objetivo passa a ser minimizá-lo (FISHER, 1981). Para tal é necessário resolver problema dual lagrangiano cuja formulação é:

$$\max DL = Z_D(u) \tag{4.8}$$

$$sendo,\ u \geq 0 \tag{4.9}$$

ou

$$\max_{u \in R_+^m} \min_{x \in S} DL = Z_D(u) \tag{4.10}$$

Em sua pesquisa, com base nas duas possíveis relaxações feitas em um problema de atribuição generalizada, Fisher (1981) levanta alguns questionamentos como: é possível encontrar um valor para o Multiplicador de Lagrange de forma que a solução viável seja igual ou quase igual a solução ótima ou como utilizar o Problema de Lagrange para obter solução viável para o problema original, questões estas que são respondidas no decorrer do artigo.

Fazendo uso da Teoria da Dualidade, sabe-se que se existe solução para o primal também existe uma solução para o problema dual. Seguindo essa linha de raciocínio, podemos enxergar os Multiplicadores de Lagrange como variáveis duais. Sendo assim, a solução ótima para o primal será encontrada quando encontramos uma solução para o problema lagrangiano.

A maioria dos problemas lagrangianos tem propriedades importantes que tornam a solução viável, e comumente esse conjunto de soluções viáveis é finito. Sobre a escolha das restrições para dualizar deve ser considerar a facilidade de resolução do problema lagrangiano resultante. Após encontrar o problema dual. Após a remoção das desigualdades complicantes é necessário resolver um outro problema. É necessário encontrar um conjunto de multiplicadores lagrangianos u que maximize $Z_D(u)$.

Existem diferentes métodos para geração dos limites de forma a auxiliar na busca por uma solução próxima da ótima. Quando ocorre a associação destes métodos com uma heurística específica mais a Relaxação Lagrangiana têm-se uma Heurística Lagrangiana.

4.2 Método Subgradiente

O método subgradiente é o mais utilizado para solucionar o dual lagrangiano, o mesmo consiste na utilização dos subgradientes para atualizar o conjunto de multiplicadores de forma a conseguir novos limitantes. Basicamente o algoritmo procura um ponto em que o valor é o mais próximo da solução ótima do problema primal e para isso é necessário andar em uma direção gradiente, ou seja, no sentido em que se obtém o maior incremento possível e onde provavelmente se encontra a melhor solução para o problema. Esse processo se repete até que os limitantes inferiores e superiores sejam iguais ou próximos ao resultado do problema primal, atingindo um *gap* de dualidade (BEASLEY, 1993).

A convergência prática do método subgradiente é imprevisível. Para alguns problemas, a convergência é rápida e bastante confiável, enquanto em outros problemas pode apresentar um comportamento instável. Em um caso "bom", geralmente se observa uma curva dente de serra padrão para o valor do lagrangiano para as primeiras iterações e em seguida apresenta uma melhoria, aproximando do valor que pode ser o ótimo limite lagrangiano. Nos casos "ruins", o dente de serra continua, ou, pior, o valor lagrangiano continua se deteriorando. Muitos autores estudaram esse problema e apresentaram trabalhos dedicados a melhorar o comportamento do algoritmo por meio de cálculos aprimorados do tamanho do passo de subgradiente (GUIGNARD, 2003).

Afim de ilustrar matematicamente a função que descreve o multiplicador de lagrange u na $(k+1)$- ésima iteração é:

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \mu^k gu_i^k(x^k) \qquad \forall i \in V \tag{4.11}$$

Onde μ^krepresenta o tamanho do passo a ser dado e $gu_i^k(x^k)$ é o vetor subgradiente de $Z_D(u)$. Esse vetor subgradiente é encontrado a partir da função:

$$gu_i^k(x^k) = Ax - b \tag{4.12}$$

e o tamanho do passo é definido por:

$$\mu^k = \pi \left[\frac{Z_{UB} - Z_D(u_k)}{||gu_i^k||^2} \right] \tag{4.13}$$

O algoritmo é construído com base nestas funções e ao final da execução obtêm-se uma solução ótima para o problema dual que se aproxima da solução ótima do problema primal. A seguir é apresentado um pseudocódigo para este algoritmo, representado na Figura 2 .

Figura 2 – Pseudocódigo Métudo Subgradiente

Algoritmo 1: Subgradiente

1: $u = u^0$

2: $k = 1$

3: $\mu_k = 2$

4: **Enquanto** $UB > LB$ **faça** {Resolver $Z_D(u)$}

5: $u^{k+1} = \max\{u^k - \mu_k \left(Ax - b(u^k)\right), 0\}$

6: $k \leftarrow k + 1$

7: $u \leftarrow u^{k+1}$

8: $\mu_k \leftarrow \mu_k \frac{UB - LB}{||g(u^k)||^2}$

9: **Fim do enquanto**

10: Retorna a solução

Fonte – Elaborada pelo autor

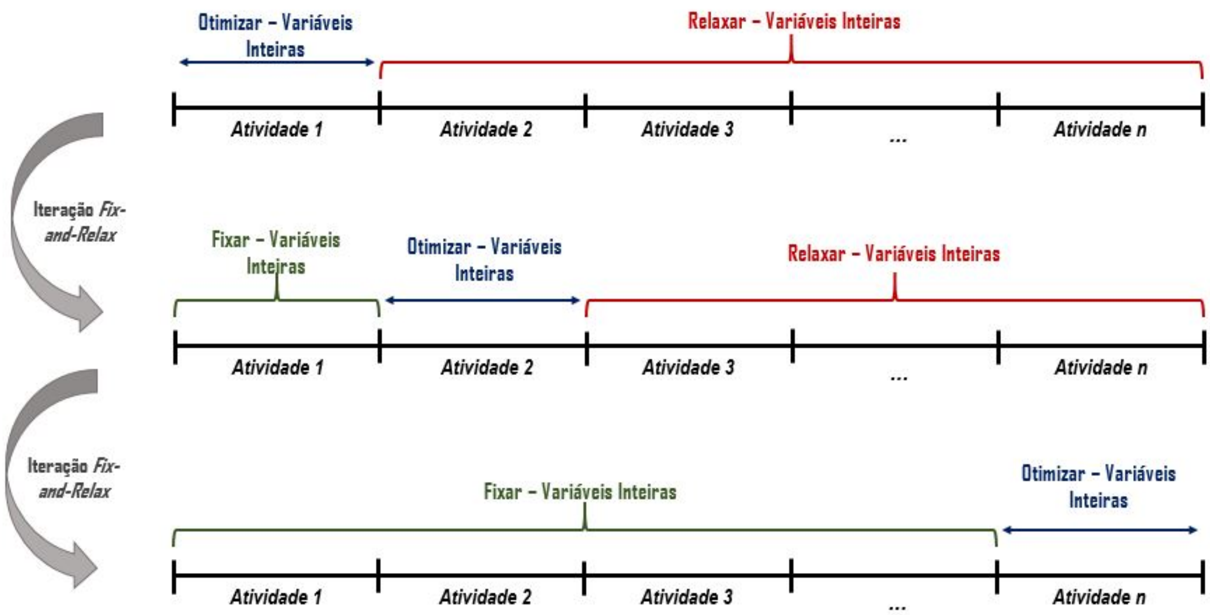
Os três primeiros passos descritos na Figura 2 são inicialização do multiplicador de lagrange, vetor de iterações e tamanho do passo respectivamente. No passo 4 dá-se inicio ao laço que será executado enquanto o *upper bound* for maior que o *lower bound*, dessa forma o problema $Z_D(u)$ é resolvido e assim, no passo 5 o multiplicador de lagrange é atualizado sendo $(Ax - b(u^k))$o vetor de direção do subgradiente, passo 6 atualiza o contador das iterações além de atualizar o multiplicador no passo 7. Em seguida, no passo 8 o tamanho do passo é atualizado. O fim do laço pode ocorrer quando o *upper bound* for menor ou igual ao *lower bound* ou então caso critérios de convergência tenham sido estabelecidos para o tamanho do passo, norma do vetor gradiente ou o número máximo de iterações, ao fim do laço o modelo retorna uma solução como mencionado no passo 10.

4.3 Heurística *Fix-and-Relax*

A heurística *Fix-and-Relax* vem sendo aplicada com sucesso em modelos de planejamento e sequenciamento de atividades a um tempo e tem recebido interesse considerável por parte dos pesquisadores na área da pesquisa operacional. Especialmente em problemas do tipo NP-difícil, a heurística é uma boa opção em termos de processamento, possibilitando uma execução mais rápida e obtendo resultados iguais ou muito próximos da solução ótima.

É possível encontrar na literatura diversas aplicações da heurística, a primeira aparição sendo feita por Dillenberger et al. (1994) fornecendo soluções promissoras para problemas complexos em ambientes determinísticos. A aplicação da heurística pode ser dividida em planejamento de produção, dimensionamento de lote, programação, planejamento de estoques e cadeia de suprimento gestão. A principal ideia por trás da heurística é que problemas NP-difícil sejam divididos em um conjunto menor de problemas que serão iterativamente solucionados até que todo o conjunto esteja resolvido. Na Figura 3 é apresentado um fluxo para decomposição temporal adaptado do trabalho de Turhan e Bilgen (2017).

Figura 3 – Fluxo de decomposição temporal *Fix-and-Relax*



Fonte – Adaptado de Turhan e Bilgen (2017)

Basicamente o horizonte de planejamento ou sequenciamento é dividido em n intervalos. No primeiro passo as variáveis de decisão do intervalo 1 estão em uma espécie de janela de otimização enquanto as variáveis nos intervalos 2 a n são relaxadas. Assim que a otimização é concluída a janela de otimização passa para o próximo intervalo. Na segunda fase do algoritmo as variáveis do intervalo 1, que já foram otimizadas, tem seus valores fixados e inicia-se o processo de otimização do intervalo 2. Da mesma forma, os intervalos subsequentes são relaxados ocorrendo então interações até que os valores das variáveis sejam otimizados. Essa sequência se repete para todos os intervalos até chegar na última janela de otimização, intervalo n. A etapa final do algoritmo é a fixação de todas as variáveis dos intervalos $\{1...(n-1)\}$ e a otimização do intervalo n. Após essa última otimização tem-se uma solução para ser apresentada (TURHAN; BILGEN, 2017).

Outra forma de se compreender a lógica *Fix-and-Relax* é por meio do pseudocódigo geral apresentado na Figura 4, uma adptação dos trabalhos de Turhan e Bilgen (2017) e Furlan (2011).

Figura 4 – Pseudocódigo Heurística *Fix-and-Relax*

Algoritmo 2: *Fix - and - Relax*

1: $Q^n, r = 1 \ldots R$
2: $Sol \leftarrow \emptyset$
3: $r = 0$
4 : **Enquanto** $r < R$ and MIP^R é $factível$ **faça**
5: $r = r + 1$
6: Integraliza as variáveis dos subproblema Q^r
7: Resolve MIP^r
8: Fixa $Q^1 \cup \ldots \cup Q^r$ em Sol
9: $Sol_{inicial} \leftarrow Sol$
10: **Fim**
11: Resolve MIP^R
12: Retorna a solução

Fonte – Adaptado de Turhan e Bilgen (2017) e Furlan (2011)

Nesse pseudocódigo o problema original é dividido em subproblemas menores representados por Q^r, a solução incumbente é inicializada como vazia no passo 2 e no seguinte o contador para os subproblemas é inicializado também. Um laço é criado e será executado até que todos os subproblemas, representados por Q^r, tenham sido resolvidos. A condição de parada do *loop* é quando o final da janela de otimização for maior que o fim do horizonte de planejamento/sequenciamento. Dentro do laço as variáveis do subproblema Q^r são integralizadas e MIP^r é solucionado/otimizado enquanto os subproblemas seguintes são fixados, ao final a solução inicial é atualizado com o valor da solução incumbente. Por fim, o ultimo subproblema é resolvido fora do laço e após sua execução um solução pode ser retornada.

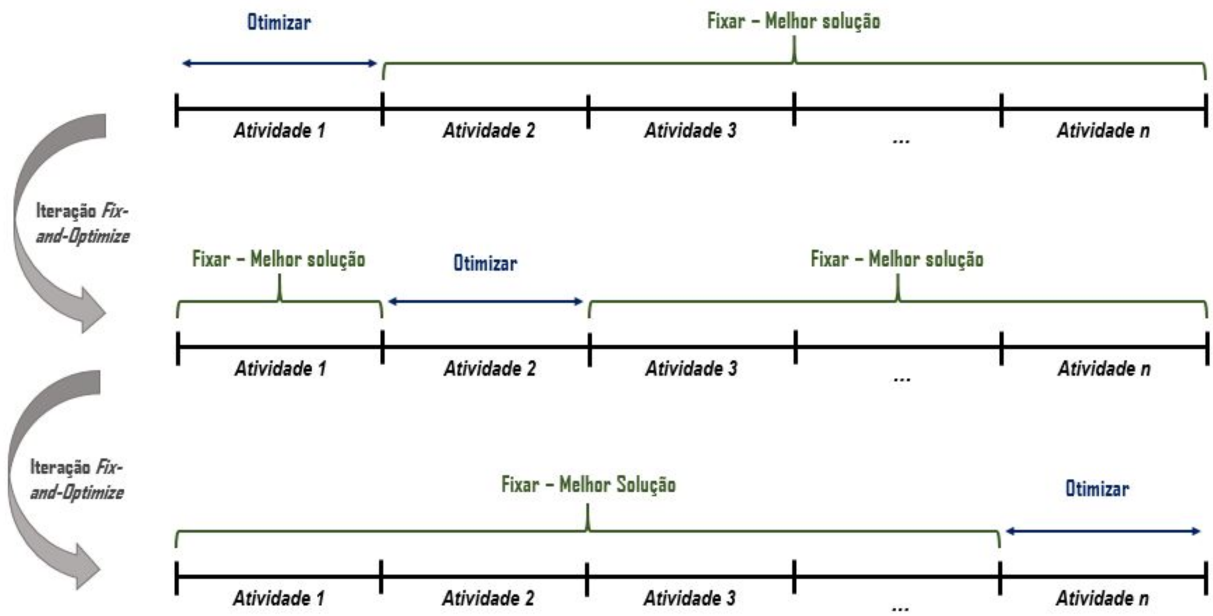
4.4 Heurística *Fix-and-Optimize*

A Heurística *Fix-and-Optimize* - F&O é uma forma muito similar a F&R de resolver problemas de otimização inteira mista e ao longo dos anos, como afirma Turhan e Bilgen (2017), a heurística também esteve sob o foco de muitas pesquisas voltadas para programação da produção. Muitas pesquisas foram desenvolvidas utilizando a mesma em contextos com o objetivo de aprimorar a qualidade das soluções e também da pesquisa operacional.

De forma análoga à Heurística F&R o problema é decomposto em subproblemas menores, no entanto F&O requer uma solução inicial para execução do algoritmo, e essa solução inicial é utilizada como comparação para a nova solução para que a mesma seja aceita ou rejeitada. Assim, a solução inicial é recebida como uma entrada do algoritmo e então começa a verificação dos novos valores para função objetivo recebidos da otimização. Qualquer que seja o resultado que apresente um valor melhor para a função objetivo é aceito como uma nova solução para o subproblema correspondente (TURHAN; BILGEN, 2017).

Assim como na heurística anterior, um fluxo do algoritmo possibilitaria um melhor entendimento de sua execução, então o fluxo é representado na Figura 5. O horizonte de planejamento é divido em *n* intervalos e enquanto o fim da janela de otimização é menor do que o horizonte de planejamento o algoritmo é executa todos os passos. O primeiro passo é otimizar o primeiro intervalo e fixar os intervalos subsequentes - de 2 a *n* no melhor resultado conhecido. O valor da função objetivo obtido como resultado da otimização no passo 1 é avaliado e pode ser aceito ou rejeitado com base na solução inicial. No segundo passo o intervalo 1 que já foi otimizado é fixado e o intervalo 2 é otimizado, sendo os subsequentes também fixados. Essas iterações ocorrem até que o ultimo intervalo seja otimizado e no ultimo passo enquanto *n* é otimizado o restante das variáveis de decisão são definidas para seus valores inteiros (TURHAN; BILGEN, 2017).

Figura 5 – Fluxo de decomposição temporal *Fix-and-Optimize*



Fonte – Adaptado de Turhan e Bilgen (2017)

Outra forma de compreender a heurística seria por meio de um pseudocódigo que é representado pela Figura 6.

Figura 6 – Pseudocódigo Heurística *Fix-and-Optimize*

Algoritmo 3: *Fix – and – Optimize*

Entrada: Solução Viável - Sol_{ini}
$Q^r, r = 1 \ldots R$
$Sol_{best} \leftarrow Sol_{ini}$
$r = 0$
Enquanto $r < R$ and MIP^R é $factível$ **faça**
    $r = r + 1$
    Integraliza as variáveis dos subproblema Q^r
    Resolve MIP^r
    if $Sol_{subproblema}$ melhor que Sol_{best}
        $Sol_{best} \leftarrow Sol_{subproblema}$
    else
        Descarta Solução
Fim do enquanto
Resolve MIP^R
if $Sol_{subproblema}$ melhor que Sol_{best}
        $Sol_{best} \leftarrow Sol_{subproblema}$
    else
        Descarta Solução
Retorna solução

Fonte – Elaborada pelo autor

O algoritmo começa com entrada de uma solução viável, como descrito acima o mesmo necessita dessa entrada. Posteriormente parte-se inicialização do conjunto de subproblemas Q^r, alocação da solução inicial como até então a melhor solução e inicialização do contador para os subproblemas. Neste momento o laço é iniciado e será executado para todos os subproblemas factíveis. Dentro do laço o MIP^r é resolvido e as variáveis do subproblema Q^r são integralizadas da mesma forma que na heurística *Fix - and - Relax*. O passo seguinte é o teste da solução gerada pelo subproblema, caso a mesma seja melhor que a dita melhor anteriormente há uma atualização e caso contrário a solução do subproblema corrente é descartada. O ultimo subproblema também é resolvido fora do laço repetindo o teste para a solução gerada pelo mesmo e ao final uma solução é retornada.

4.5 Exemplos de aplicações

É possível encontrar na literatura alguns trabalhos em que a relaxação lagrangiana também foi aplicada em algoritmos complexos de forma a melhorar a busca pela solução ótima. Sridharan (1993) desenvolveu um trabalho no qual a heurística lagrangiana foi aplicada em um problema de localização de planta capacitada com restrições de fonte única no qual é também apresentado como heurística pode ser usada para resolver outros problemas combinatórios relacionados.

Já na pesquisa realizada por Wolosewicz, Dauzère-Pérès e Aggoune (2015) é apresentada uma abordagem para solução de um problema de planejamento e programação da produção. Devido a complexidade esses problemas são comumente tratados sequencialmente porém a integração entre planejamento e programação é importante para gerenciamento eficiente das operações, dessa forma a heurística é aplicada a formulação proposta de forma a encontrar o limite superior e inferior.

Mais um exemplo é a heurística lagrangiana baseada em ramo e limite para um problema de *design* de rede apresentado por Holmberg e Yuan (2000). O problema de projeto de rede é conhecido por ser NP-difícil, e nesse contexto uma heurística lagrangiana foi aplicada para obtenção de subproblemas mais fácil de serem resolvidos.

Por fim, vale citar o trabalho desenvolvido por Cacchiani, Caprara e Toth (2013) que trata da aplicação da relaxação lagrangiana em um problema de atribuição de unidade de trem. Mais uma vez tem-se um problema NP-difícil em que a heurística é baseada no relaxamento Lagrangiano de uma formulação natural do problema, cuja solução pode ser encontrada resolvendo uma sequência de problemas de atribuição. Em comparação ao método original a nova heurística acabou sendo mais rápida e ainda ofereceu uma solução de boa qualidade.

Em seu trabalho, Turhan e Bilgen (2017) apresentou um abordagem diferenciada das heurísticas citadas previamente, o mesmo desenvolveu uma construção onde as duas são aplicadas no mesmo modelo de alocação e sequenciamento de pacientes em clínicas. De forma simplificada o que ocorre é que após a execução da Heurística F&R para uma parte do problema o restante é solucionado por meio da F&O.

5 Problema proposto

5.1 Descrição do modelo

No mundo dos negócios ou em qualquer empreendimento existem fatores que precisam ser ponderados para que decisões assertivas sejam tomadas. Dentre os mesmos uma questão de suma importância é a viabilidade do projeto ou investimento, um estudo que mune os tomadores de decisão com informações baseadas em diversos critérios que, ao serem combinados, permitem que decisões sejam tomadas com total clareza.

No entanto, é importante considerar que as decisões de financiamento e investimento são distintas. Existe um conceito em finanças chamado Teorema da Separação no qual afirma-se-à que "o sucesso ou insucesso do projeto deve ser determinado considerando unicamente seu próprio potencial de geração de renda econômica, independentemente do modo como será financiado." (SAMANEZ, 2009, p. 96). Dessa forma, os conceitos de Viabilidade Econômica e Viabilidade Financeira devem ser compreendidos de forma separada pois tratam de análises distintas.

Viabilidade econômica é a análise do custo benefício de um empreendimento garantindo que os projetos escolhidos sejam rentáveis, considerando até mesmo o custo de oportunidade. Assim, identifica a capacidade de produção de receita desconsiderando as transações financeiras que podem ocorrer durante o projeto (ROSÁRIO, 2014). Por outro lado, o estudo da viabilidade financeira está relacionado a estimativa do custo total para execução do projeto. Como afirma Eick et al. (2010), se a decisão de investir ou não se basear nos recursos, ou seja, na disponibilidade dos mesmos e com objetivo de obter um equilíbrio entre entradas e saídas incorporando o fluxo de caixa, trata-se de viabilidade financeira.

O estudo de viabilidade econômica e financeira identifica os benefícios esperados em determinados investimentos a fim de tomar conhecimento da viabilidade de sua implementação. Então, um projeto é viável econômica e financeiramente quando o fluxo de caixa é positivo além do investidor receber um retorno do capital superior ao despendido.

Segundo Hirschfeld (2000) uma forma convencional de análise de viabilidade financeira é utilizar o método do valor presente líquido, ou seja, verificar se o $VPL > 0$. Neste sentido podemos enxergar o modelo proposto por Barbosa (2016) como uma alternativa para essa análise de viabilidade já que o mesmo propõem determinar uma forma ótima de selecionar investimentos que possam viabilizar os projetos buscando sempre a maximização do VPL.

De forma a ilustrar a utilidade do modelo, imagina-se um projeto de construção de um edifício, tendo o empreendedor a frente do projeto algumas opções para viabilizar o mesmo. No primeiro caso, os apartamentos podem ser vendidos ainda na planta e por um valor menor, isso possibilita que o empreendedor tenha o capital necessário para iniciar a construção. O segundo caso considera que o responsável tenha parte do capital necessário podendo iniciar as obras e, no momento em que os apartamentos estiverem semiacabados os mesmos sejam vendidos por um valor já maior que o do primeiro caso, porém ainda inferior ao atribuído apartamentos finalizados. Essa situação ainda permite a escolha de vender apenas alguns e viabilizar a finalização do restante ou vender todos semiacabados. O último caso é quando se tem o capital necessário para concluir todos os apartamentos permitindo que os mesmos possam ser vendidos por valores que maximizem o lucro.

Essas variações e combinações entre os casos acima podem ser inseridas no modelo por meio de parâmetros e o mesmo retornará a opção que maximiza o VPL baseada nas necessidade do projeto em termos de viabilização. Demostrada sua aplicabilidade, fica claro que o modelo é relevante para o contexto de tomada de decisão necessitando apenas facilitar sua utilização. Nesse sentido serão apresentadas a seguir a Relaxação Lagrangiana, o que busca melhorar seu tempo para busca da solução ótima, bem como a heurística de viabilização utilizada.

5.2 Aplicação da Relaxação Lagrangiana

Analisando os estudos feitos por Barbosa (2016) e os testes realizados em seu modelo, pode-se perceber que a restrição 3.4 é a que complica o modelo e, portanto a dualização da mesma melhoraria o tempo de solução. Retomando o trabalho de Fisher (1981) inicia-se a Relaxação Lagrangiana no modelo por meio da dualização do mesmo a partir da restrição (3.4). Dessa forma, a função objetivo passa a ser dada pela seguinte equação:

$$Z_{RL}(u) = \max S_{t_{max}} FD_{t_{max}} - \sum_{m \in M} p_m y_m + \sum_{t \in T} \sum_{r \in R} u_{tr} [k^p_{rt} - (\sum_{j}^{J} k^p_{jr} \sum_{q=t}^{t+d_j-1} x_{jq})] \tag{5.1}$$

Sujeito ao conjunto de restrições de 3.2 a 3.18, com exceção da restrição 3.4 que foi incorporada à função objetivo por ser a restrição que complica o modelo.

Para qualquer conjunto de Multiplicadores de Lagrange u_{tr} a relaxação vai oferecer uma solução $Z_{RL}(u)$ que será sempre um valor aproximado da solução ótima do problema original. O problema Dual Lagrangiano, ou seja, o problema que busca encontrar o conjunto de multiplicadores que irá maximizar a solução do problema Lagrangiano pode ser representado da seguinte forma:

$$Z_{LD}(u) \ = \ \min_{u \geq 0} Z_{RL}(u) \tag{5.2}$$

Após tais modificações serem realizadas, o modelo foi novamente implementado com as devidas alterações e aplicando o método do subgradiente comumente utilizado para solução de problemas Dual Lagrangiano. Então, por se tratar de uma problema de maximização o modelo atuou de forma a encontrar o limite superior que mais se aproximasse da solução ótima do problema original, essa aproximação ocorre à medida em que são dados passos em uma direção gradiente. Para uma convergência mais rápida optou-se por limitar o parâmetro "step"para que quando os mesmo atingisse valores irrisórios o modelo parasse de executar. Outro critério de parada e o mais importante é interromper as iterações quando o limitante estiver o mais próximo possível ou igual a solução do primal.

A solução para o problema dual é dada pela ultima atualização do *lower bound*, e este valor será então comparado a solução obtida pelo modelo original e a sua forma relaxada linearmente. Como já descrito ao dualizar a restrição complicante as soluções geradas podem não ser viáveis, assim se faz necessário a implementação de uma heurística para garantir que o que determinava a restrição "removida"ainda esteja ocorrendo no modelo, fazendo do mesmo viável.

5.3 Heurística de Viabilização

5.3.1 Heurística *Fix - and - Relax*

Para viabilização do resultado obtido com a Relaxação Lagrangiana fez o uso da Heurística *Fix - and - Relax*. Isso porque ao dualizar o problema primal retirando a restrição 3.5 não estamos mais garantido que a quantidade de recursos disponíveis em cada período de tempo não seja maior que o necessário para a realização das atividades o que pode fazer com que as soluções encontradas somente com a RL não sejam viáveis. Como descrito na Fundamentação Teórica essa heurística se baseia na divisão do problema em subproblemas mais simples de serem resolvidos por meio de iterações até que todos estejam solucionados.

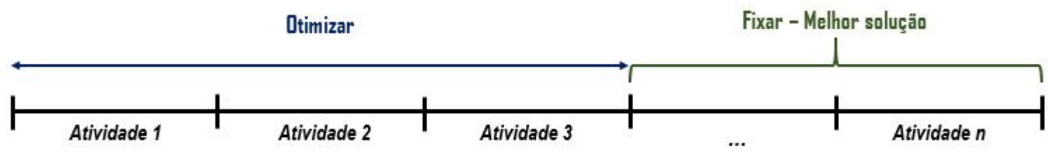
Dessa forma, durante a implementação da heurística que visa tornar todos os resultados obtidos viáveis, optou-se por trabalhar a variável x_{jt}, variável binária que representa se a atividade foi ou não executada em determinado período, isso porque, ao dualizar o problema não se tem mais a garantia de que os recursos necessários para execução de determinada atividade estarão disponíveis e, portanto, a ordem de execução das atividades pode ter sido desarranjada.

Para implementação da heurística trabalhou-se com o conjunto de atividades as quais foram divididas em subconjuntos menores que aos poucos eram sendo otimizados tal como descrito pela Figura 3. As iterações se sucederam até que o último subproblema fosse otimizado e uma solução ótima fosse retornada. Ocorre que os resultados obtidos por meio dessa heurística não foram satisfatórios. Os testes realizados utilizando as mesmas instâncias de Barbosa (2016) mostraram que a heurística sugerida não fornecia uma confiabilidade, ou seja, ela possuía uma garantia de que uma solução seria encontrada. Isso porque para as duas últimas instâncias testadas nenhuma solução foi retornada, mesmo alterando parâmetros como limite de iterações e tempo máximo de execução. A alternativa encontrada foi partir então para implementação de outra heurística capaz de trazer essa confiabilidade, sendo assim foi implementada a heurística *Fix-and-Optimize*.

5.3.2 Heurística *Fix-and-Optimize*

Como descrito na seção 4.4 a heurística F&O precisa de uma solução inicial para ser executada, sendo assim a mesma pode então solucionar o problema de garantia de retorno de uma solução e portanto, optou-se para implementação da mesma. Entretanto, foi necessária uma adaptação que funciona da seguinte forma: ao invés de fixar os intervalos anteriores ao que está sendo otimizado, ou seja, os intervalos que já foram otimizados, os mesmos continuam fazendo parte da janela de otimização. Isso para que não haja a possibilidade de que uma solução possivelmente melhor seja perdida. Tal adaptação pode ser melhor compreendida observando a Figura 7.

Figura 7 – Iteração do Fluxo de decomposição temporal *Fix-and-Optimize* Adaptado



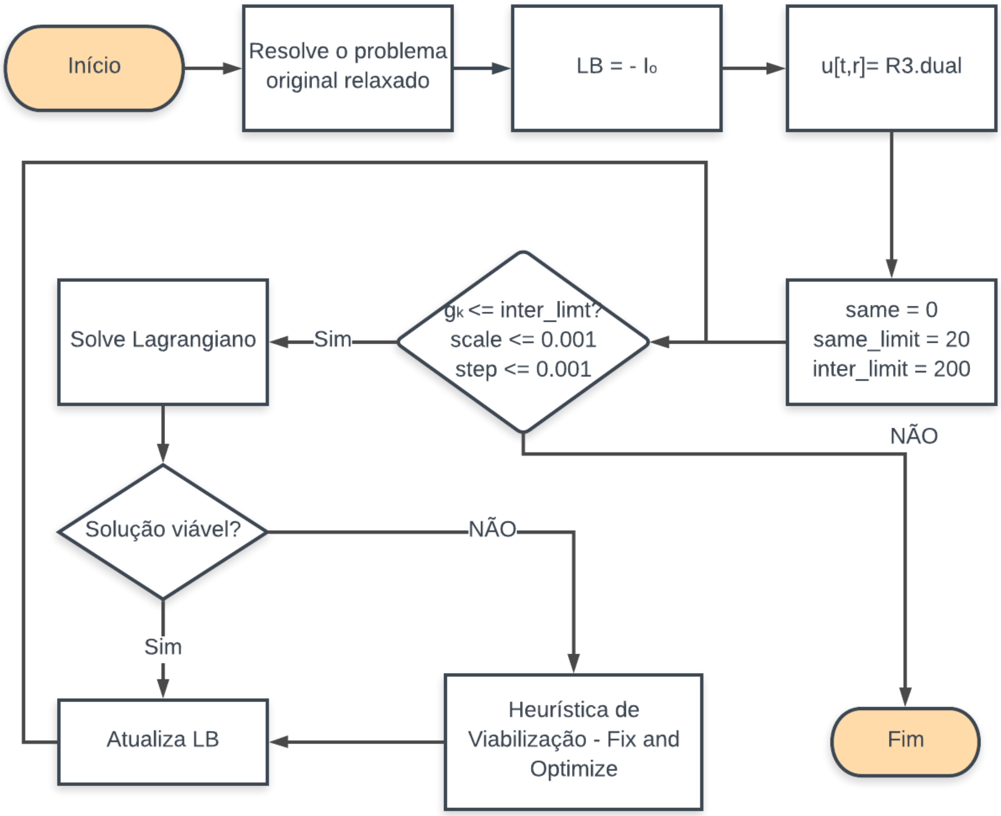
Fonte – Elaborada pelo autor.

Para evidenciar o que foi construído são apresentados dois fluxogramas que representam o passo a passo da execução do modelo. O primeiro deles, Figura 8, mostra os passos dados até que o mesmo seja executado por completo porém, não aprofundando em como se deu a execução da heurística. Já a Figura 9 mostra de forma mais clara como a Heurística *Fix - and - Optimize* foi incorporada ao modelo de maneira a retornar resultados sempre viáveis.

Percebe-se então que primeiramente resolve-se o problema com a Relaxação Linear e com base no resultado obtido o UB é atualizado sendo que no passo seguinte o LB irá ser atualizado com o pior caso possível para solução que, de acordo com a interpretação feita, é dado pelo negativo de I_0 , investimento inicial. Em seguida é definido o multiplicador de lagrange u relativo a restrição do problema dual e então alguns parâmetros são definidos com o número de iterações sem atualizar o UB, limite de iterações sem atualização e o limite máximo de iterações que podem ser executados.

É criado então um *loop* para a resolução da Relaxação Lagrangiana onde é testada a viabilidade da solução, sendo viável atualiza o *lower bound* e, caso contrário, a Heurística *Fix - and - Relax* é executada. O *loop* é interrompido quando a iteração seguinte for maior que o número máximo de iterações definido ou se os parâmetros "scale"e "step"forem menores que $0,001$.

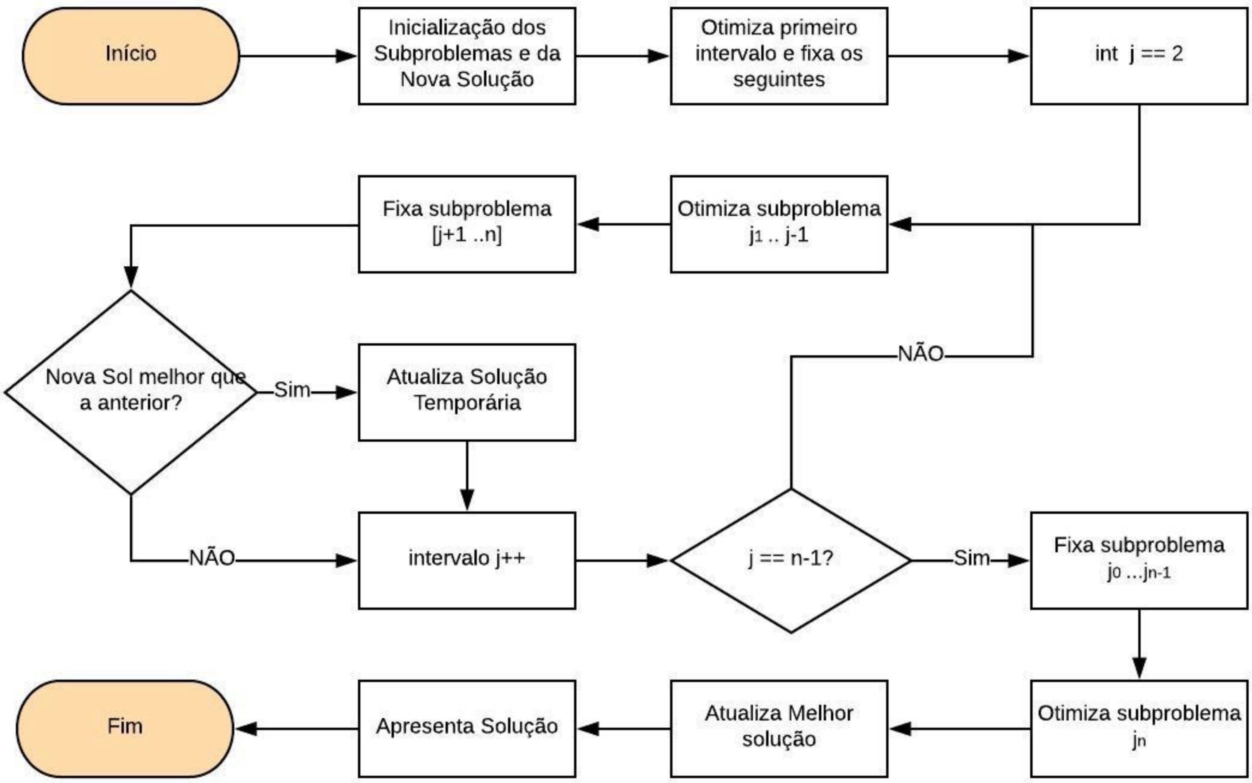
Figura 8 – Fluxograma do Modelo Matemático Implementado.



Fonte – Elaborado pelo autor.

A Figura 9 descreve a execução da heurística, a mesma começa a ser executada quando uma inviabilidade é encontrada, sendo assim, primeiramente é definido o horizonte de otimização dado por $j \in J$ e $t \in T$, ou seja, para todas as atividades e todos os períodos. Em seguida, o primeiro intervalo ou subproblema é otimizado e os subsequentes são fixados, posteriormente inicia-se a otimização de intervalo por intervalo. A adaptação feita implica que a janela de otimização é incrementada pelos subproblemas que já foram otimizados, ou seja ela tende a aumentar seu tamanho englobando os intervalos anteriores além do intervalo corrente. Então, enquanto um intervalo é otimizado, os subsequentes são fixados em seus melhores valores. Esse processo se dá em um *loop* até que o último intervalo seja otimizado e então uma solução é apresentada e o *lower bound* pode ser atualizado.

Figura 9 – Fluxograma da Heurística *Fix-and-Optimize*.



Fonte – Elaborado pelo autor.

Com a implementação dessa nova heurística foi possível encontrar resultados para todas as instancias propostas por Barbosa (2016) que serão apresentados no Capítulo 6.

6 Apresentação dos Resultados

Dando continuidade a construção do presente trabalho, o que segue a modelagem do problema e sua implementação é a realização de testes para validação. Dessa forma, primeiramente executou-se o modelo apenas com a RL pelo método subgradiente e posteriormente a implementação da heurística de viabilização *Fix - and - Optimize*. Com já descrito, o objetivo da presente pesquisa é estabelecer uma comparação entre os resultados obtidos anteriormente por Barbosa (2016) e os resultados dos métodos propostos, sendo assim, para os testes foi utilizado o mesmo conjunto de dados do trabalho anterior sendo eles quatro instâncias distintas cuja a primeira de menor tamanho e as seguintes com crescimento progressivo. O que difere uma instancia da outra são: a quantidade de elementos dos conjuntos de atividades, quantidade de períodos, quantidade de títulos e a quantidade de recursos.

Para garantir a confiabilidade e possibilitar uma comparação justa o modelo original e o modelo com a Relaxação Linear foram executados novamente na mesma máquina que os testes que compõem este trabalho seriam executados. Trata-se de um computador com processador Intel(R) Core(TM) i7-7500U com velocidade CPU de 2.90GHz, memória RAM de 7,88 GB e 1TB de HD com sistema operacional Windows 10 Home versão 1803.

Assim, todos os modelos e métodos de solução foram implementados na linguagem AMPL *(A Mathematical Programming Language)* sendo a mesma a mais comum para modelos de otimização, a interface utilização foi a ferramenta bloco de notas do Windows, onde posteriormente os resultados também foram apresentados. No que diz respeito ao software de otimização, foi utilizado o CPLEX na versão 12.8.0.0, sendo a mais atual.

O modelo foi então executado instância por instância, obtendo resultados para o problema original, o problema com a Relaxação Linear, Relaxação Lagrangiana e por fim para as duas heurísticas. Considerando a Relaxação Langrangiana e *Fix - and - Optimize* foi estabelecido o limite máximo de 200 iterações porém, na maioria dos casos não foi necessário o uso de todas devido as limitações impostas também para os parâmetros "scale"e "step"fazendo com que a execução fosse interrompida caso um deles, ou ambos, assumissem valores inferiores a $0,001$. Alguns valores de parâmetros são apresentados na Tabela 4

Tabela 4 – Tabela com valores dos parâmetros

Problema	**Step**	**Scale**	**Limite de Iterações**
Relaxação Lagrangiana	>0,001	1	200
Heurística F&O	>0,001	2	200

Fonte – Elaborada pelo autor

Para facilitar as análises e comparações os resultados serão apresentados nas tabelas a seguir onde os tempos e os valores para a solução ótima são apresentados separadamente. A

Tabela 5 apresenta as soluções obtidas para os testes com o Modelo Original, a Relaxação Linear e a Relaxação Lagrangiana primeiramente.

Tabela 5 – Tabela comparativa entre as soluções obtidas

Instância	**Modelo Original**	**Relaxação Linear**	**Relaxação Lagrangiana**
1	-105.19	-89.45	-102.87
2	114.75	211.66	116.36
3	487.74	744.21	498.50
4	932.22	1339.64	933.23

Fonte – Elaborada pelo autor

Através da Tabela 5 pode-se observar que a Relaxação Lagrangiana apresentou resultados melhores que o Modelo Original porém inferiores a Relaxação Linear. No entanto o resultado obtido está dentro do esperado, o que realmente precisa ser observado são os resultados e ganhos obtidos em relação ao tempo de processamento. Tais resultados são apresentados na Tabela 6

Tabela 6 – Tabela comparativa entre os tempos para busca de solução em segundos

Instância	**Modelo Original**	**Relaxação Linear**	**Relaxação Lagrangiana**
1	0.109	0.031	1.58
2	0.109	0.078	6.51
3	37.43	0.734	42.11
4	322.78	3.203	127.39

Fonte – Elaborada pelo autor

Ao comparar estes resultados, pode-se perceber que houve a redução dos mesmo com o uso da Relaxação Lagrangiana, tal qual era esperado. Sendo assim, parte do que foi proposto inicialmente foi cumprido no entanto, é importante viabilizar as soluções obtidas, o que foi feito adaptando uma Heurística F&O. Os resultados alcançados são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 – Tabela comparativa entre resultados obtidos pelo Modelo Original e Heurística F&O.

Instância	**VPL - M. Original**	**VPL - Heurística**	**Tempo - M. Original**	**Tempo - Heurística**
1	-105.19	-105.19	0.109	1.502
2	114.75	114.75	0.109	1.468
3	487.74	487.74	37.43	45.707
4	932.22	932.22	322.78	216.95

Fonte – Elaborada pelo autor

Percebe-se que a solução encontrada pela heurística é a própria solução ótima obtida por meio do problema original o que demonstra que a aplicação da mesma foi bem sucedida. Em relação aos tempos para retorno de uma solução pode-se afirma que houve um ganho considerável e que possivelmente à medida em que o problema cresce em termos de complexidade dos seus dados de entrada a redução do tempo em relação ao método exato tende a ficar mais expressiva.

Como já mencionado na grande maioria dos casos não foram necessárias as 200 iterações para que o modelo encontrasse uma solução, à critério de ilustração a Tabela 8 mostra quantas iterações foram executadas para cada instancia e em cada modelo.

Tabela 8 – Tabela ilustrativa para quantidade de iterações

Instância	**Relaxação Lagrangiana**	**Heurística F&O**
1	29	17
2	68	11
3	21	9
4	17	3

Fonte – Elaborada pelo autor

Fica evidente que a Heurística F&O encontra a solução ótima utilizando um número consideravelmente menor de iterações se comparada a quantidade despendida pela Relaxação Lagrangiana.

7 Conclusão

Ao analisar o trabalho desenvolvido por Barbosa (2016) foi observado que à medida que as instâncias cresciam e se tornavam mais complexas, a busca por solução tendia a despender mais tempo e dessa forma fazer com que o modelo fosse pouco aplicável ou não tão prático para situações reais. Com base nisso foi proposta a implementação de uma Heurística Lagrangiana sob a qual pode se observar ganhos em relação ao tempo de execução.

Percebe-se que a Relaxação Lagrangiana apresentou limites interessantes para solução ótima bem como um ganho significativo em relação ao tempo de solução. No entanto, sabe-se que somente a RL não é suficiente para garantir a viabilidade das soluções encontradas e por isso partiu-se para implementação de uma Heurística.

A Heurística *Fix - and - Relax* foi proposta no intuito de viabilizar a solução, porém, não apresentou um resultado satisfatório com já descrito e portanto não foi uma escolha eficiente para esse problema em específico. Optou-se então pela heurística *Fix - and - Optimize* adaptada que permitiu que os problemas de inviabilidade fossem solucionados de forma satisfatória e apresentando ganhos significativos em relação ao tempo do problema original.

Se compararmos as duas heurística implementadas, na primeira delas, ambos os casos em que uma solução foi encontrada os tempos de execução foram superiores que os tempos apresentados pelo modelo original, ou seja, além de não ser confiável por não garantir o retorno de uma solução não cumpriu o que se esperava, a redução do tempo. Eventualmente, ao aplicar o método em instâncias maiores e mais complexas esse ganho poderia ser alcançado, contudo não é possível fazer essa afirmação com base nos resultados por esta pesquisa obtidos.

Partindo para a análise dos resultados obtidos pela heurística F&O pôde-se observar que houve o ganho em relação ao tempo de execução sendo agora relativamente menor que os resultados obtidos para o Modelo Original. Sendo assim, pode-se dizer que a Heurística F&O cumpriu o que foi proposto para este trabalho apresentando ganho em relação ao tempo de execução além da solução encontrada ser a solução ótima para todos os testes.

O que espera-se é que a medida que as instâncias forem aumentando de tamanho e complexidade, a redução do tempo de busca por uma solução seja mais visível e significativa. Para trabalhos futuros sugere-se a execução de mais testes para avaliar a proporção destes ganhos e também a realização de testes utilizando uma instância real para melhor compreensão de sua eficácia.

Referências

ABENSUR, E. O. Um modelo multiobjetivo de otimização aplicado ao processo de orçamento de capital. *Gestão & Produção*, v. 19, n. 4, p. 747–758, 2012.

BARBOSA, M. B. P. *Modelagem de um problema de ajuste de fluxo de caixa e sequenciamento de projetos com recursos limitados para maximizar o valor presente líquido.* 2016. Monografia (Bacharel em Engenharia de Produção), UFOP (Universidade Federal de Ouro Preto), João Monlevade, Brasil.

BEASLEY, J. E. Lagrangean relaxation. In: BLACKWELL SCIENTIFIC PUBLICATIONS. *Modern Heuristics for Combinatorial Optmization Problem*. [S.l.], 1993.

BELFIORE, P.; FÁVERO, L. P. *Pesquisa Operacional para cursos de Engenharia*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2013. v. 1.

BOŻEJKO, W.; HEJDUCKI, Z.; WODECKI, M. Applying metaheuristic strategies in construction projects management. *Journal of Civil Engineering and Management*, Taylor & Francis, v. 18, n. 5, p. 621–630, 2012.

CACCHIANI, V.; CAPRARA, A.; TOTH, P. A lagrangian heuristic for a train-unit assignment problem. *Discrete Applied Mathematics*, Elsevier, v. 161, n. 12, p. 1707–1718, 2013.

CNI. *Grandes Obras Paradas: Como Enfrentar o Problema*. [S.l.], 2018.

DILLENBERGER, C. et al. On practical resource allocation for production planning and scheduling with period overlapping setups. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 75, n. 2, p. 275–286, 1994.

EICK, G. et al. Viabilidade econômica e financeira de uma pequena central hidrelétrica no brasil. Florianópolis, 2010.

FISHER, M. L. The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management science*, INFORMS, v. 27, n. 1, p. 1–18, 1981.

FURLAN, M. M. *Métodos heurísticos para o problema de dimensionamento de lotes multiestágio com limitação de capacidade*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011.

GITMAN, L. J. et al. *Princípios de administração financeira*. [S.l.]: Harbra, 1997.

GUIGNARD, M. Lagrangean relaxation. *Top*, Springer, v. 11, n. 2, p. 151–200, 2003.

HIRSCHFELD, H. *Engenharia econômica e análise de custos: aplicações práticas para economistas, engenheiros, analistas de investimentos e administradores*. [S.l.]: Atlas, 2000.

HOLMBERG, K.; YUAN, D. A lagrangian heuristic based branch-and-bound approach for the capacitated network design problem. *Operations Research*, INFORMS, v. 48, n. 3, p. 461–481, 2000.

LIU, S.-S.; WANG, C.-J. Resource-constrained construction project scheduling model for profit maximization considering cash flow. *Automation in Construction*, Elsevier, v. 17, n. 8, p. 966–974, 2008.

LIU, S.-S.; WANG, C.-J. Optimizing project selection and scheduling problems with time-dependent resource constraints. *Automation in Construction*, Elsevier, v. 20, n. 8, p. 1110–1119, 2011.

LUENBERGER, D. G. *Investment Science*. [S.l.]: Oxford University Press: New York, 1998.

LUENBERGER, D. G. et al. Investment science. *OUP Catalogue*, Oxford university press, 1997.

MARINS, F. A. S. Introdução a pesquisa operacional. *São Paulo: Cultura Acadêmica: Universidade Estadual Paulista*, 2011.

MORABITO, R.; PUREZA, V. Modelagem e simulação. *Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações. Rio de Janeiro: Elsevier. cap*, v. 8, p. 165–194, 2010.

NG, S. T.; ZHANG, Y. Optimizing construction time and cost using ant colony optimization approach. *Journal of construction engineering and management*, American Society of Civil Engineers, v. 134, n. 9, p. 721–728, 2008.

OLIVEIRA, M. G. S. d. Desenvolvimento de um algoritmo para o problema de sequeciamento de projetos, mediante a incertezas, com restrição de recursos. 2012.

PMBOK, G. Um guia do conhecimento em gerenciamento de projetos. *Sexta Edição*, 2017.

RABENSCHLAG, D. R. Pesquisa operacional. *Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria*, 2005.

ROSÁRIO, L. D. *Análise da Viabilidade Económica e Financeira de Projetos de Investimento em Cabo Verde*. Dissertação (B.S. thesis), 2014.

SAMANEZ, C. P. *Engenharia econômica*. [S.l.]: Pearson, 2009.

SILVA, E. L. D.; MENEZES, E. M. Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação. *UFSC, Florianópolis, 4a. edição*, v. 123, 2005.

SRIDHARAN, R. A lagrangian heuristic for the capacitated plant location problem with single source constraints. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 66, n. 3, p. 305–312, 1993.

TURHAN, A. M.; BILGEN, B. Mixed integer programming based heuristics for the patient admission scheduling problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 80, p. 38–49, 2017.

TURRIONI, J. B.; MELLO, C. H. P. Metodologia de pesquisa em engenharia de produção: estratégias, métodos e técnicas para condução de pesquisas quantitativas e qualitativas. *Apostila do curso de Especialização em Qualidade e Produtividade. Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG*, 2012.

VIEIRA, C. da S. Modelagem e solução de problemas de sequenciamento de atividades em projetos com restrição de recursos. 2010.

WOLOSEWICZ, C.; DAUZÈRE-PÉRÈS, S.; AGGOUNE, R. A lagrangian heuristic for an integrated lot-sizing and fixed scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 244, n. 1, p. 3–12, 2015.

TERMO DE RESPONSABILIDADE

O texto do trabalho de conclusão de curso intitulado "Uma Heurística Lagrangiana para o Problema de Ajuste de Fluxo de Caixa e Sequenciamento de Projetos com Recursos Limitados" é de minha inteira responsabilidade. Declaro que não há utilização indevida de texto, material fotográfico ou qualquer outro material pertencente a terceiros sem o devido referenciamento ou consentimento dos referidos autores.

João Monlevade, 11 de Dezembro de 2018.

Soraya Quaresma Santos

Nome do Aluno (a)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas - ICEA
Colegiado do Curso de Engenharia de Produção - COEP
Campus João Monlevade

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

TERMO DE CONFORMIDADE

Certifico que o aluno (a) Soraya Quaresma Santos, matrícula 13.1.8288, autora do trabalho de conclusão de curso intitulado "Uma Heurística Lagrangiana para o Problema de Ajuste de Fluxo de Caixa e Sequenciamento de Projetos com Recursos Limitados", efetuou as correções sugeridas pela banca examinadora e que estou de acordo com a versão final do trabalho.

João Monlevade, 11 de Dezembro de 2018.

Thiago AO Silva

Thiago Augusto de Oliveira Silva

Colegiado do Curso de Engenharia de Produção – COEP, Rua 37, nº 115 - Bairro Loanda – CEP: 35.931-008 - João Monlevade /MG – Brasil - Telefax: (0xx31) 3852-8709. Homepage : www.ufop.br - email: coep@ufop.edu.br